Л. И. Звавич
А. Р. Рязановский
В. П. Семенов

9 класс

Задачник
для учащихся общеобразовательных учреждений

3-е издание, переработанное

Издательство Мнемозина

Москва 2008

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6
З-42

Звавич Л. И.

З-42 Алгебра. 9 класс : задачник для учащихся общеобразоват. учреждений / Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский, П. В. Семенов. — 3-е изд., перераб. — М. : Мнемозина, 2008. — 336 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01114-9

Данное пособие предусматривает занятия с учащимися, проявляющими интерес и способности к математике. Цель работы в соответствующих классах — формирование у школьников устойчивого интереса к предмету, дальнейшее развитие их математических способностей, ориентация на профессии, связанные с математикой, на применение математических методов в различных отраслях науки и техники. Структура пособия соответствует построению учебника А. Г. Мордковича, Н. П. Николаева «Алгебра–9».

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6

Учебное издание

Звавич Леонид Исаакович, **Рязановский** Андрей Рафаилович, **Семенов** Павел Владимирович

АЛГЕБРА

9 класс

ЗАДАЧНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*. Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *С. А. Сорока*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректор *И. Н. Баханова*

Компьютерная верстка и графика: *А. А. Горкин*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.001625.02.08 от 29.02.2008.

Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,0. Тираж 10 000 экз. Заказ № 0811790.

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 8 (499) 367 5627, 8 (499) 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина» (розничная и мелкооптовая продажа книг).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (495) 783 8284, 8 (495) 783 8285, 8 (495) 783 8286.

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 657 9898 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

ЯПК arvato

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного электронного оригинал-макета
в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат»
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

ISBN 978-5-346-01114-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный задачник предназначен для работы **в 9-м классе с углубленным изучением математики.** Его структура соответствует построению учебника *А. Г. Мордковича, Н. П. Николаева* «Алгебра–9».

В данной книге более 5000 задач. В каждом параграфе имеются задачи различного уровня сложности, так что преподаватель может с успехом осуществлять принцип «от простого к сложному». Предлагаемый набор упражнений соответствует программе по математике для 9-го класса с углубленным изучением предмета, поэтому данный задачник вполне можно использовать и при работе по другим учебникам, а также как источник дополнительного материала для кружковых занятий в общеобразовательных школах. Многие задачи сборника будут полезны школьникам старших классов при подготовке к вступительным экзаменам в вуз и сдаче ЕГЭ.

В сборнике содержатся задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузы. Они могут быть решены на базе теоретического и практического материала, изучаемого в 9-м классе.

Авторы учли то обстоятельство, что во многих школах с углубленным изучением математики преподаватели считают необходимым начать изучение тригонометрии именно в 9-м классе. С этой целью в задачник включены глава 7 «Тригонометрические функции» и глава 8 «Преобразование тригонометрических выражений». Кроме этого, в главе 6 собраны дополнительные задачи для изучения корня n-й степени.

Мы желаем ученикам и учителям успешной работы и надеемся, что наш задачник им в этом поможет. Хотим выразить признательность всем педагогам за ценные замечания, сделанные по первому и второму изданиям данной книги, надеемся на дальнейшее сотрудничество и ждем новых предложений и советов, которые можно присылать по адресу издательства «Мнемозина».

Авторы

ГЛАВА 1 НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ

§ 1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1.01. Решите линейное неравенство:

а) $2x - 3 > 7$;

б) $9 - 5x < 11$;

в) $\frac{3x - 5}{7} \leqslant 15 - x$;

г) $\frac{7 + x}{3} - \frac{4 - 11x}{9} \geqslant 5$;

д) $x\sqrt{2} < x\sqrt{3} + 1$;

е) $(\sqrt{45} + \sqrt{32})x - 4x\sqrt{2} \geqslant 1 + 3x\sqrt{5}$.

1.02. Решите квадратное неравенство, используя соответствующий рисунок параболы:

а) $x^2 - 9 > 0$;

б) $x^2 + 0{,}4x \geqslant 0$;

в) $5x^2 < 7$;

г) $x^2\sqrt{5} + 5x < x\sqrt{5}$;

д) $\frac{x^2}{9} + \frac{2x}{15} + \frac{1}{25} > 0$;

е) $2x^2 + 1 \geqslant x\sqrt{8}$;

ж) $9x^2 - 6x + 1 \leqslant 0$;

з) $-3x^2 + 2x\sqrt{3} - 1 \geqslant 0$;

и) $-3x^2 + 2x + 2 \geqslant 0$;

к) $2x > x^2 - 8$;

л) $-3x^2 + 2x\sqrt{2} - 2 < 0$;

м) $x^2 + \frac{x}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \sqrt{6} < 0$.

1.03. Решите неравенство, мысленно представив соответствующий рисунок параболы:

а) $3x^2 + 7x - 10 \leqslant 0$;

б) $2x^2 - 13x + 11 < 0$;

в) $(-4x + 3)(5x + 4) > 0$;

г) $(-4x + 3)(-5x + 4) > 0$.

1.04. Составьте квадратное неравенство с положительным старшим коэффициентом, решением которого являлось бы:
а) два открытых луча;
б) два замкнутых луча;
в) интервал;
г) отрезок;
д) только одна точка;
е) все множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел;
ж) пустое множество.

1.05. Составьте квадратное неравенство с отрицательным старшим коэффициентом, решением которого являлось бы:
а) два открытых луча;
б) два замкнутых луча;
в) интервал;
г) отрезок;
д) только одна точка;
е) все множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел;
ж) пустое множество.

Постройте график функции $y = f(x)$ и укажите: 1) нули функции; 2) промежутки знакопостоянства; 3) точки перемены знака **(1.06—1.08)**:

1.06. а) $f(x) = 3x + 1$; б) $f(x) = -0{,}5x + 1$.

1.07. а) $f(x) = x^2 - 4$; в) $f(x) = (x - 1)(x + 3)$;
б) $f(x) = -x^2 - 6x$; г) $f(x) = (1 - 2x)(x - 3)$.

1.08. а) $f(x) = (2x - 1)(x - 3)$; в) $f(x) = (2x - 1)(x - 3) + 13$;
б) $f(x) = (1 - 2x)(x - 3)$; г) $f(x) = (1 - 2x)(x - 3) - 6{,}25$.

Для функции $y = f(x)$, без построения графика, укажите: 1) область определения функции; 2) нули функции; 3) точки перемены знака; 4) промежутки знакопостоянства **(1.09, 1.10)**:

1.09. а) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{3}$; в) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$;
б) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$; г) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 4}$.

1.10. а) $f(x) = x^2(x - 1)(x + 2)$; е) $f(x) = x(x - 1)^2(x + 2)^2$;
б) $f(x) = x(x - 1)^2(x + 2)$; ж) $f(x) = x^2(x - 1)^2(x + 2)^2$;
в) $f(x) = x(x - 1)(x + 2)^2$; з) $f(x) = x(x - 1)(x + 2)$;
г) $f(x) = x^2(x - 1)^2(x + 2)$; и) $f(x) = x(x + 1)(x - 5)(x + 2)$.
д) $f(x) = x^2(x - 1)(x + 2)^2$;

1.11. Пусть $f(x) = x^{10}(x+1)^{11}(x-5)(x+2)$. Решите неравенство:

а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \geqslant 0$; в) $f(x) < 0$; г) $f(x) \leqslant 0$.

1.12. Пусть $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{(x-3)(x+2)}$. Решите неравенство:

а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \geqslant 0$; в) $f(x) < 0$; г) $f(x) \leqslant 0$.

1.13. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2(x+1)}{(x-3)(x+2)}$. Решите неравенство:

а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \geqslant 0$; в) $f(x) < 0$; г) $f(x) \leqslant 0$.

1.14. Пусть $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{(x-3)(x+2)^2}$. Решите неравенство:

а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \geqslant 0$; в) $f(x) < 0$; г) $f(x) \leqslant 0$.

1.15. Пусть $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$. Решите неравенство:

а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \geqslant 0$; в) $f(x) < 0$; г) $f(x) \leqslant 0$.

1.16. Пусть $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x^2-3x+2}$. Решите неравенство:

а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \geqslant 0$; в) $f(x) < 0$; г) $f(x) \leqslant 0$.

1.17. Пусть $f(x) = \dfrac{x+1}{|x^2-3x+2|^3}$. Решите неравенство:

а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \geqslant 0$; в) $f(x) < 0$; г) $f(x) \leqslant 0$.

1.18. Пусть $f(x) = \dfrac{|x|(x+1)^3}{|x-3|^5(x+2)^2}$. Решите неравенство:

а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \geqslant 0$; в) $f(x) < 0$; г) $f(x) \leqslant 0$.

Решите неравенство (1.19—1.22):

1.19. а) $\dfrac{3x-1}{x^2+x+1} \leqslant 0$; в) $\dfrac{x^2+7x+6}{x^2+8x+14+\sqrt{15}} \geqslant 0$;

б) $\dfrac{7x^2-95x+88}{x^2+99x+10\,000} \geqslant 0$; г) $\dfrac{-x^2+2x-7}{x^2+4x+3+\sqrt{3}} \geqslant 0$.

1.20. а) $\dfrac{3x-1}{x^2+x+1} \leqslant 0$;

б) $\dfrac{x^2+88}{x^2-81} \geqslant 0$;

в) $\dfrac{(x^2 - x + 1)(x^2 + 4)}{x^2 + 7x - 8} \geqslant 0;$

г) $\dfrac{(x^2 - x\sqrt{5} + \sqrt{6} - 1)(x^2 - x\sqrt{15} + \sqrt{17})}{x^2 + 8x + 7} \leqslant 0.$

1.21. а) $\dfrac{x^2}{x^2 - 1} \leqslant 0;$

б) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 81} \geqslant 0;$

в) $\dfrac{(x^2 - x - 2)^2}{x^2 + 7x - 8} \geqslant 0;$

г) $\dfrac{(x^2 + 10x\sqrt{2} + 50)(4x^2 + 4x\sqrt{3} + 3)}{x^2 + 8x + 7} \leqslant 0.$

1.22. а) $\dfrac{2x + 3}{x^2 - 6x + 9} \leqslant 0;$

б) $\dfrac{3x - 8}{x^2 - 14x + 49} \geqslant 0;$

в) $\dfrac{2x + 3}{x^4 + 6x^3 + 9x^2} \leqslant 0;$

г) $\dfrac{(2x^2 + 2x\sqrt{2} + 1)(7x + 10)}{3x^2 + 2x\sqrt{3} + 1} \geqslant 0.$

1.23. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2(x + 1)}{(x - 3)(x + 2)}$. Решите неравенство:

а) $f(x) < 0;$

б) $f(-x) < 0;$

в) $f\left(\dfrac{x}{2}\right) < 0;$

г) $f(x - 5) < 0;$

д) $f(3 - 2x) < 0;$

е) $f(|x|) < 0.$

1.24. Пусть $f(x) = \dfrac{3x - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{x^2 - 3x + 2}$. Решите неравенство:

а) $f(x) > 0;$

б) $f(-x) > 0;$

в) $f(3x) > 0;$

г) $f(x - 5) > 0;$

д) $f(3 - x) > 0;$

е) $f(|x|) > 0.$

1.25. Пусть $f(x) = \dfrac{x(x - 2)^2}{|x^2 - 4x - 72|}$. Решите неравенство:

а) $f(x) \leqslant 0;$

б) $f(|x|) \leqslant 0;$

в) $f(|2 - x|) \leqslant 0;$

г) $f(|4x - 5|) \leqslant 0.$

Найдите область определения функции (1.26, 1.27):

1.26. а) $f(x) = \sqrt{x(x-2)(x+111)}$; в) $f(x) = \sqrt{\frac{|x|(x-2)}{x+111}}$;

б) $f(x) = \sqrt{x^2(x-2)(x+111)}$; г) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x-2)}{|x-111|}}$.

1.27. а) $f(x) = 8x + \sqrt{x^3 - 4x}$; г) $f(x) = 3x + \frac{x^3+81}{\sqrt{x^3-4x}}$;

б) $f(x) = \frac{8}{x-1} + \sqrt{x^3 - 4x}$; д) $f(x) = 3x + \frac{x^3+81}{\sqrt{x^3-4x}+3}$;

в) $f(x) = \frac{8}{x+1} + \sqrt{x^3 - 4x}$; е) $f(x) = 3x + \frac{x^3+81}{\sqrt{x^3-4x}-\sqrt{3}}$.

1.28. Найдите абсциссы точек графика функции $g(x)$, расположенных выше оси абсцисс (имеющих положительные ординаты):

а) $g(x) = x^2 - x^3$; в) $g(x) = x^2 - x^4$;

б) $g(x) = x^4 - x^3$; г) $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

1.29. Найдите абсциссы точек графика функции $g(x)$, расположенных ниже оси абсцисс (имеющих отрицательные ординаты):

а) $g(x) = (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 11)$;

б) $g(x) = (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 1)$;

в) $g(x) = (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 16)$;

г) $g(x) = \frac{x^2+3x-4}{1-x^2}$.

1.30. Найдите абсциссы точек графика функции $g(x)$, расположенных ниже соответствующих точек графика функции $f(x)$:

а) $g(x) = x^2$; $f(x) = 30 - x$;

б) $g(x) = 2x^3$; $f(x) = x$;

в) $g(x) = x^4 - x^3$; $f(x) = 5x^4 + x^3$;

г) $g(x) = x^4 - |x|^3$; $f(x) = 5x^4 + |x|^3$.

1.31. Найдите абсциссы точек графика функции $g(x)$, расположенных выше соответствующих точек графика функции $f(x)$:

а) $g(x) = \frac{1}{x}$; $f(x) = 2 - x$; в) $g(x) = \frac{1}{|x|}$; $f(x) = 2 - |x|$;

б) $g(x) = \frac{2}{x}$; $f(x) = \frac{1}{x-1}$; г) $g(x) = \frac{2}{|x|}$; $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$.

Решите неравенство (1.32—1.36):

1.32. а) $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2x + \frac{1}{x} - 12 < 0$;

б) $4x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x + \frac{1}{x} - 8 \geqslant 0$;

в) $4x^4 + 2x^3 - 8x^2 + x + 1 \leqslant 0$;

г) $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x + \frac{1}{x} - 4 \leqslant 0$;

д) $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2x - \frac{1}{x} - 10 > 0$;

е) $\left(3x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3x + \frac{1}{x} + 10 < 0$.

1.33. а) $\left(3x - \frac{2}{x}\right)^2 + 3x - \frac{2}{x} - 2 \geqslant 0$;

б) $9x^2 + \frac{4}{x^2} + 3x - \frac{2}{x} - 14 \leqslant 0$;

в) $9x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 2x + 4 > 0$;

г) $2x^2 + \frac{1}{x^2} + 3 + 5\sqrt{2} < (4 + \sqrt{2})\left(x\sqrt{2} + \frac{1}{x}\right)$.

1.34. а) $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 > 0$;

б) $2x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 7x + 2 \geqslant 0$;

в) $x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 9x + 1 < 0$;

г) $25x^4 - 50x^3 + 14x^2 + 10x + 1 \leqslant 0$.

1.35. а) $\left(3x - \frac{2}{x}\right)^2 > \frac{2}{x} + 2 - 3x$; б) $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2x < \frac{1}{x} - 100$.

1.36. а) $\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right)^2 \leqslant \left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)^2$;

б) $\left(x^2 + x(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2}\right)^2 + \left(x^2 + x(\sqrt{2} + 6) + 6\sqrt{2}\right)^2 \geqslant$

$\geqslant \left(x^2 - x(2 - \sqrt{2}) - \sqrt{8}\right)^2$.

Решите неравенство (1.37—1.41):

1.37. а) $\dfrac{(x^2-2x-1)^2}{4} \leqslant \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^4$;

б) $\dfrac{\left(x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{2}{3}\right)^3}{64} \geqslant \dfrac{\left(x^2+\dfrac{7}{8}x-1\right)^3}{27}$.

1.38. а) $(3x-2)^2-3(3x-2)(7-5x)+2(5x-7)^2<0$;

б) $(x^2-x+3)^2-3(x^2-x+3)(10x-1)+2(10x-1)^2 \leqslant 0$;

в) $(2x^2-3x+1)^2-5(2x^2-3x+1)(x^2+x+3)+$
$+\ 4(x^2+x+3)^2 \leqslant 0$;

г) $(2x^2-x-6)^2-3(2x^2-x-6)(x^2+10x-6)+$
$+\ 2(x^2+10x-6)^2 \geqslant 0$.

1.39. а) $2y^4-y^2(y-2)-3(y-2)^2<0$;

б) $(t^2+2t)^2-(t+2)(2t^2-t)>6(2t-1)^2$;

в) $(x^2+6x-9)^2+x(x^2+4x-9) \leqslant 0$;

г) $(z^2-z)(z^2-5z+6) \geqslant 15z^2-45z+90$.

1.40. а) $\dfrac{(2x^2+x-3)^2-(x^2-5x+4)^2}{x^2+x-2} \leqslant 0$;

б) $\dfrac{|x^2-2x-1|-|x^2-3x+3|}{x^2-x-2} \leqslant 0$;

в) $\dfrac{(2x^2-4x-3)^7-(x^2-10x-11)^7}{x^2+x-2} \leqslant 0$;

г) $\dfrac{|x^2-2x-1|-|x^2-3x-3|}{|x^2+x-2|-|2x^2+3x-6|} \leqslant 0$.

1.41. а) $\left(\dfrac{6x-1}{x-2}\right)^2+\dfrac{36x^2-6x}{x-2}+9x^2 \leqslant 0$;

б) $\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}+9(x-1)^2>6(x+2)$;

в) $4x^2+\dfrac{(x-1)^2}{(x-2)^2}>\dfrac{4x^2-4x}{x-2}$;

г) $\dfrac{x^2}{(x+1)^2}+4x^2+1 \leqslant \dfrac{4x^2-2x}{x+1}+4x$.

§ 2. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

2.01. Какие из указанных множеств являются конечными, а какие бесконечными?

а) Множество всех действительных чисел промежутка $(-3;\ 11]$.

б) Множество всех рациональных чисел промежутка $(-3;\ 11]$.

в) Множество всех целых чисел промежутка $(-3;\ 11]$.

г) Множество тех чисел промежутка $(-3;\ 11]$, квадрат которых целое число.

2.02. Дайте словесное описание конечного множества и укажите количество его членов:

а) $\{100;\ 101;\ 102;\ \ldots;\ 998;\ 999\}$;

б) $\{1001;\ 1003;\ 1005;\ \ldots;\ 9999\}$;

в) $\{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\ 34;\ 55;\ 89\}$;

г) $\{\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \sqrt{5};\ \sqrt{6};\ \sqrt{7};\ \sqrt{8};\ \sqrt{10};\ \ldots;\ \sqrt{48};\ \sqrt{50}\}$.

Изобразите на координатной плоскости множество G точек с координатами $(x;\ y)$ и дайте его словесное описание (**2.03**, **2.04**):

2.03. а) G: $x = y$; в) G: $x = |y|$;

б) G: $|x| = |y|$; г) G: $|x| = y$.

2.04. а) G: $x^2 + y^2 = 1$; в) G: $y\left(\sqrt{y}\right)^2 + x^2 = 1$;

б) G: $x\left(\sqrt{x}\right)^2 + y^2 = 4$; г) G: $x\left(\sqrt{x}\right)^2 - y\left(\sqrt{-y}\right)^2 = 1$.

2.05. Каким множеством будет пересечение:

а) множества ромбов и множества прямоугольников;

б) множества четырехугольников и множества трапеций;

в) множества трапеций и множества четырехугольников, две противоположные стороны которых равны;

г) множества трапеций и множества четырехугольников, у которых хотя бы один угол прямой;

д) множества параллелограммов и множества четырехугольников, у которых хотя бы один угол прямой;

е) множества многоугольников с равными друг другу сторонами и множества многоугольников с равными друг другу углами?

2.06. Даны множества точек отрезков AB и CB, лежащих на одной прямой. Какие фигуры могут быть получены:

а) пересечением множеств точек одного и другого отрезков;

б) объединением множеств точек одного и другого отрезков?

2.07. Даны множества точек отрезков AB и CD, лежащих на одной прямой и имеющих по крайней мере одну общую точку, лежащую внутри обоих отрезков. Длины отрезков AB и CD равны соответственно 5 и 8. В каких пределах находится длина отрезка, являющегося:

а) пересечением множеств точек одного и другого отрезков;

б) объединением множеств точек одного и другого отрезков?

2.08. Множество точек круга с центром O и множество точек круга с центром O_1 имеют общую точку A, лежащую внутри обоих треугольников. Какие фигуры могут быть получены:

а) пересечением множеств точек одного и другого треугольников;

б) объединением множеств точек одного и другого треугольников?

Ответ поясните рисунками.

2.09. Множество точек треугольника ABC и множество точек треугольника MNP имеют общую точку O, лежащую внутри обоих треугольников. Какие фигуры могут быть получены:

а) пересечением множеств точек одного и другого треугольников;

б) объединением множеств точек одного и другого треугольников?

Ответ поясните рисунками.

2.10. Найдите множество корней уравнения:

а) $(3x^2 + 7x - 10)(x^2 + 8x - 9) = 0$;

б) $(x^2 - 3x + 11)(x^2 + 2x + 7) = 0{,}1$;

в) $(3x - 1)^2 + (2x - 5)^2 = 13(x - 1)^2 + 13$;

г) $\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1 = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$;

д) $\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

2.11. Найдите множество решений неравенства:

а) $5 - 7x < 12$; в) $\dfrac{x^2 - 9}{x^2} \leqslant 0$;

б) $x^2 - 9 \geqslant 0$; г) $|x^2 - 4| + |x^2 + x - 6| \leqslant 0$.

2.12. Даны множества M и N:

а) M — множество всех четырехугольников; N — множество всех трапеций;

б) M — множество всех учащихся 10-го класса «А» школы № 3; N — множество всех учащихся школы № 3;
в) M — множество всех рациональных чисел; N — множество всех челых чисел;
г) M — множество всех четных чисел; N — множество всех натуральных чисел.

Для каждого из приведенных случаев выберите правильный ответ:
1) M является подмножеством N;
2) N является подмножеством M;
3) ни одно из данных множеств не является подмножеством другого.

2.13. Найдите:
а) при каких значениях p пересечение множеств решений уравнений $x^2 + 3x = 4$ и $x^3 = p$ пустое;
б) при каких значениях m пересечение множеств решений неравенства $x^2 - 25 < 0$ и $x > m$ содержит ровно одно целое число;
в) при каких значениях m пересечение множеств решений неравенств $x^2 - 25 \leqslant 0$ и $x \leqslant m$ представляет из себя отрезок длиной 7;
г) при каких значениях k пересечение множества решений неравенства $x^2 - (3k - 11) - 33k < 0$ и множества целых чисел содержит ровно семь элементов?

2.14. Найдите множество решений уравнения:
а) $(x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16) = 0$;
б) $(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7) = 0$;
в) $(x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16)(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7) = 0$;
г) $((x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16))^2 + ((x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7))^2 = 0$;
г) $\dfrac{(x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16)}{(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7)} = 0$;
д) $\dfrac{(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7)}{(x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16)} = 0$.

2.15. Пусть A — множество корней уравнения $(x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16) = 0$, а B — множество корней уравнения $(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7) = 0$. Выразите через A и B множество корней уравнения:
а) $(x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16)(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7) = 0$;
б) $((x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16))^2 + ((x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7))^2 = 0$;
в) $\dfrac{(x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16)}{(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7)} = 0$;

г) $\dfrac{(x^2-4)(x^2+6x-7)}{(x^2-1)(x^2+6x-16)}=0;$

д) $|(x^2-1)(x^2+6x-16)|(x^2-4)(x^2+6x-7)=0;$

е) $|(x^2-1)(x^2+6x-16)(x^2-4)(x^2+6x-7)|=0;$

ж) $|(x^2-1)(x^2+6x-16)|+|(x^2-4)(x^2+6x-7)|=0.$

2.16. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для всех действительных значений аргумента, M — множество корней уравнения $f(x)=0$, а N — множество корней уравнения $g(x)=0$. Найдите множество корней уравнения:

а) $f(x)g(x)=0;$

б) $(f(x))^2+(g(x))^2=0;$

в) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0;$

г) $\dfrac{g(x)}{f(x)}=0.$

2.17. Заполните таблицу.

Уравнение со множеством решений M	Уравнение со множеством решений N	Вариант ответа			
		$M=N$	$M\subseteq N$	$N\subseteq M$	Другой ответ
а) $f(x)=g(x)$	$f(x)-3x=g(x)-3x$				
б) $f(x)=g(x)$	$(f(x))^2=(g(x))^2$				
в) $f(x)=g(x)$	$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$				
г) $f(x)=g(x)$	$\lvert f(x)\rvert=\lvert g(x)\rvert$				
д) $f(x)=g(x)$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$				
е) $f(x)=g(x)$	$f(\lvert x\rvert)=g(\lvert x\rvert)$				
ж) $f(x)=g(x)$	$\dfrac{3}{1+f(x)}=\dfrac{3}{1+g(x)}$				
з) $\sqrt{f(x)}=g(x)$	$f(x)=(g(x))^2$				

2.18. Пусть M — множество решений уравнения $f(x) = 0$, N — множество решений уравнения $g(x) = 0$. Верно ли утверждение:

а) множество решений уравнения $f(x)g(x) = 0$ есть объединение множеств M и N.

б) множество решений уравнения $|f(x)| + |g(x)| = 0$ есть пересечение множеств M и N.

Если утверждение верно, то докажите его, если неверно — приведите пример.

2.19. Докажите:

а) множество решений уравнения $|f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)|$ совпадает с множеством решений неравенства $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$;

б) множество решений неравенства $|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)|$ совпадает с множеством решений неравенства $f(x) \cdot g(x) < 0$.

2.20. В 8 классе «А» учится 30 человек, 20 из них посещают курсы английского языка, а 15 — курсы кройки и шитья. В каких пределах находится число учащихся данного класса, которые:

а) посещают и те и другие курсы;

б) посещают хотя бы одни из этих курсов;

в) не посещают никакие из этих курсов;

г) посещают только курсы кройки и шитья?

2.21. Задайте аналитически и постройте график какой-либо функции, областью определения которой является множество D, если:

а) $D = \{-1; 3\}$;

б) $D = [-1; 3]$;

в) $D = (-1; 3)$;

г) $D = [-1; 3)$;

д) $D = [-1; 2) \cup (2; 3]$;

е) $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

2.22. Задайте аналитически и постройте график какой-либо функции, областью значений которой является множество E, если:

а) $E = \{-1; 3\}$;

б) $E = [-1; 3]$;

в) $E = (-1; 3)$;

г) $E = [-1; 3)$;

д) $E = [-1; 2) \cup (2; 3]$;

е) $E = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

§ 3. СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

Решите систему неравенств (**3.01—3.03**):

3.01. а) $\begin{cases} x > 3{,}14, \\ x > \pi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > \dfrac{1457}{7541}, \\ x > \dfrac{1463}{7547}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x > 1\frac{5}{9}, \\ x > \sqrt{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x > 1 + \sqrt{3}, \\ x > \sqrt{5}. \end{cases}$

3.02. а) $\begin{cases} x \leqslant \sqrt{10}, \\ x < \pi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \leqslant \dfrac{6457}{1541}, \\ x \leqslant \dfrac{6463}{1547}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x < 1234^2, \\ x \leqslant 1233 \cdot 1235; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < \sqrt{71} + \sqrt{31}, \\ x < \sqrt{72} + \sqrt{30}. \end{cases}$

3.03. а) $\begin{cases} x \geqslant 3\frac{14}{99}, \\ x < \pi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x < 1 + \sqrt{22}, \\ x > \sqrt[3]{217}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \leqslant 0{,}(7), \\ x > \sqrt{0{,}(4)}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \geqslant 12{,}(36), \\ x \leqslant 12\frac{4}{11}. \end{cases}$

3.04. Найдите все значения параметра a, при которых данная система: 1) имеет решения; 2) не имеет решений; 3) имеет единственное решение:

а) $\begin{cases} x < a, \\ 2x > 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \leqslant a, \\ 2x < 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \leqslant a, \\ 2x \geqslant 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \geqslant a, \\ 2x \leqslant 1 + a. \end{cases}$

Решите систему неравенств (**3.05—3.09**):

3.05. а) $\begin{cases} 3x^2 - 7x - 26 \leqslant 0, \\ 7 + 2x < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x^2 - 7x - 26 \leqslant 0, \\ 13 - 3x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x^2 - 7x - 26 \leqslant 0, \\ 7x - 2 < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2 - 7x - 26 \leqslant 0, \\ 2x \geqslant \sqrt{80}. \end{cases}$

3.06. а) $\begin{cases} 5x^2 + 7x - 34 \geqslant 0, \\ 7 + 2x > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x^2 + 7x - 34 \geqslant 0, \\ 0{,}5x - 1{,}7 \leqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x^2 + 7x - 34 \geqslant 0, \\ (2 - \sqrt{5})x \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x^2 + 7x - 34 \geqslant 0, \\ \pi \cdot x \leqslant 6. \end{cases}$

3.07. а) $\begin{cases} 6x^2 - 5x\sqrt{5} + 5 \geqslant 0, \\ 7 + (2 - 3\sqrt{2})x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x^2 - 4x\sqrt{5} + 4 \leqslant 0, \\ (2 - \sqrt{5})x \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x^2 + 6x\sqrt{3} + 9 > 0, \\ (1 - x)\sqrt{2} > \sqrt{7} + \sqrt{2}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - \left(1 - \dfrac{13\sqrt{7}}{25}\right)x - \dfrac{13\sqrt{7}}{25} \leqslant 0, \\ \pi \cdot x \leqslant 6. \end{cases}$

3.08. а) $\begin{cases} x^2 - 16x + 55 \leqslant 0, \\ x^2 - 9x + 14 < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 16x + 55 < 0, \\ x^2 - 9x + 14 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 16x + 55 > 0, \\ x^2 - 9x + 14 \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 16x + 55 \geqslant 0, \\ x^2 - 9x + 14 \geqslant 0. \end{cases}$

3.09. а) $\begin{cases} 9x^2 - 48x + 64 \leqslant 0, \\ 2x^2 - 9x + 1 < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 9x^2 - 48x + 64 > 0, \\ 2x^2 - 9x + 1 \geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 9x^2 - 48x + 64 > 0, \\ 2x^2 - 9x + 1 < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 9x^2 - 48x + 64 < 0, \\ 2x^2 - 9x + 1 > 0. \end{cases}$

Для каждого значения параметра a решите систему неравенств (3.10, 3.11):

3.10. а) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leqslant 0, \\ x < a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - (a + 1)x + a \leqslant 0, \\ x \leqslant 2x + 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leqslant 0, \\ x \geqslant a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + (a + 1)x + a \leqslant 0, \\ ax \geqslant 1. \end{cases}$

3.11. а) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leqslant 0, \\ (x-1)(x-a) \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a \leqslant 0, \\ x^2 + 3ax + 2a^2 < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leqslant 0, \\ (x+1)(x+a) \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a \leqslant 0, \\ x^2 + 3ax + 2a^2 \geqslant 0. \end{cases}$

Решите систему неравенств (3.12—3.15):

3.12. а) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{5+7x} \geqslant 0, \\ x^2 + 7x + 12 \leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{5+7x} \geqslant 0, \\ x^2 + 7x + 12 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{5+7x} < 0, \\ x^2 + 7x + 12 \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{5+7x} \leqslant 0, \\ x^2 + 7x + 12 > 0. \end{cases}$

3.13. а) $\begin{cases} \dfrac{(x-\sqrt{2})^2}{\sqrt{3}-x} \geqslant 0, \\ x^2 - (1+2\sqrt{2})x + 2 + \sqrt{2} \geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x^4 - 4x^2 + 4}{x+\sqrt{3}} \leqslant 0, \\ (x^2-2)^2\left(x^2 + \left(\dfrac{5+\sqrt{8}}{2}\right)x + \dfrac{3+3\sqrt{2}}{2}\right) \leqslant 0. \end{cases}$

3.14. а) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2+x} \geqslant 0, \\ x^4 + 7x^3 + 12x^2 \leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2+x} \leqslant 0, \\ x^4 + 7x^3 + 12x^2 < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2+x} < 0, \\ x^4 + 7x^3 + 12x^2 \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2+x} \geqslant 0, \\ x^4 + 7x^3 + 12x^2 > 0. \end{cases}$

3.15. а) $\begin{cases} \dfrac{x+a}{2+x} \geqslant 0, \\ x^4 + 7x^3 + 12x^2 \leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x+2a}{a+1+x} \leqslant 0, \\ x^4 + 7x^3 + 12x^2 < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{a-x} < 0, \\ x^4 + 7x^3 + 12x^2 \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x-2-a}{3-2a-x} \geqslant 0, \\ x^4 + 7x^3 + 12x^2 > 0. \end{cases}$

3.16. Решите двойное неравенство:

а) $-1 < \dfrac{3x - 1}{2x + 5} < 3;$ в) $1 < \dfrac{x^2 - 3}{x - 2} \leqslant 2;$

б) $6 \leqslant 3x^2 - x + 6 \leqslant 10;$ г) $-5 \leqslant \dfrac{2 + x}{x^2} < 11.$

Найдите область определения функции (3.17, 3.18):

3.17. а) $f(x) = \sqrt{1 - 7x} + \sqrt{2x + 13};$

б) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3x + 1};$

в) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - 13}}{\sqrt{27 - x}};$

г) $f(x) = \dfrac{5 - \sqrt{2x + 3}}{1 - \sqrt{4 - x}}.$

3.18. а) $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{35 - x^2}}{6x + 35};$ в) $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{5x^2 - 3x}}{x + \sqrt{x}};$

б) $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{x^2 - 7x}}{x + \sqrt{x} + 1};$ г) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2 - x}{x}} + \sqrt{1 - x}.$

3.19. Решите двойное неравенство:

а) $\dfrac{1}{x} \leqslant 2x + 1 < \dfrac{3}{x};$ в) $\dfrac{x^3}{x + 1} < x^2 - 3 \leqslant 141;$

б) $1 - 2x \leqslant x^2 - x \leqslant 1 + 2x;$ г) $\dfrac{4}{x - 3} < x^2 - 3 \leqslant \dfrac{2}{x}.$

3.20. Решите кратное неравенство:

а) $\dfrac{1}{x} \leqslant 2x + 1 \leqslant \dfrac{3}{x} < 4;$

б) $1 - 2x \leqslant x^2 - 4x \leqslant 7 + 2x < x^2 + 5;$

в) $\dfrac{x^3}{x + 1} \leqslant x^2 + 3x \leqslant 5 \leqslant x^2 + 6;$

г) $\dfrac{4}{x - 3} < x^2 - 3 \leqslant \dfrac{2}{x} < 1 - x.$

3.21. Решите неравенство:

а) $(7 - x^2)(2 + \sqrt{3x - 1}) > 0$;

б) $(x^2 - 5x + 1)(x + \sqrt{x - 2}) \geqslant 0$;

в) $\dfrac{x^3 - 5x^2 - 6x}{1 + \sqrt{2x + 1}} \leqslant 0$;

г) $\dfrac{11x^4 + \sqrt{x^2 - 10}}{3 - 5x} \geqslant 0$.

3.22. Докажите, что $\max\{f(x);\ q(x)\} < p(x)$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} f(x) < p(x), \\ q(x) < p(x). \end{cases}$

3.23. Решите неравенство:

а) $\max\{3x - 1;\ 11 - x^2\} \leqslant 2$;

б) $\max\left\{\dfrac{1}{x};\quad 6x - x^2\right\} < x$;

в) $\max\{-3x^2 + 12x;\ -8x + x^2\} \leqslant 33$;

г) $\max\left\{\dfrac{x}{x - 1};\quad \dfrac{4x - x^2}{2}\right\} \leqslant \dfrac{x}{3}$;

д) $\max\{5 - 2x;\ x - x^2\} < 0$;

е) $\max\left\{\dfrac{1}{x};\quad \dfrac{2}{x^2}\right\} \leqslant x + 1$.

3.24. Докажите, что $\min\{f(x);\ q(x)\} > p(x)$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} f(x) > p(x), \\ q(x) > p(x). \end{cases}$

3.25. Решите неравенство:

а) $\min\ \{5 - 2x;\ x - x^2\} \geqslant 0$;

б) $\min\left\{\dfrac{1}{x};\quad \dfrac{2}{x^2}\right\} > x + 1$;

в) $\min\ \{3x - 1;\ 11 - x^2\} > 2$;

г) $\min\left\{\dfrac{1}{x};\quad 6x - x^2\right\} > x$;

д) $\min\ \{-3x^2 + 12x;\ \ -8x + x^2\} \geqslant 32$;

е) $\min\left\{\dfrac{-x}{x - 1};\quad \dfrac{-4x + x^2}{2}\right\} \geqslant \dfrac{x}{3}$.

3.26. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 9 - 3x > 1, \\ \dfrac{1}{x + 2} \leqslant 1, \\ x^2 > 2x - 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^5 - 3x > 1, \\ \dfrac{1}{x^3 + 2} \leqslant x + 1, \\ x^2 \leqslant 4x - 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x(x + 1) \leqslant 110, \\ \dfrac{1}{x - 2} \leqslant \dfrac{x}{2x - 3}, \\ (x^2 - (1 + \pi)x + \pi)^2 > 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 - 1}{x^4 - x^5} \leqslant 1, \\ x^4 + x^3 \leqslant 1, \\ 2x^2 + 2x\sqrt{2} + 1 \leqslant 0. \end{cases}$

3.27. Найдите все значения x, не удовлетворяющие системе неравенств:

а) $\begin{cases} 3x^2 - 5x - 8 \geqslant 0, \\ \dfrac{1 - x}{2x + 6} < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{3x - 1}{x^2} < 2, \\ (x^2 - 5x + 3)^2 \geqslant (x^2 + 11x - 3)^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x^2 - 5x - 8 \geqslant 0, \\ (x^2 + 3x - 1)^5 < (x^2 - 7x - 5)^5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x^2 - 5x - 8 \geqslant 0, \\ (x^2 + 3x - 1)^{20} \geqslant (x^2 - 7x - 5)^{20}. \end{cases}$

3.28. Найдите все целые значения x, не удовлетворяющие системе неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 - x} \leqslant 0, \\ \dfrac{7 - x}{2x + 6} \geqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 5x - 14 > 0, \\ x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 \geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 - 10x} \leqslant 0, \\ \dfrac{7 - x}{x + 3} \geqslant 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x^2 - 5x - 8 \geqslant 0, \\ 4(x^2 - 2x)^2 < 255x^2 - 510x + 64. \end{cases}$

Решите систему неравенств (3.29, 3.30):

3.29. а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - x \geqslant 2x - \dfrac{2}{x}, \\ \dfrac{1 - x^2}{x^2 - 9} \geqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{2x^2} \geqslant \dfrac{1}{4x^2} + 5x^2, \\ 4x^2 - 4x\sqrt{3} + 1 \leqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{2}{3x^2} - x > 7x - \dfrac{1}{3x^2}, \\ \dfrac{1 - 9x^2}{x^2 - 9} \leqslant 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - \dfrac{1}{3x^3} < 2x^2 - \dfrac{1}{6x^3}, \\ 8x^2 - 57x - 56 < 0. \end{cases}$

3.30. а) $\begin{cases} 6x^2 - 5x\sqrt{3} + 3 < 0, \\ \dfrac{12 - 5x\sqrt{3}}{x - 12} > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 6 - 2\sqrt{5}}{x^2 - 5 - 2\sqrt{6}} < 0, \\ x^2 + 11x - 3 > 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x^2 - 7 - 4\sqrt{3})(x^2 - 11 - 6\sqrt{2}) \geqslant 0, \\ x^2 + 3x - 1 < 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^3 + 7 + 6\sqrt{2} > 0, \\ (x^2 - 8 - 2\sqrt{15}) \cdot x^2 \leqslant 0. \end{cases}$

3.31. Пусть $f(x) = x^2 - \dfrac{3}{x}$. Найдите все значения x, для которых

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0. \end{cases}$$

3.32. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x}$. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} f(x + 2) \leqslant 0, \\ f\left(\dfrac{1}{x + 2}\right) \geqslant 0. \end{cases}$$

3.33. Пусть $f(x) = \dfrac{(x - 2)^2}{x^3(1 - x)}$. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} f(x + 1) \leqslant 0, \\ f\left(\dfrac{1}{x + 1}\right) \geqslant 0. \end{cases}$$

3.34. Пусть $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^3(7-x)}$. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} f(x+1) \leqslant 0, \\ f\left(\dfrac{1}{x-3}\right) \geqslant 0. \end{cases}$$

3.35. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству $\dfrac{x-3}{x+5} \geqslant \dfrac{1}{2x+1}$ и не удовлетворяющие неравенству $x^2 > 50$.

3.36. Найдите все значения x, не удовлетворяющие ни одному из неравенств $x^2 - 5x - 4 > 0$ и $x^2 - 83x + 240 \leqslant 0$.

3.37. Найдите все значения x такие, что $|x| \geqslant 2$ и $x^2 \leqslant x + 6$.

3.38. Найдите все значения x такие, что $|x| \leqslant 2$ и $x^2 \geqslant x + 6$.

3.39. Найдите все решения неравенства $|x| \geqslant 2$, которые не являются решением неравенства $x^2 \leqslant x + 6$.

3.40. Найдите все такие a, при которых каждое решение неравенства $|x| \leqslant a$ является решением неравенства $x^2 \leqslant x + 20$.

3.41. Найдите все такие a, при которых существует решение неравенства $|x| \leqslant a$, являющееся решением неравенства

$$x^2 \leqslant x + 20.$$

3.42. Найдите все такие a, при которых существует решение неравенства $x^2 \leqslant x + 20$, являющееся решением неравенства $|x| \leqslant a$.

§ 4. СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ

Решите совокупность неравенств **(4.01, 4.02)**:

4.01. а) $\left[\begin{array}{l} 3x - 1 > 0, \\ 2x + 7 > 0; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} - 5 > 1, \\ x^2 - 7x < 0; \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} 3x - 10 < 5, \\ x^2 > 100; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{7-2x}{5} < \dfrac{x}{1} + 1, \\ -3x^2 + 8x + 3 \geqslant 0. \end{array}\right.$

4.02. а) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} > 0, \\ 2x + 7 > 0; \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} - 5 > 1, \\ \dfrac{1}{x^2 - 7x} < 0; \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} 3x - 10 < 5, \\ \dfrac{1}{x^2} > 100; \end{array}\right.$

г) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{7 - 2x}{5} < \dfrac{x}{2} + 1, \\ \dfrac{1}{3 + 8x - 3x^2} \geqslant 0. \end{array}\right.$

4.03. Найдите все значения x, удовлетворяющие условиям:

а) $\left[\begin{array}{l} 12x^2 - 4x - 1 \leqslant 0, \\ 25x^2 - 5x - 2 < 0; \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 4 \leqslant 0, \\ x^2 + 2\pi \cdot x - 3\pi^2 < 0; \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x - 3 \leqslant 0, \\ -12x^2 + 25x + 22 < 0; \end{array}\right.$

г) $\left[\begin{array}{l} 12x^2 - (4\sqrt{2} + 3\sqrt{3})x + \sqrt{6} \leqslant 0, \\ 8x^2 - (4\sqrt{3} + \sqrt{8})x + \sqrt{6} > 0. \end{array}\right.$

4.04. Для каждого значения параметра a решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 3x + a > 0, \\ 2x + 7 > 0; \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} - 5 > 1, \\ x^2 - 7x < 0; \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} 3x - 10 < 5, \\ x^2 > a; \end{array}\right.$

г) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{7 - 2x}{5} < \dfrac{x}{1} + 1, \\ x^2 + (8 + a)x + 8a \geqslant 0. \end{array}\right.$

4.05. Докажите, что все значения x, не удовлетворяющие условию $\left\{\begin{array}{l} x^2 - 7x + 6 > 0, \\ 3x^2 - 17x - 20 \leqslant 0, \end{array}\right.$ удовлетворяют условию $\left[\begin{array}{l} x^2 - 7x + 6 \leqslant 0, \\ 3x^2 - 17x - 20 > 0 \end{array}\right.$ и, наоборот, все значения x, удовлетворяющие условию $\left[\begin{array}{l} x^2 - 7x + 6 \leqslant 0, \\ 3x^2 - 17x - 20 > 0, \end{array}\right.$ не удовлетворяют условию $\left\{\begin{array}{l} x^2 - 7x + 6 > 0, \\ 3x^2 - 17x - 20 \leqslant 0. \end{array}\right.$

4.06. Докажите, что все значения x, удовлетворяющие системе $\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0, \end{cases}$ не удовлетворяют совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0 \end{array}\right.$ и, наоборот, все значения x, удовлетворяющие совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \end{array}\right.$ не удовлетворяют системе $\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

4.07. Приведите примеры утверждений аналогичных тем, которые сформулированы в задачах 4.05 и 4.06.

4.08. Для каждого значения параметра a решите совокупность:

а) $\left[\begin{array}{l} 12x^2 - 4x - 1 \leqslant 0, \\ (x - 2)(x - a) < 0; \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 4 \leqslant 0, \\ x^2 + 2ax - 3a^2 < 0; \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x - 3 \leqslant 0, \\ x^2 + (5 + a)x + 5a < 0; \end{array}\right.$

г) $\left[\begin{array}{l} 12x^2 - (4\sqrt{2} + 3\sqrt{3})x + \sqrt{6} \leqslant 0, \\ a(x^2 - (4a + 1)x + 4a) \leqslant 0. \end{array}\right.$

4.09. Докажите, что $\max\{f(x);\ q(x)\} > p(x)$ тогда и только тогда, когда $\left[\begin{array}{l} f(x) > p(x), \\ q(x) > p(x). \end{array}\right.$

4.10. Решите неравенство:

а) $\max\{3x - 1;\ 11 - x^2\} > 2;$

б) $\max\{5 - 2x;\ x - x^2\} > 0;$

в) $\max\{-3x^2 + 12x;\ -8x + x^2\} \geqslant 32;$

г) $\max\left\{\frac{1}{x};\quad 6x - x^2\right\} > x;$

д) $\max\left\{\frac{x}{x - 1};\quad \frac{4x - x^2}{2}\right\} \geqslant \frac{x}{3};$

е) $\max\left\{\frac{1}{x};\quad \frac{2}{x^2}\right\} \geqslant x + 1.$

4.11. Докажите, что $\min\{f(x);\ q(x)\} < p(x)$ тогда и только тогда, когда $\left[\begin{array}{l} f(x) < p(x), \\ q(x) < p(x). \end{array}\right.$

Решите неравенство (4.12, 4.13):

4.12. а) $\min\{5 - 2x;\ x - x^2\} \leqslant 0$;

б) $\min\{3x - 1;\ 11 - x^2\} < 2$;

в) $\min\{-3x^2 + 12x;\ -8x + x^2\} \leqslant 32$;

г) $\min\left\{\frac{1}{x};\ 6x - x^2\right\} \leqslant x$;

д) $\min\left\{\frac{1}{x};\ \frac{2}{x^2}\right\} < x + 1$;

е) $\min\left\{\frac{-x}{x - 1};\ \frac{-4x + x^2}{2}\right\} < \frac{x}{3}$.

4.13. а) $\min\{5 - 2x;\ x + 2;\ x - x^2\} < 0$;

б) $\min\left\{3x - 1;\ \frac{3}{x} - 1;\ -1 - \frac{2}{x}\right\} < 2$;

в) $\max\{-3x^2 + 12x;\ 1{,}8x - 7{,}2;\ -8x + x^2\} \geqslant 32$;

г) $\max\left\{\frac{1}{x};\ 2;\ 6x - x^2\right\} > 2x$.

4.14. Решите совокупность систем неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 - x \geqslant 0, \\ x < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 - x \geqslant x^2, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (2 + x)(1 + x) \geqslant 0, \\ x + 2 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} (2 + x)(1 + x) \geqslant (x + 2)^2, \\ x + 2 \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3<0,\\ \dfrac{3+x}{x}\geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x+3\geqslant 0,\\ \dfrac{3+x}{x}\geqslant (x+3)^2;\end{cases}\end{array}\right.$

г) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x^2+4x-20\geqslant 0,\\ x-2<0,\end{cases}\\ \begin{cases}3x^2+4x-20\geqslant (x-2)^2,\\ x+2\geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$

§ 5. НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ

Решите неравенство (**5.01—5.03**):

5.01. а) $|x|<3$; б) $|x-2|\leqslant 5$; в) $|3x-7|\leqslant 8$; г) $|3-7x|\leqslant 3$; д) $|x+2|\leqslant 0$; е) $|3x-7|\leqslant -8$.

5.02. а) $|x|>5$; б) $|x+7|\geqslant 3$; в) $|3x-11|\geqslant 11$; г) $|5-3x|>1$; д) $|x+2|\geqslant 0$; е) $|3x-7|\geqslant -8$.

5.03. а) $|x^2-7x+3|\leqslant 3$;
б) $|x^2-4x|\geqslant 5$;
в) $|3x^2+x+1|<5$;
г) $|2x^2+4x+5|>3$;
д) $|x^2+2x-8|\geqslant 2\sqrt{3}-\sqrt{12}$;
е) $|x^2+2x-8|\leqslant \sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1$.

5.04. Докажите, что неравенство $|f(x)|\leqslant a$ при $a<0$ не имеет решений.

5.05. Докажите, что при $a<0$ множество решений неравенства $|f(x)|>a$ совпадает с $D(f)$.

5.06. Решите неравенство:

а) $\left|x-\dfrac{4}{x}\right|\geqslant -1$;

б) $\left|\dfrac{x}{\sqrt{12x-x^2}}-\sqrt{x^2-2x-8}\right|>\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{10}$.

5.07. Докажите, что при любых значениях a множество решений неравенства $|f(x)| < a$ совпадает с множеством решений системы неравенств $\begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a. \end{cases}$

5.08. Решите неравенство:

а) $\left| x - \frac{4}{x} \right| < 3;$

б) $\left| \frac{x}{x+2} - \frac{x+2}{x-1} \right| < \frac{1}{2};$

в) $\left| x - \frac{4}{x} \right| \cdot \left| \frac{x}{x-2} \right| < 7;$

г) $\left| \frac{x}{x+2} - \frac{x+2}{x-1} \right| \cdot \left| \frac{x-1}{5x+4} \right| < \frac{1}{10}.$

5.09. Докажите, что при любых значениях a множество решений неравенства $|f(x)| > a$ совпадает с множеством решений совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{array} \right.$

5.10. Решите неравенство:

а) $\left| x - \frac{2}{x+2} \right| > 3;$

б) $\left| \frac{x^2}{x+2} - \frac{x^2+2}{x-1} \right| > 5;$

в) $|x-3| \cdot \left| \frac{3x}{x-3} \right| > 2;$

г) $\left| \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-1} \right| \cdot |x^2 + x - 2| > 1.$

5.11. Докажите, что множество решений неравенства

$$|f(x)| \leqslant |g(x)|$$

совпадает с множеством решений любого из неравенств:

а) $f^2(x) \leqslant g^2(x);$

б) $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \leqslant 0.$

Решите неравенство (5.12—5.15):

5.12. а) $|5x + 3| < |2x - 1|;$ в) $|9x + 1| > |5 - 9x|;$

б) $|3 - 7x| \leqslant |x + 5|;$ г) $|x - 3| \geqslant |2x + 3|.$

5.13. а) $|x^2 - 7x + 3| < |2x^2 + 5x - 10|$;
б) $|x^2 + 3x - 5| \geqslant |x^2 - 7x + 5|$;
в) $|x^2 + 11x - 6| \leqslant 10|x|$;
г) $|5x^2 - x| \geqslant |x - 5| \cdot |x + 2|$.

5.14. а) $\left|3x^2 - x - 1\right| \leqslant \left|x^2 - x - 1\right|$;
б) $\left|2x^2 + 3x - 1\right| \geqslant \left|x^2 + x - 1\right|$;
в) $\left|x^3 - 12x + 8\right| \leqslant \left|x^3 + 12x + 4\right|$;
г) $\left|x^3 - 2x^2 + 8\right| \leqslant \left|x^3 + 2x^2 + 4\right|$.

5.15. а) $\left|\dfrac{1 - x}{1 + 3x}\right| > |1 + x|$;
в) $\left|\dfrac{x - x^2}{1 + x - 3x^2}\right| > |1 - x|$;
б) $\left|1 - \dfrac{1}{x}\right| \leqslant \left|2 + \dfrac{5}{x}\right|$;
г) $\left|x - \dfrac{1}{x}\right| \leqslant \left|2x^2 - \dfrac{2}{x}\right|$.

5.16. Докажите, что неравенство $|f(x)| \geqslant f(x)$ выполняется для любого x из области существования $f(x)$.

5.17. Решите неравенство:
а) $\left|x^2 - x\right| \geqslant x^2 - x$;
б) $\left|\dfrac{x}{x^2 - 4}\right| \geqslant \dfrac{x}{x^2 - 4}$;
в) $\left|x + \dfrac{1}{|x - 2| - |x^2 - 4|}\right| \geqslant x + \dfrac{1}{|x - 2| - |x^2 - 4|}$;
г) $\left|\dfrac{1}{|x^3 - 2x^2| - |x - 2|}\right| \geqslant \dfrac{1}{|x^3 - 2x^2| - |x - 2|}$.

5.18. Для каждого значения a решите неравенство

$$\left|\frac{1}{|x - a| - x}\right| \geqslant \frac{1}{|x - a| - x}.$$

5.19. Докажите, что неравенство $|f(x)| < f(x)$ не выполняется ни при каких значениях x из области существования $f(x)$.

5.20. Докажите, что неравенство $|f(x)| > f(x)$ равносильно неравенству $f(x) < 0$.

5.21. Решите неравенство:

а) $|x^2 + 3x - 1| > x^2 + 3x - 1$;

б) $|5x^2 + x| \geqslant 5x^2 + x$;

в) $\left|x - \frac{1}{x}\right| \geqslant \frac{x^2 - 1}{x}$;

г) $|x| \cdot |x - 7| \geqslant 7x - x^2$.

5.22. Докажите, что каждое из неравенств

$$|f(x)| \leqslant f(x) \text{ и } |-f(x)| \leqslant f(x)$$

равносильно неравенству $f(x) \geqslant 0$.

5.23. Решите неравенство:

а) $|x^2 + 4x - 5| \leqslant x^2 + 4x - 5$;

б) $\left|8x^2 + \frac{1}{x}\right| \leqslant 8x^2 + \frac{1}{x}$;

в) $\left|x - 2 - \frac{3}{x}\right| \leqslant \frac{x^2 - 2x - 3}{x}$;

г) $\left|\frac{1 - x}{x + 2}\right| \cdot |x + 2| \leqslant x - 1$;

д) $\left|\frac{-x^2 + 6x - 8}{x^2 - 3x - 4}\right| \cdot |x^2 - 2x - 3| \leqslant x^2 - 5x + 6$;

е) $\left|x + 2 - \frac{8}{x - 2}\right| \cdot \left|\frac{x - 2}{x + 2\sqrt{3}}\right| \leqslant 2\sqrt{3} - x$.

5.24. Докажите, что множество решений неравенства $|f(x)| < g(x)$ совпадает с множеством решений системы $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$

Решите неравенство (5.25—5.27):

5.25. а) $|5x + 7| < 8x - 11$;

б) $|5 - 4x| < 8x + 17$;

в) $|5x + 7| \leqslant 14x^2 - 2$;

г) $|5 - 4x| \leqslant 11 - 10x^2$.

5.26. а) $\left|5x - \frac{1}{x}\right| < 4x$;

б) $|x - 1| \leqslant \frac{32 - 14x}{x + 2}$;

в) $\left|\frac{x - 1}{x + 2}\right| < \frac{17x - 39}{20x - 20}$;

г) $\left|\frac{x - 2}{x + 2}\right| \leqslant \frac{x - 2}{x}$.

5.27. а) $|x^2 - x - 7| \leqslant -2x - 7$;

б) $|5 - 4x - x^2| \leqslant 2 - x - x^2$;

в) $|-x^2 + 5x + 1| \leqslant x^2 + 6x + 1$;

г) $|x^3 - x^2 - 4x - 2| \leqslant -x^2 - 3x - 2$.

5.28. Докажите, что множество решений неравенства $|f(x)| > g(x)$ совпадает с множеством решений совокупности
$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

Решите неравенство **(5.29—5.31)**:

5.29. а) $|7x - 11| > 3x + 5$;

б) $|4 - x| > -3x - 2$;

в) $|5x + 7| \geqslant 3x^2 + 11x - 2$;

г) $|5 - 4x| \geqslant 5 - 7x - 3x^2$.

5.30. а) $\left|5x - \dfrac{1}{x}\right| > 4x$;

б) $|x - 1| \geqslant \dfrac{32 - 14x}{x + 2}$;

в) $\left|\dfrac{x - 1}{x + 2}\right| > \dfrac{17x - 39}{20x - 20}$;

г) $\left|\dfrac{x - 2}{x + 2}\right| \geqslant \dfrac{x - 2}{x}$.

5.31. а) $|x^2 - 2x - 5| \geqslant -2x - 5$;

б) $|5 - 4x - x^2| > 2 - x - x^2$;

в) $|-2x^2 + 5x + 7| \geqslant 2x^2 - 6x + 7$;

г) $|x^3 - x^2 - 4x - 2| \geqslant -x^2 - 5x - 4$.

5.32. Докажите, что множество решений неравенства
$$|f(x)| + |g(x)| \geqslant |f(x) + g(x)|$$
совпадает с пересечением множеств $D(f)$ и $D(g)$.

5.33. Решите неравенство:

а) $$\left|x - x^2 + \frac{x + 1}{\sqrt{2x - x^2}} - 3\right| + \left|x^3 - x^2 - 2 - \frac{x + 1}{\sqrt{2x - x^2}}\right| \geqslant |x^3 - 2x^2 + x - 5|;$$

б) $$|x^2 + 2x| \leqslant \left|x^2 + x - \frac{\sqrt{1 - x}}{x}\right| + \left|x + \frac{\sqrt{1 - x}}{x}\right|;$$

в) $$\left|x - \sqrt{3x + 7}\right| + \left|2x - \sqrt{3x + 7}\right| \geqslant |x|;$$

г) $$\left|x^2 - \sqrt{3 - x}\right| + \left|5x - \sqrt{x - 3}\right| \geqslant |x^2 - 5x|.$$

5.34. Докажите, что неравенство $|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)|$ равносильно неравенству $f(x) \cdot g(x) < 0$.

5.35. Решите неравенство:

а) $|2x + 12| + |x^2 - x - 30| > |x^2 + x - 18|$;

б) $\left|x - \frac{1}{x}\right| + \left|x + \frac{1}{x - 2}\right| > \left|\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x}\right|$;

в) $\left|2x^2 - \frac{16}{x}\right| + \left|2x^2 - \frac{12}{x^2 - 5}\right| > \left|\frac{16}{x} - \frac{12}{x^2 - 3}\right|$;

г) $\left|x^2 - \frac{1}{x}\right| + \left|x^2 + \frac{5}{x^2 - 3}\right| > \left|\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2 - 3}\right|$.

5.36. Докажите, что неравенство $|f(x)| + |g(x)| \leqslant |f(x) + g(x)|$ равносильно неравенству $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$.

Решите неравенство (5.37—5.39):

5.37. а) $|3x + 5| + |x^2 - 7| \leqslant |x^2 + 3x - 2|$;

б) $|3x + 12| + |x^2 - 16| \leqslant |x^2 + 3x - 4|$;

в) $\left|x^2 - \frac{1}{x}\right| + \left|x^2 + \frac{5}{x^2 - 3}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2 - 3}\right|$;

г) $|x| + |2x + 1| + |3x + 2| + |4x + 3| \leqslant |10x + 6|$.

5.38. а) $x^2 - 4|x| + 3 > 0$;

б) $(x - 2)^2 - 4|x - 2| - 96 < 0$;

в) $(x^2 - 3x)^2 + |3x - x^2| - 20 \leqslant 0$;

г) $(x^2 - 5x)^2 - 5|5x - x^2| - 6 \geqslant 0$.

5.39. а) $x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\left|x + \frac{1}{x}\right| - 3 \leqslant 0$;

б) $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left|x - \frac{1}{x}\right| - 6 \geqslant 0$;

в) $x^2 + \frac{4}{x^2} + \left|x + \frac{2}{x}\right| - 18 < 0$;

г) $x^2 + \frac{9}{x^2} + 4\left|x - \frac{3}{x}\right| - 2 \leqslant 0$;

д) $x^4 + 3|x^3 - 2x| \leqslant 22x^2$;

е) $4x^4 + 6|2x^3 - x| \leqslant 14x^2$.

5.40. Решите:

а) уравнение $|x| + |3x - 1| = 7$;

б) неравенство $|x| + |3x - 1| \leqslant 7$;

в) неравенство $|x| + |3x - 1| > 7$;

г) неравенство $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| + \left|\dfrac{3x}{x+1} - 1\right| \leqslant 7$.

5.41. Решите:

а) уравнение $|5 + x| + |x - 11| = 16$;

б) неравенство $|5 + x| + |x - 11| \leqslant 16$;

в) неравенство $|5 + x| + |x - 11| > 16$;

г) неравенство $\left|5 + \dfrac{x}{1 - \sqrt{3 - x}}\right| +$

$$+\left|\frac{x}{1 - \sqrt{3 - x}} - 11\right| > 15 + \frac{\pi}{4}.$$

Решите неравенство (5.42—5.45):

5.42. а) $3|x + 2| + |x - 2| < 4(x + 3)$;

б) $3|x + 2| + |2x - 2| \geqslant 3x + 12$;

в) $6|x + 1| - 3|x| + 3|x - 1| < 3(x + 2)$;

г) $6|x + 1| - 3|x| + 3|x - 1| \geqslant 6x + 3$.

5.43. а) $2|x^2 - 2x| + 2x^2 < |x - 2| - x - 2$;

б) $|x^2 + x| - |x + 1| \leqslant x^2 - 1$;

в) $|x^2 - 4| \geqslant x^2 - |x - 1|$;

г) $|x^2 + x| + |2x^2 + x| \geqslant 3x^2 + 2x$;

д) $|x^2 - 3x + 1| - 1 < (x^2 - 3x)^2 + 2|x^2 - 3x|$;

е) $|x^2 + x - 3| + |x^2 + x - 2| \leqslant 2x^2 + 2x - 5$.

5.44. а) $\dfrac{|x + 1| - 2}{|x + 1| + 1} \leqslant \dfrac{2|x + 1| - 5}{4|x + 1| - 8}$;

б) $\dfrac{x^2 - 2x - 1 + |x - 1|}{|x - 1| - 2} \geqslant \dfrac{x^2 - 2x - 2 + 2|x - 1|}{|x - 1| - 3}$.

5.45. а) $\dfrac{|2x+1|-2|x+4|}{|3x-1|-|1+3x|} \leqslant 0$;   б) $\dfrac{|x+1|-2|x-4|}{|x-1|-|1-3x|} \leqslant 0$.

5.46. Определите все значения параметра t, при котором неравенство $|x+2|+|x-7| \geqslant t$ выполняется при любых значениях x.

5.47. Определите все значения параметра t, при котором неравенство $|x+2|+|x-7| \geqslant t$ выполняется при любых значениях $x \leqslant -4$.

5.48. Определите все значения, которые может принимать выражение $|x+2|+|x-7|$, если x принимает любые действительные значения.

5.49. Определите все значения параметра t, при котором неравенство $|x+2|+|x-7|+|x+4| \geqslant t$ выполняется при любых значениях x.

5.50. Определите все значения, которые может принимать выражение $|x+2|+|x-7|+|x+4|$, если x принимает любые действительные значения.

5.51. Определите наименьшее значение функции $f(x)=|x-1|+$ $+|x-2|+\ldots+|x-10|$.

5.52. Определите наименьшее значение функции $f(x)=|x-1|+$ $+|x-2|+\ldots+|x-9|$.

5.53. Определите наименьшее значение функции $f(x)=|x-1|+$ $+|x-2|+\ldots+|x-n|$, где n — некоторое натуральное число.

§ 6. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Решите неравенство (6.01—6.22):

6.01. а) $\sqrt{8-7x} > 1$;   в) $\sqrt{7x-1} > 0$;

б) $\sqrt{3x-5} > 6$;   г) $\sqrt{11-3x} > -6$.

6.02. а) $\sqrt{5x+1} \geqslant 11$;   в) $\sqrt{5-11x} \geqslant 0$;

б) $\sqrt{64-3x} \geqslant 8$;   г) $\sqrt{3-87x} \geqslant -6$.

6.03. а) $\sqrt{8+\dfrac{3x-4}{2}} < 3$;   в) $\sqrt{5-\dfrac{x}{7}} < 0$;

б) $\sqrt{3x-\dfrac{x-2}{3}} < 2$;   г) $\sqrt{\dfrac{8x}{7}-1} < -2$.

6.04. а) $\sqrt{9-5x} \leqslant 3$;

б) $\sqrt{8x+1} \leqslant 11$;

в) $\sqrt{5-3x} \leqslant 0$;

г) $\sqrt{100x+6} \leqslant -5$.

6.05. а) $\sqrt{9+\dfrac{x-1}{2}} \leqslant 3$;

б) $\sqrt{\dfrac{4x}{3}-\dfrac{x-3}{5}} \leqslant 2$;

в) $\sqrt{\dfrac{5-2x}{2}-\dfrac{x+15}{4}} \leqslant 0$;

г) $\sqrt{\dfrac{8-x}{7}-\dfrac{x+4}{3}} \leqslant -2$.

6.06. а) $\sqrt{x^2-6x+9} > 3$;

б) $\sqrt{x^2-6x+4} > 2$;

в) $\sqrt{x^2-6x+16} > 4$;

г) $\sqrt{x^2-6x+16} > 1$.

6.07. а) $\sqrt{x^2-10x+25} > 2$;

б) $\sqrt{x^2-10x+9} > \sqrt{33}$;

в) $\sqrt{x^2-10x+9} > 1-\sqrt{2}$;

г) $\sqrt{x^2-10x+36} > 2-\sqrt{5}$.

6.08. а) $\sqrt{x^2-4x+4} < 2$;

б) $\sqrt{x^2-4x+1} < 1$;

в) $\sqrt{x^2-4x+25} \leqslant 5$;

г) $\sqrt{x^2-4x+3} < 2$.

6.09. а) $\sqrt{\dfrac{x-3}{2x+7}} \leqslant 1$;

б) $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-5}} > 1$;

в) $\sqrt{\dfrac{x^2}{2x-1}} \leqslant 1$;

г) $\sqrt{\dfrac{3x+1}{x^2}} < 5$.

6.10. а) $(x^2-7)\sqrt{x} \leqslant 0$;

б) $(x^2-7)\sqrt{x} < 0$;

в) $(x^2-7)\sqrt{x} > 0$;

г) $(x^2-7)\sqrt{x} \geqslant 0$.

6.11. а) $(x^2-2x)\sqrt{x+1} \leqslant 0$;

б) $(x^2+7x+12)\sqrt{3-x} > 0$;

в) $(x^2+7x)\sqrt{x-2} > 0$;

г) $(4-3x-x^2)\sqrt{-2-x} \leqslant 0$.

6.12. а) $x\sqrt{x^2-7x+1} \geqslant 0$;

б) $x\sqrt{x^2-7x+1} > 0$;

в) $x\sqrt{x^2-7x+1} < 0$;

г) $x\sqrt{x^2-7x+1} \leqslant 0$.

6.13. а) $(3x-1)\sqrt{5x-7} > \sqrt{5x-7}$;

б) $(3x-1)\sqrt{5x-7} \geqslant \sqrt{5x-7}$;

в) $(5x-7)\sqrt{3x-1} < \sqrt{3x-1}$;

г) $(5x-7)\sqrt{3x-1} \geqslant \sqrt{3x-1}$.

6.14. а) $\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x^2-6x+10} \geqslant 0$;
в) $\dfrac{\sqrt{3x+1}+1}{x^2-6x+8} \geqslant 0$;

б) $\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x^2-6x+9} \geqslant 0$;
г) $\dfrac{\sqrt{3x+1}}{6x-x^2} \geqslant 0$.

6.15. а) $\dfrac{(x-3)(x+5)}{\sqrt{2x-1}-3} \geqslant 0$;
в) $\dfrac{\sqrt{x-3}-4}{\sqrt{x-4}-3} < 0$;

б) $\dfrac{(x-3)(x+5)}{\sqrt{2x+11}-3} \leqslant 0$;
г) $\dfrac{x(\sqrt{x}-5)}{6-\sqrt{x+1}} \geqslant 0$.

6.16. а) $x-3\sqrt{x}+2 \leqslant 0$;
в) $x-5\sqrt{x}+100 > 0$;

б) $x-5\sqrt{x}+4 \geqslant 0$;
г) $x+6\sqrt{x}+0{,}3 \leqslant 0$.

6.17. а) $x-3\sqrt{x+4}+6 \leqslant 0$;
в) $x-5\sqrt{-6-x}+132 > 0$;

б) $x-5\sqrt{3-x}+11 \geqslant 0$;
г) $x+4\sqrt{3-x}-9 \leqslant 0$.

6.18. а) $\left|\sqrt{x}-3\right| < 1$;
в) $\left|\sqrt{2-x}-3\right| > 2$;

б) $\left|\sqrt{x+1}-3\right| \leqslant 3$;
г) $\left|\sqrt{7-3x}-5\right| \geqslant 7$.

6.19. а) $\left|\sqrt{x-1}-2x\right| < 3$;
в) $\left|\sqrt{7-x}+x-2\right| > 7$;

б) $\left|\sqrt{1-x}-x\right| \leqslant 1$;
г) $\left|\sqrt{-2-x}+x\right| \leqslant 2$.

6.20. а) $\dfrac{4-\sqrt{2x-11}}{\sqrt{2x-11}} \geqslant \dfrac{1}{3}$;
в) $\dfrac{3\sqrt{2-3x}-10}{\sqrt{2-3x}-2} < 2$;

б) $\dfrac{2\sqrt{2+7x}}{\sqrt{2+7x}+3} < \dfrac{1}{2}$;
г) $\dfrac{2+5\sqrt{3-x}}{2-\sqrt{3-x}} \leqslant 1$.

6.21. а) $\frac{2}{5\sqrt{x}-4} \leqslant \frac{1}{x-1}$; в) $\frac{2}{\sqrt{x}-x} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x}-3}$;

б) $\frac{7}{x-2} \geqslant \frac{4}{\sqrt{x}+1}$; г) $\frac{x-7\sqrt{x}+12}{\sqrt{x}-1} < \frac{6-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

6.22. а) $\frac{1}{1+x} \leqslant \frac{4}{\sqrt{3-2x}}$; в) $\frac{2}{3-x} < \frac{3}{\sqrt{4x+5}}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{x+10}} \geqslant \frac{1}{2-x}$; г) $\frac{1}{7x-6} < \frac{1+\sqrt{7x-3}}{2\sqrt{7x-3}-1}$.

6.23. Докажите, что неравенство $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

Решите неравенство (6.24—6.26):

6.24. а) $\sqrt{5x-1} > \sqrt{3x+2}$; в) $\sqrt{5-x} < \sqrt{2x+7}$;

б) $\sqrt{8x-5} \leqslant \sqrt{7x+11}$; г) $\sqrt{3-x} > \sqrt{1-x}$.

6.25. а) $\sqrt{x^2-12x+8} > \sqrt{-12x+8}$;

б) $\sqrt{-x^2+4x+5} > \sqrt{4x+1}$;

в) $\sqrt{x^2-12x+11} \geqslant \sqrt{x-1}$;

г) $\sqrt{-x^2+8x+1} \geqslant \sqrt{2x+10}$.

6.26. а) $\sqrt{x^2-7x+3} > \sqrt{x^2-6x+11}$;

б) $\sqrt{x^2-7x+3} > \sqrt{x^2-6x+9}$;

в) $\sqrt{x^2-7x+3} > \sqrt{x^2-6x+8}$;

г) $\sqrt{x^2-7x+3} > \sqrt{-x^2+14x-49}$.

6.27. Задана функция $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{2x+1}$. Найдите: а) $D(f)$; б) нули функции; в) промежутки знакопостоянства.

6.28. Задана функция $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+6x+10}-1}{5x-3}$. Найдите: а) $D(f)$; б) нули функции; в) промежутки знакопостоянства.

6.29. Задана функция $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x - 5} - 3}{x^2 - 7}$. Найдите: а) $D(f)$; б) нули функции; в) промежутки знакопостоянства.

6.30. Задана функция $f(x) = \sqrt{2x - 3} - x - 6$. Найдите: а) $D(f)$; б) нули функции; в) промежутки знакопостоянства.

6.31. Задана функция $f(x) = \sqrt{8x^2 - 7} - 3x + 4$. Найдите: а) $D(f)$; б) нули функции; в) промежутки знакопостоянства.

6.32. Докажите, что неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$

6.33. Докажите, что неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно объединению систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$

6.34. Решите неравенство, используя № 6.32:

а) $\sqrt{-x^2 + 4x + 5} < 1 - 2x$; в) $\sqrt{x^2 - 12x + 22} < x$;

б) $\sqrt{x^2 + 6x + 8} \leqslant 2x$; г) $\sqrt{-x^2 + 8x + 1} \leqslant 3 - x$.

6.35. Решите неравенство, используя № 6.33:

а) $\sqrt{5 - 4x - x^2} \geqslant 1 - x$; в) $\sqrt{x^2 + x - 6} \geqslant 6 + x$;

б) $\sqrt{x^2 + 5x - 6} \geqslant 6 + x$; г) $2x - 5 < 2\sqrt{x^2 - x - 6}$.

Решите неравенство **(6.36—6.40)**:

6.36. а) $\sqrt{3x - 5} > \left|\dfrac{x}{2}\right|$; в) $\sqrt{x + 5} \leqslant \dfrac{|x + 1|}{3}$;

б) $\sqrt{4x + 9} < \dfrac{5}{4}|x|$; г) $\sqrt{5x - 6} \geqslant 2{,}5|x - 1|$.

6.37. а) $\frac{\sqrt{1-2x^2}-1}{x} < 1$;

в) $\frac{\sqrt{1-x^2}+3x}{3x+1} > 1$;

б) $\frac{1-\sqrt{4x-2x^2-1}}{1-x} \leqslant 1$;

г) $\frac{\sqrt{4x-x^2-3}-6+3x}{3x-5} \leqslant 1$.

6.38. а) $1 < \sqrt{3x+1} \leqslant 7$;

в) $-2 < \sqrt{2x-1} \leqslant 7$;

б) $0{,}1 \leqslant \sqrt{5-7x} \leqslant 2$;

г) $0 \geqslant \sqrt{3-7x} > -1$.

6.39. а) $1 < \sqrt{x^2-5x+4} \leqslant 2$;

в) $4 < \sqrt{x^2-4x+20} \leqslant 5$;

б) $3 \leqslant \sqrt{-x^2+16x} < 7$;

г) $5 \leqslant \sqrt{-x^2-2x+24} < 6$.

6.40. а) $1 < \sqrt{\frac{1}{x}} \leqslant 2$;

в) $\sqrt{3} \leqslant \sqrt{x-\frac{4}{x}} \leqslant 2$;

б) $2 < \sqrt{x+\frac{4}{x}} \leqslant \sqrt{5}$;

г) $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x+\frac{1}{x^2}} \leqslant \frac{3}{2}$.

6.41. Найдите середину отрезка числовой прямой, являющегося решением неравенства:

а) $\sqrt{5x-7} \leqslant 2$;

б) $4\sqrt{8+2x-x^2} > 12-3x$.

6.42. Найдите длину отрезка числовой прямой, являющегося решением неравенства:

а) $x\sqrt{x}+5 \leqslant 5\sqrt{x}+x$;

б) $2x\sqrt{x}-3 \leqslant 6\sqrt{x}-x$.

6.43. Найдите отношение длины отрезка, являющегося областью определения функции $f(x) = \sqrt{5-x} - \sqrt{2x-1}$ к длине отрезка, на котором эта функция неотрицательна.

6.44. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}$ возрастает на области определения, и решите неравенство:

а) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} \leqslant \sqrt{1+\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{3+\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{\frac{1}{x}+2} + \sqrt{\frac{1}{x}+3} \leqslant \sqrt{1+\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{3+\sqrt{2}}$.

6.45. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt{x} \cdot \left(x^2 + 7x + 3\right)$ возрастает на области определения, и решите неравенство

$$\sqrt{x} \cdot \left(x^2 + 7x + 3\right) < \sqrt{\pi} \cdot \left(\pi^2 + 7\pi + 3\right).$$

6.46. Докажите, что функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + 5x}$ убывает на области определения, и решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + 5x} \geqslant \frac{1}{22 + \sqrt{7}}.$$

§ 7. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

7.01. Для каждого значения параметра a решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x > -3, \\ x > a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x > -3, \\ x < a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x < -3, \\ x > a; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x < -3, \\ x \leqslant a; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x \leqslant -3, \\ x \geqslant a; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant a. \end{cases}$

Для каждого значения параметра a решите неравенство **(7.02, 7.03)**:

7.02. а) $(x - 3)(x - a) \leqslant 0$; б) $\dfrac{x-3}{x-a} \leqslant 0$.

7.03. а) $(x - 2a)(x - a) \geqslant 0$; б) $\dfrac{x-a}{x-2a} \geqslant 0$.

7.04. При каком значении параметра a решением неравенства $(x^2 - 9)(x + a) \geqslant 0$ является числовой луч?

7.05. Для каждого значения параметра a решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 < 9, \\ x > a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 \leqslant 9, \\ x \leqslant a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 \geqslant 9, \\ x > a; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 > 9, \\ x \leqslant a. \end{cases}$

Для каждого значения a решите неравенство (**7.06—7.08**):

7.06. а) $\frac{1}{x} > a$; в) $\frac{a}{x} \geqslant a$;

б) $\frac{a}{x} < 1$; г) $\frac{1}{ax} \leqslant 1$.

7.07. а) $\frac{a}{x} < \frac{1}{x-1}$; в) $\frac{1}{ax} < \frac{1}{x-1}$;

б) $\frac{1}{x} > \frac{2}{x-a}$; г) $\frac{1}{ax} \leqslant \frac{1}{x-a}$.

7.08. а) $\frac{1}{x} < ax$; в) $\frac{a}{x} - \frac{1}{x+2} > 0$;

б) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} > 0$; г) $\frac{1}{x} - \frac{a}{x+2} > 0$.

7.09. При каких значениях параметра a неравенству

$$\frac{2x^2 - 17x + 15}{x - a} \leqslant 0$$

удовлетворяет только одно простое число?

7.10. Дано неравенство $(x + 2)(x - a) \leqslant 0$. При каких значениях параметра a:

а) решением неравенства является отрезок $[-2; 7]$;

б) для всех точек отрезка $[-2; 7]$ выполняется данное неравенство;

в) данное неравенство выполняется хотя бы для одной точки отрезка $[-2; 7]$;

г) на отрезке $[-2; 7]$ находятся все решения данного неравенства?

7.11. Дано неравенство $\frac{x-a}{x+2} < 0$. При каких значениях параметра a:

а) решением неравенства является интервал $(-2; 7)$;

б) для всех точек интервала $(-2; 7)$ выполняется данное неравенство;

в) данное неравенство выполняется хотя бы для одной точки интервала $(-2; 7)$;

г) данное неравенство имеет решения и все эти решения находятся на интервале $(-2; 7)$?

7.12. Дано неравенство $(x + 2a - 3)(x - a) \leqslant 0$. При каких значениях параметра a:

а) решением неравенства является отрезок $[-2; 7]$;

б) для всех точек отрезка $[-2; 7]$ данное неравенство выполняется;

в) данное неравенство выполняется хотя бы для одной точки отрезка $[-2; 7]$;

г) на отрезке $[-2; 7]$ находятся все решения данного неравенства?

7.13. Найдите все значения параметра b, при которых любое число x, абсолютная величина которого не превосходит 1, удовлетворяет неравенству $\dfrac{b^2 + bx - b}{b^2 - b + x - 1} > 0$.

7.14. Найдите все значения параметра k, при которых любое число x, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{k - x^2 + 1}{x - k} < 0$, по абсолютной величине больше двух.

7.15. Найдите все значения параметра k, при которых любое число x, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{kx + 1}{x - k} > 0$, по абсолютной величине меньше двух.

7.16. При каком значении параметра a существует отрезок, середина которого удовлетворяет неравенству

$$\frac{(x^2 + x - 2)(x - a)}{x + 5} \leqslant 0,$$

а остальные его внутренние точки нет? Найдите наибольшую длину этого отрезка.

7.17. При каких значениях параметра b неравенство $\dfrac{x + 2}{x^2 + 5} < b$ выполняется при всех значениях x?

7.18. При каких значениях параметра b неравенство $\dfrac{x + 7}{x^2 + b} < 5$ выполняется при всех значениях x?

7.19. При каких значениях x неравенство $\dfrac{b + x + 7}{2b - x} \geqslant \dfrac{1}{2}$ выполняется при всех значениях b, лежащих на отрезке $[1; 2]$?

7.20. При каких значениях x неравенство $\frac{2b + x + 1}{1 + b - x^2} > 0$ выполняется при всех значениях b, лежащих на интервале $(0; 1)$?

7.21. При каких значениях x неравенство $3x^2 + bx + x - b < 4$ выполняется при всех значениях b, лежащих на отрезке $[-2; 1]$?

7.22. При каких значениях параметра c все значения функции $y = x^2 + 2x$ на промежутке $(-2; c]$ не превышают числа 8?

7.23. При каких значениях параметра a множество значений функции $f(x) = \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1}$ содержится в промежутке $(-\infty; 2)$?

7.24. При каких значениях параметра a множество значений функции $f(x) = \frac{-x^2 + x + a}{x^2 - x + 1}$ содержит хотя бы одно число, не лежащее на отрезке $[-1; 1]$?

7.25. При каких значениях параметра a график функции $g(x) = \frac{ax^2 + x + 2}{x^2 + 1}$ располагается между прямыми $y = -1$ и $y = 3$ и не имеет с этими прямыми общих точек?

7.26. При каких значениях параметра p отрезок $[0; 4]$ принадлежит множеству решений неравенства $\frac{x - 3p - 5}{x + p} < 0$?

Для каждого значения параметра a решите систему неравенств (**7.27, 7.28**):

7.27. а) $\begin{cases} 3x^2 - 7x - 26 \leqslant 0, \\ x < a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 - 7x - 26 \leqslant 0, \\ x \geqslant a. \end{cases}$

7.28. а) $\begin{cases} 5x^2 + 7x - 34 \geqslant 0, \\ x > a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x^2 + 7x - 34 \geqslant 0, \\ x \leqslant a. \end{cases}$

7.29. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + x + a - a^2 = 0, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

а) имеет ровно два решения;
б) имеет единственное решение;
в) не имеет решений.

7.30. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + x + a - a^2 = 0, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

а) имеет ровно два решения;
б) имеет единственное решение;
в) не имеет решений;
г) имеет хотя бы одно решение.

7.31. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + ax + a = 0, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

а) имеет ровно два решения;
б) имеет единственное решение;
в) не имеет решений.

7.32. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + ax + a = 0, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

а) имеет ровно два решения;
б) имеет единственное решение;
в) не имеет решений;
г) имеет хотя бы одно решение.

7.33. При каких значениях параметра a число 1 удовлетворяет неравенству $\dfrac{x^3 - x - a}{x^2 + a} \geqslant 0$, а число $-0{,}5$ не удовлетворяет ему?

7.34. Найдите все значения параметра c, при которых система неравенств $\begin{cases} (x + c)(cx + 2c - 3) \geqslant 0, \\ cx \leqslant -4, \end{cases}$ не имеет решений.

7.35. При каких целых значениях параметра c неравенство

$$\frac{x - c}{x + 3c - 12} \leqslant 0$$

имеет:

а) ровно 16 целых решений;

б) не более 16 целых решений?

7.36. При каких целых значениях параметра c неравенство

$$\frac{x + c}{x + 3 - 11c} < 0$$

имеет:

а) ровно 20 целых решений;

б) не более 20 целых решений?

7.37. Сколько существует целых значений параметра c, для которых неравенство $\frac{x - 3c}{x - 2c} < 0$:

а) имеет ровно 100 целых решений;

б) имеет не более 100 целых решений;

в) не имеет целых решений?

Для каждого случая укажите, каковы эти целые значения c.

7.38. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + 4x + 8} \leqslant b$ справедливо при любых значениях $b \geqslant 8$.

Для каждого значения параметра a решите неравенство (7.39—7.44):

7.39. а) $(\sqrt{x} + 3)(x - a) < 0$; в) $(\sqrt{x} + 3)(x - a) > 0$;

б) $(\sqrt{x} + 3)(x - a) \leqslant 0$; г) $(\sqrt{x} + 3)(x - a) \geqslant 0$.

7.40. а) $\frac{x + 3}{\sqrt{x} - a} > 0$; в) $\frac{x + 3}{\sqrt{x} - a} < 0$;

б) $\frac{x + 3}{\sqrt{x} - a} \geqslant 0$; г) $\frac{x + 3}{\sqrt{x} - a} \leqslant 0$.

7.41. а) $\frac{x - 13}{\sqrt{x} - a} > 0$; в) $\frac{x - 13}{\sqrt{x} - a} < 0$;

б) $\frac{x - 13}{\sqrt{x} - a} \geqslant 0$; г) $\frac{x - 13}{\sqrt{x} - a} \leqslant 0$.

7.42. а) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-a} > 0$; в) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-a} < 0$;

б) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-a} \geqslant 0$; г) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-a} \leqslant 0$.

7.43. а) $\dfrac{\sqrt{x}-a}{x^2-3x+2} > 0$; в) $\dfrac{\sqrt{x}-a}{x^2-3x+2} < 0$;

б) $\dfrac{\sqrt{x}-a}{x^2-3x+2} \geqslant 0$; г) $\dfrac{\sqrt{x}-a}{x^2-3x+2} \leqslant 0$.

7.44. а) $\sqrt{x-3} < 5+a$; б) $\sqrt{x-3} > 5+a$.

При каких значениях параметра a неравенство имеет решения? Для каждого такого значения параметра a решите неравенство **(7.45—7.47)**:

7.45. $\sqrt{x-3} + 5\sqrt{9-3x} + a > 5$.

7.46. $\sqrt{x-5} + 2\sqrt{10-2x} + 2x > a$.

7.47. $\sqrt{x-a} - a\sqrt{a-x} + 2x \geqslant a^2$.

7.48. Найдите все такие значения параметра c, при которых неравенство $\sqrt{9-x^2} + 2\sqrt{x-c} \geqslant 4 - 3\sqrt{2}$ имеет единственное решение.

7.49. Для каждого значения параметра p решите неравенство $2\sqrt{6x-x^2-5} + 3\sqrt{x-p} > 7p - 8p^2 - 2003$.

7.50. При каких значениях параметра a неравенство

$$x - (2a+1)\cdot\sqrt{x} + a^2 + a \leqslant 0$$

имеет более одного решения? Для каждого такого значения параметра a решите данное неравенство.

7.51. Для каждого значения параметра a решите неравенство:

а) $\dfrac{x+(a-3)\cdot\sqrt{x}-3a}{x^2-a} \geqslant 0$; б) $\dfrac{x+(a-3)\cdot\sqrt{x}-3a}{x^2-a} \leqslant 0$.

7.52. При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt{x-a} \leqslant 3a$ имеет не менее двух различных решений и разность между любыми двумя его решениями не превышает 36?

7.53. Для каждого значения параметра p решите неравенство:

а) $(x - p)\sqrt{x} < 0$; в) $(x - p)\sqrt{x} > 0$;

б) $(x - p)\sqrt{x} \leqslant 0$; г) $(x - p)\sqrt{x} \geqslant 0$.

7.54. Для каждого значения параметра a решите неравенство:

а) $x\sqrt{x - a} < 0$; в) $x\sqrt{x - a} > 0$;

б) $x\sqrt{x - a} \leqslant 0$; г) $x\sqrt{x - a} \geqslant 0$.

Решите неравенство для каждого значения параметра a **(7.55—7.63)**:

7.55. а) $|x - a| < 2$; б) $|x - a| \leqslant 2$; в) $|x - a| < -2$; г) $|x - a| \leqslant 0$.

7.56. а) $|x - a| > 5$; б) $|x - a| \geqslant 5$; в) $|x - a| > -5$; г) $|x - a| > 0$.

7.57. а) $|x - 7| < a$; б) $|x - 7| > a$; в) $|x - a| \leqslant a$; г) $|x - a| \geqslant a$.

7.58. а) $|x - a| < x$; б) $|x - a| \leqslant x$; в) $|x - a| > x$; г) $|x - a| \geqslant x$.

7.59. а) $|x - a| < x - 1$; б) $|x - a| \leqslant x - 1$; в) $|x - a| > x - 1$; г) $|x - a| \geqslant x - 1$.

7.60. а) $|x - a| < 2x$; б) $|x - a| \leqslant 2x$; в) $|x - a| > -2x$; г) $|x - a| \geqslant -2x$.

7.61. а) $|x - a| < |2x|$; б) $|x - a| \leqslant |2x|$; в) $|x - a| > 3|x|$; г) $|x - a| \geqslant |-3x|$; д) $|x - a| > -3|x|$; е) $|x - a| \leqslant -3|x|$.

7.62. а) $|x - a| < |x|$; б) $|x - a| \leqslant |x|$; в) $|x - a| > |x|$; г) $|x - a| \geqslant |x|$.

7.63. а) $|x - a| < |2x - a|$; б) $|x - a| \leqslant |2x - a|$; в) $|x - a| > |3x - a|$; г) $|x - a| \geqslant |-3x + a|$; д) $|x - a| > -3|x - a|$; е) $|x - a| < -3|x - a|$.

Для каждого значения параметра a решите неравенство **(7.64—7.66)**:

7.64. а) $|x - 3| + |x + 5| > a$; б) $|x - 3| + |x + 5| < a$; в) $|x - 3| + |x + 5| \geqslant a$; г) $|x - 3| + |x + 5| \leqslant a$.

7.65. а) $|x - 3| - |x + 5| > a$; б) $|x - 3| - |x + 5| < a$; в) $|x - 3| - |x + 5| \geqslant a$; г) $|x - 3| - |x + 5| \leqslant a$.

7.66. а) $|2x-1|+|x-6|>a$; в) $|2x-1|+|x-6|\geqslant a$;
б) $|2x-1|+|x-6|<a$; г) $|2x-1|+|x-6|\leqslant a$.

7.67. При каких значениях параметра m данному неравенству удовлетворяет ровно 9 целых чисел:
а) $|x-7|<a$; в) $|x-7{,}4|<a$;
б) $|x-7|\leqslant a$; г) $|x-\sqrt{7}|\leqslant a$?

7.68. При каких значениях параметра a данному неравенству удовлетворяет ровно 6 целых чисел:
а) $|x-8|<a$; в) $|x-8{,}4|<a$;
б) $|x-8|\leqslant a$; г) $|x-\sqrt{8}|\leqslant a$?

7.69. Решите неравенство для каждого значения a:
а) $\left|2x^2-x-a+2\right|\geqslant\left|2x^2-3x+a-1\right|$;
б) $\left|3x-a-2a^2\right|\geqslant\left|x+a-2a^2\right|$.

7.70. Решите неравенство $|x+2a|\leqslant\dfrac{1}{x}$ для каждого значения параметра a.

7.71. При всех значениях a найдите решения неравенства

$$\frac{x-a}{|x-3|-|x+5|}\leqslant 0.$$

7.72. При каких значениях параметра a на графике функции $F(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}$ нет точек, удаленных от оси абсцисс не более чем на 3?

7.73. Найдите сумму всех целых значений параметра b, при которых неравенство $|x+b|+x^2<2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

7.74. При каких целых значениях параметра b неравенство $3-x^2>|x-b|$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $(-\infty;\,0)$?

7.75. При каких значениях параметра a для всех чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2-(a^3+a)x+a^4<0$, выполняется неравенство $x^2+4x+3<0$?

7.76. При каких значениях параметра a все числа, не удовлетворяющие неравенству $x^2+4x+3<0$, не удовлетворяют и неравенству $x^2-(a^3+a)x+a^4<0$?

ГЛАВА 2

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 8. УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Постройте график уравнения (**8.01**, **8.02**):

8.01. а) $x = 3$; б) $y = -5$; в) $x^2 = 1$; г) $y^2 = 9$; д) $x^2 - 2x + 1 = 0$; е) $x^2 - 6x + 8 = 0$; ж) $yx + x + y + 1 = 0$; з) $xy + mx + ny + mn = 0$; $m \cdot n \neq 0$; и) $x^2y^2 - x^2 - 4y^2 + 4 = 0$.

8.02. а) $x = y$; б) $x + y = 2$; в) $3x - 4y = 12$; г) $2y - x - 4 = 0$.

Постройте на координатной плоскости xy график уравнения (**8.03**, **8.04**):

8.03. а) $x^2 - 3xy = 0$; б) $xy + 2y^2 = 0$; в) $(x - 1)(y + 5) = 0$; г) $xy - 5x + y = 5$.

8.04. а) $x^2 - y^2 = 0$; б) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$; в) $x^2 + 7xy - 18y^2 = 0$; г) $x^2 + xy + y^2 = 0$.

8.05. При каких значениях параметра b прямая: а) $3x + y = b$ содержит точку оси абсцисс с отрицательной абсциссой; б) $3x + 2y = b$ пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой меньше 1; в) $2x - 7y = b$ пересекает ось ординат в точках, ординаты которых заключены между 1 и 5?

8.06. Постройте график уравнения:

а) $|x| = y + x$; б) $|y| = x + y$; в) $|x| + |y| = |x + y|$; г) $|y| - |x| - 4 = 2x + 3y$.

На координатной плоскости xy отметьте множество точек, удовлетворяющих уравнению (**8.07**, **8.08**):

8.07. а) $|x| + |y| = x + y$; б) $|x| + |y| = x - y$; в) $|x| + |y| = y - x$; г) $|x| + |y| = -x - y$.

8.08. а) $xy = |x|$;

б) $xy = |y|$;

в) $(x - 1)y = |y|$;

г) $(x - 1)y = |x - 1|$.

8.09. Постройте на координатной плоскости xy график уравнения:

а) $\dfrac{x}{y} = 1$;

б) $\dfrac{x - y}{x + y - 2} = 0$;

в) $\dfrac{2x + 3y - 5}{x + y} = 0$;

г) $\dfrac{2x^2 - 4x - 2xy + 3y - 5}{x - y} = 2x$;

д) $\dfrac{2x + 3y - 5}{x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2} = 0$;

е) $\dfrac{3x - 2y - 6}{x^2 + 2x + y^2 - 2y - 8} = 0$.

8.10. На координатной плоскости xy найдите множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $\dfrac{x^2 - 9y^2}{(x - 3y)(x + 3y)} = 1$;

б) $(x + 3y - 1)^2 + (x^2 - 3xy - 4y^2) = 0$;

в) $\dfrac{|x + y|}{(x + y)^2} = 1$;

г) $|x^2 - y - 2| + |x^2 + y^2 - 2| = 0$.

8.11. Сравните взаимное расположение данных прямых и определите, каким преобразованием плоскости график первой прямой переводится в график второй прямой:

а) $3x - 7y = 5$ и $3(x - 1) - 7y = 5$;

б) $3x - 7y = 5$ и $3(x - 1) - 7(y + 3) = 5$;

в) $3x - 7y = 5$ и $3x + 7y = 5$;

г) $3x - 7y = 5$ и $-3x - 7y = 5$;

д) $3x - 7y = 5$ и $3x - 7y = -5$;

е) $3x - 7y = 5$ и $7x - 3y = 5$.

8.12. Сравните графики уравнений и определите, каким преобразованием плоскости график первого уравнения переводится в график второго уравнения:

а) $2x - 3y = 12$ и $2|x| - 3y = 12$;

б) $2x - 3y = 12$ и $2x - 3|y| = 12$;

в) $2x - 3y = 12$ и $2|x| - 3|y| = 12$;

г) $2x - 3y = 12$ и $|2x - 3y| = 12$.

8.13. График уравнения $f(x;\ y) = 0$ изображен на рисунке 1. Постройте график уравнения:

а) $f(-x;\ y) = 0$; в) $f(-x;\ -y) = 0$;

б) $f(x;\ -y) = 0$; г) $f(y;\ x) = 0$.

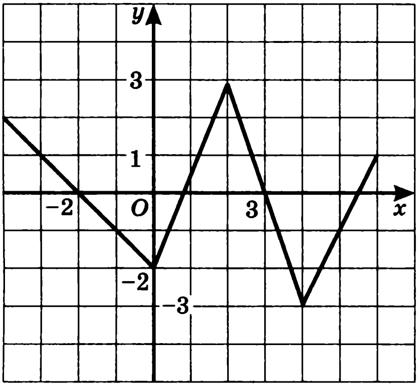


Рис. 1

8.14. На рисунке 2 представлен график уравнения $f(x;\ y) = 0$, который имеет вид четырехугольника, вершины которого — точки с целочисленными координатами. Постройте график уравнения:

а) $f(|x|;\ y) = 0$; г) $f(y;\ |x|) = 0$;

б) $f(x; |y|) = 0$; д) $f(|y|;\ x) = 0$.

в) $f(|x|; |y|) = 0$;

В каждом случае определите, на сколько процентов изменилась площадь соответствующего многоугольника.

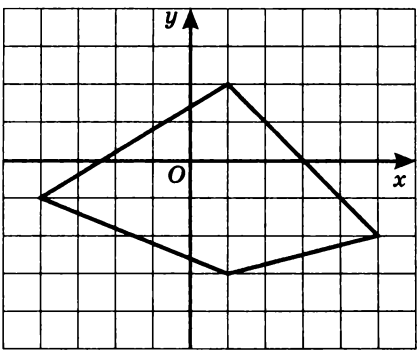


Рис. 2

8.15. График уравнения $f(x;\ y) = 0$, изображенный на рисунке 3, имеет вид многоугольника. Постройте график уравнения и определите площадь соответствующего многоугольника:

а) $f(x + 1;\ y - 1) = 0$;

б) $f(2 - x;\ 1 + y) = 0$;

в) $f\left(|x|;\ -\frac{y}{2}\right) = 0$;

г) $f(|y|;\ -2x) = 0$.

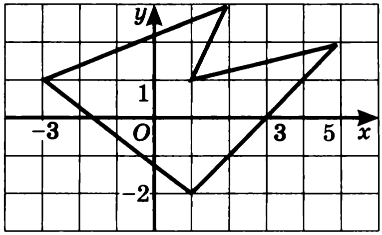


Рис. 3

8.16. Постройте на координатной плоскости xy график уравнения и определите площадь фигуры, которая ограничена этим графиком:

а) $2|x| + 3|y| = 6$;

б) $0{,}5|x| + \frac{1}{3}|y| = 2$;

в) $\frac{1}{3}|x + 5| + \frac{1}{5}|y - 1| = 2$;

г) $\frac{|x - a|}{p} + \frac{|x - b|}{q} = 1$, $p > 0$, $q > 0$.

8.17. Постройте на координатной плоскости xy график уравнения:

а) $3|x| - 4|y| = 12$;

б) $3|x - 1| - 4|y + 2| = 12$;

в) $\frac{|x - 1|}{3} - \frac{|x + 1|}{4} = 1$;

г) $\frac{|x - a|}{p} - \frac{|x - b|}{q} = 1$, $p > q > 1$.

8.18. Постройте на координатной плоскости xy график уравнения и определите наименьший радиус круга, содержащего все точки данного графика:

а) $|x + y| + |x - y| = 4$;

б) $|x + y - 2| + |x - y + 4| = 4$;

в) $|4x - 3y| + |4x + 3y| = 24$;

г) $|4x - 3y - 1| + |4x + 3y - 7| = 24$;

д) $|ax + by| + |ax - by| = 2ab$, $ab > 0$.

8.19. На координатной плоскости xy постройте график уравнения и определите наибольший радиус круга, содержащего хотя бы одну точку данного графика, но не более четырех таких точек:

а) $|x + 2y| + |2x - y| = 3$;

б) $|x - y| + |5x + 7y| = 4$;

в) $|x - 2y + 4| + |x + 4y + 2| = 2$;

г) $|ax + by| + |bx - ay| = b^2 - a^2$, $0 < a < b$.

Постройте на координатной плоскости xy график уравнения (**8.20—8.24**):

8.20. а) $x = y^2$; в) $x = (y + 2)^2$;
б) $x - 3 = y^2$; г) $x + 1 = (y - 3)^2$.

8.21. а) $x - 2 = (y - 1)^2$; в) $x - 2 = (|y| - 1)^2$;
б) $|x| - 2 = (y - 1)^2$; г) $|x| - 2 = (|y| - 1)^2$.

8.22. а) $xy = 2$; в) $x(y + 4) = 2$;
б) $(x - 2)y = 2$; г) $(x + 1)(y - 3) = 2$.

8.23. а) $xy + 2x + 4y = 0$; б) $xy + 2x - 4y = 9$.

8.24. а) $xy = 2$; в) $x|y| = 2$;
б) $|x|y = 2$; г) $|x| \cdot |y| = 2$.

8.25. Постройте на координатной плоскости xa график уравнения:

а) $(x - 3)(a - 1) = 2$; в) $(a - 3)(|x| - 1) = 2$;
б) $(|a| - 3)(x - 1) = 2$; г) $(|x| - 3)(|a| - 1) = 2$.

8.26. Постройте на координатной плоскости ax график уравнения и определите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет на заданном промежутке хотя бы одно решение относительно переменной x:

а) $(x - 3)(a - 1) = 2$, $x \in (5; +\infty)$;
б) $(|a| - 3)(x - 1) = 2$, $x \in (-1; 1)$;
в) $(a - 3)(|x| - 1) = 2$, $x \in [-1; 1]$;
г) $(|x| - 3)(|a| - 1) = 2$, $x \in (-\infty; 5)$.

Постройте на координатной плоскости xy график уравнения (8.27—8.35):

8.27. а) $x^2 = 4y^2$; б) $x \cdot |x| = 4y^2$; в) $x^2 = 4y \cdot |y|$; г) $x \cdot |x| = 4y \cdot |y|$.

8.28. а) $x^2 - 3xy - 4y^2 = 0$; б) $x^2 - 3|x|y - 4y^2 = 0$; в) $x^2 - 3x|y| - 4y^2 = 0$; г) $x^2 - 3|xy| - 4y^2 = 0$.

8.29. а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $(x - 2)^2 + y^2 = 9$; в) $x^2 + (y + 1)^2 = 9$; г) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

8.30. а) $x^2 + 2x + y^2 = 0$; б) $x^2 - 4y + y^2 = 5$; в) $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 4$; г) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$.

8.31. а) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$;
б) $(|x| - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$;
в) $(x - 1)^2 + (|y| - 2)^2 = 16$;
г) $(|x| - 1)^2 + (|y| - 2)^2 = 16$.

8.32. а) $y = \sqrt{4 - x^2}$; б) $y = -\sqrt{4 - x^2}$; в) $|y| = \sqrt{4 - x^2}$; г) $x = \sqrt{4 - y^2}$; д) $-x = \sqrt{4 - y^2}$; е) $|x| = -\sqrt{4 - y^2}$.

8.33. а) $y = \sqrt{1 - x^2}$; б) $y + 2 = -\sqrt{1 - x^2}$; в) $y = -\sqrt{1 - (x - 1)^2}$; г) $|y| = -\sqrt{1 - x^2} + 3$.

8.34. а) $|y + 2| = \sqrt{4 - x^2}$; б) $|y| + 2 = \sqrt{4 - x^2}$; в) $|y| = -\sqrt{4 - x^2} + 2$; г) $|y + 2| = -\sqrt{4 - (x - 1)^2}$.

8.35. а) $y = \sqrt{-x^2 - 2x - 1}$;
б) $y = 1 + \sqrt{-(x - 1)^2(x + 1)^2}$;
в) $y = -1 - \sqrt{-(x - 1)^2(x - 2)^2 \cdot \ldots \cdot (x - 10)^2}$;
г) $(y - 1)^2(x^2 + 2x + 1) + (x - 1)^2(y^2 + 2y + 1) = 0$.

8.36. Постройте на координатной плоскости xa график уравнения:

а) $a = \sqrt{-x^2 + 4x}$; в) $a = \sqrt{-x^2 + 4|x|}$;

б) $|x| = \sqrt{-a^2 + 4a}$; г) $|a| = \sqrt{-x^2 + 4|x|}$.

8.37. Постройте множество точек $(x;\ y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{1}{3}|x + 5| + \frac{1}{5}|y - 1| = 2$, и определите, при каких значениях a среди этих точек найдется хотя бы одна, координаты которой удовлетворяют уравнению:

а) $x = a$; б) $y = a$; в) $x + y = a$; г) $y - x = a$.

8.38. С помощью графиков определите количество решений системы уравнений: $\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

8.39. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ 2x + y = a \end{cases}$ имеет: а) ровно одно решение; б) ровно два решения?

8.40. Постройте на координатной плоскости xy множество точек $(x;\ y)$ таких, что $|x| + 3|y| = 6$. Определите все значения, которые на этом множестве принимает выражение:

а) x; б) y; в) $x + 3y$; г) $x + y$.

8.41. Постройте на координатной плоскости xy множество точек $(x;\ y)$ таких, что $|x - 5| + |y + 2| = 1$. Определите все значения, которые на этом множестве принимает выражение:

а) x; в) $x + y$; д) $2x + 3y$;

б) y; г) $x - y$; е) $\frac{y}{x}$.

8.42. Постройте на координатной плоскости xy множество точек $(x;\ y)$ таких, что $|x - 3| + |y + 3| = 3$. Определите все значения, которые на этом множестве принимает выражение:

а) $-3x - 2y$; в) $x^2 + y^2$;

б) $5x + 7y$; г) xy.

8.43. На координатной плоскости xy постройте график уравнения $|x| + 3|y| = x + y$ и определите, при каких значениях y существует хотя бы одно значение x, удовлетворяющее данному уравнению.

8.44. На координатной плоскости xa постройте график уравнения $2|x| - 3|a| = x - 5a$ и определите, при каких значениях параметра a существует хотя бы одно значение x, удовлетворяющее данному уравнению.

8.45. На координатной плоскости ax постройте график уравнения $2|x + 1| + 3|a - 2| = 5$ и в зависимости от параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие данному уравнению.

8.46. На координатной плоскости xa постройте график уравнения $3|x| + 2 = ax + a$ и определите, при каких значениях a данное уравнение имеет ровно два разных решения относительно переменной.

§ 9. НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Постройте множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих условию **(9.01, 9.02)**:

9.01. а) $x \leqslant 5$; в) $y \geqslant -3$;
б) $x > -4$; г) $y < 2$.

9.02. а) $x + 2y \leqslant 3$; в) $3x + 2y \geqslant -5$;
б) $x - y > -4$; г) $x - 3y < 4$.

9.03. Укажите на координатной плоскости все точки $(x;\ y)$ такие, что выражение $x + 3y - 4$ принимает: а) неположительные значения; б) значения меньше числа -8.

9.04. Не производя построений докажите, что точки $A(-1;\ 2)$ и $B(2;\ 3)$ лежат по одну сторону от прямой $13x + 7y + 6 = 0$, а точки A и $C(-13;\ -11)$ — по разные стороны.

9.05. Пересекает ли прямая $2x + y - 7 = 0$ стороны треугольника с вершинами $A(-1;\ 3)$, $B(0;\ 11)$, $C(-11;\ 7)$, и если пересекает, то какие?

9.06. При каких значениях параметра c точки $A(-1;\ 7)$ и $B(2;\ 11)$ лежат:

а) по одну сторону относительно прямой $3x + cy = 5$;

б) по разные стороны относительно прямой $5x - 4y = c$?

Постройте график уравнения (9.07—9.09):

9.07. а) $\sqrt{3x - y - 1} = \sqrt{2x + y - 1}$;

б) $\sqrt{x + y - 1} = \sqrt{2x - y}$.

9.08. а) $\sqrt{1 - y} = \sqrt{1 - 2x^2}$; б) $\sqrt{y^2 - 1} = \sqrt{2x - 1}$.

9.09. а) $\sqrt{y + 1} = x$; в) $\sqrt{2xy + y^2} = x + y$;

б) $\sqrt{-2x - y - 1} = -x$; г) $\sqrt{2xy + x^2} = x - y$.

9.10. Постройте на координатной плоскости xy множество точек, координаты которых удовлетворяют системе:

а) $\begin{cases} x + y \geqslant 3, \\ 2x - 3y \leqslant 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y \geqslant 1, \\ x + y \leqslant 1, \\ x \leqslant 2y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y \geqslant 3, \\ x + 3y \leqslant -2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y \geqslant 2x, \\ x + y \leqslant 3y, \\ 5x \leqslant 2y - 7. \end{cases}$

Укажите на координатной плоскости xy все точки, координаты которых удовлетворяют условию (9.11—9.12):

9.11. а) $x - 3 \leqslant 0$; б) $2|x - 3| + 2x - 3y \leqslant 0$.

9.12. а) $x - 3 \leqslant 0$; в) $|x - 3| + |y + 2| \geqslant 2x + 5$.

б) $y + 2 \geqslant 0$;

Укажите на координатной плоскости xy все точки, координаты которых удовлетворяют условию, и для каждого значения y выпишите все те значения x, которые удовлетворяют данному неравенству (9.13—9.14):

9.13. а) $x + y < 0$; в) $|x + y| + 2x - y \geqslant 3$;

б) $x + y > 0$; г) $\frac{|x + y|}{x + y}x + |x + y| + y \leqslant 4$.

9.14. а) $x - 2y < 0$; в) $|x - 2y| + |2x + y| \geqslant 5$;

б) $2x + y > 0$; г) $\frac{|2x - y|}{2x - y}y + |2x + y| + x \geqslant 1$.

9.15. Изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $xy \leqslant 2$;

б) $y \leqslant \frac{2}{x}$;

в) $|xy| < 2$;

г) $|x| \cdot y < 2$;

д) $\frac{2}{|y|} < x$;

е) $\frac{1}{|x|} > \frac{y}{2}$.

На плоскости xy постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству **(9.16, 9.17)**:

9.16. а) $xy > -3$;

б) $y \geqslant -\frac{3}{x}$;

в) $\frac{-3}{|y|} < x$;

г) $\frac{-3}{y} < |x|$.

9.17. а) $x \geqslant -4y^2$;

б) $\frac{1}{y^2} \leqslant -\frac{4}{x}$;

в) $2x \geqslant -4y - x^2$;

г) $\frac{1}{2x + 4y} + \frac{1}{x^2} \geqslant 0$.

9.18. На плоскости xa постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству. В ответе укажите множество значений x, которые удовлетворяют данному неравенству для каждого допустимого значения a:

а) $\frac{x - 3}{a + 2} \leqslant 0$;

б) $5 \geqslant \frac{4a + 3x}{x + a}$.

9.19. Укажите на координатной плоскости xy множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $|x| + |y| \leqslant 4$;

б) $|y - 3| + |x + 1| \geqslant 5$;

в) $2|x| + 3|y| \leqslant 6$;

г) $\frac{|x - 3|}{2} + \frac{|y + 1|}{5} \leqslant 1$.

9.20. Укажите на координатной плоскости xa множество точек $(x; a)$, координаты которых удовлетворяют неравенству, и определите все значения a, при которых данное неравенство имеет хотя бы одно решение:

а) $|x| + |a| \leqslant 4$;

б) $|a - 3| + |x + 1| \geqslant 5$;

в) $2|x| + 3|a| \leqslant 6$;

г) $\frac{|x - 3|}{2} + \frac{|a + 1|}{5} \leqslant 1$.

9.21. Укажите на координатной плоскости xa множество точек $(x; a)$, координаты которых удовлетворяют неравенству, и определите все значения a, при которых неравенство имеет единственное решение, и найдите это решение:

а) $|x| + |a| \leqslant 4$;

б) $|a - 3| + |x + 1| \geqslant 5$;

в) $2|x| + 3|a| \leqslant 6$;

г) $\frac{|x - 3|}{2} + \frac{|a + 1|}{5} \leqslant 5$.

9.22. Укажите на координатной плоскости xy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x^2 + y^2 \leqslant 4$;

б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 < 9$;

в) $x^2 - 4x + y^2 \geqslant 5$;

г) $(x - y)^2 + (x + y)^2 < 4x + 8y - 2$.

9.23. Постройте на координатной плоскости xy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $\frac{4 - x^2}{2x + 3y - 6} \geqslant 0$;

б) $\frac{x^2 + y^2 - 4}{|x| + |y| - 2} \leqslant 0$.

9.24. Изобразите на координатной плоскости xy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 1$;

б) $(|x| - 3)^2 + (y - 2)^2 \geqslant 1$;

в) $(x - 3)^2 + (|y| - 2)^2 > 1$;

г) $(|x| - 3)^2 + (|y| - 2)^2 \leqslant 1$.

9.25. Изобразите на координатной плоскости xy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $(||x| - 1| - 3)^2 + (||y| - 2| - 4)^2 \leqslant 25$;

б) $(||x| - 2| - 5)^2 + (||y| - 1| - 12)^2 \leqslant 25$.

9.26. Пусть $(x; y)$ — точка графика уравнения

$$|x + y - 3| + |x - y + 1| = 4.$$

Определите множество значений выражения:

а) x; б) y; в) $x + y$; г) $4x - 7y + 11$.

9.27. Определите все значения параметра a, при которых прямая $y = a$ имеет с графиком уравнения

$$2|x + 1| - 2|x - 2| + |x - 6| = 3y + x$$

единственную общую точку.

9.28. Определите все значения параметра b, при которых прямая $x = b$ имеет с графиком уравнения

$$2|y + 3| - 2|y - 2| + |y - 4| = y + 2x$$

ровно две общие точки.

9.29. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством:

а) $|x| + |y| \leqslant 4$; б) $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

9.30. Найдите площадь треугольника, заданного системой неравенств:

а) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ 2x + 5y \leqslant 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ 3y - x \leqslant 4, \\ y \geqslant -x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y \leqslant 12, \\ y - x \leqslant 12, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y \leqslant 8, \\ y - 6x \leqslant 10, \\ 5y + 8 \geqslant x. \end{cases}$

9.31. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством

$$x^2 + y^2 \leqslant 2(|x| + |\sqrt{3} \cdot y|).$$

9.32. Для всех точек $(x; y)$, удовлетворяющих условию

$$|x - 1| + 3|x - 3| + y \leqslant 1,$$

найдите наибольшее значение выражения $y + 2x$.

9.33. Для всех точек $(x; y)$, удовлетворяющих условию

$$|x^2 + y^2 + 12x| + x^2 + y^2 + 12y = 0,$$

найдите: а) наибольшее значение выражения $y - x$; б) наименьшее значение выражения $x + y$.

9.34. Для всех точек $(x; y)$, удовлетворяющих условию

$$|x^2 + y^2 - 4x| + x^2 + y^2 - 4y = 0,$$

найдите: а) наименьшее значение выражения $x - y$; б) наибольшее значение выражения $x + y$.

9.35. Найдите наименьшее значение выражения $x + y$, если $y \geqslant |5x + 2| + |5x - 3|$.

9.36. Найдите наибольшее значение выражения $5x + y$, если $y \leqslant -(|4x - 8| + |16 - 4x|)$.

9.37. Постройте множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x - 3y)(2x + y) < 0,$$

и укажите все значения y, при которых любое значение x из промежутка $[1; 4]$ удовлетворяет данному неравенству.

9.38. Постройте график уравнения $2y + \left|y - \frac{3}{x}\right| = 4 - \left|\frac{3}{x} - 1\right|$.

Среди полученных точек найдите все точки с наибольшей ординатой и укажите их абсциссы и ординату.

9.39. Постройте график уравнения $|2y + x| - 1 + 3y = |y|$. Среди полученных точек найдите точку с наибольшей ординатой и наименьшей абсциссой.

9.40. Найдите множество значений выражения $x - y$, если x и y удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} |x - y| < 4, \\ -3 < xy < 0. \end{cases}$

§ 10. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С СИСТЕМАМИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

10.01. Переменные x и y связаны уравнением. Выразите x через y и y через x:

а) $x + 2y = 4$; в) $(x - 1)(y + 1) = 1$;

б) $x^2 + y^2 = 2xy$; г) $x^2 - 3xy + 2y^2 + y = 1$.

10.02. Какие значения может принимать выражение $x + y$, если $x^2 + 2xy = 16 - y^2$?

10.03. Какие значения может принимать выражение $x - y$, если $(3x - 3y + 1)(3x + 3y - 1) = 8$?

10.04. Какие значения может принимать выражения $(x + y)^2$ и $(x - y)^2$, если $x^2 + y^2 = 6$, $xy = 1$?

10.05. Известно, что $a + b = 4$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 8$. Найдите $4ab + 5a + 5b$.

10.06. Известно, что $x^2 + 4y^2 = 32$. Найдите: а) $x - 2y$; б) $4y$.

10.07. Известно, что $xy = 1, x^2 + 4y^2 = 32$. Найдите: а) $x + 2y$; б) $x - 2y$; в) $2x$; г) y.

10.08. При каких значениях a переменная y принимает отрицательные значения, если $x + y + z = 17$, $x + z = 2a - 3$?

10.09. Докажите, что значения переменной y, удовлетворяющие уравнению $x^2 + xy + 2y^2 = 16$, ограничены, и определите значение x, если переменная y принимает наибольшее значение.

10.10. Дано уравнение $(x + y)(x + y - 1) = z(x + y - 1)$. Какие значения может принимать переменная z, если:

а) $|x + y| < 1$;
б) $|x + y| > 1$;
в) $|x + y| = 1$?

10.11. Найдите все пары $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^4 + 2x^2y + x^2 + y^2 + y = 0,$$

если переменная y принимает наибольшее целое отрицательное значение.

10.12. Найдите $8u - 7v + 4w$, если $u + v = w + 5$, $2(u + w) = 3v + 1$.

10.13. Найдите значение выражения $x^2y^2(xy + 3y^2)$, если $x + 3y = 10$, $y = \sqrt[3]{\frac{2}{x^2}}$.

10.14. Подберите два действительных числа a и b таких, что их сумма есть рациональное число, а произведение — иррациональное число.

10.15. Подберите два действительных числа a и b таких, что их произведение есть рациональное число, а сумма — иррациональное число.

10.16. Найдите все пары $(x; y)$ натуральных чисел x и y, если $33x + 30y \leqslant 110$.

10.17. Известно, что $x^2 + 2xy + y^2 \leqslant 0$, $y = 1\,234\,567\,109$. Найдите x.

10.18. Найдите все пары $(x; y)$, для которых

$$x^2 + 5y^2 + 4(y + 1) \leqslant 4xy.$$

10.19. Известно, что для неотрицательных чисел x и y выполнены условия $xy \leqslant 30$; $|x - y| \leqslant 7$. Определите, какие значения может принимать их сумма.

10.20. Известно, что для чисел x и y выполнены условия $xy \geqslant -16$; $|x + y| \leqslant 6$. Определите, какие значения может принимать разность этих чисел.

Являются ли равносильными системы уравнений (10.21—10.28):

10.21. $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} 10x - y = 9, \\ 3x - y = 2? \end{cases}$

10.22. $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 6x - 4y = 2? \end{cases}$

10.23. $\begin{cases} xy = 1, \\ x + y = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + 2xy + y^2 = 25? \end{cases}$

10.24. $\begin{cases} xy = 0, \\ x + y = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2y^2 = 0, \\ x + y = 5? \end{cases}$

10.25. $\begin{cases} xy = 0, \\ x + y = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 25? \end{cases}$

10.26. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25, \\ x + y = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 5? \end{cases}$

10.27. $\begin{cases} |x| + |y| = xy, \\ |x + y| = x \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = xy, \\ x + y = x? \end{cases}$

10.28. $\begin{cases} x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = x^2 - 1, \\ |x + y| = 1 - x^2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 = 1, \\ x + y = 0? \end{cases}$

10.29. Найдите все значения параметра a, при которых являются равносильными системы уравнений

$$\begin{cases} x + ay = 3, \\ 3x - y = 2a \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = 3a, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$$

§ 11. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Решите систему линейных уравнений (11.01—11.03):

11.01. а) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y = \frac{11}{18}, \\ \frac{3}{2}x - \frac{4}{3}y = \frac{5}{9}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{4}{3}y = \frac{5}{4}, \\ \frac{9}{5}x - \frac{16}{5}y = 12. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{4}{3}y = \frac{5}{4}, \\ \frac{9}{5}x - \frac{16}{5}y = \frac{3}{4}; \end{cases}$

11.02. а) $\begin{cases} x\sqrt{8} - y\sqrt{2} = 1, \\ x\sqrt{18} + y\sqrt{2} = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x\sqrt{3} + y\sqrt{2} = \sqrt{6}, \\ x\sqrt{15} + y\sqrt{10} = \sqrt{18}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (\sqrt{2} - \sqrt{3})x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})y = \sqrt{6} + 1, \\ (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - (\sqrt{2} - \sqrt{3})y = \sqrt{6} - 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}, \\ -x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = \sqrt{2} - \sqrt{3}. \end{cases}$

11.03. а) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x - 2y = 2, \\ -x + 2y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x - 2y = 2, \\ -x + y = 1. \end{cases}$

11.04. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} ax + y = 1, \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений?

11.05. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} ax + y = 1, \\ 2ax - y = 2 \end{cases}$

а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений?

11.06. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} ax - 2y = a, \\ 2x - ay = 2 \end{cases}$

а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений?

11.07. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (3a - 3)x + 2ay = 6a - 1, \\ x + (a - 2)y = -3 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений?

11.08. Для каждого значения параметра a решите систему

$$\begin{cases} ax + (2a - 1)y = 3a - 1, \\ (a + 1)x + 2y = a + 3. \end{cases}$$

11.09. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x - 2y = 2, \\ -x + ay = 1 \end{cases}$

а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений?

11.10. При каких значениях a система $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x - 2y = a, \\ -x + ay = 1 \end{cases}$

а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений?

Решите системы нелинейных уравнений, сводящиеся к одной или нескольким системам линейных уравнений в результате равносильных преобразований или замены переменных (11.11—11.15):

11.11. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 - 2y^2 = -8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^3 + 3y^3 = 17, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x - 2)^2 + (x - 2y)^2 = 5, \\ (x - 2)^2 - (x - 2y)^2 = -3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^3 + 4x = 1, \\ 2(x + 2)^2 - 3y^3 = 1. \end{cases}$

11.12. а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 3, \\ \dfrac{2}{3x} - \dfrac{3}{2y} = -\dfrac{5}{6}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{2x - 2}{y + 1} + \dfrac{3}{x - y} = 3, \\ \dfrac{x - 1}{y + 1} - \dfrac{6}{x - y} = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{x + y} + \dfrac{2x}{3x + 6y} = 1, \\ \dfrac{2x\sqrt{3}}{3x + 3y} - \dfrac{2x\sqrt{3}}{9x + 18y} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{x} + \dfrac{3x}{y} = 3, \\ \dfrac{2x + 2y}{3x} + \dfrac{2x}{y} = 2. \end{cases}$

11.13. а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 7, \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{y} = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{y + x} = \dfrac{26}{5}, \\ 2x + 2y + \dfrac{3}{x + y} = \dfrac{53}{5}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{x - y + 1} + \dfrac{4y - 2x}{y - 2x} = 7, \\ \dfrac{4x + 8y}{x - y + 1} - \dfrac{2y - x}{y - 2x} = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{y}{x} + \dfrac{2x}{y} = 3, \\ \dfrac{4y}{x} + \dfrac{x}{y} = 5. \end{cases}$

11.14. а) $\begin{cases} (x + y)(x - 2) = 0, \\ x - 2y = -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x - y)(x - 2y) = 0, \\ x^2 - 4y^2 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x + y)(x^2 - 25) = 0, \\ x - 3y = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y^2 + x + y = 0 \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$

11.15. а) $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 + 4x + y + 2 = 0, \\ 4x^2 - 4xy + y^2 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x - y - 3)(x - 2y) = 0, \\ x^2 - 4y^2 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x^2 + 2xy - 3y^2 - 2x - 2y = 0, \\ x^2 - xy - 2y^2 - x - y = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 + x + y = 0, \\ 3x^2 + 3xy - 2y = 6. \end{cases}$

11.16. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = a, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 5 - 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решите систему уравнений *методом подстановки* (11.17—11.23):

11.17. а) $\begin{cases} x + 2y = 11, \\ x^2 + xy - y^2 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 3y = 1, \\ 5x^2 + y^2 = 21; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ xy = 7 - y^2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 7x - y = 1, \\ x^2 + xy + 5y^2 + x + 2y = 312. \end{cases}$

11.18. а) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 - 2xy + x + 2y = -0{,}5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 5, \\ (x^2 - y^2)(x - y) = 45. \end{cases}$

11.19. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 5, \\ x^2 - 3xy - y^2 = 36; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{7x + 3y}{3x + 2y} = 2, \\ x + xy - y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x + 3y}{3x - y} = 1, \\ x^2 + xy - 5y^2 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{5x + 2y}{x + y} = 4, \\ 3x^2 + x + y - y^2 = 14. \end{cases}$

11.20. а) $\begin{cases} x + xy - y = 3, \\ xy + y^2 = x + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2xy + y = 3, \\ 2y + 3xy = x^2 + 4. \end{cases}$

11.21. а) $\begin{cases} x^2 + 2y^4 = 2x + 1, \\ x + y^2 = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - y = 23, \\ x^2 y = 50; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 + y^4 + y^2 = 4, \\ x^2 + 3y^2 = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3 + y^2 = 4, \\ x^3 + y^4 + 3y^2 = 12. \end{cases}$

11.22. а) $\begin{cases} x^2 + y^4 = 5, \\ 2x^4 + y^8 = 33; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x + 1)(y^2 - 2) = 1, \\ (x - 2)(y^2 - 4) = 4. \end{cases}$

11.23. а) $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 3xy + 9y^2 = 12, \\ 231x^2 + 123xy + 321y^2 = 0. \end{cases}$

Найдите все значения параметра *a*, при которых система уравнений имеет единственное решение (11.24, 11.25):

11.24. а) $\begin{cases} x^2 + xy + x - y = a + 4, \\ x + y = a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a^2 - 1, \\ x^2 + y = a. \end{cases}$

11.25. а) $\begin{cases} x^2 + xy + ax + y = -6, \\ y^2 + xy + x + ay = -6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} axy + x - y = -1{,}5, \\ xy + x + 2y = -1. \end{cases}$

Решите систему уравнений *методом алгебраического сложения* (11.26—11.32):

11.26. а) $\begin{cases} xy + y^2 = 1, \\ xy + 2y^2 - 2y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 + xy + y^2 = 3, \\ x^2 + xy + y^2 + 4x = 5. \end{cases}$

11.27. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y = 3, \\ x^2 + y^2 + 10x - 2y = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 6, \\ 2x^2 + y^2 + 3x - 2y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2, \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 34; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1, \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 21 - 4\sqrt{5}. \end{cases}$

11.28. а) $\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x + 2y - 2 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - x - y = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x + 2y - 2 = -1, \\ 3x^2 - 3xy + 3y^2 - x - y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 11xy + y^2 - 3x - 6y + 18 = 0, \\ 2x^2 - 15xy + y^2 - 4x - 8y + 24 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y + 2 = 0, \\ 3x^2 - 6xy + 2y^2 - 3x - 2y + 8 = 0. \end{cases}$

11.29. а) $\begin{cases} x^2 = x - 2y, \\ y^2 = 2x - y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + 2x = y^2 - 1, \\ y^2 - 4y = x^2 - 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y^2 = 2x - y, \\ y + x^2 = 2y - x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x(x + y)^2 = 2 + x + y^2, \\ x^2 + y^2 = 2x^2y + xy^2 - 1. \end{cases}$

11.30. а) $\begin{cases} x^2 + 4y = 28, \\ y^2 + 12x = -68; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 12y = 40, \\ x^2 - 2xy + 4x + 12 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y^2 = 1, \\ x^2 + 2y^4 - 2x = 8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^3 + y^2 = 4, \\ x^3 + y^4 + 3y^2 = 12; \end{cases}$

д) $\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 4, \\ xy(x - y) = -2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} (3x + y)(9x^2 + y^2) = 13, \\ xy(3x + y) = -2. \end{cases}$

11.31. а) $\begin{cases} xy + y^2 = 1, \\ xy + 2y^2 - 2y = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1, \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 29; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x + 2y - 2 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - x - y = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1, \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 21 - 4\sqrt{5}. \end{cases}$

11.32. а) $\begin{cases} 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y + 2 = 0, \\ 3x^2 - 6xy + 2y^2 - 3x - 2y + 8 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x(x + y)^2 = 2 + x + y^2, \\ x^2 + y^2 = 2x^2y + xy^2 - 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y^2 = 2x - y, \\ y + x^2 = 2y - x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 12y = 40, \\ x^2 - 2xy + 4x + 12 = 0. \end{cases}$

Решите систему уравнений, используя теорему, обратную теореме Виета (**11.33, 11.34**):

11.33. а) $\begin{cases} xy = 3, \\ x + y = -4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = 7, \\ x + y = -\dfrac{16}{3}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 25, \\ x + y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy = \dfrac{7}{4}, \\ x + y = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

11.34. а) $\begin{cases} xy = 3, \\ 5x + 2y = 11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2xy = 3, \\ 5x + 4y = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 6, \\ 5x - 2y = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy = 2{,}6, \\ 5x + 2y = 2\sqrt{30}. \end{cases}$

11.35. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = 2a - 4 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение;
б) имеет ровно два решения;
в) не имеет решений.

11.36. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 3x + y = a, \\ 3xy = a - 1 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение;
б) имеет ровно два решения;
в) не имеет решений.

11.37. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 3x - 2y = a + 1, \\ xy = a - 47 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение;
б) имеет ровно два решения;
в) не имеет решений.

11.38. Для каждого значения параметра a решите систему уравнений $\begin{cases} x + ay = 1, \\ xy = a. \end{cases}$

Решите систему уравнений, используя метод почленного умножения или деления (**11.39—11.41**):

11.39. а) $\begin{cases} x^2y^5 = 1, \\ x^5y^2 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x - y)^2(x + 2y) = 4, \\ (x - y)(x + 2y)^2 = 16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2y^6 = 8, \\ x^6y^2 = 32; \end{cases}$ д) $\begin{cases} xy = 1, \\ yz = 2, \\ zx = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x + y)(2x - y) = 8, \\ (x + y)(2x + y) = 24; \end{cases}$ е) $\begin{cases} xy^2 = 1, \\ y^2z = 2, \\ z^2x = 8. \end{cases}$

11.40. а) $\begin{cases} x^3 + xy^2 = 5, \\ y^3 + x^2y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a + aq + aq^2 = 6, \\ a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = 12. \end{cases}$

11.41. а) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^3 - y^3 = 9 - x^2y + xy^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 2xy + 3xy^3 + 6y^3 = 30, \\ x^2 - 2xy + 3xy^2 - 6y^3 = 6. \end{cases}$

Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих данному уравнению, сведением его к системе уравнений (11.42, 11.43):

11.42. а) $x + y = xy$;

б) $x(y^2 + 1) = 34$;

в) $x^2 + y^2 = 6y - 9$;

г) $x^2 + 4y^2 - 4x - 16y + 20 = 0$;

д) $|x - 1| + |y - 2| = 1$;

е) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$;

ж) $x^3 + x^2y + y^3 = 0$;

з) $x^2 + xy - 6y^2 + x - 2y = 7$.

11.43. а) $2x^2 + 5y^2 - 6xy + 6y - 2x + 5 = 0$;

б) $5x^2 + 10y^2 + 2xy + 6x + 4y + 2 = 0$;

в) $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4$;

г) $x^4 - 2x^3 + x^2 + y^2 - 4y + 4 = 0$.

11.44. **Найдите все тройки чисел x, y, z, удовлетворяющих данному уравнению, сведением его к системе уравнений:**

а) $(x - y + 1)^2 + (x + 2y - z)^2 + 5y^2 = 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$;

в) $5x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz - 4yz + 2y - 2z + 1 = 0$;

г) $12x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 8yz + 12x - 8y - 4z + 5 = 0$;

д) $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 6$.

Решите систему уравнений (11.45—11.47):

11.45. а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ y + z = 4, \\ z + x = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y + z = a, \\ z + x = b, \\ x + y = c; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y + z - x = a, \\ z + x - y = b, \\ x + y - z = c; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2y + 3z = 4, \\ 3z + x = 5. \end{cases}$

11.46. а) $\begin{cases} x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z = \frac{25}{18}, \\ \frac{1}{3}x + y - \frac{1}{6}z = \frac{5}{3}, \\ -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y + z = \frac{1}{4}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z = \frac{25}{18}, \\ \frac{1}{3}x + y - \frac{1}{6}z = \frac{5}{3}, \\ \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{55}{18}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{3}x - y - z = \frac{5}{3}, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{4}z = \frac{7}{4}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z = \frac{25}{18}, \\ \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z = \frac{25}{12}, \\ 0{,}3x + 0{,}1y - 0{,}05z = \frac{5}{12}. \end{cases}$

11.47. а) $\begin{cases} x\sqrt{2} - y - z = 2 - 2\sqrt{2}, \\ x + y\sqrt{2} - z = 2, \\ x + y + z\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x\sqrt{5} - y + z\sqrt{2} = \sqrt{3}, \\ x\sqrt{20} + 2y + z\sqrt{8} = -\sqrt{3}, \\ 3x\sqrt{5} + y + 3z\sqrt{2} = 0. \end{cases}$

§ 12. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ. СИММЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Решите систему симметрических уравнений (12.01—12.06):

12.01. а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ xy(x + y) = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y + 4xy = 6, \\ xy(x + y) = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x + y)xy = 6, \\ x + y + |x + y| = 6. \end{cases}$

12.02. а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 4, \\ xy(x + y) = 2. \end{cases}$

12.03. а) $\begin{cases} xy - 3x - 3y = -8, \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y = -12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy - 7x - 7y = -9, \\ x^2 + y^2 + 11(x + y) = 16; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy - 3x - 3y = -5, \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} xy - x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

12.04. а) $\begin{cases} (x + y)^2 + (x - y)^2 - x - y = 2, \\ (x - y)^2 + x^2 + y^2 + x + y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 + xy + 2y^2 - x - y = 3, \\ x^2 + y^2 - 5xy + 3x + 3y = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ xy(x^2 + y^2) = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^4 + y^4 = 17. \end{cases}$

12.05. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x^3 + y^3 = 19; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^3 + y^3 - xy + 2x + 2y = 5, \\ xy + x + y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x + 2y)(x + 3y) - 2x - 5y = 1, \\ (x + 2y)^2 + (x + 3y)^2 = 13; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2(x + 1)^2 + (x + 1)(y + 2) + 2(y + 2)^2 - x - y = 6, \\ (x + 1)^2 + (y + 2)^2 - 5(xy + x + y + 2) + 3x + 3y = -10. \end{cases}$

12.06. $\begin{cases} x + y + xy = -7, \\ (x - y)^2 + x + y = 22. \end{cases}$

Решите системы, содержащие однородные уравнения относительно двух переменных и сводящиеся к ним (12.07—12.12):

12.07. а) $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0, \\ x + y = 22; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + xy - 3y^2 = -9, \\ x^2 - y^2 - 2xy = -7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 + xy - 3y^2 = 0, \\ |x^2 - y^2| + xy = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 7, \\ y^2 + xy = 6. \end{cases}$

12.08. а) $\begin{cases} x^2 + 4xy - 3y^2 = 2, \\ x^2 - xy + 5y^2 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 7. \end{cases}$

12.09. а) $\begin{cases} x^2 + x(y - 1) - 2(y - 1)^2 = 0, \\ x^2 + xy + y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - xy + y^2}{2x^2 + xy - y^2} = -\dfrac{7}{4}, \\ 4xy - x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + x(y - 1) - 2(y - 1)^2 = 0, \\ x + y^2 = 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + x(y - 1) + (y - 1)^2 = 3, \\ x^2 + y^2 = 2y + 1. \end{cases}$

12.10. а) $\begin{cases} 2p^2 + pq + 3q^2 = 14, \\ p|q| + |p|q = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2 - 2|x|y = 3, \\ x^2 + 3|x|y = -2. \end{cases}$

12.11. а) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y} + \dfrac{2}{x+y} = \dfrac{4}{x}, \\ x^2 + 2y^2 = 72; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{y+1} = \dfrac{10}{x+y+2}, \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 - 2xy - 5y = 4. \end{cases}$

12.12. а) $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 - xy} + \dfrac{4}{y^2 - xy} = \dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{8}{x^2 - xy} - \dfrac{1}{y^2 - xy} = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x^2 + 6xy} + \dfrac{3}{4y^2 - 4xy} = \dfrac{25}{14}, \\ \dfrac{3}{4x^2 + 12xy} - \dfrac{1}{2y^2 - 2xy} = -\dfrac{4}{7}. \end{cases}$

12.13. Решите однородную систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + y = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + 3z = 0, \\ x + 2y + 3z = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y - 5z = 0, \\ 4x - y + z = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + y - 5z = 0, \\ 4x - y + z = 0, \\ 3x - 2z = 0. \end{cases}$

12.14. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + 4xy + 3y^2 = 0, \\ 2x + y = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0, \\ x + 2y = 15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 5y^2 = 0, \\ 4x^2 - xy + y^2 = 9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 3xy + 4y^2 = 2. \end{cases}$

12.15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение. Найдите это решение:

а) $\begin{cases} x + y = 2a, \\ x + y + 4xy = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 8a, \\ (x + y)xy = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = -4a, \\ x + y - 4xy = -12; \end{cases}$

г) $\begin{cases} xy = a, \\ (x + y)xy = 54. \end{cases}$

12.16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно три решения система уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x + y = xy; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = a, \\ 2x + 2y + xy = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x + y + xy = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = -1, \\ x + y + xy = a. \end{cases}$

§ 13. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ. СИСТЕМЫ С МОДУЛЯМИ

Решите систему иррациональных уравнений (13.01—13.10):

13.01. а) $\begin{cases} \sqrt{x + 2y} = 2, \\ \sqrt{x - y} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{x - y}} = 1, \\ x^2 + xy - 4y^2 = 4. \end{cases}$

13.02. а) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + xy} = 2x, \\ \sqrt{6x + y} = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

13.03. а) $\begin{cases} \sqrt{x + 2y - 4} = \sqrt{x}, \\ \sqrt{y + 2x - 4} = \sqrt{y}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x + y - 4} = \sqrt{x + y^2 - 4}, \\ x^2 + xy = 30. \end{cases}$

13.04. а) $\begin{cases} \sqrt{-x - y} = \sqrt{4x - y}, \\ y^2 + xy + 5y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{3x - y + 1} = \sqrt{x + 2y + 1}, \\ 2x^2 + 6xy + 3y = 8. \end{cases}$

13.05. а) $\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y-2}, \\ x - y + 2 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{y-2} = 0, \\ y - x = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x^2 - y + 1} = \sqrt{y}, \\ 2y - x^2 = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + xy} = \sqrt{x + y + 1}, \\ \sqrt{x+y} = \sqrt{3 - xy}. \end{cases}$

13.06. а) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-y} = 5, \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{1-y} = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x} - y^2 = 2, \\ 2y^4 - 3y^2\sqrt{x} + 3x = 20; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} + 2\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = 3, \\ x^2 + xy + y = 49; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + 3\sqrt{y} = 18, \\ y + 3\sqrt{x} = 18. \end{cases}$

13.07. а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+4y}{x+y}} = 2, \\ \sqrt{\dfrac{x^2+1}{y}} = \sqrt{x+y}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x - 2y + 9} = 3\sqrt{\dfrac{x}{2y}}, \\ \sqrt{\dfrac{2x+7y}{x-y}} = 3\sqrt{\dfrac{2y}{x}}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{y} + 2\sqrt{x+2} = 2, \\ y + 4\sqrt{x+2} = 28; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 5, \\ 9y + x + 3\sqrt{xy} = 19. \end{cases}$

13.08. а) $\begin{cases} x + 2y = 2, \\ \sqrt{x^2+1} + y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y^2 = 2, \\ \sqrt{y^2 + 4x} + x = 3. \end{cases}$

13.09. а) $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6, \\ \sqrt{x+y} - y + x = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x+2y} - \sqrt{x+5y} = 1, \\ \sqrt{x+5y} + x - y = 8. \end{cases}$

13.10. а) $\begin{cases} \sqrt{2x - y} + \sqrt{2x + y} = 5, \\ \sqrt{4x^2 - y^2} = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x + 4y} + 2\sqrt{x - 4y} = 5, \\ \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2. \end{cases}$

13.11. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x - 1} - \sqrt{y + 1} = 1, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $2x_0 + 3y_0$.

13.12. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x - 2} - \sqrt{y + 1} = 1, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $x_0 - y_0$.

13.13. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5\sqrt{x - 2} - 4\sqrt{y - 1} = 1, \\ 2x + y = 8. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $x_0 + 2y_0$.

13.14. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt{x + 2} - 2\sqrt{y - 3} = 1, \\ 2x + 5y = 18. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $x_0 - y_0$.

13.15. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + y} = x - y, \\ x + 5y = 8. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $x_0 - y_0$.

13.16. Пуст $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + y + 2} = x - y, \\ x + 5y = 2. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $2x_0 + y_0$.

13.17. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x - 2y + 3} = x - y - 2, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $x_0 - 2y_0$.

13.18. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x - 3y + 3} = x - y - 1, \\ x - 2y = 5. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $x_0 \cdot y_0$.

13.19. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2x + 3y - 4} = 2x + y - 4, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $x_0 \cdot y_0$.

13.20. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + y} = \sqrt{3x - y - 4}, \\ x^2 + xy = 12. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $x_0 + 2y_0$.

13.21. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2x + y - 1} = \sqrt{6x - y - 3}, \\ 2x^2 + xy - x = 6. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $5x_0 \cdot y_0$.

13.22. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2y - x - 5} = \sqrt{x + 6y - 15}, \\ 2y^2 - xy + 2x - 9y = -4. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $-3x_0 \cdot y_0$.

13.23. Пусть $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{4y + x - 5} = \sqrt{-x + 12y - 15},\\ 4y^2 + xy - x - 9y = -2.\end{cases}$$

Найдите значение выражения $4y_0 - x_0$.

13.24. Пусть $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{4x - y - 9} = \sqrt{12x + y - 27},\\ 4x^2 - xy - 17x + 2y = -15.\end{cases}$$

Найдите значение выражения $4x_0 + 3y_0$.

13.25. Пусть $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{2x + y - 6} = \sqrt{-2x + 3y - 30},\\ y^2 + 2xy - 14y - 16x = -36.\end{cases}$$

Найдите значение выражения $2x_0 + y_0$.

13.26. Решите систему иррациональных уравнений:

а) $$\begin{cases}\sqrt{y} - 4 + x = \dfrac{\sqrt{x + y} + \sqrt{x + y - 9} + 2}{\sqrt{y} - x + 4},\\ 9 + (y - 5)^2 = x + y;\end{cases}$$

б) $$\begin{cases}y - 2x + 6 = \dfrac{\sqrt{x + y - 1} + 4\sqrt{x - y}}{y + 2x - 6},\\ y + \sqrt{x - y} = 5 + \sqrt{x - y - 1} = (x - 3)^2.\end{cases}$$

13.27. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}\sqrt{x} + y = a,\\ x + y = 1\end{cases}$ имеет:

а) единственное решение; б) ровно два решения.

13.28. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}\sqrt{x} + y = a,\\ x + y = 1\end{cases}$ не имеет решений.

13.29. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4,\\ x + y = a\end{cases}$

а) не имеет решений;

б) имеет единственное решение;

в) имеет ровно два решения.

Решите систему линейных уравнений, содержащих модуль (**13.30—13.33**):

13.30. а) $\begin{cases} |x| + 3y = 1, \\ 3x - y = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}5x - |y - 1| = -1, \\ y - x = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |2x + 3y| + 2x = 6, \\ 0{,}8x + 0{,}6y = 1{,}2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} |x - y| - y = -1, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$

13.31. а) $\begin{cases} |x| + y = 1, \\ x - 2|y| = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x + 2| - y = -2, \\ x + 3|y - 4| = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x + 2| - y = -2, \\ x + 3|y - 4| = 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} |x + 2| - y = -2, \\ x + 3|y - 6| = 4. \end{cases}$

13.32. а) $\begin{cases} |x - y| - y = -1, \\ x - 2|y| = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x + y - 1| + y = 1, \\ x + 2|y| = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |2x - y| + |x + 2y| = 3, \\ 3x + y = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y - |x| = 1{,}5, \\ |x| - |y - 1{,}5| = 1{,}5. \end{cases}$

13.33. а) $\begin{cases} |x - y| + |x + y - \sqrt{3}| = \sqrt{3}, \\ |x - y| - |y - \sqrt{3}| = -\sqrt{3}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x - y| - |y| = -1, \\ 2|x - y| + y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x - y| - |y| = -1, \\ |x - y| - y = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} |x - y| - 2|x + y| = 1, \\ 3|x - y| + |x + y| = 10. \end{cases}$

13.34. Найдите количество решений системы $\begin{cases} |x + 2| - y = -2, \\ ax + 3y = 3 \end{cases}$

для каждого значения параметра a.

13.35. Найдите количество решений системы $\begin{cases} |x + a| - y = -2, \\ x + 3y = 3 \end{cases}$ для каждого значения параметра a.

13.36. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = -2, \\ x + 3|y + 4a| = 1 \end{cases}$ для каждого значения параметра a.

13.37. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x + 2| - y = -2, \\ x + 3|y - 4| = a \end{cases}$ для каждого значения параметра a.

Решите систему нелинейных уравнений, содержащих модуль **(13.38—13.40)**:

13.38. а) $\begin{cases} xy = 3, \\ x + |y| = -4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x|y| = \dfrac{7}{4}, \\ x + |y| = 4\sqrt{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 25, \\ |x + y| = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} |x|y = 7, \\ x + |y| = -\dfrac{16}{3}. \end{cases}$

13.39. а) $\begin{cases} x + y + 4xy = 6, \\ xy|x + y| = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x + y)xy = 2, \\ x + y + |x - y| = 2. \end{cases}$

13.40. а) $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ |x - y| - 2xy = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 2y - 3xy = 0, \\ |x - y| - 2xy = -3. \end{cases}$

13.41. Найдите все значения параметра a, при которых система имеет ровно четыре решения:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y + |x| = a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 1 - \sqrt{|x - 1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 79y^2 + x^2 + 4a = 2x. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ y + 4 = |x|; \end{cases}$

13.42. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений имеет решения:

а) $\begin{cases} x - a = 2\sqrt{y}, \\ y^2 - x^2 + 2x + 8y + 15 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x^2 + 12x + (y - 2a)^2 = 16, \\ \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{-xy}} = 1. \end{cases}$

13.43. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений имеет ровно два решения:

$$\begin{cases} x + \sqrt{y - a - 2} = 0, \\ y^2 - x^2 = a(2x + a). \end{cases}$$

§ 14. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ СИТУАЦИЙ

Задачи на движение

14.01. Если велосипедист увеличит скорость на 10 км/ч, то при прохождении некоторого пути получит выигрыш во времени, равный 5 мин. Если же он уменьшит свою скорость на 5 км/ч, то на том же участке потеряет 4 мин. Определите скорость велосипедиста и длину пути.

14.02. Велосипедист движется по пути из пункта A в пункт B, состоящем из ровных участков, спусков и подъемов. На ровной дороге скорость велосипедиста составляет 12 км/ч, на подъемах — 8 км/ч и на спусках — 15 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B велосипедист тратит 5 ч, а на обратный путь — из B в A — 4 ч 39 мин, а суммарная длина ровных участков пути составляет 28 км. Определите общую длину подъемов и общую длину спусков.

14.03. Дорога, соединяющая пункты A и B, имеет длину 78 км и состоит из спусков, подъемов и ровных участков. На пути из A в B длина спусков составляет 0,7 длины подъемов. Велосипедист, скорость которого по ровной дороге составляет 25 км/ч, 15 км/ч на подъемах и 30 км/ч на спусках, едет из A в B и возвращается обратно, не делая при этом остановок. Известно, что разница во времени, которое он потратил на обе поездки (из A в B и из B в A), составляет 24 мин. Определите длину ровного участка дороги и время, затраченное на путь из B в A.

14.04. Дорога от пункта A до пункта B длиной 11,5 км идет вначале в гору, потом по ровному участку и затем под гору. Пешеход, следуя из A в B, прошел всю дорогу за 2 ч 54 мин, а на обратную дорогу затратил 3 ч 6 мин. Скорость его подъема в гору — 3 км/ч, по ровному участку — 4 км/ч, под гору — 5 км/ч. На каком протяжении дорога идет по ровному участку?

14.05. Расстояние между городами A и B равно 900 км. Два поезда отправляются одновременно, один из A в B, а другой из B в A. Они встречаются в некотором пункте C. Первый поезд прибывает в город B через 4 ч после встречи со вторым, а второй в город A через 16 ч после встречи. Определите скорость поездов и расстояние AC.

14.06. На перегоне от пункта A до пункта B поезд шел со скоростью на 10 км/ч меньше намеченной. Поэтому он пришел в пункт B на 24 мин позже расписания. Перегон от B до C, который на 30 км длиннее перегона от A до B, поезд прошел со скоростью, указанной в расписании, и прибыл в C через 2,5 ч после выхода из B. За какое время состав должен был пройти перегон AB по расписанию, если скорость поезда на всех перегонах одинакова?

14.07. Два автобуса выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 1764 км. В пункт C, расположенный на расстоянии 900 км от A, второй автобус прибыл на 1 ч раньше первого. С какой скоростью двигались автобусы, если известно, что второй автобус может ликвидировать отставание в 60 км от первого автобуса за 10 ч?

14.08. Две машины одновременно вышли из пунктов A и B, при этом до пункта C первая машина должна проехать 216 км, а вторая — 252 км. Известно, что в пункт C первая машина пришла на 1 ч позже второй, а на весь путь от A до B первая машина тратит на 4 ч 20 мин больше, чем вторая на путь от B до A. С какой скоростью двигались машины?

14.09. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист и стал двигаться с постоянной скоростью. В тот момент, когда он проехал 0,25 часть пути от A до B, из B в A выехал мотоциклист. Прибыв в A, он, не задерживаясь, повернул обратно и прибыл в пункт B одновременно с велосипедистом. Время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из A в B. Считая скорость мотоциклиста при движении из A в B и из B в A различной, определите, во сколько раз скорость мотоциклиста при движении из A в B больше скорости велосипедиста.

14.10. Два лыжника движутся из пункта A в пункт B с постоянной скоростью и приходят в B одновременно. Известно, что первый лыжник вышел из A на 1 ч раньше, чем второй. Если бы первый находился в пути столько времени, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то второй лыжник прошел бы на 11 км больше, чем первый. Найдите скорость лыжников, если расстояние между A и B равно 30 км.

14.11. Два пешехода вышли одновременно: первый — из пункта A в B, второй — из пункта B в A. Когда расстояние между ними сократилось в 6 раз, из B в A выехал велосипедист. Первый пешеход встретился с ним в тот момент, когда второй прошел $\frac{4}{9}$ расстояния между B и A. В пункт A велосипедист и в пункт B первый пешеход прибыли одновременно. Определите отношение скорости каждого пешехода к скорости велосипедиста, если их скорости постоянны.

14.12. Из пункта A в пункт B по течению реки отплывает лодка. Одновременно с ней из пункта B в пункт A отправляется катер. Прибыв в пункт A, катер, не задерживаясь, повернул обратно в пункт B, а из пункта B также без остановок отправляется в пункт A. На этом последнем участке маршрута катер опять встречает лодку, которая к этому моменту прошла 0,75 части пути от пункта A до пункта B. Скорость лодки по течению в 9 раз больше ее скорости против течения. Определите, во сколько раз скорость катера при движении из пункта A в пункт B больше скорости лодки, движущейся по течению.

14.13. Два мотоциклиста выехали из города B в одном направлении: первый в 8 ч утра, второй в 10 ч 50 мин. После того как второй догнал первого, они еще ехали 2,5 ч.

В момент остановки оказалось, что второй обогнал первого на 30 км. В котором часу второй догнал первого, если скорость первого равна 0,6 скорости второго? Какое расстояние мотоциклисты проехали до встречи?

4.14. Два велосипедиста одновременно выехали навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 270 км. Второй велосипедист проезжает в час на 1,5 км меньше, чем первый, и встречается с ним через столько часов, сколько километров в час делает первый. Найдите скорость каждого велосипедиста.

4.15. Из городов M и N, расстояние между которыми 70 км, одновременно навстречу друг другу выехали автобус и велосипедист и встретились через 1 ч 24 мин. Продолжая движение с той же скоростью, автобус прибыл в город N и через 20 мин отправился в обратный рейс. Найдите скорости автобуса и велосипедиста, если известно, что автобус обогнал велосипедиста через 2 ч 41 мин после первой встречи.

4.16. Пункты A и B соединены двумя дорогами, одна из которых на 3 км короче другой. Из пункта B в пункт A по более короткой дороге вышел пешеход и одновременно из пункта A по той же дороге выехал велосипедист. Пешеход и велосипедист одновременно прибыли в пункт A через 2 ч после начала движения. За это время пешеход прошел один раз путь от B до A, а велосипедист 2 раза проехал в одном направлении по замкнутому пути, образованному двумя дорогами. Найдите скорость пешехода, если их вторая встреча произошла на расстоянии 3,5 км от пункта B.

4.17. Из города A в город B одновременно выехал автобус и вышел турист. Когда турист прошел десятую часть пути, из города A в том же направлении выехал велосипедист. Автобус, прибыв в B, сразу же отправился обратно и вернулся в город A в тот момент, когда велосипедисту осталось проехать третью часть пути до города B. Скорость велосипедиста на 20 км/ч меньше скорости автобуса, а скорость туриста на 2 км/ч меньше пятой части скорости автобуса. Найдите скорость автобуса.

4.18. В полночь из пункта A в пункт B по течению реки отправился катер, а из B в A в тот же момент вышла лодка. Лодка была в пути не менее суток. Катер, дойдя до пункта B, сразу повернул назад и возвратился в пункт A не позднее 10 ч 48 мин того же дня. Первая встреча катера и лодки состоялась в 4 ч утра. Собственная скорость катера (скорость в стоячей воде) втрое больше собственной скорости лодки. Когда катер прибыл в пункт B?

14.19. Автомобиль выезжает из пункта A в пункт B и, доехав до B, сразу же возвращается обратно в пункт A. Через 3 ч после выезда автомобиль находился на расстоянии 50 км от B, а еще через 1 ч — в 80 км от пункта A. Найдите скорость автомобиля, если известно, что на весь путь было затрачено менее 5 ч.

14.20. Из пункта A в пункт B одновременно выезжают три автомобиля. Скорость первого автомобиля на 5 км/ч больше скорости второго и на 6 км/ч меньше скорости третьего. При этом третий автомобиль затрачивает на путь от A до B на полчаса меньше, чем первый, и на 1 ч меньше, чем второй. Найдите расстояние между пунктами A и B.

14.21. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два мотоциклиста. Они встретились в 14 ч 48 мин. Если бы первый мотоциклист увеличил скорость в 1,5 раза, то они встретились бы в 14 ч. Если бы второй мотоциклист увеличил скорость в 2 раза, то встреча произошла бы в 13 ч. В котором часу они выехали?

14.22. Велосипедист движется по окружности, длина которой l. Каждые m секунд его догоняет мотоциклист, движущийся в том же направлении и по той же окружности. Если бы они двигались навстречу друг другу, то встречались бы каждые n секунд. Определите скорости велосипедиста и мотоциклиста.

14.23. Два спортсмена бегут по круговой дорожке стадиона, каждый с некоторой постоянной скоростью. Начав одновременно бег из двух диаметрально противоположных точек и перемещаясь в противоположных направлениях, они в первый раз встречаются в точке M, находящейся в 40 м от B, и во второй раз — в точке C, находящейся в 20 м от A. Известно, что между встречами бегунов прошло 20 с. Определите длину дорожки стадиона, по которой совершается бег, и скорости бегунов в м/с.

14.24. Два пешехода идут навстречу друг другу: один из пункта A, другой из пункта B. Первый выходит из A на 6 ч позже, чем второй из пункта B, и при встрече оказывается, что он прошел на 12 км меньше второго. Продолжая после встречи дальнейший путь с той же скоростью, первый приходит в B через 8 ч, а второй в пункт A через 9 ч. Определите расстояние от A до B и скорости каждого пешехода.

14.25. Три конькобежца одновременно стартуют из одного и того же места круговой дорожки, причем второй и третий в направлении, противоположном направлению бега первого. Первый конькобежец сначала встретил второго, а еще через 5 с — третьего. Известно, что второй конькобежец после старта догнал третьего, обойдя его на один круг, через 2,5 мин. Считая скорости конькобежцев постоянными, определите, через сколько секунд после старта первый конькобежец встретится со вторым.

14.26. Три пункта A, B и C расположены на вершинах равностороннего треугольника со сторонами 168 км. Из пункта A в пункт B выезжает машина со скоростью 60 км/ч, из пункта B в пункт C одновременно выезжает машина со скоростью 30 км/ч. Через сколько времени после отправления расстояние между машинами будет минимальным?

Задачи на работу

14.27. Для загрузки вагона были выделены две бригады грузчиков. Если ко времени, за которое может самостоятельно загрузить вагон первая бригада, прибавить время, за которое может самостоятельно загрузить вагон вторая бригада, то получится 12 ч. Определите время работы первой и второй бригад, если разность его составляет 45% времени, за которое обе бригады могут загрузить вагон, работая вместе.

14.28. Три бригады маляров выполняют одинаковую работу, но имеют разную производительность. Производительность трех бригад, работающих одновременно, в 1,5 раза выше производительности первой и второй бригад, работающих вместе. Сменное задание для первой бригады вторая и третья бригады, работая совместно, могут выполнить на 4 ч 48 мин быстрее, чем его выполняет первая бригада. Это же задание вторая бригада выполняет на 2 ч быстрее по сравнению с первой бригадой. Найдите время выполнения своего сменного задания первой бригадой.

14.29. Насос может заполнить резервуар за 10 ч. Если подключить новый насос, производительность которого на 250 л/ч больше производительности старого насоса, то он наполнит резервуар вдвое большего объема за 16 ч. За сколько часов два новых насоса наполнят резервуар объемом 40 000 л?

14.30. Для откачивания воды к бассейну подключены два насоса A и B различной производительности. Сначала включили один насос A, потом, когда из наполненного бассейна откачали четверть всей воды, начал работать второй насос. Тогда оставшаяся часть воды была откачана за время на 1 ч больше того, которое понадобилось для откачивания воды из четверти бассейна насосом A. При совместной работе обоих насосов наполненный бассейн стал бы пустым на полчаса раньше, чем в рассматриваемом случае. За какое время каждый насос откачивает из бассейна всю воду, работая самостоятельно?

14.31. Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго, другого объема, за 11 ч. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем четверть второго, то работа заняла бы 18 ч. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?

14.32. Двое рабочих получили задание. Второй приступил к выполнению на один час позже первого. Через 3 ч, после того как первый приступил к работе, им осталось выполнить $\frac{9}{20}$ всего задания. По окончании работы оказалось, что каждый выполнил половину задания. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить все задание?

14.33. Одна снегоочистительная машина может убрать улицу за 1 ч, а другая — за 75% этого времени. Начав уборку одновременно, обе машины работали вместе 20 мин, после чего первая машина сломалась и прекратила работу. Сколько нужно времени, чтобы вторая машина одна закончила работу?

14.34. При одновременном действии двух труб бассейн наполняется водой за 40 ч. Если бы $\frac{2}{3}$ бассейна наполнила первая труба, а потом остальную часть вторая труба, то потребовалось бы 78 ч. Сколько времени требуется для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

14.35. Два экскаватора, работая вместе, выроют котлован за 5 ч. Если бы производительность первого экскаватора была в 2 раза меньше, а второго — в 2 раза больше первоначальной, то котлован был бы вырыт за 4 ч. За сколько часов каждый экскаватор, работая отдельно с первоначальной скоростью, выроет котлован?

14.36. Совхоз располагает тракторами четырех марок: A, $Б$, $В$ и $Г$. Бригада из четырех тракторов (двух тракторов марки $Б$ и по одному марок $В$ и $Г$) производит вспашку поля за два дня. Бригада из двух тракторов марки A и одного трактора марки $В$ тратит на эту работу три дня, а три трактора марок A, $Б$, $В$ — четыре дня. За какое время выполнит работу бригада, составленная из четырех тракторов разных марок?

14.37. Два крана, действуя один после другого, наполнили пустой бассейн водой. Первый был открыт в течение $\frac{5}{6}$ того времени, за которое второй, действуя один, мог бы наполнить весь бассейн. Если оба крана одновременно были бы открыты, то бассейн наполнился бы на 8 ч 30 мин раньше, и через первый кран прошло бы $\frac{3}{4}$ того количества воды, которое на самом деле прошло через второй кран. Во сколько часов каждый кран, действуя отдельно, мог бы наполнить бассейн?

14.38. Сосуд снабжен четырьмя кранами. Первые три крана вместе наполняют сосуд за 1,5 ч. Если же открыты второй, третий и четвертый краны, сосуд заполняется за 2 ч. Первый кран вместе с четвертым заполняют сосуд за 3 ч. За какое время наполнится сосуд, если будет открыт лишь первый кран?

14.39. Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу за 8 ч. Один из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 12 ч быстрее, чем другой рабочий, если последний будет работать один. За сколько часов, работая отдельно, каждый из них может выполнить работу?

14.40. В резервуар из крана A наливается кислота, из крана B — вода. Работая один, кран A может наполнить резервуар за 4 ч, а кран B — за 1,5 ч. Какой концентрации получится раствор кислоты при одновременной работе кранов?

14.41. В бригаде имеются тракторы двух типов. За рабочий день 6 тракторов типа A и 11 тракторов типа B могут вспахать вместе не более $\frac{2}{3}$ поля, а 2 трактора типа A и 7 тракторов типа B вместе — не менее $\frac{1}{3}$ поля.

а) Успеют ли 9 тракторов типа A вспахать все поле за 2 дня?

б) Успеют ли 12 тракторов типа B вспахать все поле за 2 дня?

в) Докажите, что один трактор типа A и 9 тракторов типа B за 3 рабочих дня могут вспахать все поле.

Задачи на смеси

14.42. Имеется сплав серебра с медью. Вычислите вес и пробу этого сплава, если его сплав с 3 кг чистого серебра есть сплав 900-й пробы, а его сплав с 2 кг сплава 900-й пробы есть сплав 840-й пробы. (Проба благородного металла, равная, например, 760, означает, что масса этого благородного металла в сплаве составляет 0,760 от массы всего сплава.)

14.43. Имеются три слитка. Первый весит 5 кг, второй 3 кг и каждый из этих слитков содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найдите вес третьего слитка и процент содержания меди в нем.

14.44. Один сплав меди с оловом содержит эти металлы в отношении 2 : 3, другой — в отношении 3 : 7. В каком количестве надо взять эти сплавы, чтобы получить 12 кг нового сплава, в котором медь и олово были бы в отношении 3 : 5?

Задачи с целочисленными данными

14.45. Куплены некоторое количество одинаковых карандашей и некоторое количество одинаковых тетрадей. За тетради уплачено 17 р. 82 к., а за карандаши — 1 р. 82 к. Сколько куплено тетрадей, если тетрадь не менее чем на 2 р. дороже карандаша, и тетрадей было на 4 больше, чем карандашей?

14.46. Дано натуральное число. Если к его цифровой записи справа приписать цифру 2, то получится число, которое без остатка делится на 9. При этом частное от деления больше, чем данное число, на 21. Найдите это число.

14.47. Натуральное число a больше 600 и меньше 800. Если первую и последнюю цифры числа a поменять местами, то получится число b такое, что $a : b = 67 : 34$. Найдите число a.

14.48. Если двузначное натуральное число разделить на число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если же к числу приписать слева 1, то получится трехзначное число, которое в 19 раз больше суммы своих цифр. Найдите двузначное число.

14.49. При перемножении двух чисел, из которых одно на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив на 4 цифру десятков в произведении. При проверке ответа он разделил это произведение на меньший из сомножителей и получил в частном 39, а в остатке 22. Найдите числа.

14.50. Двое часов бьют сразу одни за другими. Первые часы идут вперед вторых на 3 с. Удары первых часов следуют через 3 с, а вторых — через 4 с. Который час пробили часы, если всего было насчитано 19 ударов?

14.51. Часы каждый день отстают на 6 мин. Через сколько дней они опять будут показывать верное время?

14.52. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором, но не менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

14.53. В двух группах более 52 студентов. Известно, что число студентов первой группы превышает число студентов второй группы, уменьшенное на 21, более чем в 2 раза, а число студентов второй группы более чем в 5 раз превышает число студентов первой группы, уменьшенное на 16. Сколько студентов в каждой из групп?

14.54. В треугольник со сторонами 13, 11 и 20 вписана окружность. Найдите длины отрезков, на которые каждая из сторон разделена точками касания.

Разные задачи

14.55. Продавец отпустил двум покупателям по одному килограмму товара, причем взвешивал на неверных весах. Первый раз он положил товар на чашку с меньшим коромыслом, второй раз — с большим. Прогадал ли в итоге продавец или выиграл?

14.56. Площадь треугольника $20\sqrt{3}$ см^2, а длина стороны, лежащей против угла 120°, равна 7 см. Найдите периметр треугольника.

ГЛАВА 3

ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

§ 15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

15.01. Площадь треугольника со стороной a и высотой h, опущенной на эту сторону, равна 20. Выразите длину стороны a как функцию длины высоты h и найдите область определения и множество значений этой функции.

15.02. Перед вами известные физические формулы, связывающие несколько переменных величин. Выразите, если это возможно, каждую такую величину, стоящую в правой части равенства, как функцию от величин, записанных в его левой части:

а) $s = vt$;

б) $v = v_0 + at$, $v_0 = \text{const}$;

в) $s = \frac{at^2}{2}$;

г) $s = v_0t + \frac{at^2}{2}$, $v_0 = \text{const}$;

д) $E_0 = mc^2$, $c = \text{const}$;

е) $F = ma$;

ж) $F = G\frac{m_1m_2}{R^2}$, $G = \text{const}$;

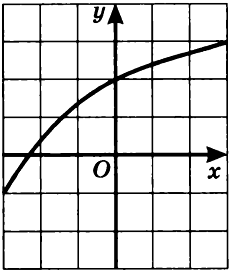
з) $I = \frac{U}{R}$;

и) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$;

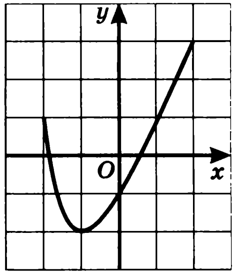
к) $A = I^2Rt$;

л) $Q = \frac{U^2}{R}t$.

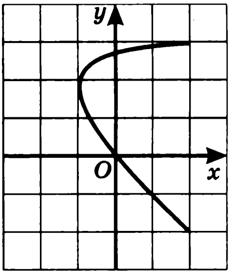
15.03. Выясните, при каких значениях переменных x и y графики, представленные на рисунках 4 а—г, задают функции вида $y = f(x)$ или/и вида $x = \varphi(y)$. (За единицу масштаба принять размер одной клетки.)



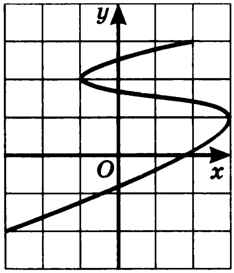
а)



б)



в)



г)

Рис. 4

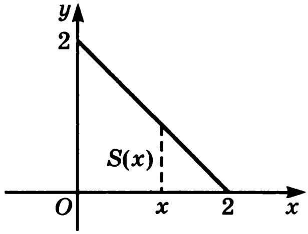
15.04. Из прямоугольного листа жести размером 20 на 40 см по углам вырезали квадраты со стороной x см и из полученной заготовки согнули коробку прямоугольной формы высотой x см (рис. 5). Выразите объем полученной коробки как функцию от x.

x см

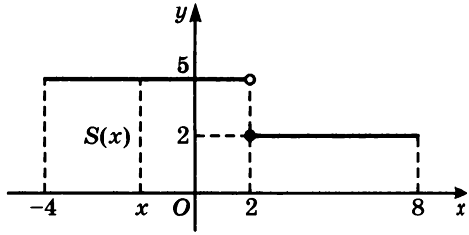
x см

Рис. 5

15.05. На рисунке 6 представлен график функции, определенной на отрезке $[a; b]$, и ограниченная им площадь $S(x)$ на отрезке $[a; x]$, $a \leqslant x \leqslant b$. Выразите $S(x)$ как функцию от x и постройте ее график. По графику найдите множество значений функции $S(x)$.



а)



б)

Рис. 6

15.06. Решите данные уравнения относительно y и относительно x. Исходя из полученных решений и допустимых значений переменных, выясните, можно ли говорить, что данное уравнение задает функцию вида $y = f(x)$ или/и вида $x = \varphi(y)$:

а) $2x + 3y = 6$;

б) $\dfrac{x - y}{x + 2y} = 2$;

в) $2x^2 + 3y = 6$;

г) $\dfrac{x - 2}{x + 3} \cdot \dfrac{x + 1}{x - 4} = \dfrac{y - 2}{y + 3} \cdot \dfrac{y + 1}{y - 4}$.

15.07. Для каждого из представленных уравнений относительно переменных x и y выясните, сколько раз пересекает график данного уравнения прямая:

а) параллельная оси Oy;

б) параллельная оси Ox. Исходя из полученных результатов, укажите какие-либо значения переменных, при которых можно говорить, что данное уравнение задает функцию вида $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$. Заполните таблицу.

Образец заполнения таблицы

Уравнение	а	б	$y = f(x)$	$x = \varphi(y)$
$x - y^2 = 1$	При $x > 1$ два раза, при $x = 1$ один раз, при $x < 1$ ни одного раза	При любом y один раз	При $x \geqslant 1$, $y \geqslant 0$	При $y \in R$, $x \geqslant 1$

Уравнение	а	б	$y = f(x)$	$x = \varphi(y)$
а) $2x + 3y = 11$				
б) $2x^2 - 3y = 5$				
в) $3x - 11y^2 = 2$				
г) $2x^2 + 3y^2 = 5$				
д) $xy = 7$				
е) $xy + 3y - 2x = 5$				
ж) $y + 3\sqrt{x} = 7$				
з) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$				
и) $\lvert x - 2 \rvert + 3y = 4$				
к) $\lvert x - 2 \rvert + 2x + 3y = 4$				
л) $2\lvert x - 2 \rvert + x + 3y = 4$				
м) $2\lvert x \rvert + 3\lvert y \rvert = 11$				
н) $7\lvert x - 1\rvert + 3\lvert y + 2 \rvert + \lvert 4x^2 - y^2\rvert = 0$				
о) $7\lvert x^2 - 1 \rvert + 3\lvert y + 2\rvert + \lvert 4x^2 - y^2\rvert = 0$				

15.08. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2 - 1}$;   в) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-\pi}}{x^2 - 1}$;

б) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+0,5}}{x^2 - 1}$;   г) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-a}}{x^2 - 1}$ для каждого значения параметра a.

Найдите область определения функции (15.09—15.13):

15.09. а) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x + 2}}{x^2 - 2x}$;

б) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x + 2}}{x^2 - 12x}$;

в) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x + 2}}{x^2 - ax}$ для каждого значения параметра a.

15.10. а) $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 + \sqrt{x + 9}}$;

б) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 + \sqrt{x + 3}}$;

в) $f(x) = \dfrac{x^3 - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 + \sqrt{x - 1}}$;

г) $f(x) = \dfrac{ax^3 - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 + \sqrt{x - a}}$ для каждого значения параметра a.

15.11. а) $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 - \sqrt{x + 9}}$;

б) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 - \sqrt{x + 3}}$;

в) $f(x) = \dfrac{x^3 - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 - \sqrt{x - 1}}$;

г) $f(x) = \dfrac{ax^3 - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 - \sqrt{x - a}}$ для каждого значения параметра a.

15.12. а) $f(x) = 8 - \sqrt{x^3 + 5x^2}$;

б) $f(x) = 2x\sqrt{x^3 - 3x^2}$;

в) $f(x) = \dfrac{x}{b^2 + 2} - \sqrt{x^3 - bx^2}$ для каждого значения параметра b.

15.13. а) $f(x) = \sqrt{9 + 2|x|}$;

б) $f(x) = \sqrt{9 - 5|x|}$;

в) $f(x) = \sqrt{9 - a|x|}$ для каждого значения параметра a.

15.14. Пусть $f(x) = 2 - \sqrt{1 - x}$; $g(x) = \dfrac{1 + 2x}{3 + x}$;

$p(x) = \sqrt{-x^2 - 5x - 6}$.

Найдите область определения функции:

а) $y = f(x) + g(x)$;

б) $y = f(x) - p(x)$;

в) $y = p(x) - g(x)$;

г) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$;

д) $y = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

15.15. Пусть $f(x) = x^2 - 3x - 4$; $g(x) = 5x - x^2$. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$;

б) $y = \dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$;

в) $y = \sqrt{f(x) \cdot g(x)}$;

г) $y = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$;

д) $y = \sqrt{x^2 \cdot f(x)}$;

е) $y = \sqrt{x^2 \cdot g(x)}$.

15.16. Пусть $D(f(x)) = [-4; 8]$. Найдите область определения функции:

а) $5x - f(x)$;

б) $\dfrac{7 + 4f(x)}{8 + x}$;

в) $\dfrac{7 + 4f(x)}{8 - x}$;

г) $\dfrac{x + 3f(x)}{25 - x^2}$.

15.17. Пусть $D(f(x)) = [-11; 3]$. Найдите область определения функции:

а) $f(-x)$;

б) $f(|x|)$;

в) $f(-|x|)$.

15.18. Пусть $D(f(x)) = [-3;\ 7]$. Найдите область определения функции:

а) $f(x - 3)$; г) $f(-0{,}3x)$; ж) $f\left(\frac{1}{x+4}\right)$;

б) $f(x + 3)$; д) $f(7x - 1)$; з) $f\left(\frac{1}{x}\right)$;

в) $f(2x)$; е) $f(x^2)$; и) $f\left(\sqrt{x} + 2\right)$.

15.19. При каких значениях параметра a функция

$$g(x) = 3 - \sqrt{x - a}$$

определена во всех точках промежутка $[-11;\ 7]$?

15.20. При каких значениях параметра a функция

$$g(x) = 3 - \sqrt{x - 3}$$

определена во всех точках промежутка $[a - 1;\ a + 1]$?

15.21. Найдите все значения параметра a, при которых областью определения функции $y = \sqrt{x - 3} + \sqrt{ax - 4}$ будет:

а) луч;
б) отрезок;
в) множество всех действительных чисел;
г) единственное число (единственная точка);
д) пустое множество.

15.22. Докажите, что если число b принадлежит области определения функции $f(x) = \sqrt{x^4 - 7x + 3} - \sqrt{x^4 + 7x + 3}$, то и число $(-b)$ принадлежит этой области.

15.23. Докажите, что если число b не принадлежит области определения функции $f(x) = \sqrt{x^5 - x + 3} + 3\sqrt{-x^5 + x + 3}$, то и число $(-b)$ не принадлежит этой области.

15.24. Найдите все такие числа b из области определения функции $f(x) = \frac{1 - \sqrt{2x^2 - 7x - 22}}{x + 30}$, для которых:

а) число $b + 1$ не принадлежит $D(f)$;
б) число $b - 1$ не принадлежит $D(f)$;
в) оба числа $b + 1$ и $b - 1$ содержатся в $D(f)$;
г) отрезок $[b + 1;\ b + 2]$ целиком принадлежит $D(f)$;
д) отрезок $[b + 1;\ b + 2]$ не содержит ни одного числа из $D(f)$;
е) отрезок $[b + 1;\ b + 2]$ содержит как числа из $D(f)$, так и числа, не принадлежащие $D(f)$.

15.25. Найдите все такие числа b из области определения функции $f(x) = \frac{1 - \sqrt{81 - x^2}}{x + \pi}$, для которых:

а) число $b + 1$ не принадлежит $D(f)$;
б) число $b - 1$ не принадлежит $D(f)$;
в) оба числа $b + 1$ и $b - 1$ содержатся в $D(f)$;
г) отрезок $[b + 1; b + 2]$ целиком принадлежит $D(f)$;
д) отрезок $[b + 1; b + 2]$ не содержит ни одного числа из $D(f)$;
е) отрезок $[b + 1; b + 2]$ содержит как числа из $D(f)$, так и числа, не принадлежащие $D(f)$.

Решите уравнение (15.26—15.28):

15.26. а) $x^2 + \sqrt{2 - x} + 3\sqrt{x - 2} = 4$;

б) $x^2 - 5\sqrt{2 - x} + \sqrt{x - 2} = 3$;

в) $x^2 + (a + x)\sqrt{a - x} - 2\sqrt{x - a} = 9$ для каждого значения параметра a.

15.27. а) $\sqrt{25 - x^2} + 3\sqrt{x^2 - x - 30} = 20 + 4x$;

б) $\sqrt{1 + \sqrt{25 - x^2}} + 3\sqrt{x^2 - x - 30} = x^3 - 4x + 106$;

в) $\sqrt{1 + \sqrt{25 - x^2}} + 3\sqrt{x^2 - x - 30} = ax^3 + 4x + 1$ для каждого значения параметра a.

15.28. а) $\frac{x - |x|}{x + 4} = 0$;

б) $\frac{x - |x|}{x - 4} = 0$;

в) $\frac{x + |x|}{x - a} = 0$ для каждого значения параметра a.

Найдите множество значений функции (15.29, 15.30):

15.29. а) $y = 3x + 1$;

б) $y = 7 - 4x$;

в) $y = 11$;

г) $y = ax + 2$ для каждого значения параметра a.

15.30. а) $y = \frac{5}{x + 11}$;

б) $y = \frac{5x}{x - 11}$;

в) $y = \frac{1 - 5x}{x + 11}$;

г) $y = \frac{ax}{x + 11}$ для каждого значения параметра a.

15.31. На рисунках 7 а—г представлены графики функций, определенных на отрезке $[a;\ b]$. Исходя из графика, найдите множество значений функции.

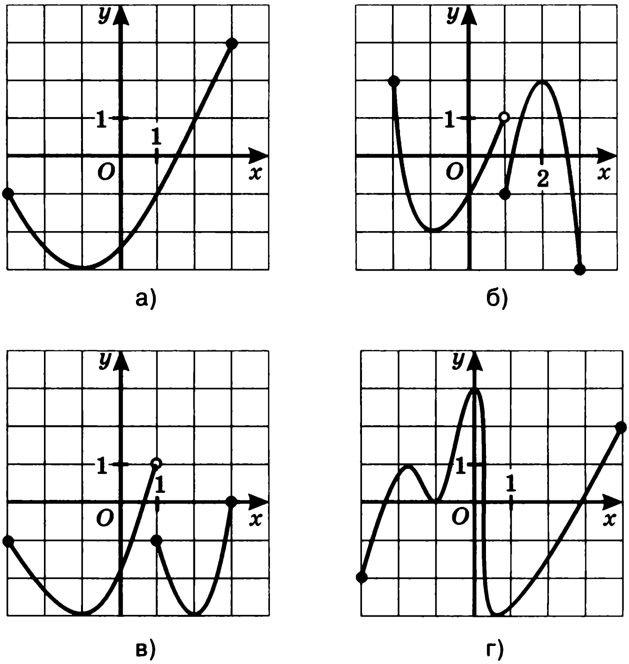


Рис. 7

15.32. Используя рисунки 7 а—г определите, какие целочисленные значения функция принимает наибольшее число раз.

15.33. Найдите множество значений функции и определите наибольшее и наименьшее целочисленные значения функции, если они существуют:

а) $y = |x + 3| + 2$; в) $y = \dfrac{2 - |x - 1|}{5}$;

б) $y = 5 - |x + 3|$; г) $y = \dfrac{2}{1 + |7x - 11|}$.

15.34. Найдите множество значений функции и определите, при каком целом значении x значение функции наиболее близко к числу, заданному a:

а) $y = \sqrt{x},\ a = 3{,}1$;

б) $y = 2 - 3\sqrt{x},\ a = -2{,}35$;

в) $y = \dfrac{2 - \sqrt{3x + 10}}{5}$, $a = -4{,}2$;

г) $y = \dfrac{3}{1 + \sqrt{x}}$, $a = 0{,}1$.

Найдите множество значений функции (15.35—15.41):

15.35. а) $y = |x + 3| + 2x$;
б) $y = |x + 3| - x$;
в) $y = |x + 3| + 0{,}5x$;
г) $y = |x + 3| + ax$ для каждого значения параметра a.

15.36. а) $y = |x + 3| + |x - 5|$;
б) $y = |x + 3| - |x - 4|$;
в) $y = |x + 3| + |x - a|$ для каждого значения параметра a;
г) $y = |x - a| + |x - 5|$ для каждого значения параметра a.

15.37. а) $y = x^2 - 6x - 1$;
б) $y = -2x^2 - 12x + 7$;
в) $y = 3x^2 + 11x$;
г) $y = ax^2 - 6x$ для каждого значения параметра a.

15.38. а) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$; в) $y = \dfrac{1}{2x - x^2 - 7}$;

б) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$; г) $y = \dfrac{10}{x^2 + 4x + 5}$.

15.39. а) $y = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 + 4}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 8}{2x - x^2 - 7}$.

б) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 5}$;

15.40. а) $y = \sqrt{1 + x^2}$; в) $y = 5 - \sqrt{x^2 - 6x + 10}$;

б) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 18}$; г) $y = 5 - 3\sqrt{x^2 + 8x + 41}$.

15.41. а) $y = \sqrt{9 - x^2}$; в) $y = 5 - 4\sqrt{15 - 2x - x^2}$;

б) $y = 5 - 4\sqrt{16 - x^2}$; г) $y = 5 + 2\sqrt{3 - 2x - x^2}$.

15.42. Сравните множества значений функций $y = x^2$, $-2 \leqslant x \leqslant 1$ и $y = x^2$, $2 \leqslant x \leqslant 3$.

15.43. Найдите множество значений функции:

а) $y = \begin{cases} x^2, & 1 < x < 2, \\ 2 - x, & -3 \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x^2, & -3 < x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

15.44. Пусть множество значений функции $f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$. Найдите множество значений функции:

а) $y = f(x + 2)$;
б) $y = 2 + f(x)$;
в) $y = 2 - f(x - 2)$;
г) $y = 2 + f(2 - 5x)$.

15.45. Пусть множество значений функции $f(x - 7)$ есть отрезок $[-1; 10]$. Найдите множество значений функции:

а) $y = f(x)$;
б) $y = 2 + 3f(x)$;
в) $y = 2 + 7f(5x + 6)$;
г) $y = 2 - 7f(7 - 5x)$.

15.46. Пусть множество значений функции $f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$. Найдите множество значений функции:

а) $y = \dfrac{3 + 4f(x)}{5}$;
б) $y = \dfrac{4 - 3f(x)}{7}$.

15.47. Пусть множество значений функции $f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$. Найдите все целочисленные значения функции:

а) $y = \dfrac{7}{5 + f(x)}$;
б) $y = \dfrac{15}{7 - f(x)}$;
в) $y = \dfrac{8 + f(x)}{7 + f(x)}$;
г) $y = \dfrac{f(x)}{6 - f(x)}$.

15.48. Пусть множество значений функции $f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$. Найдите множество значений функции:

а) $y = (f(x))^2$;
б) $y = (f(x))^3$;
в) $y = |f(x)|$;
г) $y = \sqrt{4 + f(x)}$.

Найдите множество значений функции (15.49—15.54):

15.49. а) $y = x^2 - 6x + 2|x| - 8$;
б) $y = x^2 - 6|x| + 2x - 8$;
в) $y = x^2 + 6|x| - 2x - 8$;
г) $y = x^2 - a|x| + 2x - 8$ для каждого значения параметра a.

15.50. а) $y = |x|(x-6) - 2$;   б) $y = x|x-6| - 2$.

15.51. а) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{(x-3)(2-x)}$;   б) $y = \dfrac{|x-3|}{3-x}$.

15.52. а) $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x+1}$;   в) $y = \dfrac{x^2 - 3|x|}{x}$;

б) $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{|x-4|}$;   г) $y = \dfrac{x^2 - 3|x-2| - 4}{|x-2|}$.

15.53. а) $y = x^2 - 4x + 1$;

б) $y = \dfrac{x^3 - 4x^2 + x}{x}$;

в) $y = \dfrac{(x-2)(x^2 - 4x + 1)}{x-2}$;

г) $y = \dfrac{(x-a)(x^2 - 4x + 1)}{x-a}$ для каждого значения параметра a.

15.54. а) $y = \dfrac{2x}{|x-1| + |x+1|}$;   б) $y = \dfrac{2x}{|x-1| - |x+1|}$.

15.55. Выполните в указанном порядке задания а) и б) и, обобщив их результаты, предложите *алгоритм* нахождения множества $E(f)$ значений функции, исследуя вопрос существования корней уравнения $f(x) = a$, а также предложите *алгоритм* исследования существования корней уравнения $f(x) = a$, если известно $E(f)$:

а) найдите область определения функции $f(x) = x^2 - 4x - 1$ и определите, при каких значениях параметра b уравнение $b = x^2 - 4x - 1$ имеет хотя бы один корень;

б) определите, при каких значениях параметра a уравнение $x^2 + 4x - 3 = a$ имеет хотя бы один корень и найдите множество значений функции $f(x) = x^2 + 4x - 3$.

15.56. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $x^2 - ax + 3 = 0$ имеет корни, и найдите множество значений функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x}$.

15.57. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - 4x + a = 0$ имеет корни, и найдите множество значений функции $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.

Найдите множество значений функции (15.58, 15.59):

15.58. а) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x}$; в) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$.

б) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x}$;

15.59. а) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x + 2}$; в) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + 2x + 4}$.

б) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$;

15.60. Решите уравнение:

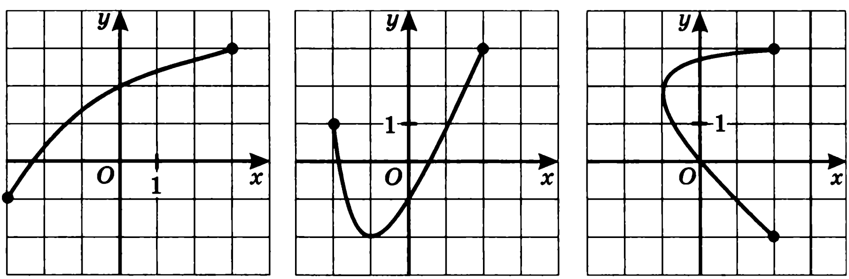
а) $\sqrt{x^2 - 4x + 20} = 4 - |x - 2|$;

б) $\dfrac{6}{3 + 2|x + 1|} = x^4 - 2x^2 + 7$;

в) $\dfrac{x^2 + 8x - 8}{2x^2 + 3x - 4} + \dfrac{2x^2 + 3x - 4}{x^2 + 8x - 8} = \sqrt{3 + 2x - x^2}$.

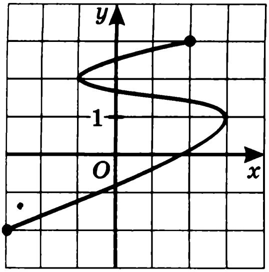
§ 16. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

16.01. Какие из приведенных графиков (рис. 8) являются графиками функций, а какие не являются?

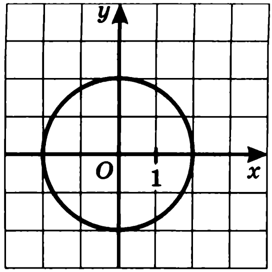


а) б) в)

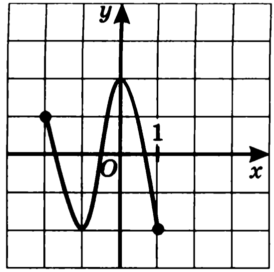
Рис. 8 (начало)



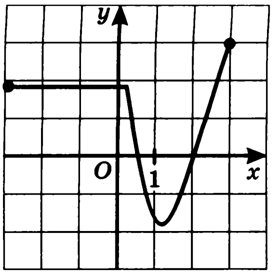
г)



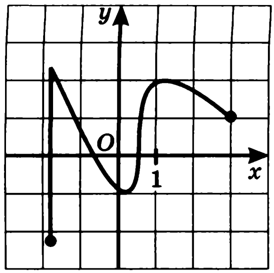
д)



е)



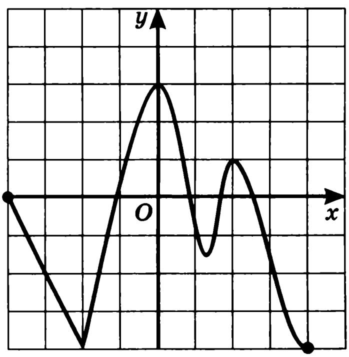
ж)



з)

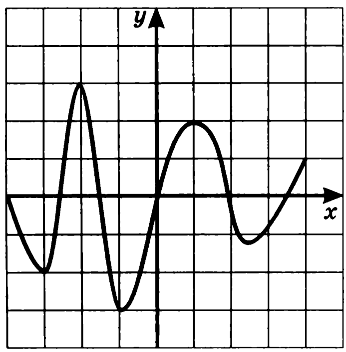
Рис. 8 (окончание)

16.02. По данному графику (рис. 9) найдите значения функции в точках x_1, x_2, x_3, приняв за единицу масштаба размер одной клетки.



$x_1 = -4,\ x_2 = -1,\ x_3 = 4$

а)



$x_1 = -3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$

б)

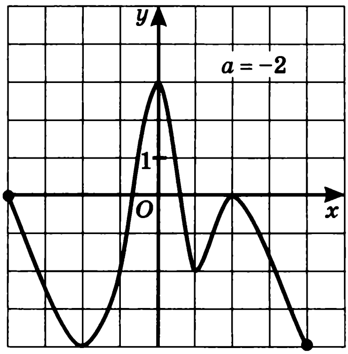
Рис. 9

16.03. Используя условие задачи 16.02, найдите по графикам:

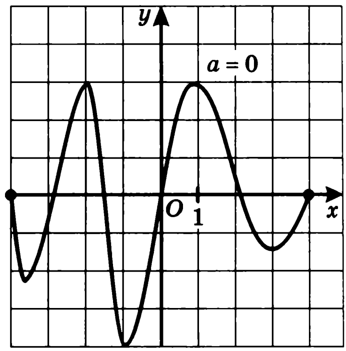
а) все значения аргумента, при которых функция принимает наименьшее значение;

б) все значения функции при целочисленных значениях аргумента.

16.04. По данному графику функции $y = f(x)$ (рис. 10) найдите все значения аргумента, при которых значение функции равно заданному числу a.



а)



б)

Рис. 10

16.05. Используя функции, заданные графически в задаче 16.04, определите:

а) сколько существует значений аргумента, при которых значение функции равно целому числу;

б) какое целое значение функция принимает наибольшее число раз.

16.06. Пусть $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Задайте аналитически функции $y = f(-x)$; $y = f(x + 2)$; $y = f(3 - x)$; $y = 4 - f(x)$ и для каждой из них определите:

а) множество значений;

б) точку пересечения с осью ординат;

в) нули;

г) расположение ее графика относительно графика исходной функции.

16.07. Пусть $f(x) = x^2$. Задайте аналитически функции, все значения которых при тех же значениях аргумента:

а) на 5 больше значений данной функции;

б) на 3 меньше значений данной функции;

в) противоположны значениям данной функции;

г) равны квадрату значений данной функции.

16.08. Рассмотрите функции, заданные графически в задаче 16.04, и найдите все значения b, при которых функция $y = f(x) + b$ не принимает:

а) отрицательных значений;

б) неположительных значений.

16.09. Графиком функции является отрезок AB, где $A(-1;\ 3)$, $B(4;\ -5)$. Найдите значения этой функции в точках $-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$.

16.10. Графиком функции $y = f(x)$ является прямая AB, где $A(-5;\ 1)$; $B(0;\ 0)$.

а) Найдите значение этой функции при $x = 100$.

б) Докажите, что для любых $x_1 \neq x_2$ величина $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ — постоянная и найдите эту величину.

16.11. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-1;\ 7]$ и задана таблицей:

x	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	2	−1	5	0	3	2	2	−5	−6

Известно, что график функции состоит из 8 отрезков, соединяющих соседние точки, заданные в таблице. Требуется:

а) построить график функции;

б) заполнить следующую таблицу значений функции:

x	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
y									

в) решить уравнение $f(x) = 0$;

г) найти множество значений данной функции.

16.12. Найдите значения функции $f(x) = \begin{cases} x, \text{ при } -3 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x - 1, \text{ при } 1 < x < 2, \\ x^2 - 2, \text{ при } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

при всех целочисленных значениях x.

16.13. Постройте график функции $y = f(x)$, если известно, что для всех целых значений x значение функции равно 1, а для всех нецелых −1.

16.14. Постройте график функции $y = f(x)$, если известно, что если x лежит между целыми числами m и $m + 1$ ($m < x < m + 1$) и m — четное число, то значение функции равно 2, если m — нечетное число, то значение функции равно 4. Если же x — целое число, то значение функции равно 3.

16.15. Найдите значения функции

$$d(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число;} \\ 1, \text{ если } x \text{ — рациональное число} \end{cases}$$

при следующих значениях x: 0; 0,5; 0,7(14); π; $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{48}}{\sqrt{12}}$. (Функция $d(x)$ называется *функцией Дирихле*.)

16.16. Пусть функция $R(x)$ определена на отрезке [0; 1] следующим образом:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ если } x \text{ — рационально и выражается} \\ \text{несократимой дробью } \frac{m}{n} \qquad ; \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Найдите значение функции $R(x)$ при следующих значениях x: 0; 0,5; 0,(3); 0,(6); 0,(72); 0,7(14); 0,0(012); $\frac{1}{\pi}$; $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5} + \sqrt{80}}$; $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{7}}$. (Функция $R(x)$ называется *функцией Римана*.)

16.17. Для функции Римана (см. задачу 16.16) найдите все значения x, при которых выполняется условие:

а) $R(x) = 0{,}25$;

б) $R(x) = \frac{1}{7}$;

в) $R(x) > 0{,}2$;

г) $R(x) > \frac{1}{12}$.

16.18. Пусть для любого натурального числа n число $\pi(n)$ равно количеству простых чисел, не превосходящих натуральное число n. Найдите значение $\pi(n)$ для следующих значений n: 1; 2; 3; 4; 5; 29. Найдите все такие натуральные числа n, для которых выполнено неравенство $1 < \pi(n) < 7$.

16.19. Пусть для любого натурального числа n число $\varphi(n)$ равно количеству чисел ряда 1; 2; 3; ... ; $n - 1$ взаимно простых с n. Найдите значение функции $\varphi(n)$ для следующих значений n: 1; 2; 3; 4; 5; 29; 50. Проверьте, что $\varphi(24) = \varphi(3) \cdot \varphi(8)$. (Функция $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера*.)

16.20. Докажите, что для любых $a \neq b$ для функции $f(x) = x^2$ выполняется неравенство $f\left(\frac{a + b}{2}\right) < \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

16.21. Докажите, что для любых $a \neq b$ для функции $f(x) = x^3$ выполняется неравенство $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} > 0$.

16.22. Докажите, что для любых положительных чисел $a \neq b$ для функции $f(x) = \dfrac{3}{x}$ выполняется неравенство $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} < 0$.

16.23. Сумма двух чисел равна 2. Выразите одно из этих чисел как функцию второго и постройте график этой функции.

16.24. Сумма двух чисел x и y равна 5. Выразите y как функцию от x, если:

а) $x < 1$;   б) $y \leqslant -5$,

и постройте график каждой из этих функций.

16.25. Разность двух положительных чисел равна 3. Выразите меньшее из этих чисел как функцию большего и постройте график этой функции.

16.26. Произведение двух чисел равно 4. Выразите одно из этих чисел как функцию второго и постройте график этой функции.

16.27. Произведение двух положительных чисел равно 3. Выразите одно из этих чисел как функцию второго и постройте график этой функции.

16.28. Частное двух положительных чисел равно 3. Выразите большее из этих чисел как функцию меньшего и постройте график этой функции.

16.29. Задайте множество точек координатной плоскости, у которых сумма абсциссы и утроенной ординаты равна 5. Изобразите множество всех таких точек.

16.30. Задайте множество точек координатной плоскости, у которых сумма ординаты и удвоенной абсциссы равна квадрату абсциссы. Изобразите множество всех таких точек.

16.31. Задайте функцию, определенную для всех положительных значений x, если значение функции при заданном значении аргумента равно его удвоенному квадрату. Изобразите график этой функции.

16.32. Задайте функцию, определенную для всех неположительных значений x, если значение функции при заданном значении аргумента равно его удвоенному квадрату. Изобразите график этой функции.

16.33. Сравните функции из задач 16.30 и 16.31. Что является общим у этих функций и чем они отличаются?

16.34. Рассмотрите график прямой $y = 2x - 1$ и задайте функцию, значение которой равно:

а) сумме координат точек этой прямой;

б) произведению координат точек этой прямой;

в) сумме квадратов координат точек этой прямой;

г) сумме абсолютных величин (модулей) координат точек этой прямой.

Постройте графики каждой из полученных вами функций.

16.35. Рассмотрите график прямой $y = 3 - 4x$ и задайте функцию, значение которой при каждом значении x равно:

а) сумме координат точки этой прямой при данном значении x;

б) произведению координат точки этой прямой при данном значении x;

в) сумме квадратов координат точек этой прямой при данном значении x;

г) сумме абсолютных величин (модулей) координат точки этой прямой при данном значении x.

Постройте графики каждой из полученных вами функций.

16.36. Рассмотрите график $y = x^2 - 2x$ и задайте функцию, значение которой при каждом значении x равно:

а) сумме координат точки ее графика при данном значении x;

б) расстоянию от точки графика этой функции при данном значении x до оси абсцисс;

в) сумме расстояний от точки графика этой функции при данном значении x до осей координат;

г) расстоянию от точки графика этой функции при данном значении x до прямой $y = -3$;

д) расстоянию от точки графика этой функции при данном значении x до прямой $y = 3$.

Постройте графики каждой из полученных вами функций.

16.37. Вершина A треугольника ABC лежит на параболе $y = x^2 - 2x + 2$, $B(0; 1)$, $C(0; 2)$. Задайте площадь треугольника ABC как функцию $S(x)$ абсциссы x точки A и определите:

а) наименьшее значение $S(x)$;

б) для каких точек A площадь треугольника равна 20.

16.38. Вершины A и B треугольника ABC лежат на параболе $y = x^2$ и имеют одинаковые ординаты, причем абсцисса точки A положительна; $C(0; 2)$. Задайте площадь треугольника ABC как функцию $S(x)$ абсциссы x точки A и постройте график этой функции.

16.39. Две стороны прямоугольника лежат на осях координат, а одна его вершина лежит на параболе $y = 4x - x^2$, $0 < x < 4$. Выразите площадь $S(x)$ этого прямоугольника как функцию от x и найдите $S(0{,}5)$, $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(3{,}5)$ и, используя полученные результаты, постройте эскиз графика $S(x)$.

16.40. Прямая l, заданная уравнением $y = ax$ $(a > 0)$, делит квадрат $OABC$ (O — начало координат, $A(0; 4)$, $C(4; 0)$) на две фигуры. Задайте следующие функции f в зависимости от значения a:

а) $f(a)$ — площадь фигуры, содержащей вершину A;

б) $f(a)$ — площадь фигуры, содержащей вершину C;

в) $f(a)$ — отношение, в котором прямая l делит площадь квадрата (считая от фигуры, содержащей точку A).

16.41. Прямая l, заданная уравнением $y = a - x$ $(a > 0)$, $0 < a < 8$, делит квадрат $OABC$ (O — начало координат, $A(0; 4)$, $C(4; 0)$) на две фигуры. Задайте следующие функции f в зависимости от значения a:

а) $f(a)$ — площадь фигуры, содержащей вершину A;

б) $f(a)$ — площадь фигуры, содержащей вершину B;

в) $f(a)$ — отношение, в котором прямая l делит площадь квадрата (считая от фигуры, содержащей точку A).

16.42. Машина начала двигаться по прямолинейному шоссе от пункта A до пункта B, расстояние между которыми 240 км, со скоростью 60 км/ч. Пробыв в пункте B один час, машина поехала обратно со скоростью 80 км/ч. Определите время, затраченное на данное путешествие, и задайте функцию f в зависимости от времени t, если:

а) $f(t)$ — расстояние от места нахождения машины до пункта A в момент времени t;

б) $f(t)$ — расстояние от места нахождения машины до пункта B в момент времени t;

в) $f(t)$ — расстояние от места нахождения машины до пункта C (середины пути от A до B) в момент времени t.

16.43. Задайте линейную функцию ($y = kx + b$), зная два ее значения:

а) $y(3) = 5$; $y(5) = 3$;

б) $y(-2) = y(2) = 7$;

в) $y(1000) = 100$; $y(10\,000) = 1000$.

16.44. Задайте (если это возможно) квадратичную функцию ($y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$), зная три ее значения:

а) $y(3) = 23$; $y(-1) = 3$; $y(0) = 1$;

б) $y(-2) = y(2) = 7$; $y(1) = 5$;

в) $y(-4) = y(4) = 5$; $y(1) = 7$;

г) $y(-2) = -2$; $y(2) = 2$; $y(1) = 1$.

16.45. Пусть для любых значений аргумента функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию $f(x) + 10f(3 - x) = 11$. Найдите:

а) $f(1{,}5)$; б) $f(3)$; в) $f(x)$.

16.46. Пусть для любых значений аргумента функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию $f(2x) + 3f(10 - 3x) = 5x + 1$. Найдите:

а) $f(2)$; б) $f(-3)$; в) $f(x)$.

16.47. Пусть для любых значений аргумента, отличных от нуля, функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию $f(x) + 2f\left(\frac{4}{x}\right) = x - \frac{5}{x}$. Найдите:

а) $f(2)$; б) $f(-2)$; в) $f(1)$; г) $f(x)$.

Постройте график функции (16.48—16.50):

16.48. а) $y = \sqrt{1 - x^2}$; в) $y = 0{,}5\sqrt{1 - 4x^2}$;

б) $y = \sqrt{16 - x^2}$; г) $y = -2\sqrt{9 - x^2}$.

16.49. а) $y = \sqrt{9 - x^2}$; в) $y = 1 - \sqrt{9 - x^2}$;

б) $y = 2 + \sqrt{9 - x^2}$; г) $y = -1 - \sqrt{9 - x^2}$.

16.50. а) $y = \sqrt{4 - x^2}$; в) $y = \sqrt{4 - (x + 3)^2}$;

б) $y = \sqrt{4 - (x - 1)^2}$; г) $y = \sqrt{4x - x^2}$.

16.51. Символом $[x]$ обозначают *целую часть* числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Постройте график функции:

а) $y = [x]$; в) $y = 5 - [x]$;

б) $y = [x] - 3$; г) $y = 0{,}5 + [-x]$.

16.52. Постройте график функции:

а) $y = [x - 1]$; в) $y = [x + 0{,}5]$;

б) $y = [x + 3]$; г) $y = 0{,}5 + [-x - 0{,}3]$.

16.53. Символом $\{x\}$ обозначают *дробную часть* числа x, т. е. $\{x\} = x - [x]$. Постройте график функции:

а) $y = \{x\}$; в) $y = 3 - \{x\}$;

б) $y = \{x\} - 2$; г) $y = 2{,}5 + \{-x\}$.

Постройте график функции (16.54—16.58):

16.54. а) $y = \{x - 1\}$; г) $y = 2 + \{-x - 0{,}5\}$;

б) $y = \{x + 3\}$; д) $y = \{x + 25\}$;

в) $y = \{x - 0{,}5\}$; е) $y = \left\{\sqrt{x}\right\}$.

16.55. а) $y = [x] + \{x\}$; в) $y = [x] - x$;

б) $y = x - \{x\}$; г) $y = \{x\} - [x]$.

16.56. а) $y = [x] + [-x]$; в) $y = \{x\} + \{-x\}$;

б) $y = [x] - [-x]$; г) $y = \{x\} - \{-x\}$.

16.57. а) $y = [[x]]$; в) $y = \{\{x\}\}$;

б) $y = [\{x\}]$; г) $y = \{[x]\}$.

16.58. а) $y = \left[\frac{x}{5}\right]$; в) $y = \left[\frac{x + 5}{2}\right]$;

б) $y = \{5x\}$; г) $y = \left\{\frac{4 - x}{2}\right\}$.

16.59. Решите уравнение:

а) $x = [x]$; в) $[x] = \{x\}$;

б) $x = \{x\}$; г) $\left[\frac{x}{2}\right] = x - 1$.

16.60. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{1 - [x]^2}$; б) $y = \sqrt{1 - \{x\}^2}$.

16.61. При аренде некоторого помещения требуется внести залог, равный трехмесячной арендной плате, который по окончании аренды возвращается арендатору. Известно, что плата за один месяц аренды составляет $a = 1000$ у. е., которая должна быть внесена в период с 1-го по 10-е число (включительно) каждого месяца аренды. Начиная с 11-го числа месяца аренды за каждый просроченный по оплате день взимается пеня (от лат. *poena* — наказание), равная 0,5% арендной платы, при этом месяц считается состоящим из 30 дней. Определите функцию $P(t)$, где t — номер месяца от начала года, равную сумме потраченных денег на аренду этого помещения, для всех целых значений $t \in [1; 12]$, если:

а) месячная арендная плата вносилась без пени и по истечении года аренда не закончилась;

б) месячная арендная плата вносилась с пени за k просроченных дней ($1 \leqslant k \leqslant 20$) и по истечении года аренда закончилась, при этом число k было одно и то же в течение всего года.

§ 17. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Задачи, связанные с множеством значений функции

17.01. Найдите множество значений функций, заданных графически (рис. 11).

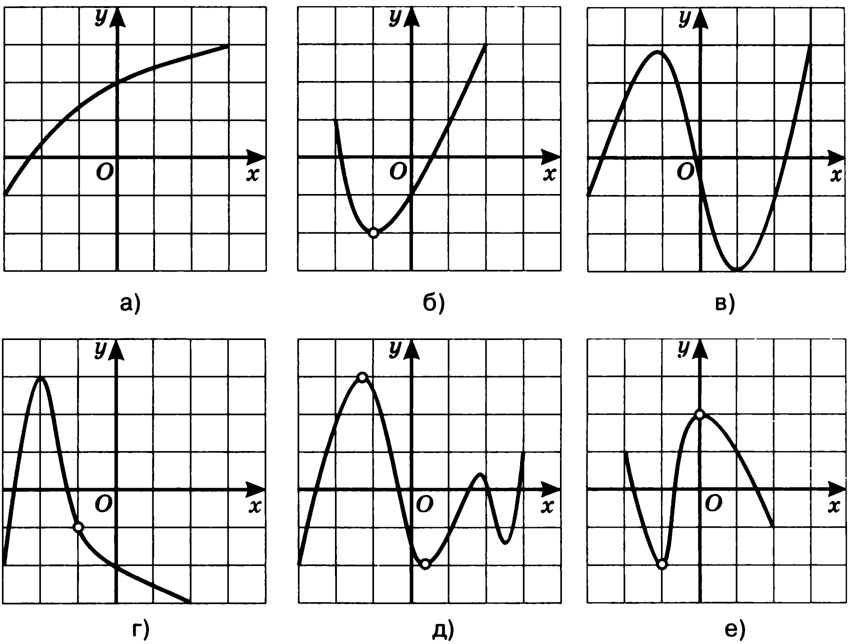
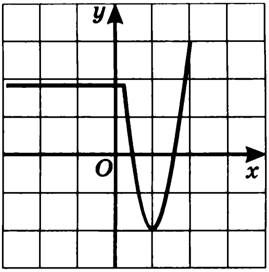
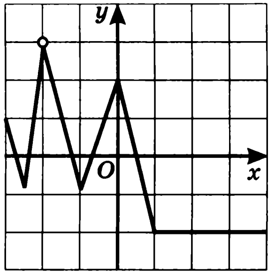


Рис. 11 (начало)



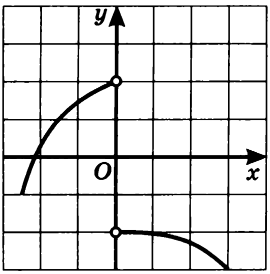
ж)



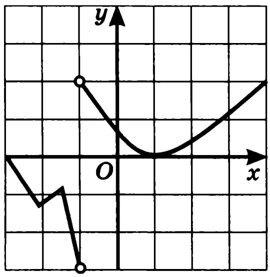
з)

Рис. 11 (окончание)

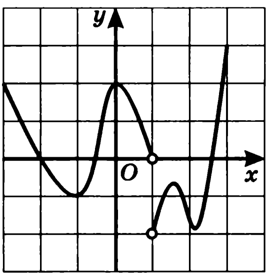
17.02. Найдите множество значений функций, заданных графически (рис. 12).



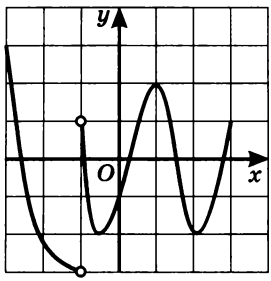
а)



б)



в)



г)

Рис. 12

17.03. Найдите множество значений функции, заданной аналитически:

а) $y = 1 - 2x$;

б) $y = 1 - 2x^2$;

в) $y = 3x^2 - 12x + 1$;

г) $y = -3x^2 - 12x + 1$, если $-6 \leqslant x < 1$.

Найдите множество значений функции (17.04—17.06):

17.04. а) $y = 1 - \frac{2}{x}$;

б) $y = \frac{2 - x}{3 + 2x}$;

в) $y = \frac{3}{x^2} - 12$;

г) $y = \frac{4x}{x^2 + 2}$;

д) $y = \frac{4 - 2x + x^2}{x^2 + 2}$;

е) $y = \frac{4 - x^4}{x^2 - 2}$;

ж) $y = 1 - 2\sqrt{3 - x}$;

з) $y = \frac{1 - 4x}{1 + 2\sqrt{x}}$;

и) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - 1}{(x + 2)^2}$.

17.05. а) $y = 2 + \frac{x}{|x|}$;

б) $y = 2x - \frac{x}{|x|}$;

в) $y = x^2 + 2x - \frac{x}{|x|}$;

г) $y = x^2 - 2x + \frac{x + 1}{|x + 1|}$;

д) $y = \frac{x + 1}{x - 1} + \frac{|x|}{x}$;

е) $y = \frac{|x + 2|}{x + 2} + \frac{x - 2}{|x - 2|}$;

ж) $y = \frac{|x + 2|}{x + 2} + \frac{x - 2}{|x - 2|} - 2x$;

з) $y = \sqrt{2 + |x|} - \frac{x}{|x|}$;

и) $y = \sqrt{4 - |x|} + \frac{4x}{|x|}$.

17.06. а) $f(x) = \frac{|x|}{x} + \frac{|x - 1|}{x - 1} + \frac{|x - 2|}{x - 2} + \frac{|x - 3|}{x - 3} + \frac{|x - 4|}{x - 4}$;

б) $f(x) = \frac{|x|}{x} - \frac{|x - 1|}{x - 1} + \frac{|x - 2|}{x - 2} - \frac{|x - 3|}{x - 3} + \frac{|x - 4|}{x - 4} - \frac{|x - 5|}{x - 5}$.

17.07. Найдите множество значений функции, заданной аналитически:

а) $f(x) = \frac{|x|}{x} + \frac{|x - 1|}{x - 1} + \ldots + \frac{|x - n|}{x - n}$, где n — некоторое натуральное число;

б) $f(x) = \frac{|x|}{x} - \frac{|x - 1|}{x - 1} + \ldots + (-1)^n \frac{|x - n|}{x - n}$, где n — некоторое натуральное число.

17.08. Найдите все значения параметра a, при котором имеет решение уравнение:

а) $x + |x + 2| - 2 = a$;

б) $\dfrac{|x| + 2}{|x + 2|} = a$;

в) $x|x - 2| + a = x^2$;

г) $|x + 3| = a|x - 1|$.

17.09. Найдите наибольшее целое отрицательное значение параметра a, при котором уравнение $ax - |x + 1| = 2$ имеет решение.

17.10. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $a|x| - |x + 1| = 1$ имеет не менее трех решений.

17.11. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x - 1| + x^2 - 2x + 3a^2 + 2a = 0$ имеет решение.

17.12. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $a|x| - |x^2 - 1| = a$ имеет ровно четыре решения.

17.13. Определим функцию[1] $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, \text{ при } x < 0, \\ 0, \text{ при } x = 0, \\ 1, \text{ при } x > 0. \end{cases}$

Найдите множество значений функции:

а) $y = f(\operatorname{sign}(x))$, где $f(t) = \dfrac{t - 1}{t + 1}$;

б) $y = f(\operatorname{sign}(-x))$, где $f(t) = \dfrac{t + 2}{t - 2}$.

17.14. Функция $E(x) = [x]$ определена для любого x, причем $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x. Найдите множество значений функции $y = f(E(x))$, где $f(t) = \dfrac{t - 1}{t + 1}$.

Задачи, связанные со свойством монотонности функции

17.15. Используя условия задач 17.01 и 17.02, определите промежутки монотонности функций, заданных графически.

[1] Запись $\operatorname{sign}(x)$ читается «сигнум икс», что означает «знак x».

17.16. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = 2x^2 - 3x + 4$;

б) $y = \frac{x + 4}{x - 2}$;

в) $y = \frac{x - 4}{x + 2}$;

г) $y = \sqrt{1 - x}$.

17.17. Докажите, что если функция $f(x)$ возрастает на промежутке I, то функция $g(x) = af(x) + b$ при $a > 0$ также возрастает на I, а при $a < 0$ — убывает на промежутке I при любом значении b.

17.18. Докажите, что если каждая из двух функций возрастает (убывает) на промежутке I, то их сумма также возрастает (убывает) на этом промежутке.

17.19. Определите промежутки монотонности функции:

а) $y = 4 - 3\sqrt{x - 5}$;

б) $y = -3 + 5\sqrt{2 - x}$;

в) $y = \sqrt{x + 1} - \frac{x + 2}{x + 1}$;

г) $y = \sqrt{1 - x} + \frac{x + 1}{x - 1}$.

17.20. Пусть функция $f(x)$ возрастает и принимает только положительные значения на промежутке J. Докажите, что $y = (f(x))^2$ возрастает на промежутке J.

17.21. Пусть функция $f(x)$ возрастает и принимает только отрицательные значения на промежутке J. Докажите, что $y = (f(x))^2$ убывает на промежутке J.

17.22. Пусть функция $f(x)$ убывает и принимает только положительные значения на промежутке J. Докажите, что $y = (f(x))^2$ убывает на промежутке J.

17.23. Пусть функция $f(x)$ убывает и принимает только отрицательные значения на промежутке J. Докажите, что $y = (f(x))^2$ возрастает на промежутке J.

17.24. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = (x^2 - 1)^2$;

б) $y = (x^2 - 3x - 10)^2$.

17.25. На рисунке 13 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите промежутки монотонности функции $y = \left(f(x)\right)^2$.

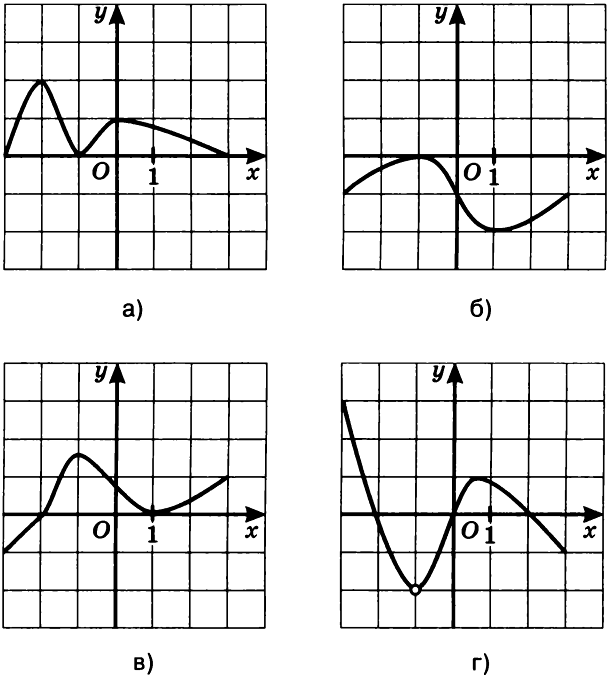


Рис. 13

17.26. Пусть функция $f(x)$ возрастает на J и принимает на J только положительные значения. Докажите, что функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ убывает на J.

17.27. Пусть функция $f(x)$ возрастает на J и принимает на J только отрицательные значения. Докажите, что функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ возрастает на J.

17.28. Пусть функция $f(x)$ убывает на J и принимает на J только положительные значения. Докажите, что функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ возрастает на J.

17.29. Пусть функция $f(x)$ убывает на J и принимает на J только отрицательные значения. Докажите, что функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ убывает на J.

17.30. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = \dfrac{1}{x^4 + 1}$;

б) $y = \dfrac{1}{x^2 + 6x + 10}$;

в) $y = \dfrac{1}{x^3 - 1}$;

г) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x - 12}$.

17.31. На рисунке 14 представлен график функции $y = f(x)$. Найдите промежутки монотонности функции $y = \dfrac{1}{f(x)}$.

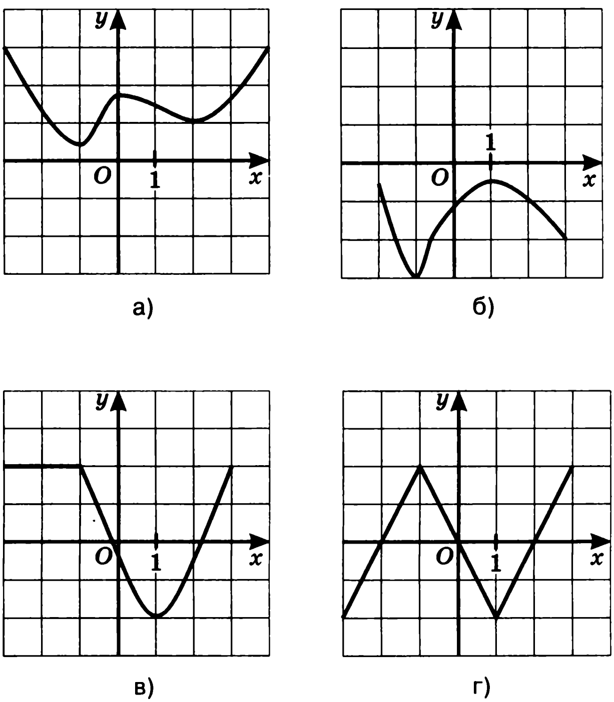


Рис. 14

17.32. Пусть функции f и g определены и монотонны на $\boldsymbol{R}$. Пусть на $\boldsymbol{R}$ определены композиции $f(g(x))$ и $g(f(x))$. Заполните таблицу:

	$f(x)$	$g(x)$	$g(f(x))$	$f(g(x))$
а	Возрастает	Убывает		
б	Убывает		Возрастает	
в		Убывает		Возрастает
г		Убывает	Возрастает	
д	Возрастает			Возрастает
е	Убывает	Убывает		

17.33. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = \left(x^3 - 1\right)^2 - 8\left(x^3 - 1\right) + 12$;

б) $y = \sqrt{x^2 + x + 6}$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 10x + 16}$;

г) $y = \sqrt{x^2 - 10x - 24}$.

17.34. Пусть функция $f(x)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = f\left(x^2 + 6x - 16\right)$; б) $y = f\left(\sqrt{25 - x^2}\right)$.

17.35. Пусть функция $f(x)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$. Решите:

а) уравнение $f(3x + 2) = f\left(4x^2 + x\right)$;

б) неравенство $f(3x + 2) < f\left(4x^2 + x\right)$.

17.36. Пусть функция $f(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$. Решите:

а) уравнение $f\left(\dfrac{1}{3x^2 + 4x - 7}\right) = f\left(\dfrac{1}{2x^2 + 3x - 5}\right)$;

б) неравенство $f\left(\dfrac{1}{3x^2 + 4x - 7}\right) \geqslant f\left(\dfrac{1}{2x^2 + 3x - 5}\right)$.

17.37. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(-1; 1)$ и возрастает на нем. Решите:

а) уравнение $f(3x + 2) = f(4x^2 + x)$;

б) неравенство $f(3x + 2) < f(4x^2 + x)$.

17.38. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-1; 1]$ и убывает на нем. Решите:

а) уравнение $f(3x + 2) = f(4x^2 + x)$;

б) неравенство $f(3x + 2) < f(4x^2 + x)$.

17.39. Пусть функция $f(x)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$, а функция $g(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$ и принимает только отрицательные значения. Пусть на $\boldsymbol{R}$ определены функции $f(g(x))$, $g(g(x))$, $g(f(x))$, $f\left(\frac{1}{g(x)}\right)$. Решите неравенство:

а) $f(g(x + 2)) < f(g(x^2))$;

б) $g(g(x + 2)) < g(g(x^2))$;

в) $g(f(x + 2)) < g(f(x^2))$;

г) $f\left(\frac{1}{g(x)}\right) \leqslant f\left(\frac{1}{g(210 - x^2)}\right)$.

17.40. Пусть функция $f(x)$ определена и возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = f(y) - f(x), \\ x^2 + 4xy = 5. \end{cases}$$

17.41. Докажите, что если функция $f(x)$ возрастает или убывает на промежутке J, то уравнение $f(x) = a$ не может иметь более одного корня на J.

17.42. Докажите, что если функция $f(x)$ возрастает на промежутке J, а функция $g(x)$ убывает на промежутке J, то уравнение $f(x) = g(x)$ не может иметь два различных корня на J.

17.43. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} + \sqrt{x - 5} = 23 - 2x$;

б) $\sqrt{x} + \sqrt{x - 3} = 43 - 6x - x^2$;

в) $\dfrac{17}{x^2+1} = 8\sqrt{x}$;

г) $\left(x^2 + 4x + 9\right)\sqrt{4x+1} = 9$.

Задачи, связанные с экстремумами и с наибольшим и наименьшим значениями функции на заданном множестве

17.44. Для функций, графики которых изображены на рисунках 11 и 12, найдите их экстремумы, а также наибольшее и наименьшее значения на области их существования.

17.45. Функция f называется ограниченной на некотором множестве M, если существуют числа C_1 и C_2 такие, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $C_1 \leqslant f(x) \leqslant C_2$. Докажите, что функции, графики которых представлены на рисунках 11 и 12, ограничены на области их существования.

17.46. Докажите, что если функция f имеет наибольшее и наименьшее значения на множестве M, то она ограничена на этом множестве.

17.47. Приведите пример функции, определенной и ограниченной на отрезке $[a, b]$, но не имеющей ни наибольшего, ни наименьшего значений на отрезке $[a, b]$.

17.48. Приведите пример функции, определенной и ограниченной на $\boldsymbol{R}$, но не имеющей ни наибольшего, ни наименьшего значений на $\boldsymbol{R}$.

17.49. Докажите, что если функция f имеет наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[a, b]$, а отрезок $[a_1, b_1]$ является частью отрезка $[a, b]$, то:

а) $\max\limits_{[a,\, b]} f(x) \geqslant \max\limits_{[a_1,\, b_1]} f(x)$; б) $\min\limits_{[a,\, b]} f(x) \leqslant \min\limits_{[a_1,\, b_1]} f(x)$.

17.50. Докажите, что если функция f имеет наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[a, b]$, причем $\max\limits_{[a,\, b]} f(x) = \min\limits_{[a,\, b]} f(x)$, то функция f является постоянной на отрезке $[a, b]$.

17.51. Докажите:

а) $\max\limits_{x<0}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = -2$; б) $\min\limits_{x>0}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 2$.

17.52. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = \frac{2}{x^2 + 1}$;

б) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$;

в) $y = \frac{2}{x^2 - 4x + 10}$;

г) $y = \frac{2x - 9}{x^2 - 4x + 10}$.

17.53. Функция $y = \frac{15x^2 + 60}{x^4 - 16}$ определена только для допустимых целых значений x. Найдите ее наибольшее значение.

17.54. Функция $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9}$ определена только для допустимых целых значений x. Найдите ее наибольшее значение.

17.55. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 1 + 2x - x^2$;

б) $\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 6x - x^2 - 8$.

17.56. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = |x| + |x - 1|$;

б) $y = |x| + |x - 1| + |x - 2|$;

в) $y = |x| + |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$;

г) $y = |x| + |x - 1| + \ldots + |x - n|$, $n \in N$.

Для каждого значения параметра a найдите наибольшее и наименьшее значения функции (**17.57—17.59**):

17.57. а) $y = x^2 + 4x + 5a$ на отрезке $[-1;\ 1]$;

б) $y = -x^2 + 4x - a$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

17.58. а) $y = x^2 - 4x$ на отрезке $[-1;\ a]$;

б) $y = -x^2 + 2x - 3$ на отрезке $[a;\ 3]$.

17.59. а) $y = x^2 - 4ax$ на отрезке $[-1;\ 2]$;

б) $y = -x^2 - 4ax + 7$ на отрезке $[-2;\ 3]$.

в) $y = x^2 + 2ax + 5$ на отрезке $[-1;\ 1]$;

г) $y = x^2 + ax - 5$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции (**17.60, 17.61**):

17.60. а) $y = \sqrt{x^2 + 25} + x^4 + 2x^2 + 3$ на отрезке $[-3;\ 3]$;

б) $y = \sqrt{x^2 + 25} + x^4 + 2x^2 + 3$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

17.61. а) $y = x^3 + 2x + 3$ на отрезке $[-1; 3]$;

б) $y = \sqrt{10 - x} - x^3 - 2x + 3$ на отрезке $[-1; 3]$;

в) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ на отрезке $[-1, 3]$.

17.62. Решите уравнение:

а) $\sqrt{5 - x} + 130 = x^3 + x$;

б) $\sqrt{x - 2} - 8 = -12x + 6x^2 - x^3$.

§ 18. ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

18.01. Какие из приведенных на рисунке 15 графиков являются графиками:

а) четной функции;

б) нечетной функции;

в) функций, не обладающих свойством четности и нечетности?

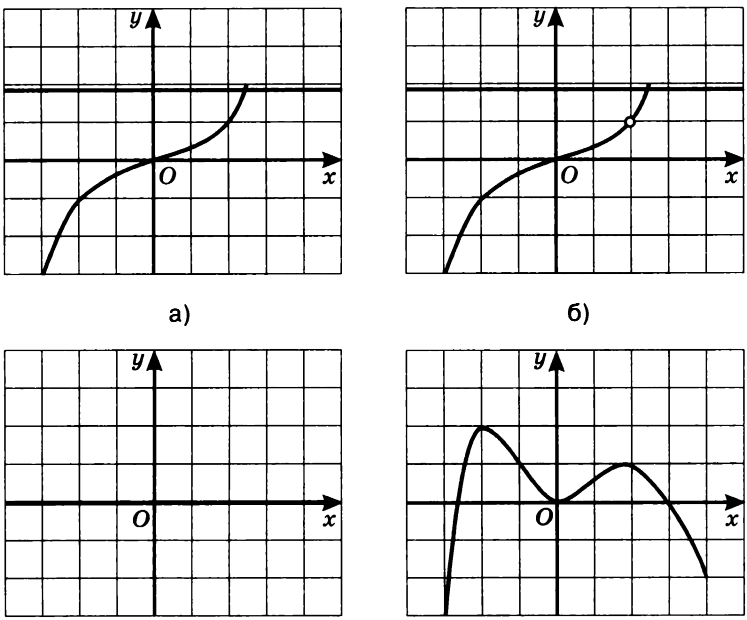
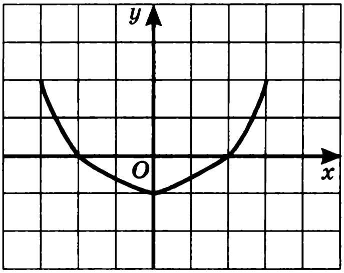
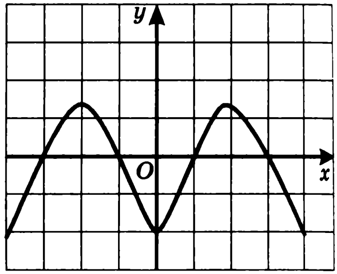


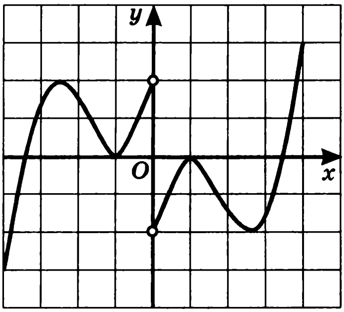
Рис. 15 (начало)



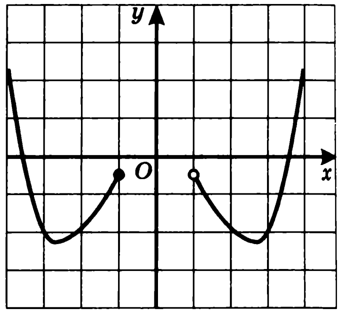
д)



е)



ж)



з)

Рис. 15 (окончание)

Докажите, что данная функция является четной (18.02, 18.03):

18.02. а) $f(x) = 10$;

б) $f(x) = x^2 + 1$;

в) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^4 - 5}$;

г) $f(x) = x^6 + \sqrt{10 + x^2}$.

18.03. а) $f(x) = 2x^2 - |x| + 5$;

б) $g(x) = \sqrt{3 - x} + \sqrt{3 + x}$;

в) $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}$;

г) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x^2 - 5x + 1} - \dfrac{3x - 1}{x^2 + 5x + 1}$.

Докажите, что данная функция является нечетной (18.04, 18.05):

18.04. а) $f(x) = 5x$;

б) $f(x) = x^3 + 3x$;

в) $g(x) = \dfrac{x^7}{x^4 - 4}$;

г) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 11} + \dfrac{1}{x}$.

18.05. а) $f(x) = x|x| - 2\sqrt[3]{x}$;

б) $g(x) = \sqrt{5 - x} - \sqrt{5 + x}$;

в) $g(x) = \dfrac{x^2 - 3|x| - 5}{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}$;

г) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 5x + 7} + \dfrac{2x - 1}{x^2 + 5x + 7}$.

18.06. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4} + 3\sqrt{x^4 - x^2}$ является одновременно и четной, и нечетной. Найдите множество значений этой функции. Придумайте еще примеры таких функций.

18.07. Докажите, что данная функция не обладает свойством четности и нечетности:

а) $f(x) = 5x + 1$;

б) $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$;

в) $f(x) = \sqrt{-3x + 7}$;

г) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - x$;

д) $f(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 + 1}$;

е) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$;

ж) $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x < 0, \\ 5, \text{ если } x = 0, \\ 2x^2, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

з) $f(x) = \begin{cases} 2 - x, \text{ если } x < 1, \\ 5, \text{ если } x = 1, \\ 3 - 2x^2, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

18.08. Докажите, что функция $y = [-x] + [x]$ — четная, а $y = [-x] - [x]$ — нечетная, где $[x]$ — целая часть x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее число x. Постройте графики этих функций.

18.09. Пусть функция f определена на $\boldsymbol{R}$. Докажите, что функции $y = f(x) + f(-x)$ и $y = f(x) \cdot f(-x)$ являются четными, а функция $y = f(x) - f(-x)$ — нечетной.

18.10. Докажите, что любую функцию f, определенную на $\boldsymbol{R}$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

18.11. Представьте, если это возможно, каждую из функций из задачи 18.07 в виде суммы четной и нечетной функций.

18.12. Сумма каких из приведенных ниже функций является четной, а каких нет:

а) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ и $g(x) = 3x + 3$;

б) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ и $g(x) = 2 - \sqrt{x}$;

в) $f(x) = \dfrac{2}{x} - x^2$ и $g(x) = \dfrac{x-2}{x}$;

г) $f(x) = \dfrac{2}{x+1} - x^2$ и $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$;

д) $f(x) = \dfrac{2}{|x|+1} - x^2$ и $g(x) = \dfrac{x-1}{|x|+1}$?

18.13. Сумма каких из приведенных ниже функций является нечетной, а каких нет:

а) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ и $g(x) = -x^2 + 5x - 1$;

б) $f(x) = 3x^3 + \sqrt{-x}$ и $g(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt{-x}$?

18.14. Придумайте такие функции $f(x)$ и $g(x)$, чтобы их сумма была четной, а разность нечетной функциями. Можно ли придумать такие функции для произведения и частного?

18.15. Представьте данную функцию в виде суммы четной и нечетной функций:

а) $f(x) = x + \sqrt{3x^2 - x + 11}$;

б) $f(x) = x - [x]$,

где $[x]$ — целая часть x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее число x.

18.16. Докажите, что функцию $f(x) = x + \sqrt{3x^2 - x - 11}$ нельзя представить в виде четной и нечетной функций.

18.17. Докажите, что если области определения двух нечетных функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют хотя бы одну общую точку, то функции $y = f(x) + g(x)$ и $y = f(x) - g(x)$ являются нечетными.

18.18. Докажите, что если области определения двух нечетных функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют хотя бы одну общую точку, то функции $y = f(x) \cdot g(x)$ и $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ (если она определена) являются четными.

18.19. Докажите, что если области определения двух четных функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют хотя бы одну общую точку, то функции $y = f(x) + g(x)$; $y = f(x) - g(x)$; $y = f(x) \cdot g(x)$ и $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ (если она определена) являются четными.

18.20. Пусть $f(x)$ — нечетная функция, а $g(x)$ — четная и области их определения имеют хотя бы одну общую точку. Докажите, что $y = f(x) \cdot g(x)$ и $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ (если она определена) — нечетные функции.

18.21. Пусть $f(x)$ — нечетная функция, а $g(x)$ — четная и функция $y = g(f(x))$ определена хотя бы в одной точке. Докажите, что функции $y = g(f(x))$ и $y = f(g(x))$ являются четными.

18.22. Докажите, что если функция $g(x)$ определена хотя бы для одного неотрицательного значения аргумента, то функция $y = g(|x|)$ является четной.

18.23. Докажите, что если функция $g(x)$ определена хотя бы для одного неотрицательного значения аргумента, то функция $y = g(x^2)$ является четной.

18.24. Докажите, что если $f(x)$ — четная функция и функция $y = g(f(x))$ определена хотя бы в одной точке, то $y = g(f(x))$ четная функция.

18.25. Может ли четная функция быть определена: а) только в одной точке; б) только в двух точках; в) только в трех точках? Если может, то каким свойством обладают эти точки?

18.26. Может ли нечетная функция быть определена: а) только в одной точке; б) только в двух точках; в) только в трех точках? Если может, то каким свойством обладают эти точки?

18.27. Пусть нечетная функция f определена в точке 0. Чему может равняться $f(0)$?

18.28. Пусть четная функция f определена в точке 0. Чему может равняться $f(0)$?

18.29. График нечетной функции пересекает ось абсцисс в 10 точках, докажите, что эта функция не определена в точке 0.

18.30. График четной функции пересекает ось абсцисс в 171 точке, найдите:
а) сумму абсцисс этих точек;
б) произведение абсцисс этих точек.

18.31. График нечетной функции пересекает ось ординат в 1111 точках, найдите:
а) сумму абсцисс этих точек;
б) произведение абсцисс этих точек.

18.32. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{7}{x+2} & \text{при } x<0, \\ \dfrac{7}{x-2}-x^2 & \text{при } x>0 \end{cases}$ — нечетная.

18.33. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{3}{x+5} & \text{при } x<0, \\ x^2+\dfrac{3}{5-x} & \text{при } x\geqslant 0 \end{cases}$ — четная.

18.34. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{9+11x+3x^2}-\sqrt{9-11x+3x^2}=a$ имеет нечетное число разных корней?

18.35. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{9+7x+x^2}+\sqrt{9-7x+x^2}=a$ имеет нечетное число разных корней?

18.36. Дано уравнение $5x^5-13x=\sqrt{32-32x}-\sqrt{32+32x}$.
а) Докажите, что число -1 является корнем этого уравнения;

б) докажите, что данное уравнение имеет не менее трех корней;
в) найдите сумму всех корней уравнения;
г) сравните с нулем произведение всех корней уравнения.

18.37. Дано уравнение $6x^5 - 3x + \frac{1}{x} = \sqrt{8 + 8x} - \sqrt{8 - 8x}$.

а) Докажите, что число 1 является корнем этого уравнения;
б) докажите, что данное уравнение имеет не менее двух корней;
в) найдите сумму всех корней уравнения;
г) сравните с нулем произведение всех корней уравнения.

18.38. Докажите, что число -2 является корнем уравнения $x^3 - \frac{2 + |x|}{x} = \frac{9x}{|x| + 1}$, и найдите среднее арифметическое всех корней уравнения.

18.39. Найдите среднее арифметическое всех корней уравнения $x^4 - \frac{2}{x^2} = \frac{7 - 9x^2}{|x| + 1}$.

18.40. Доопределите функцию $f(x)$ так, чтобы она стала четной:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 - \sqrt{3 - x}, & \text{при } x < 0, \\ & \text{при } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - x + 3}{5 + x^3}, & \text{при } x < 0, \\ & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$

18.41. Доопределите функцию $f(x)$ так, чтобы она стала нечетной:

а) $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 - \sqrt{1 - x}, & \text{при } x < 0, \\ & \text{при } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^3 + 5}, & \text{при } x < 0, \\ & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$

18.42. Докажите, что функцию $f(x)$ нельзя доопределить так, чтобы она стала нечетной:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 - \sqrt{3 - x}, & \text{при } x < 0, \\ & \text{при } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - x + 3}{5 + x^3}, & \text{при } x < 0, \\ & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$

18.43. Дано уравнение $5x^2 - 3|x| + \frac{1}{x^2} + \frac{x^2 + 3|x| + 14}{x^2 + 5}$.

а) Докажите, что число -1 является корнем этого уравнения;

б) докажите, что данное уравнение имеет не менее двух корней;

в) найдите сумму всех корней уравнения.

18.44. Найдите сумму и произведение абсцисс всех точек пересечения графика функции $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - \frac{5}{|x| - 2}$ с графиком прямой $4x - 2y + 5 = 0$.

18.45. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке, симметричном относительно точки $x = 0$, и является четной. Достройте график функции (рис. 16).

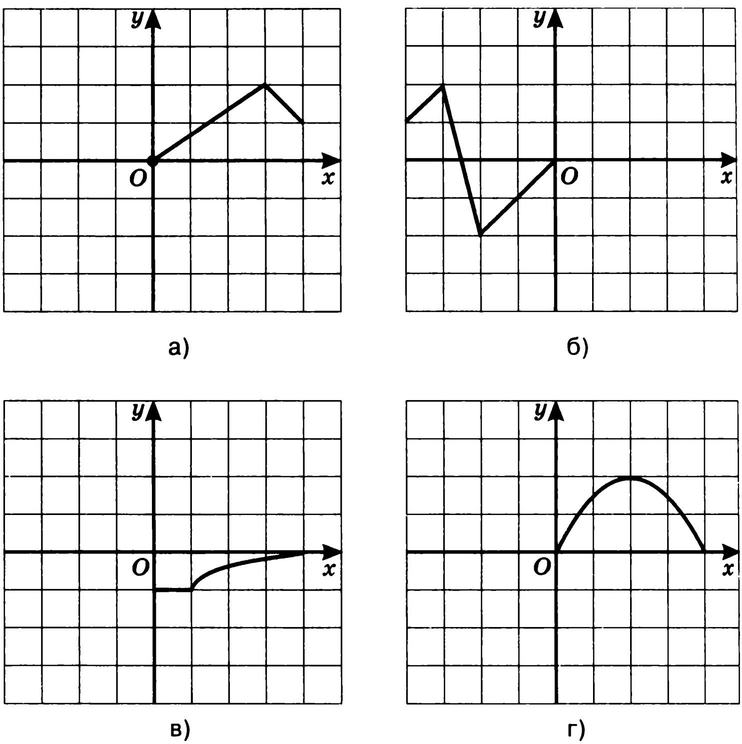
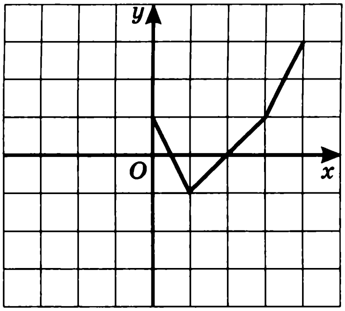
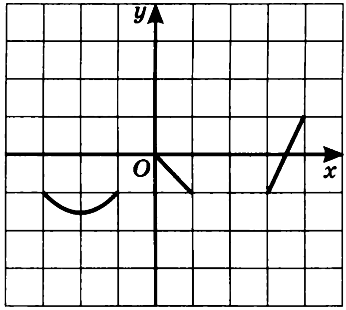


Рис. 16 (начало)



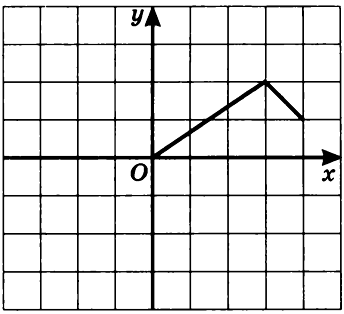
д)



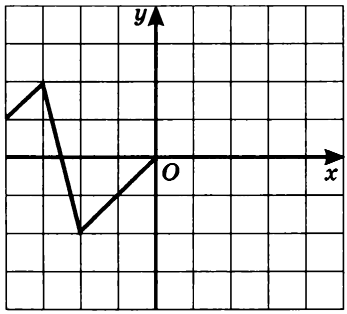
е)

Рис. 16 (окончание)

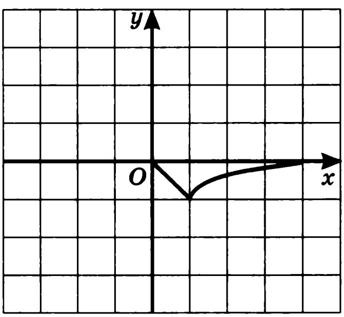
18.46. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке, симметричном относительно точки $x = 0$, и является нечетной. Достройте график функции (рис. 17).



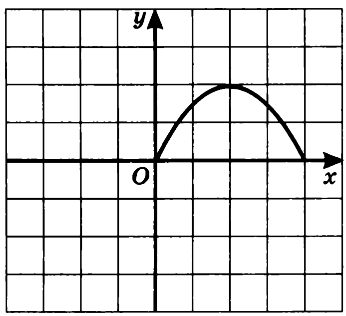
а)



б)

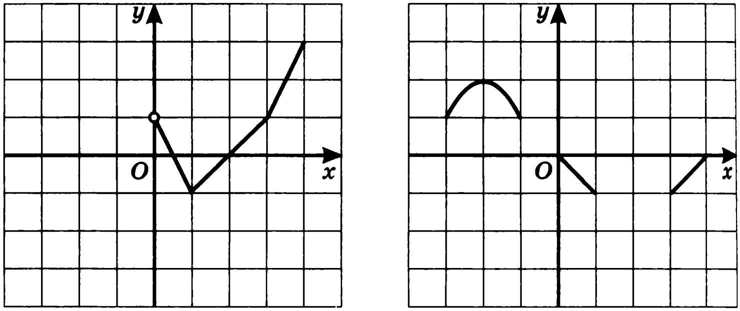


в)



г)

Рис. 17 (начало)



д) е)

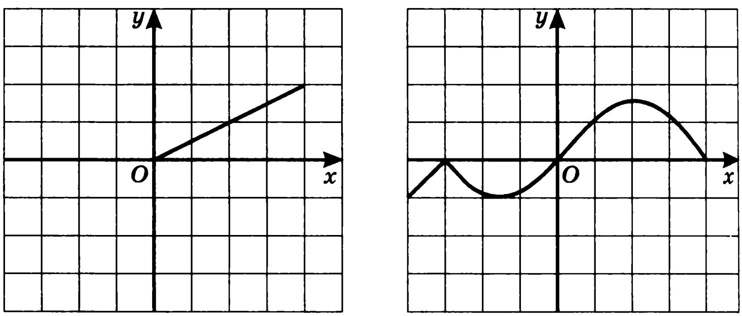
Рис. 17 (окончание)

18.47. На рисунке 18 изображен график функции $y = (x)$. Постройте графики функций:

а) $y = f(|x|)$; в) $y = f\left(\dfrac{|x| + x}{2}\right)$;

б) $y = f(-|x|)$; г) $y = f\left(\dfrac{|x| - x}{2}\right)$.

Какая из функций является четной?



а) б)

Рис. 18

18.48. Найдите длину отрезка, соединяющего две точки графика четной функции, если сумма абсцисс этих точек равна нулю, а произведение абсцисс -36.

18.49. Может ли функция $y = f(x)$ являться четной, если:

а) $f(3) - f(-3) = 3$; в) $f(15) + f(-15) = -15$;

б) $f(2) \cdot f(-2) = -1$; г) $\dfrac{f(5)}{f(-5)} = \sqrt{3}$?

18.50. Четная функция возрастает на промежутке $[0; 3]$ и убывает на промежутке $[3; +\infty)$. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума этой функции.

18.51. Четная функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; -5]$ и убывает на промежутке $[-5; 0)$, причем $f(-5) = 7$, $f(0) = -3$. Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы этой функции.

18.52. Известно, что $y = f(x)$ — четная функция и $f(3) + f(-5) = 7$. Найдите:

а) $f(-3) + f(-5)$;

б) $f(3) + f(5)$;

в) $2f(3) + 3f(-5) - f(5)$;

г) $7f(3) + 8f(-5) - 2f(-3) + 3f(5)$.

18.53. Может ли функция $y = f(x)$ являться нечетной, если:

а) $f(3) - f(-3) = 3$;

б) $f(2) \cdot f(-2) = 1$;

в) $f(15) + f(-15) = -15$;

г) $\dfrac{f(5)}{f(-5)} = \sqrt{3}$;

д) $f(0) \cdot f(3) = 3$;

е) $f(7) + f(-7) = 32f(0)$?

18.54. Что можно сказать о четности и нечетности функции $y = f(x)$, если:

а) на графике этой функции есть точки $M(-3; 1)$ и $N(3; 8)$;

б) $f(3) = 5$, а в точке -3 функция не определена;

в) $f(5) \cdot f(-5) < 0$, а $f(2) \cdot f(-2) > 0$;

г) $f(-2) = -f(2)$, а $f(0) = 5$;

д) функция $y = f(x)$ имеет три нуля в точках -5, -2 и 2?

18.55. Известно, функция $y = f(x)$ является четной и $\max\limits_{[-1; 17]} f(x) = 8$, $\min\limits_{[-1; 17]} f(x) = -11$. Найдите наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-17; 1]$.

18.56. Известно, функция $y = f(x)$ является нечетной и $\max\limits_{[-1; 17]} f(x) = 8$, $\min\limits_{[-1; 17]} f(x) = -11$. Найдите наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-17; 1]$.

18.57. Наибольшее и наименьшее значения четной функции, определенной на отрезке $[-3; 3]$, достигаются на концах этого отрезка. Найдите $f(2) - f(0{,}3)$.

18.58. Верно ли утверждение, что наибольшее или наименьшее значение произвольной четной функции, определенной на отрезке $[-5; 5]$, принимается в середине этого отрезка?

Ответ обоснуйте либо доказательством, либо примером. В каком случае достаточно примера?

18.59. Нечетная функция возрастает на отрезке $[0; 5]$ и убывает на промежутке $[5; +\infty)$. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума этой функции.

18.60. Четная функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; -5]$ и убывает на промежутке $[-5; 0]$, причем $f(-5) = 7$, $f(0) = -3$. Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы этой функции.

18.61. Функция возрастает на промежутке $[-7; 7]$. Может ли она быть: а) нечетной; б) четной?

18.62. Множеством значений функции $y = f(x)$ служит интервал $(-3; 7)$. Может ли данная функция быть: а) четной; б) нечетной?

18.63. При каких значениях a уравнение $\sqrt{x^2 + 3x + a} - \sqrt{x^2 - 3x + a} = 3x - x^3$ имеет: а) нечетное число корней; б) четное число корней?

18.64. Начало координат является точкой пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$, сторона AB параллельна оси OX. График функции $y = f(x)$ проходит через вершину A. Через какие еще вершины прямоугольника обязательно пройдет этот график, а через какие может пройти, а может и не пройти, если функция: а) четная; б) нечетная?

18.65. Начало координат является точкой пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, ни одна из сторон которого не параллельна осям координат. График функции $y = f(x)$ проходит через вершину A. Через какие еще вершины параллелограмма обязательно пройдет этот график, а через какие может пройти, а может и не пройти, если функция: а) четная; б) нечетная?

§ 19. ФУНКЦИИ $y = x^m$ $(m \in Z)$, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

19.01. Запишите выражение в виде степени с наибольшим натуральным показателем:

а) $\dfrac{a^3(a^4)^5}{a^{17}}$; б) $\dfrac{a^3(a^4b^2)^5}{a^{17}b^{16}}$; в) $\dfrac{(a^6b^3)^2b^5}{(a^4b^5)^3}$; г) $\dfrac{(ab^4)^3b^3}{(ab^3)^5}$.

19.02. Закончите данные записи:

а) $a^k a^n = a^{-}$, если... ;

б) $a^k : a^n = a^{-}$, если... ;

в) $(a^k)^n = a^{-}$, если... .

19.03. Докажите, что степенная функция $f(x) = x^n$ при любом натуральном n обладает следующими свойствами:

а) $f(0) = 0$;

б) $f(1) = 1$;

в) $f(ab) = f(a)f(b)$;

г) $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{f(a)}{f(b)}$ при $b \neq 0$;

д) $f(f(a)) = a^{n^2}$.

19.04. Докажите, что если число $k \in N$, то функция $y = x^{2k-1}$ является нечетной, а функция $y = x^{2k}$ — четной.

19.05. Постройте на одном чертеже графики функций:

а) $y = x^2$;

б) $y = x^3$;

в) $y = x^4$;

г) $y = -x^2$;

д) $y = -x^3$;

е) $y = -x^4$.

19.06. Возьмите за единичный отрезок 10 клеток вашей тетради и постройте на одном чертеже графики функций $y = x^2$; $y = x^3$; $y = x^4$ на отрезке [0; 1].

19.07. Опишите, как расположены относительно друг друга графики функций $y = x^{20}$, $y = x^{300}$, $y = x^{4000}$.

Постройте график функции (19.08—19.12):

19.08. а) $y = (x - 1)^3$; б) $y = (x + 2)^3$; в) $y = (x - 2)^4$.

19.09. а) $y = 1 + x^4$; б) $y = 2 - x^3$; в) $y = x^4 - 5$.

19.10. а) $y = 2 - (x + 1)^3$;

б) $y = (x - 3)^3 + 1$;

в) $y = 1 - (2 - x)^4$.

19.11. а) $y = 2x^3$; б) $y = \frac{1}{3}x^3$; в) $y = -0{,}1x^3$.

19.12. а) $y = 2x^4$; б) $y = \frac{1}{3}x^4$; в) $y = -0{,}1x^4$.

19.13. Найдите расстояние между двумя точками графика функции $y = x^4$ с абсциссами 3 и -3 .

19.14. Найдите расстояние между двумя точками графика функции $y = x^3$ с абсциссами 2 и -2 .

19.15. Для каждого натурального значения k найдите расстояние между двумя точками графика функции $y = x^k$ с абсциссами 1 и -1.

19.16. Найдите натуральное число n, при котором график функции $y = x^n$ проходит через точку:

а) $(2; 4)$;
б) $(-3; -27)$;
в) $(3; -8)$;
г) $(1; 1)$;
д) $(-1; 1)$.

19.17. Найдите натуральное число n, при котором график функции $y = x^n$ пересекает прямую, заданную уравнением $x = 3$, между точками с ординатами 10 и 40.

19.18. Найдите натуральное число n, при котором график функции $y = x^n$ пересекает прямую, заданную уравнением $x = -0{,}3$, между точками с ординатами 0,0242 и 0,089.

19.19. Докажите тождество:

а) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$;
б) $x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$;
в) $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$;
г) $x^{2003} - 1 = (x - 1)(x^{2002} + x^{2001} + x^{2000} + x^{1999} + ... + x^2 +$
$+ x + 1)$.

19.20. Обобщите результат предыдущей задачи и запишите второй множитель в разложении $x^n - 1 = (x - 1)(...)$, где $n > 1$ — натуральное число.

19.21. Докажите тождество:

а) $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$;
б) $x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$;
в) $x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$;
г) $x^{2003} + 1 = (x + 1)(x^{2002} - x^{2001} + x^{2000} - x^{1999} + ... + x^2 -$
$- x + 1)$.

19.22. Обобщите результат предыдущей задачи и запишите второй множитель в разложении $x^n + 1 = (x + 1)(...)$, где $n > 1$ — нечетное натуральное число.

19.23. Докажите, что:

а) если $x > 1$ и n — натуральное число, то $x^n > 1$;
б) если $0 < x < 1$ и n — натуральное число, то $0 < x^n < 1$.

19.24. Докажите, что для функции $f(x) = x^n$, где n — натуральное число, из неравенства $x_1 > x_2 > 0$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

19.25. Докажите, что для функции $f(x) = x^n$, где n — натуральное число, из неравенства $0 < x < 1$ следует неравенство $0 < f(x) < 1$, а из неравенства $x > 1$ — неравенство $f(x) > 1$.

19.26. Докажите, что если $n_1 > n_2$, где n_1 и n_2 — натуральные числа, то для каждого числа x из интервала $(1; +\infty)$ выполняется неравенство $x^{n_1} > x^{n_2}$.

19.27. Докажите, что если $n_1 > n_2$, где n_1 и n_2 — натуральные числа, то для каждого числа x из интервала $(0; 1)$ выполняется неравенство $x^{n_1} < x^{n_2}$.

19.28. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = x^{2k-1}$;

б) $y = x^{2k}$, где k — натуральное число.

19.29. Докажите, что функция $y = x^3 + 7x - 2$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

19.30. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = x^5 + 3x^3 + x - 11$; б) $y = x^6 + 3x^4 + x^2 - 132$.

19.31. Решите уравнение:

а) $2x^5 + 3x = 5$; г) $3x^{10} + 8x^2 = 11$;

б) $3x^5 + 5x^3 = -8$; д) $x^{20} + 3x^4 = 38$;

в) $x^5 + 3x = 38$; е) $2x^{50} + 3x^{10} = 5 - \sqrt{26}$.

Для каждого значения параметра b определите количество действительных корней уравнения (**19.32, 19.33**):

19.32. а) $x^{44} = b$; г) $x^{10} + 3x^2 = b$;

б) $x^{135} = b$; д) $2x^{20} + x^4 = b$;

в) $x^{23} + 5x^3 + x = b$; е) $2x^4 - 3x^2 + b = 0$.

19.33. а) $2x^4 - 3x^2 + b = 0$; в) $2x^4 - 3bx^2 + 2b = 0$.

б) $2x^4 + 3x^2 + b = 0$;

19.34. Найдите все такие целые числа k, где между числами k и $k + 1$ лежит хотя бы один нуль функции:

а) $y = 3x^3 + x - 5$; в) $y = x^4 + x^6 - 111$.

б) $y = 177 - x^3 - 5x$;

19.35. Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ если } x < -1, \\ x^4 - 2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 22 - x^3, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

и с помощью графика укажите промежутки ее монотонности, точки экстремума, экстремумы и количество ее нулей.

19.36. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ если } x < -1, \\ x^3, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x^4, \text{ если } x > 1 \end{cases}$

и с помощью графика укажите промежутки ее монотонности, точки экстремума, экстремумы и количество ее нулей.

19.37. Найдите наибольшее и наименьшее значения, а также множество значений функции $y = x^4$ на множестве:

а) $[1; 2]$; в) $[-1; 2]$; д) $(-1; 2]$.
б) $(-3; -1]$; г) $[-1; 2)$;

19.38. Найдите наибольшее и наименьшее значения, а также множество значений функции $y = -3x^3$ на множестве:

а) $[1; 2]$; в) $[-1; 2]$; д) $(-1; 2]$.
б) $(-3; -1]$; г) $[-1; 2)$;

19.39. Найдите наибольшее и наименьшее значения, а также множество значений функции $y = x^3 + 2x - 3$ на отрезке:

а) $[1; 2]$; в) $[-1; 2]$; д) $(-1; 2]$.
б) $(-3; -1]$; г) $[-1; 2)$;

19.40. Найдите наибольшее и наименьшее значения, а также множество значений функции $y = x^6 + 2x^2 - 5$ на отрезке:

а) $[1; 2]$; в) $[-1; 2]$; д) $(-1; 2]$.
б) $(-3; -1]$; г) $[-1; 2)$;

19.41. Определите вид четырехугольника, вершины которого лежат на графике функции $y = x^{31}$ и имеют абсциссы -13; -7; 7 и 13.

19.42. Определите вид четырехугольника, вершины которого лежат на графике функции $y = x^{312}$ и имеют абсциссы -13; -7; 7 и 13.

19.43. Определите площадь четырехугольника, вершины которого лежат на пересечении прямых $x = 2$ и $x = -2$ с графиками функций $y = x^4$ и $y = x^6$.

19.44. Определите площадь четырехугольника, вершины которого лежат на пересечении прямых $x = 0{,}5$ и $x = -0{,}5$ с графиками функций $y = x^4$ и $y = x^2$.

19.45. Определите площадь четырехугольника, вершины которого лежат на пересечении прямых $x = 2$ и $x = -2$ с графиками функций $y = x^3$ и $y = x^5$.

Постройте график функции (19.46—19.49):

19.46. а) $y = |x| \cdot x^2$; б) $y = |x| \cdot x^2 + x^3$; в) $y = 2|x| \cdot x^2 + x^3$; г) $y = |x| \cdot x^2 - 0{,}5x^3$.

19.47. а) $y = |x^3 - 1| + x^3$;
б) $y = |x^3 - 1| + |x^3 + 1|$;
в) $y = |x^3 + 1| - |x^3 - 1|$;
г) $y = |x^3 + 1| - |x^3 - 1| + 2x^3$.

19.48. а) $y = 0{,}5(|x^3 - x^2| + |x^3 + x^2|)$;
б) $0{,}5(|x^3 + x^2| - |x^3 - x^2|)$.

19.49. а) $y = x + \dfrac{|x^{230} - x^{124}|}{x^{124} - x^{230}}$; б) $y = x - \dfrac{|x^{23} - x^{243}|}{x^{243} - x^{23}}$.

Постройте на одном чертеже график функции (19.50—19.52):

19.50. $y = x^{-1}$; $y = x^{-3}$; $y = x^{-5}$.

19.51. $y = x^{-2}$; $y = x^{-4}$; $y = x^{-6}$.

19.52. $y = x^{-1}$; $y = x^{-2}$; $y = x^{-3}$ (при $x > 0$).

Постройте график функции (19.53—19.55):

19.53. а) $y = (1 + x)^{-1}$; б) $y = 1 + x^{-1}$; в) $y = -(x + 2)^{-1}$; г) $y = -2 - (-x)^{-1}$.

19.54. а) $y = |x + 1|^{-1} - 1$; б) $y = (|x| + 1)^{-1} - 1$; в) $y = (|x| - 1)^{-1} - 1$; г) $y = |(|x| - 1)^{-1} - 1|$.

19.55. а) $y = 0{,}5(|x^{-1} - x^{-2}| + x^{-1} + x^{-2})$;
б) $y = (1 - x)^{-1} + (1 + x)^{-1} - (1 - |x|)^{-1}$.

19.56. Исходя из определения функции, убывающей на промежутке, докажите, что функция $y = x^{-3}$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$.

19.57. Исходя из определения функции, возрастающей на промежутке, докажите, что функция $y = x^{-4}$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$.

19.58. Исходя из свойств функции $y = x^{-3}$, докажите, что функция $y = 3(x + 5)^{-3} - 2$ убывает на промежутке $(-5; +\infty)$.

19.59. Исследуйте функции на четность и нечетность:

а) $y = x^{-13}$;
б) $y = x^{-32}$;
в) $y = x^{-11} + x^{-21}$;
г) $y = 9x^{-22} - 7x^{-2}$;
д) $y = x^{-1} + x^{-2}$.

19.60. Установите, обладает ли свойством четности или нечетности функция:

а) $y = (x - 1)^{-3}$;
б) $y = (1 - x)^{-3} + (1 + x)^{-3}$;
в) $y = (2 + x)^{-11} - (2 - x)^{-11}$;
г) $y = ((x - 1)^{-2})^{-1} - x^2 - 1$;
д) $y = ((x - 1)^{-2})^{-1} + 2x + \sqrt{1 - 3x} + \sqrt{1 + 3x}$;
е) $y = ((x - 1)^{-2})^{-1} + 2x + \sqrt{3 - x} + \sqrt{3 + x}$;
ж) $y = ((x - 5)^{-2})^{-1} - x^2 + \sqrt{3 - x} - \sqrt{3 + x} - 25$.

19.61. Найдите область определения, промежутки монотонности и множество значений функции:

а) $y = (x + 5)^{-1} - 11$;
б) $y = 2(x - 6)^{-1} + 3$;
в) $y = (3x + 1)^{-3} - 5$;
г) $y = -5(7x - 1)^{-5} - 2$.

19.62. Найдите область определения, промежутки монотонности и множество значений каждой из функций:

а) $y = (x - 5)^{-2} - 11$;
б) $y = 2(x - 6)^{-4} + 3$;
в) $y = (3x - 1)^{-1} - 5$;
г) $y = 5(7x - 1)^{-1} - 2$.

19.63. Рассмотрите график функции $y = x^{-1}$ и найдите:

а) все его центры симметрии;
б) все его оси симметрии;
в) длину отрезка, «высекаемого» графиком данной функции, на прямой $y = x$;
г) общие точки графика данной функции и прямой $x + y = -2,5$;
д) все такие значения параметра a, при которых прямая $x + y = a$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

19.64. Рассмотрите график функции $y = x^{-2}$ и найдите:

а) все его центры симметрии;

б) все его оси симметрии;

в) длину отрезка, «высекаемого» графиком данной функции на прямой $y = 16$;

г) общие точки графика данной функции и прямой $x + y = 2$.

19.65. Найдите функцию, график которой симметричен графику функции $y = x^{-1}$ относительно:

а) оси Ox;

б) оси Oy;

в) начала координат;

г) прямой $y = -x$;

д) точки $(1; 0)$;

е) точки $(0; -3)$;

ж) точки $(1; -3)$.

19.66. Найдите функцию, график которой симметричен графику функции $y = x^{-2}$ относительно:

а) оси Ox;

б) оси Oy;

в) начала координат;

г) прямой $y = 5$;

д) прямой $x = -3$;

е) точки $(1; 0)$;

ж) точки $(0; -3)$;

з) точки $(1; -3)$.

19.67. Найдите функцию, график которой симметричен графику функции $y = (x - 2)^{-1} + 3$ относительно:

а) оси Ox;

б) оси Oy;

в) начала координат;

г) прямой $y = 1$;

д) прямой $x = -1$;

е) прямой $y = x + 1$;

ж) точки $(1; -3)$.

19.68. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3(x - 2)^{-1} + 2$ на промежутке:

а) $[-5; 1]$;

б) $[3; 7]$;

в) $[1{,}99; 1{,}999]$;

г) $[2{,}0001; 2{,}0002]$.

19.69. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -3(x + 1)^{-2} + 5$ на промежутке:

а) $[-3; -2]$;

б) $[-0{,}5; 7]$;

в) $[-0{,}999; -0{,}99]$;

г) $[-1{,}0005; -10\,004]$.

19.70. Найдите точки экстремума и экстремумы функции:

а) $y = |x^{-1} - 3|$;

б) $y = |x^{-4} - 1|$;

в) $y = \left| x^{-1} - \dfrac{|x|}{x} \right|$.

19.71. Постройте график и проведите исследование функции:
а) $y = (|x| - 2)^{-3} + 1$; б) $y = |x^{-2} - 1|$.

19.72. Используя свойства функций, стоящих в левой и правой частях уравнений, решите эти уравнения:
а) $\sqrt{x} = 30(x + 1)^{-1}$; в) $x^{-1} + 3x^{-3} + 5x^{-5} = 9$;
б) $x^2 = 4(x - 1)^{-3}$; г) $|x^{-1} + 4x^{-3} + 32x^{-5}| = 2$.

19.73. Найдите все такие значения параметра b, для которых существует такое число p, что график функции $y = (|x| + b)^{-3}$ расположен ниже прямой $y = p$. Для каждого такого b укажите все возможные значения p.

§ 20. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt[3]{x}$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

20.01. Докажите, что число 0,2 является кубическим корнем из числа 0,008 и корнем седьмой степени из числа $128 \cdot 10^{-7}$.

20.02. Между какими соседними целыми числами находится число, кубический корень из которого равен:
а) 1,3; б) −3,1.

20.03. Вычислите без микрокалькулятора кубические корни из следующих чисел: 8; 27; 64; 125; 729 000; 1 771 561; 0,000512; 0,493039.

20.04. Вычислите без микрокалькулятора произведение

$$(\sqrt[3]{1\,259\,712} - 1) \cdot (\sqrt[3]{1\,259\,712} - 2) \cdot (\sqrt[3]{1\,259\,712} - 3) \times \ldots$$

$$\ldots \times (\sqrt[3]{1\,259\,712} - 1\,259\,712).$$

20.05. Постройте график функции:
а) $y = \sqrt[3]{x^3}$; б) $y = (\sqrt[3]{x})^3$.

Решите уравнение (20.06, 20.07):

20.06. а) $\sqrt[3]{x} = 3$; в) $\sqrt[3]{\dfrac{3x - 1}{2x + 5}} = 2$;
б) $\sqrt[3]{2x - 1} = -5$; г) $\sqrt[3]{x^2 - x + 28} = 3$.

20.07. а) $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{7x - 5}$; в) $\sqrt[3]{\dfrac{3x - 1}{2x + 5}} = \sqrt[3]{\dfrac{x + 1}{5x + 2}}$;
б) $\sqrt[3]{2x - 1} = \sqrt[3]{7x + 1}$; г) $\sqrt[3]{x^2 - x - 2} = -\sqrt[3]{2 + x - x^2}$.

20.08. Сколько нулей может быть в числе 100...0, чтобы кубический корень из этого числа был натуральным числом?

20.09. Сколько нулей после запятой может быть в числе 0,00...027, чтобы кубический корень из этого числа был рациональным числом?

20.10. Какое наибольшее количество идущих подряд трехзначных натуральных чисел надо (можно) взять, чтобы среди них не было ни одного числа, кубический корень из которого есть натуральное число?

20.11. При помощи микрокалькулятора вычислите с точностью до 0,001 корни кубические из: 234; 2 340; 23 400; 234 000; 2 340 000; 23 400 000.

20.12. Постройте на одном чертеже графики функций $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$ и перечислите свойства функции $y = \sqrt[3]{x}$: а) область определения $D(y)$; б) множество значений $E(y)$; в) нули функции; г) промежутки монотонности; д) промежутки выпуклости; е) точки экстремума; ж) экстремумы; з) четность или нечетность; и) наибольшее и наименьшее значения.

Постройте график и исследуйте функцию (**20.13—20.15**):

20.13. а) $y = 2 + \sqrt[3]{x}$; г) $y = \sqrt[3]{2 - x}$;

б) $y = 3 - \sqrt[3]{x}$; д) $y = \sqrt[3]{2 - x} - 3$;

в) $y = \sqrt[3]{x - 1}$; е) $y = 2 - \sqrt[3]{x + 1}$.

20.14. а) $y = 2\sqrt[3]{x}$; в) $y = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$;

б) $y = \sqrt[3]{-3x}$; г) $y = 2\sqrt[3]{2 - x} - 1$.

20.15. а) $y = |\sqrt[3]{x}|$; в) $y = |1 - \sqrt[3]{x - 2}|$;

б) $y = 2 - \sqrt[3]{|x|}$; г) $y = |1 - \sqrt[3]{|x| - 2}|$.

20.16. Рассмотрите построенные на одном чертеже графики функций $y = x$; $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$. Используя эти графики, сравните числа:

а) 0,7 и $\sqrt[3]{0{,}7}$; в) 1,3 и $\sqrt[3]{1{,}3}$;

б) $0{,}7^3$ и $\sqrt[3]{0{,}7}$; г) $1{,}2^3$ и $\sqrt[3]{1{,}2}$.

20.17. Запишите в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt[3]{0,7}$; $\sqrt[3]{-0,7}$; $(0,7)^3$; $(-0,7)^3$; 1; -1 и 0;

б) $\sqrt[3]{1,1}$; $\sqrt[3]{-1,1}$; $(1,1)^3$; $(-1,1)^3$; 1; -1 и 0;

в) $\sqrt[3]{0,2}$; $\sqrt[3]{-0,2}$; $(0,2)^3$; $(-0,2)^3$; 1; -1 и 0;

г) $\sqrt[3]{1,2}$; $\sqrt[3]{-1,2}$; $(1,2)^3$; $(-1,2)^3$; 1; -1 и 0.

20.18. Прямая, заданная уравнением $x = -0,3$, пересекает графики функций $y = x$; $y = x^3$; $y = \sqrt[3]{x}$ и ось абсцисс соответственно в точках A, B, C и M. Требуется:

а) найти координаты этих точек;

б) найти длины отрезков AB, AC, BM, CM, BC;

в) записать по порядку (в направлении оси ординат) точки A_1, B_1 и C_1, являющиеся проекциями точек A, B и C на ось ординат;

г) найти координаты точек A_2, B_2, C_2 и M_2, симметричных данным точкам A, B, C и M относительно прямой $y = x$;

д) найти координаты середин отрезков MM_2 и CC_2;

е) определить вид четырехугольника с вершинами в точках B, B_2, C, C_2;

ж) найти угол C_2CC_1.

20.19. Используя монотонность функции $y = \sqrt[3]{x}$, сравните без микрокалькулятора числа:

а) $\sqrt[3]{8,7}$ и $\sqrt[3]{7,8}$;

б) $\sqrt[3]{0,7}$ и $\sqrt[3]{0,78}$;

в) $\sqrt[3]{\frac{123}{124}}$ и $\sqrt[3]{\frac{122}{123}}$;

г) $\sqrt[3]{\frac{22}{7}}$ и $\sqrt[3]{\pi}$;

д) $\sqrt[3]{3,14159}$ и $\sqrt[3]{\pi}$;

е) $\sqrt[3]{(2 - \sqrt{5})^2}$ и $\sqrt[3]{\frac{1}{4\sqrt{5} + 9}}$.

20.20. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{9 - x} + 2\sqrt[3]{16 - x} = 5$;

б) $\sqrt[3]{9 - |x|} + 2\sqrt[3]{16 - |x|} = 5$;

в) $\sqrt[3]{9 - x^2} + 2\sqrt[3]{16 - x^2} = 5$;

г) $\sqrt[3]{\frac{9x - 1}{x}} + 2\sqrt[3]{\frac{16x - 1}{x}} = 5$.

20.21. Используя выпуклость функции $y = \sqrt[3]{x}$, докажите, что уравнение $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{7}(x + 6)$ имеет ровно два корня, и найдите эти корни.

20.22. Постройте на одном чертеже графики функций:

а) $y = \sqrt{x}$ и $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;   б) $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

20.23. Проверьте равенство:

а) $\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$;   в) $\sqrt[3]{\dfrac{9 - 5\sqrt{3}}{9 + 5\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$;

б) $\sqrt[3]{\dfrac{5\sqrt{2} - 7}{5\sqrt{2} + 7}} = (\sqrt{2} - 1)^2$;   г) $\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt[3]{20 + 12\sqrt{3}}}$.

Сравните числа (**20.24**, **20.25**):

20.24. а) $\sqrt[3]{34}$ и $1 + \sqrt{5}$;   в) $\sqrt[3]{43}$ и $\sqrt{6} + 1$;

б) $\sqrt[3]{33}$ и $1 + \sqrt{5}$;   г) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$.

20.25. а) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$ и $\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$;   б) $\sqrt[3]{31}$ и $1 + \sqrt{5}$.

20.26. Найдите область определения выражения:

а) $(x - 1)\sqrt[3]{\dfrac{x + 1}{(x - 1)^2}} - (x + 1)\sqrt[3]{\dfrac{x - 1}{(x + 1)^2}}$;

б) $(x - 1)\sqrt[4]{\dfrac{x + 1}{(x - 1)^3}} + (x + 1)\sqrt[4]{\dfrac{x - 1}{(x + 1)^3}}$.

Постройте график функции и перечислите ее основные свойства (**20.27**, **20.28**):

20.27. а) $y = \sqrt{x - 2}$;   г) $y = \sqrt[3]{5x}$;

б) $y = 1 + \sqrt[3]{1 - x}$;   д) $y = 1 - \sqrt[3]{|x - 4|}$;

в) $y = 2 - \sqrt[3]{3 + x}$;   е) $y = 3 + \sqrt{|2x - 3|}$.

20.28. а) $y = |2 - 3\sqrt[3]{-x}| - 2\sqrt[3]{-x}$;

б) $y = 1 - 2\sqrt[3]{|1 + x|}$;

в) $y = 2 - 3\sqrt[3]{8 - |x - 2|}$;

г) $y = |3 - 3\sqrt[3]{3 - x}| - 2\sqrt[3]{3 - x}$;

д) $y = |1 - 2\sqrt[3]{3 + x}| - \sqrt[3]{3 + x}$.

ГЛАВА 4 ПРОГРЕССИИ

§ 21. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ — ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

21.01. Последовательность задана *формулой общего члена* $a_n = f(n)$. Найдите пять первых членов последовательности и изобразите их в виде: 1) точек числовой прямой; 2) точек числовой окружности; 3) точек на координатной плоскости:

а) $a_n = 2n + 3$;

б) $b_n = 2n^2 - \frac{1}{n}$;

в) $c_n = 22,5$;

г) $r_n = n$;

д) $b_n = 2n^{2 - \frac{1}{n}}$;

е) $y_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2}$;

ж) $z_n = [\sqrt{n}]$.

21.02. Последовательность задана *рекуррентным соотношением* вида $a_{n+1} = f(a_n)$ и значением первого члена последовательности (a_1). Найдите пять первых членов последовательности и изобразите их в виде: 1) точек числовой прямой; 2) точек числовой окружности; 3) точек на координатной плоскости:

а) $a_{n+1} = a_n + 3$; $a_1 = -1,1$;

б) $a_{n+1} = -5a_n$; $a_1 = 0,2$;

в) $a_{n+1} = 3a_n + (-1)^n$; $a_1 = 2$;

г) $a_{n+1} = \frac{3 \cdot (-1)^{n+1}}{a_n}$; $a_1 = -4$;

д) $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\right)$, $a_1 = 2$;

е) $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{5}{a_{n-1}}\right)$, $a_1 = 3$.

21.03. Последовательность задана *рекуррентным соотношением* вида $a_{n+2} = f(a_n;\ a_{n+1})$ и значениями первого и второго членов последовательности (a_1 и a_2). Найдите пять первых членов последовательности:

а) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n;\ a_1 = a_2 = 1;$

б) $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n;\ a_1 = 3;\ a_2 = 8;$

в) $a_{n+2} = a_{n+1} + (-1)^n a_n;\ a_1 = 1;\ a_2 = 2;$

г) $a_{n+2} = a_{n+1}a_n - a_n;\ a_1 = 1;\ a_2 = 2.$

21.04. Последовательность задана *рекуррентным соотношением* $a_{n+1} = (n + 1) \cdot a_n;\ a_1 = 1$. Задайте ее формулой общего члена.

21.05. Найдите пять первых членов последовательности $u_n = \frac{1}{p_n}$, где p_n — n-е простое число.

21.06. Найдите r_1, r_2, r_{17}, r_{80}, где r_n — n-й десятичный знак числа α:

а) $\alpha = 0{,}(34)$; г) $\alpha = \frac{3}{65}$;

б) $\alpha = \frac{8}{9}$; д) $\alpha = 0{,}0(012)$;

в) $\alpha = 0{,}3(50)$; е) $\alpha = \frac{2}{7}$.

21.07. Используя микрокалькулятор, напишите первые шесть членов последовательности чисел a_n, полученных округлением числа $\sqrt{2}$ до 10^{1-n}.

21.08. Пусть (a_n) — последовательность десятичных знаков в записи числа $\frac{13}{14}$, т. е. a_n — n-й десятичный знак числа $\frac{13}{14}$. Так как $\frac{13}{14} = 0{,}9285\ldots$, то, например, $a_1 = 9;\ a_2 = 2;\ a_3 = 8;$ $a_4 = 5$. Выпишите следующие шестнадцать членов этой последовательности и найдите a_{117}. Есть ли у этой последовательности наименьший член? А наибольший?

21.09. Пусть (b_n) — последовательность десятичных знаков в записи числа π. Выпишите пять первых членов этой последовательности. Есть ли у этой последовательности наименьший член? А наибольший?

21.10. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = -\pi$, $a_2 = 0$, a_n при $n > 2$ равно радианной мере внутреннего угла правильного n-угольника. Найдите пять последовательных членов этой последовательности, начиная с a_3. Найдите формулу, задающую общий (n-й) член a_n этой последовательности.

21.11. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = a_2 = 0$, a_n при $n > 2$ равно отношению периметра правильного n-угольника к радиусу его описанной окружности. Найдите пять последовательных членов этой последовательности, начиная с a_3. Найдите формулу, задающую общий (n-й) член a_n этой последовательности.

21.12. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = a_2 = 0$, a_n при $n > 2$ равно отношению *периметра* правильного n-угольника, описанного около некоторой окружности, к периметру правильного n-угольника, вписанного в эту же окружность. Найдите a_n.

21.13. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = a_2 = 0$, a_n при $n > 2$ равно отношению *площади* правильного n-угольника, описанного около некоторой окружности, к площади правильного n-угольника, вписанного в эту же окружность. Найдите a_n.

21.14. Последовательность (b_n) такова, что $b_1 = b_2 = 0$; b_n при $n > 2$ равно числу диагоналей выпуклого n-угольника. Найдите формулу для b_n при $n > 2$.

21.15. Натуральные числа, делящиеся на 17, расположили в порядке возрастания. Пусть x_n — n-е число в этой последовательности. Найдите формулу, задающую x_n.

21.16. Натуральные числа, которые при делении на 17 дают в остатке 7, расположили в порядке возрастания. Пусть x_n — n-е число в этой последовательности. Найдите формулу, задающую x_n.

21.17. Решите задачу 21.16 в общем случае: найдите n-е натуральное число, которое при делении на d дает в остатке p, где $0 \leqslant p < d$.

21.18. Задайте с помощью рекуррентного соотношения последовательность четных натуральных чисел, делящихся на 37.

21.19. Задайте с помощью рекуррентного соотношения последовательность натуральных чисел, делящихся одновременно на 10 и на 14.

21.20. Формулой общего члена задайте последовательность четных натуральных чисел, не делящихся на 4.

21.21. Задайте с помощью рекуррентного соотношения последовательность четных натуральных чисел, не делящихся на 4.

21.22. Формулой общего члена задайте последовательность четных натуральных чисел, не делящихся на 3.

21.23. Формулой n-го члена задайте последовательность натуральных чисел, десятичная запись которых состоит только из цифр 7, т. е. последовательность имеет вид: 7; 77; 777... .

21.24. Задайте последовательность натуральных чисел, делящихся на 3, десятичная запись которых состоит только из цифр 7.

21.25. Задайте последовательность натуральных чисел, делящихся на 9, десятичная запись которых состоит только из цифр 7.

21.26. Задайте последовательность натуральных чисел, делящихся на 11, десятичная запись которых состоит только из цифр 7.

21.27. Задайте последовательность натуральных чисел, делящихся на 17, десятичная запись которых состоит только из цифр 7.

Заданы несколько первых членов последовательности. Продолжите запись этой последовательности **(21.28—21.36)**:

21.28. а) 1; 2; 3; 4; ... ;
б) 1; 3; 5; 7; 9; ... ;
в) 23; 20; 17; 14; ... ;
г) $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; ... .

21.29. а) 1; 3; 9; 27; 81;
б) 5; 1; 0,2; 0,04; ... .

21.30. а) 1; 4; 7; 10; ... ;
б) 1; 16; 49; 100; ... ;
в) 0; 15; 48; 99; ... ;
г) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{7}; \frac{1}{10}; \frac{1}{13}; \ldots;$
д) $\frac{1}{2}; \frac{3}{7}; \frac{2}{5}; \frac{5}{13}; \ldots;$
е) $\frac{1}{1 \cdot 4}; \frac{1}{4 \cdot 7}; \frac{1}{7 \cdot 10}; \frac{1}{10 \cdot 13}; \ldots.$

21.31. а) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \ldots;$

б) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \ldots;$

в) $1; \frac{3}{2}; 9; \frac{27}{4}; \frac{81}{5}; \frac{81}{2}; \frac{243}{7}; \ldots.$

21.32. а) 1; 4; 9; 16; 25; ... ; б) 1; 5; 14; 30; 55; ... .

21.33. а) 0; 3; 8; 15; 24; 35; ... ; б) 2; 9; 28; 64; 126; 217; ... .

21.34. а) 1; −2; 3; −4; 5; −6; ... ;

б) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{6}; \ldots;$

в) 2; −1; 4; −3; 6; −5; ... ;

г) 1; −4; 12; −32; 80; −192; ... .

21.35. а) 1; −1; 1; −1; 1; −1; ... ;

б) −1; 1; −1; 1; −1; 1; ... ;

в) 2; 0; 2; 0; 2; 0; ... ;

г) 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; ... .

21.36. а) 1; 1; −1; −1; 1; 1; −1; −1; ... ;

б) 0; 1; 0; −1; 0; 1; 0; −1; ... .

21.37. Пусть $a_n = n^2 - 3n$. Найдите:

а) a_7; б) a_k; в) a_{m+1}; г) $2a_3 + 3a_4$.

21.38. Выпишите все отрицательные члены последовательности $a_n = 9n - 73$.

21.39. Найдите количество положительных членов последовательности $b_m = \frac{134}{122 - 3m}$.

21.40. Пусть $a_n = n^2 - 9n$. Выпишите все отрицательные члены последовательности.

21.41. Пусть $b_m = \frac{134 - m^2}{3m - 1}$. Сколько положительных членов имеет данная последовательность?

21.42. Пусть $a_n = n^2 - 84n - 13$. Найдите наименьший член последовательности.

21.43. Пусть $a_n = -3n^2 + 184n - 83$. Найдите номер наибольшего члена последовательности.

21.44. Найдите член последовательности $a_n = 0{,}3n - 11$, наиболее близкий к числу: а) 173; б) 1000; в) -4; г) $\sqrt{17}$.

21.45. Найдите член последовательности $a_n = 3n^2 - 37n + 71$, наиболее близкий к числу: а) 1; б) 0; в) -44; г) π.

21.46. Найдите член последовательности $b_n = \dfrac{2n + 171}{2n + 3}$, наиболее близкий к числу: а) 30; б) 17; в) 150; г) 1.

21.47. Найдите член последовательности $b_n = \dfrac{20n}{n^2 + 1}$, наиболее близкий к числу: а) 3; б) 7; в) 150; г) 0.

21.48. При каких значениях параметра p у последовательности $a_n = n^2 - 18n + p$: а) ровно один отрицательный член; б) ровно два отрицательных члена; в) ровно пять отрицательных членов; г) все члены отрицательны?

21.49. При каких значениях параметра p у последовательности $a_n = -3n^2 + 84n + p$: а) ровно один положительный член; б) ровно два положительных члена; в) все члены положительны; г) все члены отрицательны?

21.50. При каких значениях параметра p у последовательности $a_n = -3n^2 + 6\pi n + p$: а) ровно один положительный член; б) ровно два положительных члена; в) все члены положительны; г) все члены отрицательны?

21.51. Найдите хотя бы два равных члена последовательности:
а) $b_n = n^2 - 46n + 5$;
б) $b_n = 2n^2 - 86n - 13$;
в) $b_n = n^2 + 36n - 55$;
г) $b_n = n^3 - 9n^2 + 24n - 1$.

21.52. Докажите, что все члены последовательности различны:
а) $a_n = 3n + 5$;
б) $b_n = -13n^2 - 3n + 112$;
в) $c_n = -13n^2 + 27n - 222$;
г) $p_n = \dfrac{1 + n}{1 + 9n}$.

Рассмотрите данную последовательность и найдите:
а) сумму ее первых девяти членов (S_9);
б) сумму ее первых 1900 членов (S_{1900});
в) сумму ее первых n членов (S_n);
г) сумму всех ее членов с трехзначными номерами (21.53—21.57):

21.53. $a_n = (-1)^n$.

21.54. $a_n = (-1)^n + (-1)^{2n}$.

21.55. $a_n = (-1)^n \cdot n$.

21.56. $h_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

21.57. $h_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+9}$.

21.58. Рассмотрите последовательность $h_n = (n+1)^2 - n^2$ и найдите: а) сумму ее первых девяти членов (S_9); б) сумму ее первых 1900 членов (S_{1900}); в) сумму ее первых n членов (S_n).

21.59. Рассмотрите последовательность $h_n = \dfrac{(n+1)^2 - n^2 - 1}{2}$ и найдите:

а) сумму ее первых девяти членов (S_9);
б) сумму ее первых 1900 членов (S_{1900});
в) сумму ее первых n членов (S_n);
г) сумму чисел $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

21.60. Рассмотрите последовательность $h_n = \dfrac{(n+1)^3 - n^3 - 1}{3}$ и, используя идею и результаты предыдущей задачи, вычислите сумму $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

21.61. Рассмотрите последовательность $h_n = \dfrac{(n+1)^4 - n^4 - 1}{4}$ и, используя идею и результаты двух предыдущих задач, вычислите сумму $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

21.62. Доказано, что сумма первых n членов последовательности a_n вычисляется по формуле $S_n = 3n^2 - 7n$. Найдите: а) a_1; б) a_{13}; в) сумму всех членов последовательности с двузначными номерами.

§ 22. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Монотонные и немонотонные последовательности

22.01. Какие из данных последовательностей являются возрастающими, какие убывающими, а какие не обладают ни одним из этих свойств:

$$a_n = \frac{3}{n+2};\ b_n = 3n - 5;\ c_n = 1 - 3n;$$

$$d_n = (0{,}2)^n;\ p_n = (3{,}2)^{n-1};\ r_n = (-2)^n?$$

22.02. Пусть $a_n = n^2 + 8n - 3$. Докажите, что данная последовательность возрастает.

22.03. Для каждой из следующих последовательностей составьте выражение $a_{n+1} - a_n$, сравните это выражение с 0 и сделайте вывод о монотонности последовательности:

а) $a_n = 5n + 327$;
в) $a_n = 5n^2 - 7n + 1$;
б) $a_n = 5n^2 - 17n + 1$;
г) $a_n = \frac{3n-1}{n+2}$.

22.04. Для каждой из следующих последовательностей с положительными членами составьте выражение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, сравните это выражение с 1 и сделайте вывод о монотонности последовательности:

а) $a_n = (2{,}3)^n$;
в) $a_n = (0{,}9)^n \cdot (n)!$;
б) $a_n = (0{,}53)^{2n-5}$;
г) $a_n = \frac{7n+2}{n!}$.

Исследуйте последовательность на монотонность (22.05—22.08):

22.05. а) $a_n = 3n + 1$;
в) $c_n = 2 - \frac{5}{3n+1}$;
б) $b_n = \frac{5}{3n+1}$;
г) $d_n = \frac{6n-3}{3n+1}$.

22.06. а) $a_n = 3n^2 + 1$;
б) $a_n = 3n^2 + 5n - 13$;
в) $a_n = 3n^2 - 15n + 63$.

22.07. а) $a_n = 3n - \frac{1}{n} - 11$;
в) $a_n = n + 2(-1)^n$;
б) $a_n = 2n + (-1)^n$;
г) $a_n = n - \frac{(-1)^n}{n}$.

22.08. а) $a_n = \frac{5}{n^2+1}$;
в) $c_n = \frac{n^2}{n^2+1}$;
б) $b_n = \frac{n}{n^2+1}$;
г) $p_n = \frac{n^3}{n^2+1}$.

22.09. Дана возрастающая последовательность a_n. Исследуйте на монотонность следующие последовательности (укажите, какие из них являются возрастающими, какие убывающими, а в отношении каких ни того ни другого утверждать нельзя):

а) $b_n = 3a_n + 3$;
д) $p_n = a_n - 3n$;
б) $b_n = 4 - 0{,}7a_n$;
е) $k_n = \frac{a_n}{n}$;
в) $c_n = 3n + a_n$;
ж) $b_n = (a_n)^2 + 3$;
г) $d_n = na_n$;
з) $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

22.10. Дана возрастающая последовательность a_n, все члены которой положительны. Исследуйте на монотонность следующие последовательности:

а) $b_n = (a_n)^2 + 3$;

б) $b_n = \dfrac{5}{1 + a_n}$;

в) $c_n = \dfrac{5a_n}{3 + 2a_n}$;

г) $d_n = n + \sqrt{a_n}$;

д) $h_n = \dfrac{3 + (a_n)^{-1}}{2 + a_n}$;

е) $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Ограниченные и неограниченные последовательности

22.11. Укажите, какие из приведенных последовательностей являются ограниченными, ограниченными сверху, ограниченными снизу, неограниченными:

а) $x_n = 2n - 7$;

б) $x_n = 5 - 11n^2$;

в) $x_n = \left((-1)^{n+1} - 1\right)n^n$;

г) $x_n = -1 - \dfrac{1}{n}$;

д) $x_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2 + 1}}$;

е) $x_n = \dfrac{n^2 + 2}{n}(-1)^{n-1}$.

22.12. Дана ограниченная последовательность a_n. Относительно каких из указанных последовательностей можно утверждать, что они тоже ограниченные:

а) $b_n = 384 + 5a_n$;

б) $c_n = \dfrac{a_n}{n}$;

в) $d_n = na_n$;

г) $p_n = (a_n)^{70}$?

22.13. Дана последовательность $a_n = n^2$. Исследуйте на монотонность и ограниченность следующие последовательности:

а) a_n;

б) $b_n = a_{n+1} - a_n$;

в) $c_n = \dfrac{1}{a_n}$;

г) $d_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

22.14. Дана последовательность $a_n = \dfrac{n+1}{n}$. Исследуйте на монотонность и ограниченность следующие последовательности:

а) a_n;

б) $b_n = a_{n+1} - a_n$;

в) $c_n = \dfrac{1}{a_n}$;

г) $d_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

22.15. Дана последовательность $a_n = \frac{n^2+1}{n}$. Исследуйте на монотонность и ограниченность следующие последовательности:

а) a_n;

б) $b_n = a_{n+1} - a_n$;

в) $c_n = \frac{1}{a_n}$;

г) $d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

22.16. Верны ли утверждения:

а) если функция $y = f(x)$ убывает на луче $[1; +\infty)$, то и последовательность $a_n = f(n)$ является убывающей;

б) если последовательность $a_n = f(n)$ является убывающей и функция $y = f(x)$ определена на луче $[1; +\infty)$, то функция f убывает на этом луче?

22.17. При каких значениях параметра a последовательность является возрастающей; убывающей:

а) $b_n = an + 11$;

б) $b_n = 13 - an^2$;

в) $b_n = 2n^2 - an - 23$;

г) $b_n = an^2 + (8 - a^2)n + 17$?

22.18. Сколько членов последовательности $a_n = 5 + \frac{100}{n}$ находится на:

а) луче $(20; +\infty)$;

б) отрезке $[6; 77]$;

в) промежутке $(5; 5{,}1)$;

г) луче $(-\infty; 5]$?

22.19. Докажите, что последовательность a_n ограничена:

а) $a_n = (-1)^{3n-1}$;

б) $a_n = \frac{1}{n}$;

в) $a_n = 15 - \frac{1000}{n}$;

г) $a_n = \frac{17n+3}{n}$.

22.20. Докажите, что последовательность не является ограниченной:

а) $a_n = 3n - 1$;

б) $b_n = n^2 - 111n - 1$;

в) $a_n = 15n - \frac{1000}{n}$;

г) $a_n = \frac{(-1)^n n^2 + 3}{2000n}$.

22.21. При каких значениях параметра a последовательность является ограниченной сверху; ограниченной снизу; ограниченной:

а) $b_n = an + 11$;

б) $b_n = 13 - an^2$;

в) $b_n = 2n^2 - an - 23$;

г) $b_n = \frac{an^2+1}{2n-1}$?

22.22. Укажите какой-либо номер, начиная с которого для всех членов последовательности $a_n = n^2 - 60n + 59$ выполняется условие: а) все члены последовательности положительны; б) $a_{k+1} > a_k$ (с этого номера последовательность возрастает).

22.23. Укажите какой-либо номер, с которого для всех членов последовательности $a_n = -3n^2 - 97n + 100$ выполняется условие: а) все члены последовательности отрицательны; б) $a_{k+1} < a_k$ (с этого номера последовательность убывает).

22.24. Укажите какой-либо номер, с которого для всех членов последовательности $a_n = \dfrac{3n + 700}{2n - 1}$ выполняется условие: а) все члены последовательности меньше 13; б) $|a_n - 1{,}5| < 0{,}01$.

22.25. Для последовательности $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ найдите такое k, что $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1$, но $\dfrac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \leqslant 1$.

22.26. Приведите примеры последовательности (заданной формулой общего члена), обладающей следующим свойством:
а) все члены последовательности положительны;
б) последовательность имеет ровно 5 отрицательных членов;
в) все члены последовательности, кроме a_7, отрицательны;
г) все члены последовательности находятся на промежутке $(0; 3)$;
д) все члены последовательности различны и находятся на промежутке $(-4; 0)$;
е) на любом промежутке вида $[4; 4 + a)$, где $a > 0$, находится бесконечное число членов последовательности;
ж) на любом промежутке вида $(5 - a; 5)$, где $a > 0$, находится бесконечное число членов последовательности;
з) на любом из промежутков вида $(5 - a; 5)$ и $(5; 5 + a)$, где $a > 0$, находится бесконечное число членов последовательности.

22.27. Приведите примеры последовательности (заданной формулой общего члена), обладающей следующим свойством:
а) последовательность возрастающая;
б) последовательность убывающая;
в) последовательность немонотонная;
г) последовательность немонотонная, но начиная с 19 члена возрастает;

д) последовательность немонотонная, но ее подпоследовательность с четными номерами возрастает, а подпоследователность с нечетными номерами убывает.

22.28. Приведите примеры последовательности (заданной формулой общего члена), обладающей следующим свойством:
а) последовательность ограничена;
б) последовательность не ограничена;
в) последовательность не ограничена снизу, но ограничена сверху;
г) последовательность не ограничена сверху, но ограничена снизу;
д) последовательность не ограничена, но ее подпоследовательность с четными номерами ограничена.

22.29. Приведите примеры последовательности (заданной формулой общего члена), обладающей следующим свойством:
а) последовательность не ограничена и возрастает;
б) последовательность не ограничена и убывает;
в) последовательность ограничена и возрастает;
г) последовательность ограничена и убывает.

22.30. Докажите, что последовательность периметров правильных вписанных в окружность 2^{n+1}-угольников является возрастающей и ограниченной.

22.31. Докажите, что последовательность периметров правильных описанных около окружности 2^{n+1}-угольников является убывающей и ограниченной.

§ 23. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Напишите формулу общего члена арифметической прогрессии, если **(23.01—23.03)**:

23.01. а) $a_1 = 7$, $d = 2{,}5$; в) $a_1 = 0{,}1$, $d = -0{,}3$;
б) $a_1 = -10$, $d = 7{,}3$; г) $a_1 = 2\frac{1}{11}$; $d = -1\frac{7}{11}$.

23.02. а) $a_2 = 17$, $d = 2$; в) $a_{17} = 0$, $d = -3{,}1$;
б) $a_3 = -12$, $d = -7$; г) $a_5 = d = -2\frac{8}{13}$.

23.03. а) $a_1 = 13$, $a_2 = 3$; в) $a_{17} = 0$, $a_7 = -3{,}1$;
б) $a_3 = -12$, $a_{13} = 38$; г) $a_5 = a_{333} = -22\frac{11}{131}$.

23.04. Докажите, что для любой арифметический прогрессии справедливы следующие соотношения:

а) $a_{13} - a_3 = 10d$;

б) $a_{n+23} - a_n = 23d$;

в) $a_n - a_m = (n - m)d$.

23.05. Первый член арифметической прогрессии равен 1, а разность прогрессии равна 4. Какое из чисел 24, 55, 4757 является членом этой прогрессии?

23.06. Найдите пять чисел, которые следует поместить между числами 1 и 25 так, чтобы они вместе с данными составили бы арифметическую прогрессию.

23.07. Между числами x и y, необязательно различными, поместили n чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ так, что они вместе с данными образовали арифметическую прогрессию $x, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, y$. Найдите эти числа для: а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 3$; г) произвольного натурального числа n.

23.08. Найдите число членов и сумму арифметической прогрессии:

а) $-1; 7; \ldots; 287$;

б) $2; 4; \ldots; 2n$;

в) $1; 3; \ldots; 2n + 3$;

г) $17; 29; \ldots; 12k + 17$;

д) $2; 4; \ldots; 2n - 4$;

е) $1; 3; \ldots; 2n - 7$.

Напишите формулу общего члена арифметической прогрессии, если (**23.09—23.11**):

23.09. а) $\begin{cases} a_7 + a_9 = 70, \\ 3a_3 + 7a_7 = 276; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2a_3 - a_5 = 2, \\ a_{19} + 3a_9 = -202. \end{cases}$

23.10. а) $\begin{cases} a_7^2 + a_9^2 = 50, \\ a_8 + a_{10} = 14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a_{11}^2 + a_{13}^2 = 58, \\ a_{12} + a_{14} = 14. \end{cases}$

23.11. а) $\begin{cases} a_7 + a_{10} = 41, \\ a_6 a_8 = 144; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a_2 a_5 = 112, \\ \dfrac{a_1}{a_5} = 2. \end{cases}$

23.12. Найдите сумму первых двадцати членов прогрессии, если:

а) $a_1 = 7$; $d = 2{,}1$;

б) $a_1 = -3$; $d = 0{,}2$;

в) $a_1 = 17$; $d = -1{,}3$;

г) $a_1 = -19$; $d = 2$.

23.13. Найдите сумму последних десяти членов прогрессии, если:

а) $a_1 = 7$, $d = 2{,}1$, $n = 25$;

б) $a_1 = -3$, $d = 0{,}2$, $n = 51$;

в) $a_1 = 17$, $d = -1{,}3$, $n = 17$;

г) $a_1 = -19$, $d = 2$, $n = 553$.

23.14. Найдите сумму первых двадцати членов прогрессии, если:

а) $a_1 = 13$, $a_{20} = 11{,}5$;

б) $a_2 + a_{19}$, $a_{19} = -23$;

в) $a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = 43$;

г) сумма ее первых десяти членов равна нулю, а девятнадцатый член прогрессии на 8 меньше пятнадцатого.

23.15. Найдите сумму первых двадцати семи членов прогрессии, если:

а) $a_1 = -13$, $a_{27} = 111$;

б) $a_3 + a_{25} = -23$;

в) $a_{14} = 0$;

г) сумма ее первых пятидесяти четырех членов равна 17, а двадцать девятый член прогрессии на 11 больше пятнадцатого.

23.16. Могут ли данные три числа быть членами (не обязательно соседними) некоторой арифметической прогрессии? Если могут, то приведите какой-нибудь пример такой прогрессии, если не могут, то докажите почему:

а) 1; 3 и 444; б) 0,7; 99 и −999.

23.17. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — разные целые числа. Докажите, что все эти числа являются членами (не обязательно соседними) некоторой арифметической прогрессии.

23.18. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — различные рациональные не целые числа. Докажите, что все эти числа являются членами (не обязательно соседними) некоторой арифметической прогрессии.

23.19. Найдите наибольшее значение разности арифметической прогрессии, среди членов которой есть числа $\frac{1}{17}$; $\frac{1}{15}$ и $\frac{1}{13}$.

23.20. Могут ли данные три числа быть членами (не обязательно соседними) некоторой арифметической прогрессии? Если могут, то приведите пример какой-нибудь такой прогрессии, если не могут, то докажите почему:

а) $-\sqrt{23}$; 0 и $19\sqrt{23}$;

б) $-\sqrt{23}$; 1 и $19\sqrt{23}$;

в) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$.

23.21. Докажите, что если три разных числа a, b и c являются членами (не обязательно соседними) одной арифметической прогрессии, то отношение $\frac{a-b}{b-c}$ является рациональным числом.

23.22. Докажите, что если для трех различных числе a, b и c отношение $\frac{a-b}{b-c}$ является рациональным числом, то эти числа являются членами (не обязательно соседними) одной арифметической прогрессии.

23.23. Сумма двадцати первых членов арифметической прогрессии равна 140, а ее первый член равен 7. Найдите ее четырнадцатый член.

23.24. Сумма двадцати первых членов арифметической прогрессии равна 240, а ее двадцатый член равен 7. Найдите ее второй член.

23.25. Сумма сорока первых членов арифметической прогрессии равна 160, а ее девятый член равен 9. Найдите четырнадцатый член этой арифметической прогрессии.

23.26. Седьмой член арифметической прогрессии в 5 раз больше ее пятого члена. Найдите отношение величины первого члена прогрессии к величине ее сотого члена.

23.27. В арифметической прогрессии $a_{18} = -41$, $a_{39} = 1$. Определите, при каком натуральном n сумма первых n ее членов равна нулю.

23.28. В арифметической прогрессии $a_{18} = 0$. Найдите $a_2 + a_3 + a_6 + a_{30} + a_{33} + a_{34}$.

23.29. В арифметической прогрессии сто членов. Известно, что сумма 5, 11, 37, 42, 59, 64, 90 и 96-го ее членов равна 112. Найдите сумму всех членов этой прогрессии.

23.30. В арифметической прогрессии $a_1 = 25$, $a_{18} \cdot a_{51} = -400$. Найдите разность этой арифметической прогрессии, если она является целым числом.

23.31. Известно, что в арифметической прогрессии $-3 < a_{13} < 7$, а $-3{,}3 < a_{14} < 9$. В каких пределах может изменяться разность прогрессии?

23.32. Известно, что в арифметической прогрессии (a_n) выполняются неравенства: $-2{,}3 < a_3 < 4{,}11$, $0 < a_5 < 5{,}3$. Найдите сумму всех возможных целых значений, которые может принимать четвертый член этой прогрессии.

23.33. На отрезке $[-2; 112]$ находятся сто первых членов арифметической прогрессии. В каких пределах может изменяться разность этой прогрессии?

23.34. На отрезке $[-2; 112]$ находятся сто первых членов арифметической прогрессии, разность которой натуральное число. В каких пределах может изменяться первый член этой прогрессии?

23.35. В арифметической прогрессии 46, 41, ... найдите наименьший положительный член и его номер.

23.36. В арифметической прогрессии -37, -29, ... найдите наибольший отрицательный член и его номер.

23.37. В арифметической прогрессии $a_1 = 0{,}2$; $d = 0{,}7$; $n = 49$. Найдите все целочисленные члены этой прогрессии, если они существуют.

23.38. В арифметической прогрессии $a_1 = 0{,}15$; $d = 0{,}35$; $n = 41$. Найдите все целочисленные члены этой прогрессии, если они существуют.

23.39. В арифметической прогрессии $a_1 = -2{,}4$; $d = 4{,}3$; $n = 100$. Найдите количество всех целочисленных членов этой прогрессии, если они существуют.

23.40. Найдите сумму первых трех целых членов арифметической прогрессии, в которой известны первый член a_1 и разность прогрессии d:

а) $a_1 = 10;\ d = 7;$ г) $a_1 = 10;\ d = -4\frac{17}{19};$

б) $a_1 = 13;\ d = 0{,}7;$ д) $a_1 = 1{,}1;\ d = 3{,}7;$

в) $a_1 = -12;\ d = 0{,}4;$ е) $a_1 = 1{,}1;\ d = -\frac{1}{7}.$

23.41. В арифметической прогрессии $\frac{a_3}{a_5} = 2$. Найдите

а) $\frac{a_{71}}{a_{11}};$ б) $\frac{a_{17}}{a_{101}}.$

23.42. Последовательность задается формулой $a_n = 3n + 2$.

а) Докажите, что данная последовательность является арифметической прогрессией.

б) Найдите наименьший член прогрессии с трехзначным номером.

в) Найдите наибольший член прогрессии с пятизначным номером.

г) Докажите, что среди членов прогрессии нет полных квадратов натуральных чисел.

23.43. Последовательность задается формулой $a_n = 188 - 5n$.

а) Докажите, что данная последовательность является арифметической прогрессией.

б) Найдите наименьший член прогрессии с двузначным номером.

в) Найдите наибольший член прогрессии с четырехзначным номером.

г) Определите, есть ли среди членов прогрессии полные квадраты натуральных чисел.

23.44. Докажите, что все члены арифметической прогрессии (содержащей не менее шести членов) с четными номерами составляют арифметическую прогрессию. Напишите формулу ее общего члена.

23.45. Докажите, что все члены бесконечной арифметической прогрессии, номера которых при делении на 7 дают в остатке 5, составляют арифметическую прогрессию. Напишите формулу ее общего члена. Обобщите доказанное утверждение.

23.46. Найдите сумму первых n нечетных чисел натурального ряда, если: а) $n = 10$; б) $n = 25$; в) $n = k$, $k \in N$.

23.47. Дана прогрессия $a_1 = -2$; $d = 7{,}5$; $n = 50$. Найдите сумму всех членов этой прогрессии:

а) с четными номерами;

б) с нечетными номерами;

в) номера которых при делении на 4 дают в остатке 3.

23.48. Дана прогрессия $a_1 = 7$; $d = -2{,}5$; $n = 57$. Найдите сумму всех членов этой прогрессии:

а) с четными номерами;

б) с нечетными номерами;

в) номера которых при делении на 5 дают в остатке 2.

23.49. Разность арифметической прогрессии равна 6. Найдите разность между суммой первых ста ее членов и суммой следующих ста ее членов.

23.50. В арифметической прогрессии сумма $a_2 + a_3 + \ldots + a_{99}$ больше суммы $a_{2002} + a_{2003} + \ldots + a_{2099}$ на 2000. Найдите разность прогрессии.

23.51. В арифметической прогрессии $a_1 = 12{,}5$, а разность прогрессии равна $-1{,}32$. Найдите наибольший номер положительного члена этой арифметической прогрессии.

23.52. В арифметической прогрессии $a_1 = -12{,}5$, а разность прогрессии равна $1{,}32$. Найдите наибольший номер отрицательного члена этой арифметической прогрессии.

23.53. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии, если:

а) $a_1 = -133$ и $a_2 = -130{,}5$;

б) $a_1 = -153$ и $a_{105} = 132$.

23.54. Найдите наибольший отрицательный член арифметической прогрессии, если:

а) $a_1 = -13{,}3$ и $a_2 = -11$;

б) $a_1 = 183$ и $a_{105} = -183$.

23.55. Найдите наименьший положительный член арифметической прогрессии, если:

а) $a_1 = 1336$ и $a_2 = 1111$;

б) $a_1 = -193{,}3$ и $a_{105} = 13$.

23.56. При каких значениях разности арифметической прогрессии, первый член которой равен -134:
а) десять ее первых членов отрицательные;
б) одиннадцатый член прогрессии положительный;
в) десять ее первых членов отрицательные, а одиннадцатый положительный?

23.57. При каких значениях разности арифметической прогрессии, первый член которой равен -22:
а) седьмой ее член равен нулю;
б) среди ее первых пятнадцати членов есть нуль;
в) произведение первых 100 членов прогрессии равно нулю;
г) произведение первых пяти членов прогрессии положительно?

23.58. Определите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, в которой первый член равен 14, а произведение второго и восьмого ее членов наименьшее.

23.59. Найдите все значения x, при которых три числа $2x$, $x + 11$ и $18 - 4x$ являются последовательными членами одной и той же арифметической прогрессии.

23.60. Найдите все значения x, при которых три числа $2x^2$, $11 + 3x$ и $18 - 4x^2$ являются последовательными членами одной и той же арифметической прогрессии.

23.61. Найдите сумму всех таких значений числа x, при которых числа $3x + 1$, $5x - 7$ и $x^2 + x - 3$, взятые в некотором порядке, являются тремя соседними членами арифметической прогрессии.

23.62. Сколько общих членов содержат бесконечные арифметические прогрессии: $-82, -79, -76, \ldots$ и $74, 67, 60, \ldots$?

23.63. Докажите, что для следующих бесконечных арифметических прогрессий не существуют числа, являющиеся одновременно членами обеих прогрессий:
а) $a_n = 2n - 3$ и $a_n = 172n + 14$;
б) $a_n = 135n - 3$ и $a_n = 81n + 14$;
в) $a_n = 5n - 3$ и $a_n = 11 - 17n$.

23.64. Найдите наименьшее число, являющееся общим членом двух прогрессий $a_n = 5n - 3$ и $a_n = 17n + 14$, $n = 1; 2; 3 \ldots$.

23.65. Найдите наименьшее положительное значение разности двух чисел, являющихся одновременно членами прогрессий $a_n = 101n - 15$ и $a_n = 13n + 14$.

23.66. Даны две арифметические прогрессии (a_n) и (b_n), все члены каждой из которых различны. Известно, что $a_1 = b_2 = 2$ и $a_5 = b_6 - 8$, а разность прогрессии (a_n) в 2 раза меньше разности прогрессии (b_n). Сколько членов прогрессии (a_n) содержится среди первых 35 членов прогрессии (b_n)? Найдите сумму всех таких общих членов обеих прогрессий, если $b_7 = 27$.

23.67. Даны две арифметические прогрессии $1, 6, \dots, 101$ и $-10{,}1, \dots, 135$. Определите общие члены этих прогрессий.

23.68. Даны две арифметические прогрессии $6, 10, \dots$ и $12, 19, \dots$. Определите, существуют ли общие члены этих прогрессий.

23.69. Найдите наименьший и наибольший общие члены арифметических прогрессий (a_n) и (b_n) таких, что $a_{10} = b_{21} = 112$, разности этих прогрессий соответственно равны $d_a = 14$; $d_b = 35$, в прогрессии (a_n) 200 членов, а в прогрессии (b_n) 300 членов.

23.70. Найдите наименьший и наибольший общие члены трех арифметических прогрессий (a_n), (b_n) и (c_n) таких, что $a_1 = 7$, $d_a = 11$; $b_1 = 11$, $d_b = 17$; $c_1 = 17$, $d_c = 22$, причем (a_n) содержит 200 членов, (b_n) и (c_n) содержат по 350 членов каждая.

23.71. В арифметической прогрессии (a_n) пятьдесят восемь членов, $a_1 = 4$, $d = 17$. Найдите сумму:

а) всех членов прогрессии с четными номерами;

б) всех членов прогрессии с нечетными номерами;

в) последних тридцати двух членов прогрессии;

г) всех членов прогрессии, номера которых при делении на 3 дают в остатке 2.

23.72. В арифметической прогрессии (a_n) сто двадцать пять членов, $a_1 = 40$, $d = -7$. Найдите сумму:

а) всех членов прогрессии с четными номерами;

б) всех членов прогрессии с нечетными номерами;

в) последних пятидесяти трех членов прогрессии;

г) всех членов прогрессии, номера которых при делении на 27 дают в остатке 10.

23.73. В арифметической прогрессии (a_n) n членов. Получите формулу, выражающую сумму: 1) всех членов прогрессии с четными номерами; 2) всех членов прогрессии с нечетными номерами; 3) последних k членов прогрессии ($k < n$); 4) всех членов прогрессии, номера которых при делении на 3 дают в остатке 2, если:

а) $S_{\text{чет}} = \dfrac{a_2 + a_k}{2} \cdot \left(\dfrac{n}{2}\right)$, $k = n + \dfrac{(-1)^n - 1}{2}$;

б) $S_{\text{нечет}} = \dfrac{a_1 + a_k}{2} \cdot \left(\dfrac{n+1}{2}\right)$, $k = n - \dfrac{(-1)^n + 1}{2}$;

в) $S_{n-k} = \dfrac{a_n + a_{n-k+1}}{2} \cdot k$.

23.74. Решите уравнение

$$1 + x + x^2 + (2 + 5x + x^2) + (3 + 9x + x^2) + \ldots + (10 + 37x + x^2) = 255.$$

23.75. Найдите произведение корней многочлена

$$p(x) = -1 + x + x^2 + (-1 + 2x + x^2) + (-1 + 3x + x^2) + \ldots + (-1 + 10x + x^2).$$

23.76. Решите уравнение $p(x) = 4 + 123x$, где

$$p(x) = 1 + x + x^2 + (1 + 5x + x^2) + (1 + 9x + x^2) + \ldots + (1 + 37x + x^2).$$

23.77. Известно, что $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 11x^{10}$. Найдите $0{,}5(p(1) - p(-1))$.

23.78. Известно, что $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 11x^{10}$. Найдите $0{,}5(p(1) + p(-1))$.

23.79. Дана последовательность 1, 4, 10, 19, ..., в которой разности двух соседних членов образуют арифметическую прогрессию. Найдите n-й член и сумму первых n членов этой прогрессии.

23.80. Значения углов выпуклого стовосьмидесятиугольника, выраженные в градусах, составляют арифметическую прогрессию. Найдите величину большего угла стовосьмидесятиугольника, если разность прогрессии 1°.

23.81. Значения углов выпуклого девяностоугольника, выраженные в градусах, составляют арифметическую прогрессию. Докажите, что не все углы могут быть выражены целым числом градусов.

23.82. Найдите наибольшее значение, которое может принимать сумма первых n членов арифметической прогрессии, если:
а) $a_1 = 100$; $d = -4$;
б) $a_1 = 100$; $d = -2{,}7$;
в) $a_1 + d = 100$; $a_1 \cdot d = -101$.

23.83. Сумма ста тридцати первых членов арифметической прогрессии равна сумме ее первых восьмидесяти членов. Найдите сумму первых двухсот десяти членов этой прогрессии.

23.84. Найдите сумму всех четырехзначных чисел, четыре цифры которых, взятые по порядку, образуют арифметическую прогрессию.

23.85. В арифметической прогрессии сумма $a_{27} + a_{28} + \ldots + a_{78} = 0$. Найдите сумму первых ста четырех членов этой прогрессии.

23.86. Докажите, что если сумма первых n членов последовательности задается формулой $S_n = 3n^2 - 124n$, то члены этой последовательности составляют арифметическую прогрессию.

23.87. Докажите, что если сумма первых n членов последовательности задается формулой $S_n = 3n^2 - 124n + 5$, то члены этой последовательности, начиная со второго, составляют арифметическую прогрессию. Подумайте, почему «начиная только со второго»?

23.88. Сумма первых n членов последовательности задается формулой $S_n = 146n - 3n^2$. Найдите номер и значение ее наибольшего отрицательного члена.

23.89. Пусть числа a_1, a_2, ... составляют арифметическую прогрессию. Используя тождество $\dfrac{1}{a \cdot b} = \dfrac{1}{b-a} \cdot \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$ $(a \neq b)$, найдите сумму:

а) $\dfrac{1}{a_1 \cdot a_2} + \dfrac{1}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1} \cdot a_n}$;

б) $\dfrac{1}{a_1 \cdot a_3} + \dfrac{1}{a_3 \cdot a_5} + \ldots + \dfrac{1}{a_{2n-1} \cdot a_{2n+1}}$.

23.90. Найдите сумму:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$;

б) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)}$.

23.91. Докажите, что:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100} < 1$;

б) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{99^2} < 1$.

23.92. Докажите, что если для некоторых натуральных чисел k_i имеет место равенство $\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} + \ldots + \frac{1}{k_{1000}^2} = 1{,}1$, то среди чисел k_i есть хотя бы два равных.

23.93. На координатной плоскости взяли точки $A(x_1;\ y_1)$; $A(x_2;\ y_2)$; ...; $A(x_n;\ y_n)$, где абсциссы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и ординаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$ составляют арифметические прогрессии. Докажите, что все эти точки лежат на одной прямой, и выразите ее угловой коэффициент через разности этих прогрессий (d_x и d_y).

23.94. Сколько ударов сделают часы в течение суток, если они отбивают только целые числа от 1 до 12?

23.95. Сколько ударов сделают часы в течение суток, если они отбивают только целые числа от 1 до 12 и каждую половину часа делают по одному удару?

23.96. С 1 июля температура воздуха ежедневно поднималась на 0,5 °С. Зная, что средняя температура за это время составила 18,75 °С, определите температуру 1 июля.

23.97. Сколько времени потребуется велосипедисту, чтобы проехать 54 км, если известно, что в первый час он проехал 15 км, а каждый следующий час он проезжает на 1 км меньше, чем в предыдущий час?

23.98. Шары расположены в форме треугольника (рис. 19). Определите общее число шаров, если в верхнем ряду их 12.

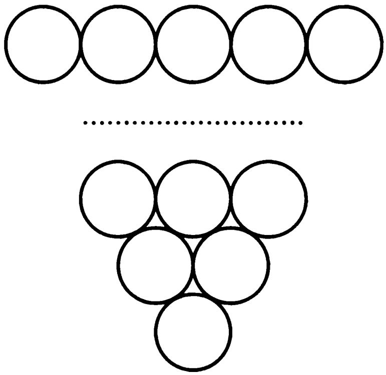


Рис. 19

23.99[1]**.** Докажите, что для арифметической прогрессии с положительными членами выполняется неравенство:

а) $\sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}} \leqslant a_n$; б) $\sqrt{a_n \cdot a_{n+2k}} \leqslant a_{n+k}$,

и укажите, при каком значении разности прогрессии имеет место равенство.

23.100. Докажите, что сумма любых трех идущих подряд членов любой арифметической прогрессии с целыми членами делится на 3.

23.101. Докажите, что сумма любых семнадцати идущих подряд членов любой арифметической прогрессии с целыми членами делится на 17.

23.102. Верно ли, что сумма любых n идущих подряд членов любой арифметической прогрессии с целыми членами делится на n?

23.103. Сумма пяти начальных членов арифметической прогрессии меньше суммы ее последующих пяти членов на 50. На сколько десятый член прогрессии больше ее второго члена?

---

[1] Задачи 23.99—23.116 предлагались на вступительных экзаменах в вузах.

23.104. Найдите сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма четвертого, пятого, седьмого и шестнадцатого членов этой прогрессии равна 32.

23.105. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

23.106. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечетными номерами на 15 больше суммы членов с четными номерами. Найдите a_{12}, если $a_{20} = 3a_9$.

23.107. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{19}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что удвоенная сумма членов этой прогрессии с четными номерами на 10 больше суммы всех членов. Найдите a_{13}, если $a_3 = 2a_4$.

23.108. От перекрестка расходятся три дороги под углом 120° друг к другу. Три пешехода одновременно вышли с перекрестка с постоянными скоростями, образующими арифметическую прогрессию. Через 2 ч пути расстояние между самым медленным и самым быстрым пешеходами равнялось $2\sqrt{76}$ км, а между самым медленным и третьим пешеходом — $2\sqrt{61}$ км. Найдите скорость пешеходов.

23.109. Корни уравнения $x^3 - 6x^2 + 3x + a = 0$ при некотором a образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.

23.110. При каких $y \in \boldsymbol{R}$ числа $\sqrt{y^2 + 2y + 1}$, $\frac{y^2 + 3y - 1}{3}$, $y - 1$, взятые в указанном порядке, являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

23.111. Сумма первого и третьего членов арифметической прогрессии равна 10, а сумма второго и четвертого членов равна 16. Найдите прогрессию.

23.112. Сколько нужно взять членов прогрессии 105, 98, 91, 84, ..., чтобы их сумма была равна нулю?

23.113. Составьте формулу общего члена возрастающей арифметической прогрессии, у которой сумма первого и третьего членов равна 2, а сумма квадратов первого и второго членов равна 5.

23.114. Третий член арифметической прогрессии равен наименьшему значению непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[-2; 7]$, а восемнадцатый член этой же прогрессии — наибольшему. Сколько корней имеет каждое из уравнений:

а) $f(x) = a_5$; в) $f(x) = a_{18}$;

б) $f(x) = a_{51}$; г) $f(x) = a_1$?

23.115. Железная дорога за простой вагонов под разгрузкой в первый день берет с предприятия 400 р., а в каждый последующий — на 300 р. больше, чем в предыдущий. Бригада грузчиков может разгрузить вагоны за 10 дней. Если бригада разгрузит вагоны раньше срока, то за каждый сэкономленный день она получит премию 2350 р. При каком сроке разгрузки затраты предприятия на оплату простоя вагонов и на премию грузчикам будут минимальными?

23.116. Две землеройные машины разных конструкций роют навстречу друг другу тоннель длиной 30 м. Для первой машины стоимость проходки первого метра равна 150 у. е., а каждого последующего метра на 90 у. е. больше предыдущего. Стоимость проходки каждого метра второй машиной одинакова и равна 1275 у. е. Сколько метров должна прорыть каждая из этих машин, чтобы стоимость работ была минимальной?

§ 24. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Напишите формулу общего члена геометрической прогрессии, если (**24.01—24.03**):

24.01. а) $a_1 = 0{,}25$; $q = 2$; в) $a_1 = 5$; $q = -3$;

б) $a_1 = -1$; $q = \frac{1}{3}$; г) $a_1 = \sqrt{2}$; $q = -1$.

24.02. а) $a_2 = 3$; $q = -0{,}5$; в) $a_{17} = -1$; $q = -3$;

б) $a_3 = -12$; $q = \sqrt{2}$; г) $a_5 = q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

24.03. а) $a_1 = 12$; $a_2 = 3$; в) $a_{17} = 1$; $a_8 = -2$;

б) $a_4 = -8$; $a_{13} = -\frac{1}{8}$; г) $a_5 = a_{333} = -1$.

24.04. Докажите, что для любой геометрической прогрессии справедливо соотношение:

а) $\frac{a_{23}}{a_3} = q^{20}$; б) $\frac{a_{n+33}}{a_n} = q^{33}$; в) $\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$.

24.05. Четвертый член геометрической прогрессии в 4 раза больше ее шестого члена, а сумма второго и пятого членов равна 63. Найдите двенадцатый член этой прогрессии.

24.06. Все члены геометрической прогрессии — положительные числа. Известно, что разность между первым и пятым членами равна 15, а сумма первого и третьего членов равна 20. Найдите десятый член этой прогрессии.

24.07. Найдите все значения x, при которых числа $2 - x$; $2x - 3$; $4 - 3x$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию.

24.08. Найдите все значения x, при которых числа $2x - 1$; $4x$; $64x^2$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию.

24.09. Найдите все такие значения x, при каждом из которых числа x; 1; 2 являлись бы последовательными членами геометрической прогрессии. Рассмотрите все возможные случаи.

24.10. Найдите четыре числа, которые следует поместить между числами 1 и 2 так, чтобы они вместе с данными составили бы геометрическую прогрессию.

24.11. Десять чисел, являющихся последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $q > 1$, расположены на отрезке $[1; 2]$. Найдите наибольшее значение знаменателя этой прогрессии.

24.12. Между различными положительными числами x и y поместили n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ так, что они вместе с данными составили геометрическую прогрессию

$$x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, y.$$

Найдите эти числа для: а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 3$; г) произвольного натурального числа.

24.13. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если три последовательных ее члена равны длинам сторон прямоугольного треугольника.

24.14. Четыре числа x, y, z, t являются последовательными членами геометрической прогрессии. Докажите равенство $(x - z)^2 + (y - z)^2 + (y - t)^2 = (x - t)^2$.

24.15. Найдите число членов и их сумму для геометрической прогрессии:

а) 1; 5; ...; 78 125;
б) 2; 4; ...; 2^n;
в) 1; 3; ...; 3^{2n};
г) −17; −289; ...; -17^{12k+1};
д) 2; 4; ...; 2^{n-4}.

24.16. Определите первый и последний члены геометрической прогрессии, для которой:

а) $n = 8$; $q = 2$; $S_8 = 765$; б) $n = 5$; $q = \frac{2}{3}$; $S_5 = 211$.

24.17. Найдите первый член, знаменатель и сумму десяти членов геометрической прогрессии, если:

а) $b_5 - b_1 = 35$; $b_2 + b_4 = 42$; $0 < q \leqslant 1{,}5$;

б) $b_4 - b_1 = -36$; $b_3 + b_4 + b_5 = 6$; $q < 0$.

24.18. В геометрической прогрессии $u_6 = 64$, а отношение суммы $u_7 + u_9$ к сумме $u_2 + u_4$ равно 32. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

24.19. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 42, а их произведение равно −1000. Найдите четвертый член этой прогрессии, если известно, что все ее члены — целые числа.

24.20. В геометрической прогрессии произведение первых 11 членов равно 2. Найдите шестой член той прогрессии.

24.21. В геометрической прогрессии произведение первых трех членов равно 1728, а их сумма равна 63. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

24.22. В геометрической прогрессии сумма первых n членов вдвое больше суммы следующих n членов. Найдите знаменатель этой прогрессии, если:

а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) $n = k$, $k > 3$.

24.23. В геометрической прогрессии (b_n) с положительными членами известно произведение третьего, пятого, восьмого и двенадцатого членов, равное 144. Найдите произведение четвертого и десятого ее членов.

24.24. В геометрической прогрессии (b_n) с положительными членами известно произведение седьмого и двадцатого членов, равное P. Найдите произведение второго, шестнадцатого, семнадцатого и девятнадцатого ее членов.

24.25. Пусть в геометрической прогрессии выделены две группы по k членов в каждой группе так, что сумма индексов всех членов первой группы равна сумме индексов всех членов второй группы из k членов. Докажите, что произведение всех членов первой группы равно произведению всех членов второй группы.

24.26. Четыре числа x, y, z, t — четыре последовательных члена геометрической прогрессии, причем $x + t = a$; $x \cdot t = b$. Найдите $y^3 + z^3$.

24.27. На графике функции $y = ax^2$, $a \neq 0$, выделены пять точек, абсциссы $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ которых в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Будут ли соответствующие ординаты этих точек образовывать геометрическую прогрессию? Если будут, то найдите ее знаменатель.

24.28. На графике функции $y = ax^3$, $a \neq 0$, выделены пять точек, абсциссы $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ которых в указанном порядке являются последовательными членами геометрической прогрессии. Будут ли соответствующие ординаты этих точек образовывать геометрическую прогрессию? Если будут, то найдите ее знаменатель.

24.29. Банк начисляет 7% годовых. 1 января 2000 г. в этот банк была положена сумма в a рублей. Найдите размер вклада на 1 января 2005 г., если в течение этого времени процентная ставка оставалась без изменения. С помощью калькулятора выясните, через какое наименьшее число лет сумма вклада увеличится более чем в 2 раза.

24.30. Могут ли числа 1, 3, 5 быть членами (не обязательно соседними) некоторой геометрической прогрессии? Если могут, то приведите какой-нибудь пример такой прогрессии, если не могут, то докажите почему.

24.31. Найдите по крайней мере три геометрические прогрессии со знаменателем, большим 1, содержащие числа 1, 2, 4.

24.32. Седьмой член геометрической прогрессии в 5 раз больше ее пятого члена. Найдите отношение величины первого члена прогрессии к величине ее сто первого члена.

24.33. Известно, что в геометрической прогрессии семнадцатый член лежит на отрезке [9; 10], а шестнадцатый — на отрезке [2; 3]. В каких пределах может изменяться знаменатель этой прогрессии?

24.34. В геометрической прогрессии (a_n) все члены — положительные числа. Известно, что $1 \leqslant a_5 \leqslant 2$; $16 \leqslant a_7 \leqslant 18$. Какие значения может принимать шестой член этой прогрессии? Найдите наибольшее и наименьшее значения шестого члена прогрессии.

24.35. В прогрессии найдите все целочисленные члены геометрической прогрессии, если они существуют:

а) $a_1 = \frac{1}{5}$; $q = \sqrt[3]{5}$; $n = 50$; б) $a_1 = 2$; $q = \sqrt[5]{8}$; $n = 100$.

24.36. Пусть числа α и β — корни квадратного уравнения

$$4x^2 - 3x + a = 0,$$

а числа γ и δ — корни уравнения

$$x^2 - 3x + b = 0.$$

При каких значениях a и b числа α, β, γ, δ в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию?

24.37. Пусть числа α и β — корни квадратного уравнения

$$x^2 - x\sqrt{2} + a = 0,$$

а числа γ и δ — корни уравнения

$$x^2 - (4 + 3\sqrt{2})x + b = 0.$$

При каких значениях a и b числа α, β, γ, δ в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию?

24.38. Пусть числа α, β, γ — корни уравнения $x^3 + 2x^2 + ax - 8 = 0$. При каких значениях a числа α, β, γ в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию?

24.39. Найдите сумму:

а) $1 + 11 + 111 + \ldots + 111\ldots1$, где последнее слагаемое содержит n единиц;

б) $7 + 77 + \ldots + 777\ldots7$, где последнее слагаемое содержит n семерок.

24.40. Докажите, что числа 49, 4489, 444889, ..., получаемые вставкой числа 48 в середину предыдущего числа, являются квадратами натуральных чисел.

24.41. Пусть S_n есть сумма первых n членов геометрической прогрессии. Докажите равенство $\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{S_{2n} - S_n}{S_{3n} - S_{2n}}$.

24.42. Пусть S_n — сумма первых n членов геометрической прогрессии, а $\widetilde{S}_n$ — сумма обратных величин этих членов. Найдите произведение Π_n первых n членов этой геометрической прогрессии.

24.43. Клиенту в банке предлагают сделать вклад на условии 2% в месяц. Какой процент он получит за: а) два месяца; б) квартал; в) полугодие; г) год; д) десять лет? (При вычислении можно использовать микрокалькулятор, округляя результат до сотых процента.)

24.44. Клиенту в банке предлагают сделать вклад на условии 44% в год. Какой процент он получит за: а) полугодие; б) квартал; в) два месяца; г) месяц? (При вычислении можно использовать микрокалькулятор, округляя результат до сотых процента.)

24.45. У каждого из нас двое родителей, четверо дедушек и бабушек, восемь прадедушек и прабабушек, 16 прапрадедушек и прапрабабушек. Обозначим число прабабушек и прадедушек вместе как $пра^1 = 8$, тогда $пра^2 = 16$ и т. д. Считая три поколения на каждые сто лет, посчитайте, сколько у вас было предков 3000 лет тому назад. Подумайте, почему полученный вами верный математически ответ нереален.

24.46. В угол 60° вписана окружность радиусом R. В образовавшийся криволинейный треугольник вновь вписана окружность, касающаяся сторон угла и первой окружности. Далее этот процесс повторяется (рис. 20). Найдите радиус: а) десятой такой окружности; б) n-й окружности.

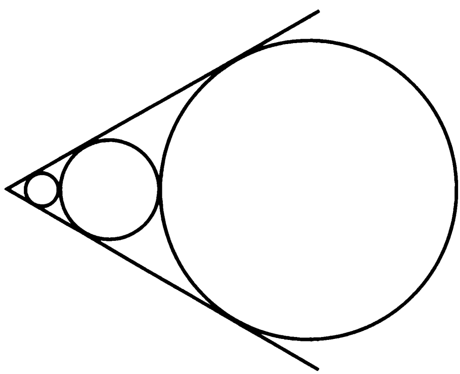


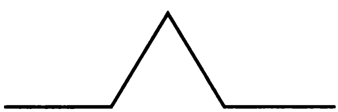
Рис. 20

24.47. В угол 90° вписана окружность радиусом R (см. № 24.46). В образовавшийся криволинейный треугольник вновь вписана окружность, касающаяся сторон угла и первой окружности. Далее этот процесс повторяется (см. рис. 20). Найдите радиус: а) десятой такой окружности; б) n-й окружности.

24.48. В угол α ($0° < \alpha < 180°$) вписана окружность радиусом R (см. № 24.46). В образовавшийся криволинейный треугольник вновь вписана окружность, касающаяся сторон угла и первой окружности. Далее этот процесс повторяется (см. рис. 20). Найдите радиус: а) десятой такой окружности; б) n-й окружности.

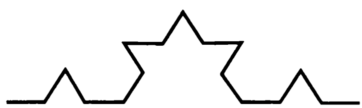
24.49. Рассмотрим отрезок длиной l. Разделим его на три равные части и, удалив среднюю часть, заменим ее двузвенной ломаной. Каждое звено этой ломаной равно трети данного отрезка. В результате получим четырехзвенную ломаную линию, состоящую из звеньев, равных $\frac{l}{3}$ каждое. Назовем ее ломаной первого ранга (рис. 21 а). Продолжим построение. На каждом звене ломаной линии первого ранга указанным выше способом построим четырехзвенную ломаную. В результате получим ломаную линию второго ранга (рис. 21 б). Найдите периметр ломаной линии десятого ранга. Если продолжить описанный процесс до бесконечности, то получим некоторую линию. Эта предельная ломаная называется *кривой Коха* по имени шведского математика Нильса Фабиана Хельге фон Коха, который в 1904 г. привел пример такой ломаной в виде снежинки. Она может быть получена аналогичным построением на сторонах правильного треугольника.

Ломаная первого ранга



а)

Ломаная второго ранга



б)

Рис. 21

Задачи на комбинацию арифметической и геометрической прогрессий

24.50. Числа x, y, z в указанном порядке образуют одновременно арифметическую и геометрическую прогрессии. Найдите эти числа.

24.51. Числа x, y, z в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию, а числа $x + y$, $y + z$, $z + x$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

24.52. Три числа, сумма которых равна 26, составляют геометрическую прогрессию. Если к этим числам добавить соответственно 1, 6, 3, то получатся расположенные в том же порядке последовательные члены арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

24.53. Три числа, сумма которых 217, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической прогрессии или как 2, 9 и 44-й члены арифметической прогрессии. Сколько членов этой арифметической прогрессии надо взять, чтобы их сумма была равна 820?

24.54. Найдите сумму 10 членов каждой из двух возрастающих прогрессий: арифметической и геометрической, если известно, что первый член каждой прогрессии равен 2; третьи члены прогрессий равны между собой; пятый член арифметической прогрессии на 10 больше второго члена геометрической прогрессии.

24.55. Арифметическая и геометрическая прогрессии имеют первые члены, равные 5; третьи члены этих прогрессий также равны между собой, а второй член арифметической прогрессии на 10 больше второго члена геометрической прогрессии. Найдите эти прогрессии.

24.56. Арифметическая и геометрическая прогрессии имеют первые равные члены, равные 1; третий член арифметической прогрессии равен второму члену геометрической прогрессии, а сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии вдвое больше суммы второго и третьего членов арифметической прогрессии. Найдите эти прогрессии.

24.57. Разность арифметической прогрессии (a_n) не равна нулю. Числа, равные произведениям a_1a_2; a_2a_3; a_3a_1, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.

24.58. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второй ее член увеличить на 2, то числа в том же порядке образуют арифметическую прогрессию. Если третий член этой арифметической прогрессии увеличить на 6, то числа в том же порядке составят опять геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

24.59. Найдите трехзначное число, если цифры единиц, десятков и сотен в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а цифры числа, меньшего данного на 10, в том же порядке образуют геометрическую прогрессию.

24.60. Найдите трехзначное число, если цифры единиц, десятков и сотен в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа, меньшего данного на 400, в том же порядке образуют арифметическую прогрессию.

24.61. Найдите четыре числа, если первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую. Сумма крайних членов равна 14, а сумма средних — 12.

24.62. Найдите четыре числа, если первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую. Сумма крайних членов равна 21, а сумма средних — 18.

24.63. Вычислите сумму:

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots;$

б) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + \ldots;$

в) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{1}{(2^n)^2} + \ldots;$

г) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{8}} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2^n}} + \ldots;$

д) $\frac{1}{\sqrt[8]{2}} + \frac{1}{\sqrt[8]{4}} + \frac{1}{\sqrt[8]{8}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[8]{2^n}} + \ldots;$

е) $1 + \frac{5}{9} + \frac{9}{27} + \frac{17}{81} + \ldots + \frac{1 + 2^n}{3^n} + \ldots.$

24.64. Решите уравнение:

а) $x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots = \frac{25}{4};$

б) $2x + 1 + \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{(1 - x)^2} + \frac{1}{(1 - x)^3} + \ldots = \frac{9}{2}.$

24.65. Докажите неравенство:

а) $1 < \sqrt[3]{\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \ldots + \sqrt[3]{\frac{1}{3^n}} + \ldots < 2;$

б) $2 < \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{8}} + \ldots + \sqrt{\frac{1}{2^n}} + \ldots < 3;$

в) $2 < \sqrt[5]{\frac{1}{5}} + \sqrt[5]{\frac{1}{5^2}} + \ldots + \sqrt[5]{\frac{1}{5^n}} + \ldots < 3.$

24.66. Вычислите сумму:

а) $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots;$

б) $\frac{17}{100} + \frac{17}{10\,000} + \frac{17}{1\,000\,000} + \ldots + \frac{1}{100^n} + \ldots.$

24.67. Считая, что бесконечную сумму $\frac{a}{10} + \frac{a}{10^2} + \frac{a}{10^3} + \ldots + \frac{a}{10^n} + \ldots$ можно записать в виде чистой периодической десятичной дроби $0{,}aaa\ldots a\ldots = 0{,}(a)$, представьте следующие периодические десятичные дроби в виде обыкновенных дробей. Попробуйте сформулировать правило обращения чистой периодической десятичной дроби в обыкновенную:

а) 0,(5); б) 45,(35); в) 21,(654); г) −54,(0012).

24.68. Представьте следующие смешанные периодические десятичные дроби в виде обыкновенных:

а) 0,1(5); б) 0,10(35); в) 1,25(6); г) −0,00(001).

24.69. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 1, а сумма квадратов ее членов 2. Найдите эту прогрессию.

24.70. Отметьте на координатной плоскости xy все пары $(x;\ y)$ такие, что x есть сумма членов некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а y — сумма квадратов ее членов.

24.71. Найдите такую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сумма которой равна 1, а сумма квадратов равна 100.

24.72. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 1, а сумма кубов ее членов 2. Найдите эту прогрессию.

24.73. Отметьте на координатной плоскости xy все пары $(x; y)$ такие, что x есть сумма членов некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а y — сумма кубов ее членов.

24.74. Найдите такую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, у которой каждый член в 100 раз меньше суммы всех последующих ее членов.

24.75. Найдите такую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, у которой каждый член в n раз меньше суммы всех последующих ее членов.

24.76. Найдите такую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, у которой каждый член в 100 раз больше суммы всех последующих ее членов.

24.77. Найдите такую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, у которой каждый член в n раз больше суммы всех последующих ее членов.

24.78. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = 2000$; б) $\sqrt[5]{x\sqrt[5]{x\sqrt[5]{x\ldots}}} = 5$.

24.79. Дан квадрат со стороной, равной 1. Бесконечная последовательность квадратов построена так, что вершины последующего квадрата являются серединами сторон предшествующего квадрата. Найдите а) сумму периметров; б) суммы площадей всех таких квадратов.

24.80. Дан правильный треугольник со стороной, равной 1. Бесконечная последовательность треугольников построена так, что вершины последующего треугольника являются серединами сторон предшествующего треугольника. Найдите а) сумму периметров; б) суммы площадей всех таких треугольников.

24.81. Дан угол, равный 60°. Ломаная, содержащая бесконечное множество звеньев, построена так: на одной стороне угла берется точка, из которой опускается перпендикуляр на другую сторону угла. Из полученной точки опять опускается перпендикуляр на другую сторону угла и т. д. Найдите сумму длин звеньев такой ломаной, если первое звено равно a.

24.82. Дан угол, равный 60°. Бесконечная последовательность кругов, вписанных в этот угол, построена так, что каждый последующий круг касается предшествующего круга и сторон угла. Найдите сумму площадей всех таких кругов, если радиус первого круга r.

24.83. Дан угол, равный 90°. Бесконечная последовательность кругов, вписанных в этот угол, построена так, что каждый последующий круг касается предшествующего круга и сторон угла. Найдите сумму площадей всех таких кругов, если радиус первого круга r.

24.84. Дан угол, равный α, $\alpha \in (0; \pi)$. Бесконечная последовательность кругов, вписанных в этот угол, построена так, что каждый последующий круг касается предшествующего круга и сторон угла. Найдите сумму площадей всех таких кругов, если радиус первого круга r.

24.85. Посмотрите на кривую Коха из задачи 24.49. Найдите длину кривой Коха n-го ранга. Пусть эта длина равна L_n. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$.

§ 25. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Доказательство равенств

25.01. Докажите равенство:

а) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

г) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$;

д) $\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{5a+b}{2} + \dfrac{9a+b}{2} + \ldots + \dfrac{(4n-3)a+b}{2} =$

$= 0{,}5(a(2n^2 - n) + bn)$;

е) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$;

ж) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

з) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

и) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) =$

$= \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

к) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$;

л) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$;

м) $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{4}{1+x^4} + \ldots + \dfrac{2^n}{1+x^{2^n}} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

25.02. Найдите сумму:

а) $S_n^{(k)} = \dfrac{1}{k(k+1)} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} + \dfrac{1}{(k+2)(k+3)} + \ldots +$

$+ \dfrac{1}{(k+n-1)(k+n)}$;

б) $\Omega_n = \dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

Доказательство делимости

25.03. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

25.04. Докажите, что при любом целом $n \geqslant 0$ число $11^{n+2} + 12^{12n+1}$ делится на 133.

25.05. Докажите, что при любом целом $n \geqslant 1$ число $18^n - 1$ делится на 17.

25.06. Докажите, что при любом целом $n \geqslant 1$ число $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ делится на 19.

25.07. Докажите, что при любом целом $n \geqslant 1$ число $6^{2n} - 1$ делится на 7.

25.08. Докажите, что при любом целом $n \geqslant 1$ число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

25.09. Докажите, что при любом целом $n \geqslant 1$ число $5^n + 2 \cdot 3^n + 5$ делится на 8.

25.10. Докажите, что при любом целом $n \geqslant 1$ число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323.

Доказательство неравенств

25.11. Пользуясь методом математической индукции, докажите неравенство:

а) $2^n > n$, для всех натуральных n;

б) $3^n \geqslant n^3$, $n > 2$;

в) $3^n \geqslant n + 2^n$;

г) $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$,
где $a \geqslant 0$, $n \in N$ *(неравенство Бернулли)*;

д) $\left(\frac{n^2 + 1}{n^2}\right)^n \geqslant \frac{n + 1}{n}$;

е) $2^n + 3 \geqslant 6n$, $n > 4$;

ж) $\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \ldots + \sqrt{4}}}} < 3$ (n четверок).

Доказательство рекуррентных соотношений

25.12. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 10$. Докажите, что $a_n = 10n - 8$.

25.13. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = \alpha$, $a_{n+1} = a_n + \beta$. Докажите, что $a_n = \beta n + \alpha - \beta$.

25.14. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 10a_n$. Докажите, что $a_n = 0{,}2 \cdot 10^n$.

25.15. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = \alpha$, $a_{n+1} = \beta a_n$, $\alpha\beta \neq 0$. Докажите, что $a_n = \alpha \cdot \beta^{n-1}$.

25.16. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = a_2 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$. Докажите, что $a_n = \frac{2}{3}((-1)^{n+1} + 2^n)$.

25.17. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 5$; $a_2 = -2$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Докажите, что $a_n = 17 \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 3^n$.

25.18. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 1$; $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Докажите, что $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ *(числа Фибоначчи)*.

Разные задачи

25.19. Докажите, что для того чтобы узнать номер страницы в книге, имеющей m страниц, задавая вопросы, на которые задумавший страницу должен отвечать только нет или да, потребуется задать n вопросов, где $2^n \leqslant m < 2^{n+1}$.

25.20. Даны m одинаковых шариков, из которых $m - 1$ шариков весят одинаково и один шарик весит больше, чем каждый из оставшихся. Докажите, что если $3^n \leqslant m < 3^{n+1}$, то на рычажных весах тяжелый шар можно найти не более чем за n взвешиваний.

25.21. Докажите, что количество разных наборов по два предмета, которые можно сделать из n различных предметов, равно $\frac{n(n+1)}{2}$ $(n > 1)$.

25.22. Докажите, что количество разных наборов по три предмета, которые можно сделать из n различных предметов, равно $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ $(n > 2)$.

25.23. Докажите, что количество разных непустых наборов, которые можно сделать из n различных предметов, равно $2^n - 1$.

25.24. Докажите, что n разных предметов можно расставить в ряд $n!$ способами.

25.25. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа и их произведение $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Докажите неравенство $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$.

25.26. Используя результат задачи 25.12, докажите *неравенство Коши*: если числа $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, ..., $a_n \geqslant 0$, то $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

25.27. Докажите, что n точек разбивают прямую на $n + 1$ частей.

25.28. Докажите, что n прямых таких, что каждые две из них пересекаются и никакие три из них не проходят через одну точку, разбивают плоскость на $1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ частей.

25.29. Докажите, что n окружностей таких, что каждые две из них пересекаются и никакие три из них не проходят через одну точку, разбивают плоскость на $n^2 - n + 2$ частей.

ГЛАВА 5

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 26. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

26.01. Найдите количество всех
а) двузначных чисел;
б) двузначных чисел, состоящих из разных цифр;
в) двузначных чисел, сумма цифр которых больше 16;
г) двузначных чисел, произведение цифр которых меньше 2.

26.02. Из цифр 4, 6, 7 составляют различные трехзначные числа без повторяющихся цифр.
а) Найдите наибольшее число.
б) Найдите наименьшее число, у которого вторая цифра 7.
в) Сколько чисел, оканчивающихся цифрой 7, можно составить?
г) Сколько всего чисел можно составить?

26.03. Для завтрака на кусок белого, черного или ржаного хлеба можно положить сыр или колбасу. Бутерброд можно запить чаем, молоком или кефиром.
а) Нарисуйте дерево возможных вариантов завтрака.
б) В скольких случаях будет выбран молочный напиток?
в) Что более вероятно: то, что хлеб будет ржаным или что бутерброд будет с сыром?
г) Как изменится дерево вариантов, если известно, что сыр не положат на черный хлеб, а колбасу не будут запивать кефиром?

26.04. Из цифр 0, 1, 5, 7, 8 составляют двузначное число кратное 3.
а) Нарисуйте дерево возможных вариантов.
б) Сколько всего чисел можно составить?
в) Сколько среди них чисел больше 50?
г) Что более вероятно: то, что число будет кратно 5, или то, что оно будет больше 80?

26.05. В урне лежат 6 не различимых на ощупь шаров: 4 белых и 2 черных. Вынимают одновременно два шара. Если они разного цвета, то их откладывают в сторону, а если одного цвета, то их возвращают в урну с добавлением шара другого цвета. Такую операцию повторяют два раза.
а) Нарисуйте дерево возможных вариантов.
б) В скольких случаях в урне останется 8 шаров?
в) В скольких случаях в урне останется не более 5 шаров?
г) Нарисуйте дерево возможных вариантов, если указанную в условии операцию повторяют три раза.

26.06. В коридоре 5 лампочек. Сколько имеется различных способов освещения коридора:
а) включая случай, когда все лампочки не горят;
б) если известно, что лампочки № 1 и 2 горят или не горят одновременно;
в) если известно, что при горящей лампочке № 3 лампочка № 2 не горит;
г) когда горит большинство лампочек?

26.07. На плоскости провели 10 прямых, среди которых нет параллельных, и никакие три не проходят через одну точку.
а) Сколько точек пересечения лежит на каждой прямой?
б) Сколько всего получилось точек пересечения?
в) Сколько точек пересечения лежит на двух из этих прямых?
г) Сколько точек пересечения лежит на трех из этих прямых?

26.08. В книжке-раскраске нарисованы непересекающиеся треугольник, квадрат и круг. Каждую фигуру надо раскрасить в один из цветов радуги, причем разные фигуры — в разные цвета.
а) Сколько существует способов раскрашивания?
б) Сколько среди них тех, в которых круг будет оранжевого цвета?
в) Сколько среди них тех, в которых треугольник не красного цвета?
г) Сколько существует способов раскрашивания в холодные цвета?

26.09. На координатной плоскости отмечены все точки, абсциссы и ординаты которых равны одному из следующих чисел: -3, -1, 1, 2, 7, 9 (повторения допускаются).
а) Сколько всего таких точек?
б) Сколько точек лежит во второй координатной четверти?

в) Сколько точек лежит в четвертой координатной четверти?

г) Сколько точек лежит в круге радиусом 5 с центром в начале координат?

26.10. Известно, что $x = 2^a 3^b 5^c$ и a, b, c — числа из множества $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ (совпадения допускаются).

а) Найдите наименьшее и наибольшее значения числа x.

б) Сколько всего таких чисел можно составить?

в) Сколько среди них будет нечетных чисел?

г) Сколько среди них будет чисел, оканчивающихся тремя нулями?

26.11. Вычислите: а) $6! - 5!$; б) $\frac{5!}{5}$; в) $\frac{10!}{5!}$; г) $\frac{11!}{5! \cdot 6!}$.

26.12. Делится ли $11!$ на: а) 64; б) 25; в) 81; г) 49?

26.13. Сколькими нулями оканчивается число:

а) $10!$; б) $15!$; в) $26!$; г) $100!$?

26.14. Сократите дробь:

а) $\frac{n!}{(n-1)!}$; в) $\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!}$;

б) $\frac{(2k+1)!}{(2k-1)!}$; г) $\frac{(4m-1)!}{(4m-3)!}$.

26.15. Решите в натуральных числах уравнение:

а) $n! = 7(n-1)!$; в) $(k-10)! = 77(k-11)!$;

б) $(m+17)! = 420(m+15)!$; г) $(3x)! = 504(3x-3)!$.

26.16. Решите в натуральных числах неравенство:

а) $(n!)^{n!} < 1000$;

б) $(2n)! < 1000 \cdot n!$;

в) $(n+2)! > (n!)^2$;

г) $100 + n! + (n+1)! + (n+2)! > (n+3)!$.

26.17. Из цифр 0, 2, 8, 9 составляют различные трехзначные числа (повторения цифр допускаются).

а) Найдите наименьшее число.

б) Перечислите все числа, которые меньше 250.

в) Перечислите все нечетные числа, которые больше 900.

г) Перечислите все числа, которые кратны 40.

26.18. В лототроне 5 шариков: № 1, 2, 3, 4, 5. Во время розыгрыша лотереи из него поочередно вытаскивают 3 шарика. Найдите количество выигрышных комбинаций шариков, если выигрышной считается комбинация, в которой:

а) на последнем месте стоит шарик № 1;

б) номера двух первых шариков отличаются на 1;

в) сумма номеров выпавших шариков меньше 8;

г) произведение номеров выпавших шариков больше 30.

26.19. Учительница подготовила к контрольной работе 4 задачи на решение линейных неравенств, 5 текстовых задач (2 на движение и 3 на работу) и 6 задач на решение квадратных уравнений (в двух задачах дискриминант отрицателен). В контрольной работе должно быть по одной задаче на каждую из трех тем. Найдите общее число:

а) всех возможных вариантов контрольной;

б) тех возможных вариантов, в которых встретится задача на движение;

в) тех возможных вариантов, в которых у квадратного уравнения будут корни;

г) тех возможных вариантов, в которых не встретятся одновременно задача на работу и квадратное уравнение, не имеющее корней.

26.20. Известно, что $x = 2^a 3^b 5^c$ и a, b, c — различные числа из множества $\{0, 1, 2, 3\}$.

а) Найдите наименьшее и наибольшее значения числа x.

б) Сколько всего таких чисел можно составить?

в) Сколько среди них будет нечетных чисел?

г) Сколько среди них будет чисел, кратных 12?

26.21. В волейбольной команде 6 игроков, а на площадке 6 позиций (номеров) для их расстановки.

а) Сколькими способами игроков команды можно расставить на площадке?

б) Сколько есть способов расстановки игроков, если капитан находится на подаче?

в) Сколько есть способов расставновки игроков, если капитан находится не на подаче?

г) Сколько есть способов расстановки игроков, если капитан находится или на подаче, или на месте разыгрывающего?

26.22. В формуле линейной функции $y = ax + b$ в качестве коэффициентов подставили числа a и b из множества $\{0, 1, 2, ..., 9\}$ (повторения допускаются) и построили график функции.

а) Сколько различных прямых может быть построено?

б) Сколько из этих прямых пройдут выше точки $\left(5; \sqrt{5}\right)$?

в) Сколько из этих прямых пройдут левее точки $\left(\sqrt{7}; 7\right)$?

г) Сколько из этих прямых пройдут через какую-нибудь внутреннюю точку второй координатной четверти?

26.23. В формуле квадратичной функции $y = ax^2 + bx + 5$ в качестве коэффициентов подставили числа a и b из множества $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5\}$ (повторения допускаются) и построили график функции.

а) Сколько различных парабол может быть построено?

б) У скольких из этих парабол ветви будут направлены вверх?

в) Сколько из этих парабол пересекут ось абсцисс?

г) Сколько из этих парабол будут симметричны относительно оси ординат?

26.24. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \frac{k}{x}$, где $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, ..., 6\}$.

а) Сколько из этих графиков проходит через начало координат?

б) Сколько из этих графиков проходит через точку $(-2; 0{,}5)$?

в) Сколько из этих функций возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$?

г) Сколько из этих графиков не пересечет прямую $y = x + 1$?

26.25. Номер билета состоит из четырех цифр и может начинаться с нуля. Найдите количество счастливых билетов, если счастливым называется билет, номер которого:

а) имеет вид $\overline{abba}$;

б) состоит из цифр, сумма которых меньше 3;

в) состоит из цифр, сумма которых больше 33;

г) имеет вид $\overline{abcd}$, где $0 < ab = cd < 10$.

§ 27. СТАТИСТИКА — ДИЗАЙН ИНФОРМАЦИИ

27.01. Укажите общий ряд данных следующих измерений:
а) веса (в кг) взрослого человека;
б) длины слова (количество букв в слове) русского языка;
в) числа страниц в ежедневной газете;
г) текущих отметок в школьном дневнике.

27.02. Укажите общий ряд данных следующих измерений:
а) результатов прыжков в высоту (с точностью до 5 см) среди мальчиков 9-го класса;
б) площади (в $м^2$) кухни в городской квартире;
в) высоты потолков (в дм) в городской квартире;
г) суммы отметок в выпускном школьном аттестате за знания по русскому языку, литературе и математике.

27.03. Продавец записывал вес каждого проданного арбуза (с точностью до 0,5 кг). У него получились такие данные:

8	5	6,5	7	9,5	10	11	8,5	8	6	7	8	9	10,5	11
6	7	8,5	9	10	8	12	11	10,5	7	7	6,5	10	8	9
5	8	11	10,5	8	8,5	7	8	10	9	6	8	7	10	11
8	12	7	8	10	7	6	9	11	8	8	6	10	12	8

а) Сколько арбузов он продал?
б) Каков общий ряд данных измерения веса арбуза?
в) Укажите наименьшую и наибольшую варианты этого измерения.
г) Какова кратность варианты 5, варианты 8, варианты 12?
д) Приведите пример числа из общего ряда данных, которое не является вариантой этого измерения.

27.04. Результаты измерения роста (в см) девятиклассников представлены в таблице:

162	168	157	176	185	160	162	158	181	179
164	176	177	180	181	179	175	180	176	165
168	164	179	163	160	176	162	178	164	190
181	178	168	165	176	178	185	179	180	168
160	176	175	177	176	165	164	177	175	181

а) Каков общий ряд данных измерения роста девятиклассников?
б) Укажите наименьшую и наибольшую варианты проведенного измерения.

в) Какова кратность варианты 168, варианты 179?

г) Приведите пример числа из общего ряда данных, которое не является вариантой этого измерения.

27.05. Ценники в продуктовом магазине распределили по ценовым категориям. Получилось такое распределение (граничную цену относят к более высокой категории):

Цена, р.	0—20	20—50	50—100	100—150	150—200	$\geqslant 200$
Кол-во ценников	31	52	47	38	19	13

а) Найдите объем измерения, т. е. количество распределенных ценников.

б) Какова частота варианты «от 100 до 150 р.»?

в) Какова процентная частота варианты «больше или равно 200 р.»?

г) Дополните таблицу строкой частот вариант и строкой их процентных частот.

27.06. В специализированном спортивном магазине продается 50 видов велосипедов. Они распределены по цене (граничную цену относят к более высокой категории):

Цена, тыс. р.	До 3	3—6	6—9	9—12	12—15	$\geqslant 15$
Кол-во видов	3	8	19	?	11	2

а) Сколько видов велосипедов стоят от 9 до 12 тыс. р.?

б) Какова частота очень дорогих ($\geqslant$ 15 тыс. р.) велосипедов?

в) Какова процентная частота относительно дешевых (< 6 тыс. р.) велосипедов?

г) Какова процентная частота моды проведенного измерения?

27.07. В сводной таблице распределения данных некоторого измерения оказались пустые места. Заполните их.

	Варианта				Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Кратность		5			
Частота	0,45		0,1		
Частота, %		25		20	

27.08. По приведенному многоугольнику кратностей данных (рис. 22) определите:

а) количество вариант измерения;

б) объем измерения;

в) моду измерения;

г) наименьшую из процентных частот вариант измерения.

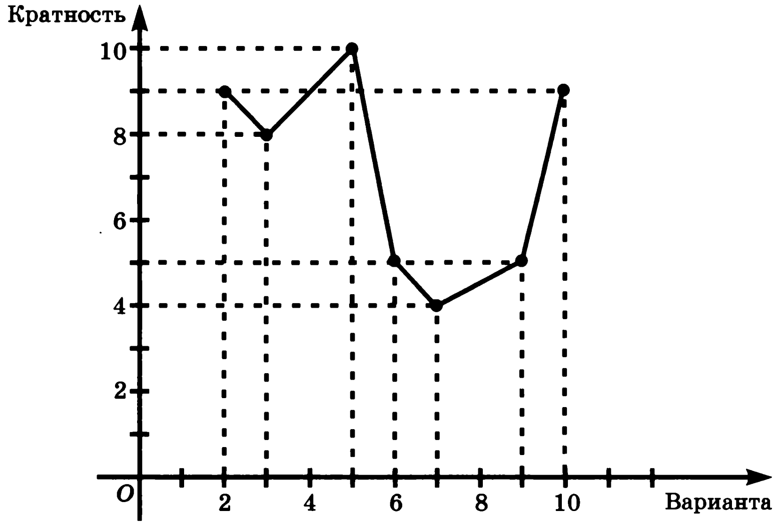


Рис. 22

27.09. У 25 девятиклассников спросили, сколько в среднем часов в день они смотрят телевизор. Вот что получилось:

ТВ, ч в день	0	1	2	3	4
Число школьников	1	9	10	4	1

Определите а) размах; б) моду; в) среднее значение. Постройте многоугольник процентных частот; укажите на нем данные, полученные в заданиях а—в.

27.10. Результатом измерения является последняя цифра натуральной степени двойки (числа 2^n).

а) Выпишите общий ряд данных этого измерения.

б) Выпишите ряд данных этого измерения для $n = 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11$.

в) Выпишите ряд данных этого измерения для $n = 12, 13, 15, 17, 18, 20, 21$.

г) Какова кратность варианты 8 среди всех результатов, полученных в заданиях б, в?

27.11. 30 абитуриентов на четырех вступительных экзаменах набрали в сумме такие количества баллов (оценки на экзаменах «2», «3», «4» или «5»): 20, 19, 12, 13, 16, 17, 17, 14, 16, 20, 14, 19, 20, 20, 16, 13, 19, 14, 18, 17, 12, 14, 12, 17, 18, 17, 20, 17, 16, 17.

а) Составьте общий ряд данных.

б) Выпишите ряд данных этого измерения, стоящих на нечетных местах.

в) Какова кратность варианты 13 в измерении из пункта б, варианты 14, варианты 15?

г) Выпишите сгруппированный ряд измерения из пункта б.

27.12. Отдел технического контроля проверял массу килограммовых упаковок рафинированного сахара. Получились такие результаты (учитывалась масса упаковки):

1030	1020	1050	1070	1030	1020	990	1050	1040	1080
1040	1090	1000	1010	1020	1030	1050	1070	1050	1040
1010	1030	1050	1090	1010	1050	980	1000	1040	1070
1040	1090	1000	1050	1040	1020	1040	1080	1060	1110
1010	1030	1090	1100	990	1000	980	1060	1040	1050

Они были распределены по категориям: «0» (норма) — от 1040 до 1060 г, «1» (перевес) — от 1060 до 1080 г, «2» — от 1080 до 1120 г, «−1» (недовес) — от 1020 до 1040 г, «−2» — от 980 до 1020 г (граничную массу относят к более высокой категории).

Заполните таблицу: а) подсчета кратностей; б) кратностей; в) частот; г) процентных частот.

27.13. В сводной таблице распределения данных некоторого измерения оказались пустые места. Заполните их.

	Варианта						Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	
Кратность	291		113				
Частота		0,122				0,193	
Частота, %	29,1			20,2	7,9		

27.14. По приведенному многоугольнику кратностей данных (рис. 23):

а) определите объем измерения;

б) найдите моду измерения и ее частоту;

в) составьте таблицу частот;

г) нарисуйте многоугольник процентных частот.

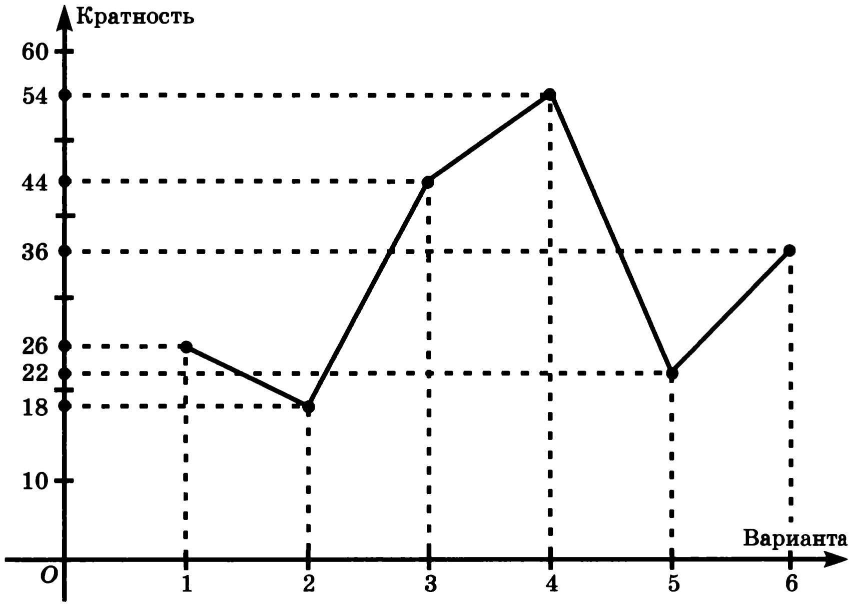


Рис. 23

27.15. Деталь по норме должна весить 431 г. Контроль при взвешивании 2000 деталей дал такие результаты:

Вес, г	427	428	429	430	431	432	433	434	435
Число деталей	40	80	220	360	610	430	200	40	20

а) Чему равна мода измерения?

б) Каков процент деталей, вес которых отличается от планового не более чем на два грамма?

в) Составьте таблицу распределения частот.

г) Постройте многоугольник частот. Для удобства из всех вариант вычтите по 431.

27.16. Девятиклассник за первое полугодие получил итоговые пятерки по трем предметам, четверки по восьми предметам и тройки по пяти предметам.

а) Найдите среднее значение его полугодовых оценок.
б) Каким было бы среднее значение, если бы он по физкультуре вместо пятерки получил бы тройку?
в) Каким было бы среднее значение, если бы он смог по математике и по литературе получить пятерки, а не четверки?
г) По какому наименьшему количеству предметов ему следует улучшить оценку на 1 балл для того, чтобы среднее значение его оценок стало больше 4?

27.17. После урока по теме «Статистика» на доске остались таблица

Варианта	4	7	
Кратность	5	2	3

и ответ: «Среднее значение = 10».
а) Заполните пустое место в таблице.
б) Укажите размах и моду распределения.
в) Может ли в ответе для среднего значения стоять число 15, если все варианты — целые числа?
г) Заполните пустое место в таблице, если в ответе для среднего значения стоит число x.

27.18. После урока по теме «Статистика» на доске остались таблица

Варианта	4	7	11
Кратность	5	2	

и ответ: «Среднее значение = 10».
а) Заполните пустое место в таблице.
б) Укажите размах и моду распределения.
в) Можно ли пустое место в таблице заполнить так, чтобы среднее значение стало равно 5?
г) Какое ближайшее к 5 число может стоять в ответе для среднего значения?

27.19. Таблица распределения кратностей имеет вид:

Варианта	0	1	3	5	6
Кратность	19	2	$3x - 1$	5	$4x - 9$

а) Выразите через x среднее значение.
б) Как выглядит график зависимости среднего значения от x?
в) Каким может быть целое число x, если модой является 0?
г) Может ли мода распределения равняться 3?

27.20. Таблица распределения кратностей имеет вид:

Варианта	0	1	3	5	6
Кратность	10	$2x$	$3x-1$	5	$x+5$

а) Выразите через x среднее значение.
б) Как выглядит график зависимости среднего значения от x?
в) Каким может быть целое число x, если модой является 0?
г) Может ли мода распределения равняться единице?

§ 28. ПРОСТЕЙШИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ

28.01. Монету подбрасывают три раза. Какова вероятность того, что:
а) в последний раз выпадет «решка»;
б) ни разу не выпадет «орел»;
в) число выпадений «орла» в два раза больше числа выпадений «решки»;
г) при первых двух подбрасываниях результаты будут одинаковы?

28.02. Случайным образом выбрали двузначное число. Найдите вероятность того, что оно:
а) оканчивается нулем;
б) состоит из одинаковых цифр;
в) больше 27 и меньше 46;
г) не является кубом другого целого числа.

28.03. Имеются четыре кандидата: Владимир Владимирович, Василий Всеволодович, Вадим Владимирович и Владимир Венедиктович. Из них случайно выбирают двоих. Какова вероятность того, что:
а) будет выбран Владимир Венедиктович;
б) отца одного из кандидатов зовут так же, как и самого кандидата;
в) будут выбраны кандидаты с одинаковыми именами;
г) будут выбраны кандидаты с разными отчествами?

28.04. Случайным образом выбрали двузначное число. Найдите вероятность того, что:
а) его цифры различаются больше, чем на 8;
б) его цифры различаются больше, чем на 7;
в) при перестановке цифр местами получится двузначное число, меньшее исходного;
г) оно ближе к 27, чем к 72.

28.05. На координатной плоскости отмечены все точки, абсциссы и ординаты которых равны одному из следующих чисел: -3, -1, 1, 2, 7, 9 (повторения допускаются). Случайно выбрали одну из этих точек. Найдите вероятность того, что она окажется лежащей:

а) выше оси абсцисс;

б) левее оси ординат;

в) в третьей координатной четверти;

г) выше прямой $y = -x$.

28.06. Показатель степени a случайным образом выбрали из множества $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Независимо от этого показатель степени b выбрали случайным образом также из множества $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Какова вероятность того, что число $x = 2^a5^b$ окажется:

а) не кратным 5;

б) четным;

в) кратным 10;

г) оканчивающимся ровно на три нуля.

28.07. В формуле линейной функции $y = ax + 152$ в качестве коэффициента a использовали некоторое число из множества $\{-10, -3, 0, 1, 2\}$. Найдите вероятность того, что график функции:

а) не пересечет ось ординат;

б) не пересечет ось абсцисс;

в) пересечет ось абсцисс левее точки $(-50; 0)$;

г) не пересечет четвертую координатную четверть.

28.08. 37 точек из 100 красные, а 23 точки из оставшихся — синие. Какова вероятность того, что случайным образом выбранная точка окажется:

а) синей;

б) не красной;

в) красной или синей;

г) не окрашенной?

28.09. Из костей домино случайно выбрали одну. Найдите вероятность того, что:

а) она не является дублем;

б) на ней не выпала «тройка»

в) произведение очков на ней меньше 29;

г) выпавшие очки различаются больше чем на 1.

28.10. Найдите вероятность того, что число, случайно выбранное из множества $\{1!, 2!, 3!, \ldots, 9!, 10!\}$, окажется:

а) нечетным;

б) больше миллиона;

в) оканчивающимся нулем;

г) кратным 105.

28.11. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $x^2 + 4x - 21 \leqslant 0$. Какова вероятность того, что оно окажется и решением неравенства:

а) $-8 \leqslant x \leqslant 1$;   в) $\dfrac{x+5}{2-x} \geqslant 0$;

б) $x^2 - 4x - 21 \leqslant 0$;   г) $x^2 \geqslant 6$?

28.12. Найдите вероятность того, что случайным образом выбранное решение неравенства $|x - 2| \leqslant 5$ окажется также и решением неравенства:

а) $|x + 2| \leqslant 5$;   в) $|x + 5| \leqslant 2$;

б) $|x - 5| \leqslant 2$;   г) $|x + 5| \leqslant 5$.

28.13. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная в прямоугольном равнобедренном треугольнике, окажется:

а) в квадрате, у которого одна вершина лежат на гипотенузе а остальные — на катетах;
б) в квадрате, у которого две вершины лежат на гипотенузе, и две — на катетах;
в) вне круга, вписанного в треугольник;
г) ближе к гипотенузе, чем к катетам.

28.14. В прямоугольнике $ABCD$ отметили середины K и L сторон CD и AD соответственно, а также точки M и N на сторонах AB и BC так, что $AM : MB = 1 : 3$ и $BN : NC = 1 : 2$. В прямоугольнике случайно отметили точку. Какова вероятность того, что эта точка окажется:

а) в треугольнике KCN;
б) в треугольнике MBN;
в) вне треугольника AMC;
г) в четырехугольнике $MNKL$.

28.15. Из цифр 0, 1, 4, 8, 9 случайным образом составляют двузначное число (повторения допускаются). Какова вероятность того, что получится:

а) наименьшее из всех таких чисел;
б) четное число;
в) число, кратное 9;
г) число, удаленное от 50 менее чем на 20?

28.16. Монету подбрасывают четыре раза. Какова вероятность того, что:

а) все четыре раза результат будет одним и тем же;
б) при первых трех подбрасываниях выпадет «решка»;

в) в последний раз выпадет «орел»;
г) «орлов» и «решек» выпадет одинаковое количество раз?

28.17. В квадратном уравнении $x^2 + bx + 15 = 0$ в качестве коэффициента b взяли некоторое натуральное число от 2 до 11. Найдите вероятность того, что у полученного квадратного уравнения:
а) будет два различных корня;
б) не будет корней;
в) будет хотя бы один отрицательный корень;
г) будет хотя бы один положительный корень.

28.18. В лототроне 5 шариков: № 1, 2, 3, 4, 5. Во время розыгрыша лотереи из него поочередно вытаскивают (и не возвращают) 3 шарика. Найдите вероятность того, что:
а) последним выпадет шарик № 2;
б) номера двух первых шариков отличаются на 1;
в) сумма номеров выпавших шариков меньше 8;
г) номер первого выпавшего шарика больше номера второго шарика.

28.19. Известно, что $x = 2^a3^b5^c$ и a, b, c — различные числа из множества $\{0, 1, 2, 3\}$. Из множества всех таких чисел x случайно выбрали одно. Найдите вероятность того, что оно окажется:
а) наименьшим из всех возможных;
б) четным;
в) нечетным;
г) кратным 10.

28.20. Коэффициент a случайно выбрали из множества $\{0, 1, 2, ..., 9\}$. Независимо от этого коэффициент b также выбрали из множества $\{0, 1, 2, ..., 9\}$ и построили график прямой $y = ax + b$. Найдите вероятность того, что эта прямая:
а) не пересечет ось ординат;
б) не пересечет ось абсцисс;
в) не пройдет через начало координат;
г) не будет иметь общих точек с прямой $y = x$.

28.21. В уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в качестве радиуса R подставили натуральное число от 1 до 20. Найдите вероятность того, что:
а) точка $(1; 0)$ будет лежать на этой окружности;
б) точка $(0; -1)$ будет принадлежать кругу, который ограничен этой окружностью;

в) точка (1; 3) не будет принадлежать кругу, который ограничен этой окружностью;
г) эта окружность не будет пересекать прямую $y = \sqrt{123}$.

28.22. В уравнение гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ в качестве коэффициента k подставили некоторое число из множества $\{-5, -2, 1, 3, 4\}$. Найдите вероятность того, что гипербола:
а) пройдет через начало координат;
б) пересечет прямую $y = x$;
в) пройдет через точку $(-5;\ 0{,}4)$;
г) не пересечет окружность $x^2 + y^2 = 1$.

28.23. Из четырех тузов случайным образом поочередно вытащили две карты. Найдите вероятность того, что:
а) обе карты — тузы черной масти;
б) вторая карта — пиковый туз;
в) первая карта — туз красной масти;
г) среди выбранных карт есть бубновый туз.

28.24. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $|x - 4| \leqslant 5$. Какова вероятность того, что оно окажется и решением неравенства:
а) $|x| \leqslant 1$; в) $4 \leqslant |x| \leqslant 5$;
б) $|x| \geqslant 2$; г) $|x + 4| \leqslant 5$?

28.25. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 6, а катет BC равен 8. Из вершины C провели высоту CH и медиану CM. В треугольнике случайно отметили точку. Какова вероятность того, что эта точка окажется:
а) в треугольнике ACM;
б) в треугольнике ACH;
в) в треугольнике CHM;
г) внутри окружности, вписанной в треугольник ABC?

§ 29. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ И ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ

29.01. а) Сколько чисел, кратных 4, находится среди первых 17 натуральных чисел?
б) Какова частота чисел, кратных 4, среди первых 17 натуральных чисел?

в) Заполните таблицу появления чисел, кратных 4, среди первых n натуральных чисел.

г) К какому числу приближается частота с увеличением n?

n	17	18	19	20	27	28	29	30	40	60	80	100
Кол-во чисел, кратных 4, среди чисел от 1 до n												
Частота												

29.02. По многолетней статистике отдела контроля из 1000 экземпляров некоторой детали, выпущенной на предприятии, в среднем оказывается 4 бракованные детали. Сколько бракованных деталей в среднем можно ожидать:

а) в партии из 4000 деталей;

б) в партии из 7500 деталей;

в) в партии из 11 250 деталей;

г) в партии из 300 деталей?

29.03. По сведениям университетской приемной комиссии процент поступающих, верно решивших все задачи на письменном экзамене по математике, практически постоянен за последние несколько лет и равен примерно 1,5%.

а) В прошлом году было 405 абитуриентов. Оцените число абитуриентов, решивших все задачи.

б) В позапрошлом году было 467 абитуриентов. Оцените число абитуриентов, решивших все задачи.

в) В этом году подано 534 заявления. Сколько можно ожидать абитуриентов, которые верно решат все задачи?

г) Два года назад 5 абитуриентов верно решили все задачи. Сколько примерно было абитуриентов?

29.04. По статистике ежедневных продаж в продовольственном супермаркете процент чеков на сумму менее 100 р. достаточно устойчив и колеблется от 9% (по субботам) до 11% (по вторникам).

а) Во вторник в супермаркете было 1247 покупателей. Оцените количество покупок на сумму менее 100 р.

б) В субботу было 2357 покупателей. Оцените количество покупок на сумму не менее 100 р.

в) За неделю было выбито 9785 чеков. В каких пределах лежит число чеков на сумму менее 100 р.?

г) За месяц было выбито 4017 чеков на сумму менее 100 р. Оцените число покупателей за месяц.

29.05. На железнодорожном вокзале при проходе к поездам пригородного сообщения стоят турникеты. Примерно 38% ежедневно проданных билетов составляют билеты до 2-й зоны и 17% составляют билеты до 3-й зоны.

а) В понедельник было продано 12 153 билета до 2-й зоны. Оцените количество билетов, проданных в понедельник.

б) Оцените количество билетов, проданных в понедельник до 3-й зоны.

в) Во вторник было продано 6057 билетов до 3-й зоны. Сколько примерно было продано билетов до 2-й зоны?

г) Оцените количество билетов, проданных за эти два дня.

29.06. а) Сколько чисел, оканчивающихся цифрой 4, находится среди первых 17 натуральных чисел?

б) Какова частота чисел, оканчивающихся на 4, среди первых 17 натуральных чисел?

в) Заполните таблицу появления чисел, оканчивающихся цифрой 4, среди первых n натуральных чисел:

n	17	27	57	77	100	125	150	173	200	1000
Кол-во чисел, оканчивающихся цифрой 4										
Частота										

г) К какому числу приближается частота с увеличением n?

29.07. а) Сколько чисел, начинающихся с цифры 4, находится среди первых 17 натуральных чисел?

б) Какова частота чисел, начинающихся с цифры 4, среди первых 17 натуральных чисел?

в) Заполните таблицу появления чисел, начинающихся с цифры 4, среди первых n натуральных чисел:

n	17	57	100	400	500	1000	4000	5000	10 000
Кол-во чисел, начинающихся с цифры 4									
Частота									

г) Наблюдается ли тут статистическая устойчивость? В каких пределах меняется частота с увеличением n?

29.08. По статистике выполнения заданий единого государственного экзамена (ЕГЭ) количество учеников, решавших задание под номером А7, составило 73%, а решивших его — примерно 64% от общего числа участников.

а) Всего в ЕГЭ участвовало около 700 тыс. человек. Примерно сколько из них не решали задачу А7?

б) Сколько примерно человек решили задачу А7?

в) В Приволжском федеральном округе в ЕГЭ участвовало 113 586 человек и процент выполнения был на 2 выше, чем в среднем по стране. Примерно сколько человек в этом округе решили задачу А7?

г) В Центральном федеральном округе верно решили эту задачу 76 121 человек и процент выполнения был на 1 ниже, чем в среднем по стране. Сколько человек сдавали ЕГЭ в этом округе?

29.09. а) Проведите эксперимент с подбрасываниями игрального кубика; результаты (количество выпадений определенного числа очков) впишите в таблицу:

Кол-во бросков	Число очков					
	1	2	3	4	5	6
20						
40						
60						
80						
100						

б) Повторите этот же эксперимент еще дважды и заполните таблицу:

Кол-во бросков	Процент выпадения					
	единицы	двойки	тройки	четверки	пятерки	шестерки
100						
200						
300						

в) Объедините свои результаты с результатами одноклассников и найдите процентную частоту выпадения единицы при 1000 бросках.

г) К какому числу приближается процентная частота каждой из вариант с увеличением числа бросков?

29.10. а) Проведите эксперимент с подбрасываниями двух разноцветных игральных кубиков; результаты (количество бросков, при которых выпала нужная сумма очков) впишите в таблицу:

Кол-во бросков	Сумма очков										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20											
40											
50											

б) Повторите этот же эксперимент еще трижды и заполните таблицу:

Кол-во бросков	Сумма очков										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
100											
200											

в) Объедините свои результаты с результатами одноклассников и заполните таблицу процентных частот выпадения сумм при 1000 бросках:

Кол-во бросков	Сумма очков										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1000											

г) К какому числу приближается процентная частота выпадения суммы в 7 очков с увеличением числа бросков?

ГЛАВА

6 КОРЕНЬ n-й СТЕПЕНИ

§ 30. ПОНЯТИЕ КОРНЯ n-й СТЕПЕНИ ИЗ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА. ФУНКЦИИ $y = \sqrt[n]{x}$, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

30.01. Докажите, что число:

а) $-1\frac{1}{3}$ является корнем пятой степени из числа $-4\frac{52}{243}$;

б) $2\frac{1}{2}$ не является корнем пятой степени из числа $32\frac{1}{32}$.

30.02. Докажите, что число $-0{,}1$:

а) не является корнем четвертой степени из числа 0,0001;
б) является корнем пятой степени из числа $-0{,}00001$;
в) не является корнем шестой степени из числа $-0{,}000001$.

Вычислите, если это возможно (**30.03, 30.04**):

30.03. а) $(\sqrt[7]{7})^7$; в) $(\sqrt[37]{-37})^{74}$;

б) $(\sqrt[17]{17})^{34}$; г) $(\sqrt[74]{-74})^{148}$.

30.04. а) $\sqrt[7]{7^7}$; д) $\sqrt[37]{37^{-37}}$; и) $\sqrt[38]{38^{-38}}$;

б) $\sqrt[17]{17^{17}}$; е) $\sqrt[37]{(-37)^{-37}}$; к) $\sqrt[38]{(-38)^{-38}}$.

в) $\sqrt[37]{-37^{37}}$; ж) $\sqrt[38]{-38^{38}}$;

г) $\sqrt[37]{(-37)^{37}}$; з) $\sqrt[38]{(-38)^{38}}$;

30.05. Вычислите:

а) $\sqrt[5]{(30 - \sqrt[3]{30})^5} - \sqrt{(30 - \sqrt[3]{30})^2}$;

б) $\sqrt[3]{(2 - \sqrt{5})^3} + \sqrt[6]{(2 - \sqrt{5})^6}$;

в) $\sqrt[5]{(0{,}3 - \sqrt[3]{0{,}3})^5} + \sqrt{(0{,}3 - \sqrt[3]{0{,}3})^2}$.

30.06. Вычислите без микрокалькулятора корни четвертой степени из чисел $5\frac{1}{16}$; 0,00000016.

30.07. Вычислите без микрокалькулятора произведение
$$\sqrt[4]{4096} - 1) \cdot (\sqrt[4]{4096} - 2) \cdot (\sqrt[4]{4096} - 3) \cdot \ldots \cdot (\sqrt[4]{4096} - 4096).$$

Постройте график функции (30.08—30.10):

30.08. а) $y = \sqrt[4]{x^4}$; б) $y = (\sqrt[4]{x})^4$.

30.09. а) $y = \sqrt[5]{x^{-5}}$; б) $y = (\sqrt[5]{x})^{-5}$.

30.10. а) $y = \sqrt[18]{x^{-18}}$; б) $y = (\sqrt[18]{x})^{-18}$.

Решите уравнение (30.11, 30.12):

30.11. а) $\sqrt[4]{x} = 3$; в) $\sqrt[4]{\dfrac{3x - 1}{2x + 5}} = 2$;

б) $\sqrt[4]{2x - 1} = -5$; г) $\sqrt[4]{x^2 - x + 28} = 3$.

30.12. а) $\sqrt[32]{x} = \sqrt[32]{7x - 5}$;

б) $\sqrt[32]{2x - 1} = \sqrt[32]{7x + 1}$;

в) $\sqrt[32]{\dfrac{3x - 1}{2x + 5}} = \sqrt[32]{\dfrac{x + 1}{5x + 2}}$;

г) $\sqrt[32]{x^2 - x - 2} = -\sqrt[32]{2 + x - x^2}$.

30.13. Сколько нулей может быть в числе 3200...0, чтобы корень пятой степени из этого числа был натуральным числом?

30.14. Сколько нулей после запятой может быть в числе 0,00...01, чтобы кубический корень из этого числа был рациональным числом? Ответьте на тот же вопрос для корня n-й степени.

30.15. Какой должна быть последняя цифра натурального числа, чтобы корень четвертой степени не мог быть натуральным числом? Ответьте на тот же вопрос для корней третьей, пятой и шестой степеней.

30.16. Сколько существует таких разных n-значных чисел, что корень n-й степени из этого числа есть тоже натуральное число? Решите эту задачу для n, равного 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Если необходимо, можете воспользоваться микрокалькулятором.

30.17. Какое наименьшее количество идущих подряд натуральных чисел нужно взять, чтобы среди них было не менее пяти чисел, корень пятой степени из которых является натуральным числом?

30.18. При помощи микрокалькулятора вычислите с точностью до 0,001 корни четвертой степени из: 234; 23,4; 2,34; 0,234; 0,02340000; 0,00234.

30.19. Укажите какое-нибудь рациональное число, находящееся между $\sqrt[13]{13}$ и $\sqrt[11]{11}$ (используйте микрокалькулятор).

30.20. При помощи микрокалькулятора вычислите и расположите в порядке убывания числа: $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[5]{5}$; $\sqrt[6]{6}$; $\sqrt[7]{\frac{1}{7}}$; $\sqrt[8]{\frac{1}{8}}$; $\sqrt[9]{\frac{1}{9}}$.

30.21. При помощи микрокалькулятора вычислите с точностью до 0,00001: $\sqrt[3]{1\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{1\frac{1}{4}}$; $\sqrt[8]{1\frac{1}{8}}$; $\sqrt[30]{1\frac{1}{30}}$; $\sqrt[300]{1\frac{1}{300}}$; $\sqrt[3000]{1\frac{1}{3000}}$; $\sqrt[10000]{1{,}0001}$.

30.22. Постройте на одном чертеже графики функций $y = x^4$ при $x \geqslant 0$ и $y = \sqrt[4]{x}$ при $x \geqslant 0$ и перечислите свойства функции $y = \sqrt[4]{x}$:

а) область определения $D(y)$;
б) множество значений $E(y)$;
в) нули функции;
г) промежутки монотонности;
д) промежутки выпуклости;
е) точки экстремума;
ж) экстремумы;
з) четность или нечетность;
и) наибольшее и наименьшее значения.

30.23. Постройте на одном чертеже графики функций $y = x^4$ и $y = \sqrt[4]{x}$ и перечислите свойства функции $y = \sqrt[4]{x}$:

а) область определения $D(y)$;
б) множество значений $E(y)$;
в) нули функции;
г) промежутки монотонности;
д) промежутки выпуклости;

е) точки экстремума;

ж) экстремумы;

з) четность или нечетность;

и) наибольшее и наименьшее значения.

30.24. Постройте на одном чертеже графики функций $y = x$; $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt[3]{x}$; $y = \left(\sqrt[4]{x}\right)^4$ на отрезке [0; 9].

30.25. Постройте и сравните между собой графики функций $y = \sqrt[4]{x^4}$ и $y = \left(\sqrt[4]{x}\right)^4$.

30.26. Постройте график и исследуйте функцию:

а) $y = 1 + \sqrt[4]{x}$;

б) $y = 2 - \sqrt[4]{x}$;

в) $y = \sqrt[4]{x + 16}$;

г) $y = \sqrt[4]{1 - x}$;

д) $y = \sqrt[4]{4 - x} - 2$;

е) $y = 3 - \sqrt[3]{x + 3}$.

Постройте график функции и исследуйте ее свойства **(30.27, 30.28)**:

30.27. а) $y = 3\sqrt[4]{x}$;

б) $y = \sqrt[4]{-5x}$;

в) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x}{2}}$;

г) $y = 10\sqrt[4]{2 + x} - 3$.

30.28. а) $y = \sqrt[4]{|x|}$;

б) $y = 2 - \sqrt[4]{|x|}$;

в) $y = \left|1 - \sqrt[4]{x + 2}\right|$;

г) $y = \left|1 - \sqrt[4]{|x| - 1}\right|$.

30.29. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $y = \sqrt[3]{2 - x} - 3$;

б) $y = \sqrt[4]{2 - x} - 3$;

в) $y = \dfrac{7}{\sqrt[6]{x} + 2} - 3$;

г) $y = \dfrac{7}{\sqrt[8]{x} - 1} - 3$.

30.30. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 3\sqrt[4]{1 - |x|} + 5\sqrt[10]{x^2 - 10x - 11}$;

б) $y = x|x| - 2\sqrt[6]{5 - x^2} + 7\sqrt[8]{\sqrt{x^2 - 1} - 2}$.

30.31. Постройте на одном чертеже графики следующих функций:

$y = x$; $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt[3]{x}$; $y = \sqrt[4]{x}$; $y = \sqrt[5]{x}$; $y = \sqrt[6]{x}$.

30.32. Без помощи микрокалькулятора расположите в порядке убывания числа: $\sqrt[5]{1{,}3}$; $\sqrt[6]{1{,}3}$; $1{,}3$; $\sqrt{1{,}3}$; $\sqrt[3]{1{,}3}$; $\sqrt[4]{1{,}3}$; $1{,}69$.

30.33. Без помощи микрокалькулятора расположите в порядке убывания числа: $\sqrt[5]{0{,}3}$; $\sqrt[6]{0{,}3}$; $0{,}3$; $\sqrt{0{,}3}$; $\sqrt[3]{0{,}3}$; $\sqrt[4]{0{,}3}$; $0{,}027$.

30.34. Без помощи микрокалькулятора определите, между какими соседними целыми числами расположены числа:

а) $\sqrt[5]{30{,}2}$; б) $\sqrt[7]{1000}$; в) $\sqrt[100]{100}$; г) $\sqrt[3]{100\pi}$.

30.35. Без помощи микрокалькулятора сравните числа:

а) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[7]{1000}$;

б) $\sqrt[3]{29}$ и $\sqrt[7]{1027}$;

в) $\sqrt[3]{1001}$ и $\sqrt[7]{9\,999\,999}$.

30.36. Без помощи микрокалькулятора расположите в порядке убывания числа: $\sqrt[5]{31}$; $\sqrt[6]{65}$; 3; $\sqrt{17}$; $\sqrt[3]{0{,}98}$; $\sqrt[4]{0{,}99}$; $0{,}98$.

30.37. Докажите, что уравнение $\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} = 2$ имеет единственный корень и найдите этот корень.

30.38. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x - 15} + \sqrt[4]{x} = 3$;

б) $\sqrt[3]{1 - x} + 2\sqrt[5]{32 - x} - \sqrt[4]{x} = 3$.

30.39. Подберите какую-нибудь пару положительных чисел a и b, чтобы уравнение $\sqrt[4]{x} = ax + b$: а) имело ровно два корня; б) имело ровно один корень; в) не имело корней.

30.40. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2 - \sqrt[4]{|x - 2|}$:

а) на отрезке $[-14; 1]$; в) на отрезке $[-14; 14]$;

б) на отрезке $[4; 18]$; г) на отрезке $[-14; 66]$.

§ 31. СВОЙСТВА КОРНЯ n-й СТЕПЕНИ

Вычислите, используя теорему о произведении корней (31.01, 31.02):

31.01. а) $\sqrt[4]{0{,}2} \cdot \sqrt[4]{3{,}2} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3125}$;

б) $\sqrt[3]{-0{,}25} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{-128}$;

в) $\sqrt[3]{\sqrt{2} - \sqrt{10}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$;

г) $1 - \sqrt[3]{(\sqrt[3]{2} - 1)(1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}$.

31.02. а) $\sqrt[3]{2^{11}} \cdot \sqrt[3]{2^{2}} \cdot \sqrt[3]{2^{8}}$;

б) $\sqrt[4]{2^{15}} \cdot \sqrt[4]{2^{7}} \cdot \sqrt[4]{2^{2}}$;

в) $\sqrt[3]{3^{11} \cdot 4 \cdot 6^{10}}$;

г) $\sqrt[4]{15 \cdot 729 \cdot 6^{5} \cdot 10^{3}}$.

31.03. Вычислите, используя теорему об отношении корней:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{0{,}0032}}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{-0{,}25}}{\sqrt[3]{2}}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{(\sqrt{2} - \sqrt{10})^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{10} + \sqrt{2}}} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}}\right)$.

31.04. Вычислите, используя теорему о корне из произведения:

а) $\sqrt[5]{160 \cdot (-625)}$;

б) $\sqrt[3]{135 \cdot 56}$;

в) $\sqrt[3]{123{,}4 \cdot 12{,}34 \cdot 1{,}234}$;

г) $\sqrt[4]{0{,}1298 \cdot 1{,}298 \cdot 12{,}98 \cdot 129{,}8 \cdot 0{,}16}$;

д) $\sqrt[3]{\dfrac{7{,}29 \cdot 729}{7290}}$;

е) $\sqrt[4]{\dfrac{12{,}96 \cdot 129{,}4}{1{,}296 \cdot 0{,}1296}}$.

31.05. Вычислите, используя теорему о корне из отношения:

а) $\sqrt[3]{\dfrac{1215}{5625}}$; б) $\sqrt[4]{\dfrac{1539}{304}}$; в) $\sqrt[3]{\dfrac{7^{27}}{2^{36}}}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{3^{212}}{4^{40}}}$.

31.06. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{375}$; б) $\sqrt[3]{-5000}$; в) $\sqrt[4]{405}$; г) $\sqrt[4]{1875}$.

31.07. Внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt[3]{5}$; б) $-3\sqrt[3]{2}$; в) $2\sqrt[4]{5}$; г) $-3\sqrt[4]{2}$.

31.08. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{16x^4y^6}$; в) $\sqrt[4]{80x^5y^{12}}$; д) $\sqrt[5]{-64x^{10}y^{12}}$.

б) $\sqrt[4]{80x^6y^9}$; г) $\sqrt[4]{80x^{10}y^{12}}$;

31.09. Внесите множитель под знак корня:

а) $x\sqrt[3]{y}$; в) $x\sqrt[4]{y}$; д) $xy\sqrt[4]{yx}$.

б) $x\sqrt[4]{x}$; г) $x\sqrt[4]{yx}$;

31.10. Вычислите, используя теорему о приведении корней к одному показателю:

а) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{108} \cdot \sqrt{3}$; б) $\sqrt[5]{6} \cdot \sqrt[10]{3} \cdot \sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[10]{768}$.

31.11. Сравните числа:

а) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{\sqrt[5]{5}}$ и $\sqrt[5]{\sqrt{5}}$.

б) $\sqrt[3]{12}$ и $\sqrt[6]{145}$;

31.12. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$;

б) 2; 1,5; $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$; $\sqrt{\sqrt{\sqrt{1{,}5}}}$;

в) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$; $\sqrt{3\sqrt[3]{4}}$; $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}}$.

31.13. Сравните данную разность с нулем:

а) $\sqrt[21]{2^7} - \sqrt[15]{2^5}$; б) $\sqrt[25]{(\sqrt{2}+1)^{15}} - \dfrac{1}{\sqrt[20]{(\sqrt{2}-1)^{12}}}$.

31.14. Постройте на одном чертеже графики функций и сравните их свойства:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $h(x) = \sqrt[6]{x^2}$, $g(x) = \sqrt[9]{x^3}$;

б) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $h(x) = \sqrt[8]{x^2}$, $g(x) = \sqrt[12]{x^3}$.

31.15. При каких допустимых значениях x сумма выражений $\sqrt[4]{\dfrac{x^4(x+2)^8}{(x+2)^4}}$ и $\sqrt[3]{\dfrac{x^3(x+2)^5}{(x+2)^2}}$ меньше 6 при всех допустимых значениях x?

31.16. При каких значениях p сумма выражений $\sqrt[4]{\dfrac{x^4(x+2)^8}{(x+2)^4}}$ и $\sqrt[3]{\dfrac{x^3(x+2)^5}{(x+2)^2}}$ равна p при всех значениях $x \in (-1;\ 0)$?

31.17. При каких значениях p сумма выражений $\sqrt[4]{\dfrac{x^4(x+2)^8}{(x+2)^4}}$ и $\sqrt[3]{\dfrac{x^3(x+2)^5}{(x+2)^2}}$ меньше p хотя бы для одного значения $x \in (-1;\ 1)$?

ГЛАВА
7 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 32. ЧИСЛОВАЯ ПРЯМАЯ И ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Число π

32.01. Даны окружность с радиусом 1, описанный около нее квадрат и вписанный правильный шестиугольник. Сравнивая периметры многоугольников и длину окружности, докажите неравенство $3 < \pi < 4$.

32.02. Зная первые сто цифр после запятой числа π:
$\pi = 3{,}14159265358979323846$
26433832795028841971
69399375105820974944
59230781640628620899
86280348253421170679,
округлите это число до: а) сотых; б) стотысячных; в) до 10^{-12}.

32.03. Прочитайте зарифмованные строки: «Это я знаю и помню прекрасно / Пи чудные знаки нам вовсе напрасны». Убедитесь в их связи с первыми 12 цифрами в записи числа π и попробуйте продолжить «стихотворение».

32.04. Между какими соседними целыми числами находится число $10^{23} \cdot \pi$?

32.05. Найдите целое число, ближайшее к числу $50\,000\pi$.

32.06. Существует ли такое натуральное число n, что:
а) число $10^n \cdot \pi$ — целое;
б) разность между числом $10^n \cdot \pi$ и ближайшим к нему целым числом меньше, чем 0,007?

32.07. Пусть M_t — точка числовой окружности, соответствующая числу t. Например, точка $M_{\frac{\pi}{2}}$ имеет координаты (0; 1). Отметьте приблизительно точки M_1, M_2, M_5, M_7, M_{22}, M_{71}. Вычислите длину наименьшей из дуг, ограниченной двумя из отмеченных точек, используя приближенное значение π из задачи 32.02 или калькулятор.

32.08. Какое из чисел $\dfrac{3{,}14159265358979323846}{\pi}$ или $\dfrac{\pi}{3{,}14159265358979323846}$ ближе к числу 1?

32.09. Материальная точка движется по окружности радиусом 7000 км с линейной скоростью, равной 100 м/ч. Каково минимальное количество целых часов, за которое материальная точка пройдет через одну и ту же точку на окружности: а) более одного раза; б) более десяти раз?

32.10. Найдите ближайшую к числу π рациональную дробь вида $\dfrac{m}{n}$, где m — натуральное число, а n равно: а) 7; б) 17; в) 37; г) 70; д) 311. Какая из этих дробей ближе всего к числу π?

32.11. Запишите в порядке возрастания числа:

$-\pi$; -4; 0; 1, $\dfrac{\pi}{3}$; $-\dfrac{\pi}{2}$; $-\sqrt{3}$; 19,2; 6π.

32.12. Решите неравенство:

а) $(4\pi - 13)x > -7$;

б) $x^2 - (7\pi + 22)x + 154\pi < 0$;

в) $\dfrac{(x-\pi)^2(2\pi x - 3)}{(5x-2)} \leqslant 0$;

г) $|x - \pi| + |x^2 + \pi - 11| = |x^2 + x - 11|$.

32.13. Найдите все целые значения m, при которых числа вида $\dfrac{\pi \cdot m}{2}$ находятся между числами:

а) -10π и $+10\pi$; б) -23 и $+23$.

32.14. Определите количество всех чисел вида $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, где k — целое число, принадлежащие промежутку: а) $\left[\dfrac{4\pi}{3}; \dfrac{8\pi}{3}\right)$; б) $[4; 10]$; в) $[-2; 2]$; г) $\left[-\dfrac{142\pi}{11}; 5\pi\right]$.

32.15. Отметьте на числовой прямой следующие точки:

а) 0; π; $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{5\pi}{3}$; 3π; -2π;

б) 1; 2; 3; 4; π; $0{,}7\pi$;

в) $\pi \cdot m$, где m — целое число из множества $\{0; \pm1; \pm2; \pm3; \pm4\}$.

32.16. Найдите длину отрезка числовой прямой, концы которого имеют координаты:

а) 3,14 и π;

б) $\sqrt{10}$ и π;

в) $\sqrt{39}$ и π;

г) $4 + \frac{7\pi}{3}$ и $4 + \frac{8\pi}{5}$;

д) 22 и 7π;

е) 70π и 223.

32.17. Сколько точек с координатами $2k\pi$, $k \in Z$, расположено на отрезке $[-7; 25]$?

32.18. Сколько точек с координатами $k\pi$, $k \in Z$, может быть расположено на отрезке числовой прямой, длина которого равна: а) 1; б) 12; в) 22; г) 100π?

32.19. Две материальные точки движутся со скоростью 1 м/с. Первая по прямой, вторая по окружности. Требуется определить: а) расстояние, которое пройдет первая точка к моменту, когда вторая пройдет ровно шесть кругов; б) количество полных кругов, которое пройдет вторая точка, когда первая пройдет 100 м; в) каким может быть расстояние, которое пройдет первая точка, к тому моменту времени, когда вторая будет в точке окружности, наиболее удаленной от точки старта.

32.20. Две материальные точки движутся со скоростью $v_1 = 8$ м/с; $v_2 = 2\pi$ м/с. Первая точка движется по периметру квадрата со стороной 2, вторая по окружности, вписанной в этот квадрат. Обе начинают движение в точке касания окружности со стороной квадрата. Через какое время точки встретятся: а) в первый раз; б) во второй раз; в) в десятый раз; г) в n-й раз (n — произвольное целое число)?

32.21. Решите задачу 32.20 а, если:

1) $v_1 = 2$ м/с; $v_2 = 4\pi$ м/с;

2) $v_1 = 12$ м/с; $v_2 = \pi$ м/с;

3) $v_1 = 2$ м/с; $v_2 = 4$ м/с;

4) $v_1 = 2\pi$ м/с; $v_2 = 4$ м/с.

32.22. Леонард Эйлер для приближенного вычисления (1707 г.) числа π предложил рассматривать следующее произведение:

$$A_э = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n}{p_n \pm 1}.$$

В числителях всех дробей стоят взятые по порядку простые числа, начиная с числа 2, а в знаменателях — числа, бóльшие соответствующих числителей на 1, если числитель при делении на 4 дает в остатке 1 и меньше соответствующих числителей на 1 во всех остальных случаях $\left(\text{например, } \frac{41}{42} \text{ и } \frac{61}{62}, \text{ но } \frac{47}{46} \text{ и } \frac{59}{58}\right)$. Эйлер показал, что значение этого произведения с увеличением числа сомножителей приближается к числу $\frac{\pi}{2}$. Используя микрокалькулятор, вычислите удвоенное значение $A_э$ для 5, 10, 12 и 25 сомножителей и сравните полученные результаты с числом π.

32.23. Джон Валлис в своих вычислениях (1655 г.) площади круга использовал следующее произведение:

$$\Pi_{\text{В}}(n) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1},$$

значение которого с ростом числа сомножителей приближается к числу $\frac{\pi}{2}$. Используя микрокалькулятор, вычислите удвоенное значение $\Pi_{\text{В}}$ для n, равных 5, 10, 12 и 25, и сравните полученные результаты с числом π.
Сравните результаты задач 32.22 и 32.23.

Числовая окружность

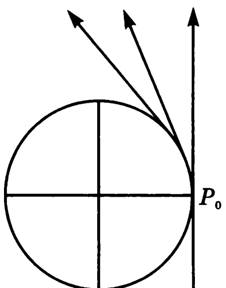


Рис. 24

32.24. Числовая прямая касается окружности с радиусом 1 в точке P_0, соответствующей нулю и на прямой, и на окружности. Положительная полупрямая «наматывается» на окружность (рис. 24). Отметьте точки окружности, с которыми совместятся точки числовой прямой, соответствующие числам: 3; π; 4; $4 + \pi$; $4 + 2\pi$; 10; 17; 100; 10 000. Укажите четверть, в которой оказались отмеченные числа.

32.25. Дана окружность с радиусом 1, на которой отмечены 12 точек $P_0, P_1, \ldots, P_{11}$, следующих одна за другой против хода часовой стрелки в указанном порядке и разбивающих окружность на равные дуги. Отмечая дуги против хода часовой стрелки от точки P_0, найдите длины следующих дуг:

а) P_0P_1; в) P_0P_3; д) P_2P_3;
б) P_0P_2; г) P_0P_9; е) P_9P_{11}.

32.26. Сколько существует чисел, которые будучи отложенными на числовой окружности, изображаются одной и той же точкой этой окружности? Чему равно расстояние между двумя такими числами на числовой прямой?

32.27. Заполните таблицу, указав четверть, в которой расположены заданные числа, лежащие на числовой окружности:

Число	1	3	5	7	9	11	–13	–11	–7
Четверть									
Число	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{7}$	$\frac{37\pi}{5}$	$\frac{115\pi}{12}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{77\pi}{6}$	$-\frac{79\pi}{8}$	$-\frac{170\pi}{9}$	$-\frac{2331\pi}{11}$
Четверть									

32.28. Запишите множество всех чисел, соответствующих точкам, обозначенным на рисунках 25 а—п:

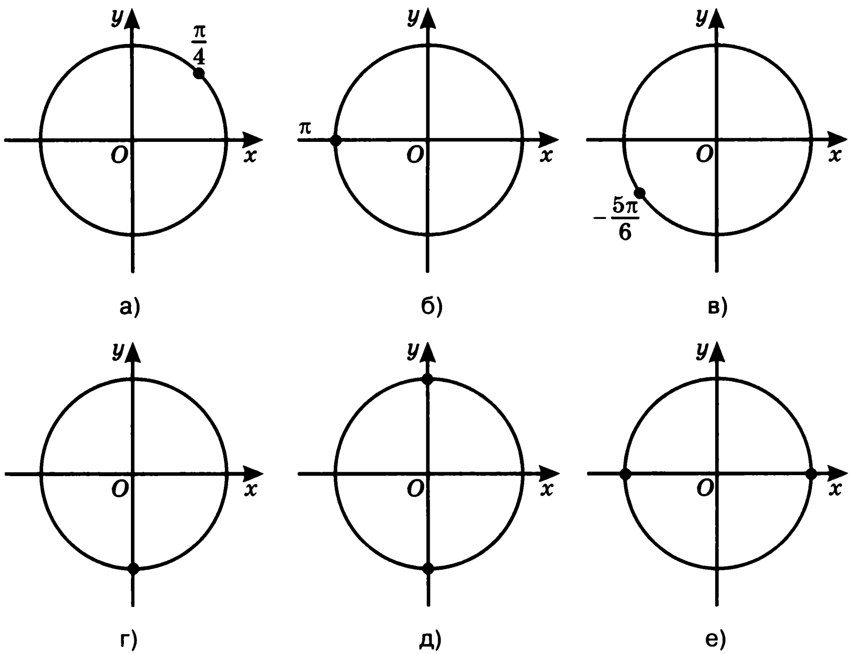


Рис. 25 (начало)

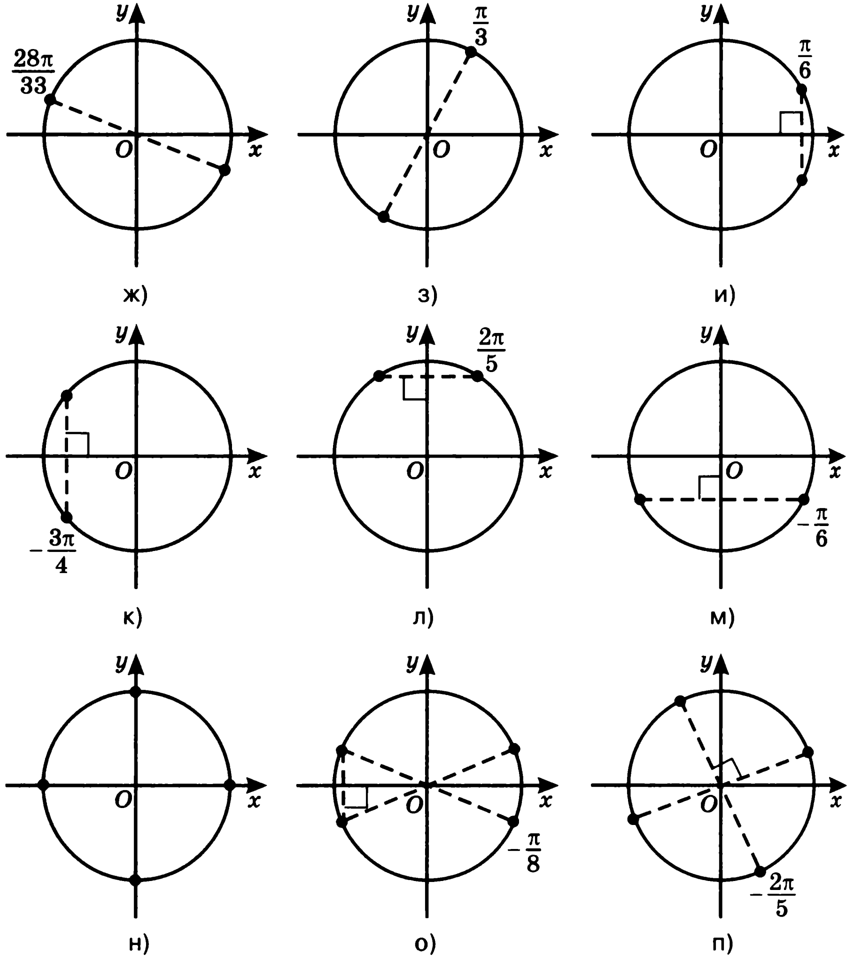


Рис. 25 (окончание)

32.29. Укажите на числовой окружности точку P_α с заданными координатами и запишите множество чисел α, соответствующих этой точке:

а) $P_\alpha(0;\ 1)$;

б) $P_\alpha(-1;\ 0)$;

в) $P_\alpha\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$;

г) $P_\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

д) $P_\alpha\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$;

е) $P_\alpha\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

ж) $P_\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

32.30. Укажите на числовой окружности все точки, координаты α которых удовлетворяют неравенству (**32.30, 32.31**):

а) $-\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$;

б) $\frac{5\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{5\pi}{2}$;

в) $100\pi - \frac{\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant 100\pi + \frac{\pi}{2}$;

г) $1001\pi - \frac{\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant 1001\pi + \frac{\pi}{2}$.

32.31. а) $\frac{4\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3\pi}{2}$;

б) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n \leqslant \alpha \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\frac{4\pi}{3} + \pi n \leqslant \alpha \leqslant \frac{3\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

г) $\frac{4\pi}{3} + 0{,}5\pi n \leqslant \alpha \leqslant \frac{3\pi}{2} + 0{,}5\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

32.32. Какие из указанных утверждений верны:

а) если $0 < \alpha < 1$, то a принадлежит I четверти;

б) если a принадлежит I четверти, то $0 < \alpha < 1$;

в) если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то a принадлежит II четверти;

г) если a принадлежит II четверти, то $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$?

32.33. Запишите множество чисел, соответствующих указанным на окружности точкам в виде дуг числовой окружности (рис. 26):

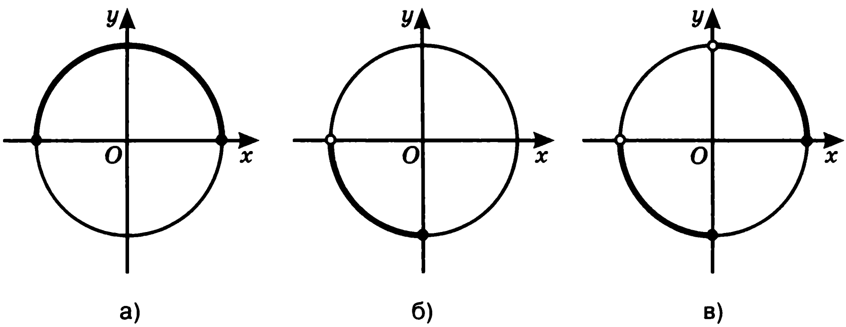


Рис. 26

32.34. Запишите множество чисел, соответствующих указанным на окружности точкам в виде дуг числовой окружности (рис. 27):

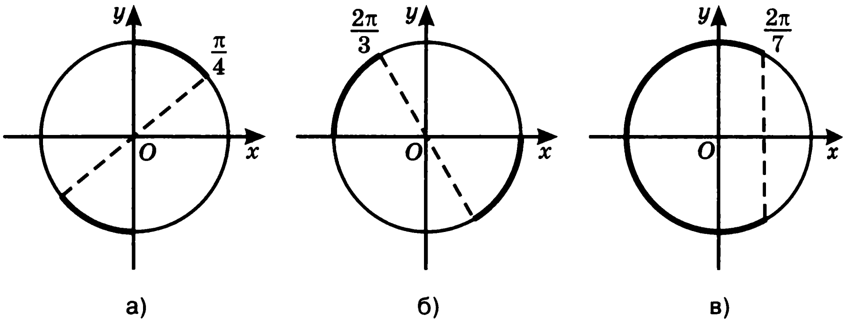


Рис. 27

32.35. Запишите множество чисел, соответствующих указанным на окружности точкам в виде дуг числовой окружности (рис. 28):

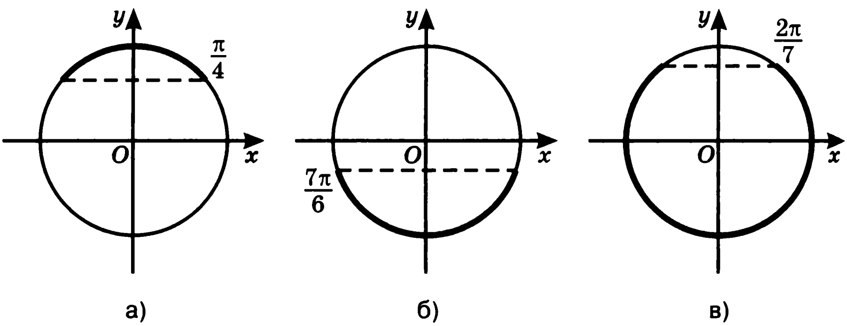


Рис. 28

32.36. Выпишите все числа, соответствующие точкам числовой окружности с ординатой, равной: а) 0; б) 1; в) –1; г) 0,5; д) –0,5; е) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; з) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

32.37. Выпишите все числа, соответствующие точкам числовой окружности с абсциссой, равной: а) 0; б) 1; в) –1; г) 0,5; д) –0,5; е) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; з) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

32.38. Точка A на окружности соответствует числу $\frac{2\pi}{3}$. Каким числам соответствует точка B, симметричная A, относительно центра окружности?

32.39. Точка A на окружности соответствует числу $\frac{4\pi}{5}$. Каким числам соответствует точка B, симметричная A, относительно диаметра окружности, проходящего через точку окружности, соответствующую числу 0?

32.40. Отрезки AB и CD — два диаметра числовой окружности, причем точка A соответствует числу 0, точка C соответствует числу $\frac{\pi}{2}$. Пусть точка M числовой окружности соответствует числу $\frac{3\pi}{7}$. Найдите все числа числовой окружности, соответствующие точке:

а) симметричной точке M относительно центра O числовой окружности;

б) симметричной точке M относительно прямой AB;

в) симметричной точке M относительно прямой CD;

г) симметричной точке M относительно биссектрисы угла AOC;

д) симметричной точке M относительно биссектрисы угла COB.

32.41. Каким числам соответствует точка, полученная поворотом точки M, соответствующей числу $\frac{5\pi}{7}$, на угол $\frac{3\pi}{14}$ вокруг начала координат против часовой стрелки?

32.42. Найдите не менее семи чисел из множества чисел вида $\frac{m\pi}{3}$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

32.43. Сколько различных точек на числовой окружности задает множество чисел:

а) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\frac{1}{3}(1 + k\pi)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

г) $\frac{\pi}{3} + 2k$, $k \in \boldsymbol{Z}$?

§ 33. ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

33.01. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $x^2 + y^2 = 1$;

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ xy \geqslant 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y \geqslant 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x - y \geqslant 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x - y\sqrt{3} < 0; \end{cases}$

з) $x = -\sqrt{1 - y^2}$;

и) $y = \sqrt{1 - x^2}$.

33.02. Решите систему уравнений графически и аналитически:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x = -0{,}6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = -0{,}96; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x - y = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x = -y\sqrt{3}; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x = 1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = 1; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + 2y = \sqrt{5}; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x = -1{,}6; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = 1{,}001; \end{cases}$

л) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = \sqrt{3}. \end{cases}$

33.03. Найдите ординаты точек числовой окружности, если их абсцисса равна:

а) 0,8; в) 1;

б) $-\sqrt{\frac{1}{13}}$; г) $\sqrt[3]{1,03}$.

33.04. Отметьте на числовой окружности точки, соответствующие числам вида:

а) $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; е) $\frac{5\pi}{9} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$;

б) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; ж) $\frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$;

в) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; з) $-\frac{\pi}{7} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$;

г) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; и) $-\frac{2\pi}{5} + \frac{k\pi}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$.

д) $\pm\frac{\pi}{5} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;

33.05. На числовой окружности заданы 10 точек, разбивающих ее на 10 равных дуг. Одна из этих точек соответствует числу $\frac{\pi}{8} + 2n\pi$, где n — некоторое целое число. Запишите множество всех чисел, соответствующих каждой из данных точек. Запишите множество всех чисел, соответствующих всем этим точкам.

33.06. На числовой окружности даны 360 точек, разбивающих окружность на 360 равных дуг. Одна из этих точек соответствует числу $\frac{\pi}{5}$. Найдется ли точка, соответствующая числу: а) 0; б) 1; в) $\frac{\pi}{10}$; г) $\frac{\pi}{7}$; д) $\frac{143\pi}{120}$? Запишите множество всех чисел, соответствующих всем этим точкам.

33.07. На числовой окружности отмечены 360 точек, разбивающих окружность на 360 равных дуг. Одна из этих точек соответствует числу $\frac{\pi}{9}$. Сколько точек имеют: а) положительную абсциссу; б) отрицательную ординату; в) абсциссу и ординату одного знака; г) положительные координаты; д) равные координаты?

33.08. На числовой окружности отмечены 360 точек, разбивающих окружность на 360 равных дуг. Одна из этих точек соответствует числу $\frac{\pi}{19}$. Сколько точек имеют:

а) положительную ординату;
б) отрицательную абсциссу;
в) абсциссу и ординату разных знаков;
г) отрицательные координаты;
д) координаты, равные по абсолютной величине?

33.09. Отметьте на числовой окружности и найдите декартовы координаты точек, соответствующих числам:

а) $0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}$;
б) $\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}$;
в) $\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6}$;
г) $\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}$.

33.10. На числовой окружности укажите хотя бы одну точку $M(x;\ y)$ и запишите все соответствующие ей числа, если:

а) $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} xy < 0, \\ x + y > 0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x = y, \\ x < 0; \end{cases}$
г) $\begin{cases} xy > 0, \\ x - y < 0; \end{cases}$
д) $\begin{cases} x + y = 0, \\ xy < 0; \end{cases}$
е) $xy = 0$.

33.11. Заполните таблицу по образцу:

Четверть	Числа, соответствующие точкам данной четверти	Абсцисса точек	Ордината точек	Отношение абсциссы к ординате
I				
II				
III	$\left(\pi + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$	Отрицательна	Отрицательна	Положительно
IV				

33.12. На числовой окружности укажите все точки и запишите соответствующие им числа, для которых:

а) абсцисса равна 0,5, а ордината положительна;

б) абсцисса равна 0,5, а ордината отрицательна;

в) ордината равна 0,5, а абсцисса положительна;

г) ордината равна 0,5, а абсцисса отрицательна.

33.13. На числовой окружности укажите все точки и запишите соответствующие им числа, для которых абсцисса равна:

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 0,5; д) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) –0,5;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 0; е) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) –1.

33.14. На числовой окружности укажите все точки и запишите соответствующие им числа, для которых ордината равна:

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 0,5; д) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) –0,5;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 0; е) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) –1.

33.15. На числовой окружности изобразите все точки, для которых:

а) ордината положительна и вдвое больше абсциссы;

б) абсцисса положительна и втрое больше ординаты;

в) ордината отрицательна и равна абсциссе, деленной на семь.

33.16. Пусть точка $A(x; y)$ принадлежит единичной окружности и соответствует числу 1. Докажите, что:

а) $x^2 + y^2 = 1$; в) $y \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $x - y < 0$; г) $0,1 < x < 0,5$.

33.17. Пусть точка $A(x; y)$ принадлежит единичной окружности и соответствует числу 1. Выразите через координаты x, y координаты точки B, соответствующей числу:

а) $1 + 2\pi$; в) $1 + \pi$;

б) $1 - 100\pi$; г) $1 - 7\pi$.

33.18. Пусть точка $A(x;\ y)$ принадлежит единичной окружности и соответствует числу 0,7. Выразите через координаты x, y координаты точки B, соответствующей числу:

а) $\frac{\pi}{2} - 0{,}7$;

б) $\frac{\pi}{2} + 0{,}7$;

в) $\frac{3\pi}{2} - 0{,}7$;

г) $\frac{3\pi}{2} + 0{,}7$.

33.19. Две разные точки числовой окружности имеют равные абсциссы. Найдите сумму ординат этих точек.

33.20. Две точки A и B лежат на числовой окружности. Найдите площадь треугольника OAB, если эти точки соответствуют числам:

а) $\frac{\pi}{7}$ и $\frac{13\pi}{42}$;

б) $\frac{15\pi}{7}$ и $\frac{13\pi}{42}$;

в) $\frac{\pi}{7}$ и $-\frac{29\pi}{42}$;

г) $\frac{29\pi}{7}$ и $-\frac{29\pi}{42}$.

33.21. Укажите наименьшее положительное и наибольшее отрицательное числа, которым на окружности соответствует точка с координатами:

а) $A(1;\ 0)$; б) $B(0;\ -1)$; в) $C(0;\ 1)$; г) $D(-1;\ 0)$.

33.22. Укажите наименьшее положительное и наибольшее отрицательное числа, которым на окружности соответствует точка с координатами:

а) $A(0{,}5;\ 0)$; б) $B(0;\ -0{,}5)$; в) $C(0;\ 0{,}5)$; г) $D(-0{,}5;\ 0)$.

33.23. Укажите наименьшее положительное и наибольшее отрицательное числа, которым на окружности соответствует точка с координатами:

а) $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$; б) $B\left(0;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; в) $C\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; г) $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$.

33.24. Укажите наименьшее положительное и наибольшее отрицательное числа, которым на окружности соответствует точка с координатами:

а) $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$; б) $B\left(0;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $C\left(0;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$.

33.25. Заполните таблицу по образцу:

	Число на числовой окружности								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Знак абсциссы соответствующей точки	+								
Знак ординаты соответствующей точки	+								

33.26. Найдите наименьшее двузначное натуральное число, если известно, что точка, соответствующая ему на числовой окружности, имеет отрицательные координаты.

33.27. Из приведенных ниже высказываний выберите верные:

а) любому действительному числу соответствует только одна точка на числовой окружности;

б) любой точке на числовой окружности соответствует только одно действительное число;

в) существует взаимнооднозначное соответствие между множеством точек числовой прямой и множеством точек числовой окружности.

33.28. Докажите, что для того, чтобы числам a и b соответствовала одна и та же точка на числовой окружности, необходимо и достаточно, чтобы отношение $\frac{a-b}{2\pi}$ было целым числом.

33.29. Выясните, какие из приведенных ниже высказываний верные:

а) среди точек четвертой четверти, лежащих на числовой окружности, нет ни одной точки, соответствующей некоторому натуральному числу;

б) среди точек четвертой четверти, лежащих на числовой окружности, бесконечно много точек, соответствующих некоторым разным натуральным числам;

в) среди чисел, удовлетворяющих неравенству

$$2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

где k — некоторое целое число, есть бесконечно много натуральных чисел;

г) среди чисел, удовлетворяющих неравенству

$$2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

где k — некоторое целое число, есть по крайней мере три простых числа.

33.30. Две разные точки M_1 и M_2 числовой окружности соответствуют числам t_1 и t_2. Какие значения может принимать сумма чисел t_1 и t_2, если:
а) ординаты точек M_1 и M_2 одинаковы;
б) абсциссы точек M_1 и M_2 одинаковы?

33.31. Две разные точки M_1 и M_2 числовой окружности соответствуют числам t_1 и t_2. Какие значения может принимать разность чисел t_1 и t_2, если координаты точек M_1 и M_2 пропорциональны?

33.32. В каких четвертях может лежать точка, соответствующая числу $2t$, если точка, соответствующая числу t, лежит: а) в первой; б) во второй; в) в третьей; г) в четвертой четвертях?

33.33. Заполните таблицу по указанному образцу:

Четверть, в которой лежит точка, соответствующая числу t	Четверть, в которой лежит точка, соответствующая числу							
	$\pi - t$	$\pi + t$	$\frac{\pi}{2} - t$	$\frac{\pi}{2} + t$	$\frac{3\pi}{2} - t$	$\frac{3\pi}{2} + t$	$-t$	$2\pi + t$
I	II							
II	I							
III	IV							
IV	III							

33.34. Укажите какое-нибудь число t, чтобы соответствующая ему точка на числовой окружности имела положительную абсциссу, а точка, соответствующая числу $2t$:
а) отрицательную абсциссу;
б) отрицательную ординату;
в) абсциссу, равную нулю;
г) ординату, равную нулю.

33.35. Укажите какое-нибудь число t, чтобы соответствующая ему точка на числовой окружности имела положительную ординату, а точка, соответствующая числу $0{,}5t$:
а) отрицательную абсциссу;
б) отрицательную ординату;
в) абсциссу, равную нулю;
г) ординату, равную нулю.

33.36. Укажите какое-нибудь число t, чтобы соответствующая ему точка на числовой окружности имела положительную абсциссу, а точка, соответствующая числу $t + \frac{\pi}{9}$:

а) отрицательную абсциссу;
б) отрицательную ординату;
в) абсциссу, равную нулю;
г) ординату, равную нулю.

33.37. Пусть точка P — начало отсчета на числовой окружности, а точка M соответствует числу t. Найдите длину каждой из дуг окружности, на которые точки P и M разбивают числовую окружность, если:

а) $t = 1$; в) $t = 6$; д) $t = -3$; ж) $t = 1000$;
б) $t = 4$; г) $t = 8$; е) $t = -22$; з) $t = -500$.

33.38. Найдите длину каждой из дуг, на которые разбивают числовую окружность точки, соответствующие числам t_1 и t_2, если:

а) $t_1 - t_2 = 1$; б) $t_1 - t_2 = 4$.

33.39. Какому наименьшему положительному числу соответствует на числовой окружности точка, соответствующая числу 11?

33.40. Какому наибольшему отрицательному числу соответствует на числовой окружности точка, соответствующая числу 10?

33.41. При каких значениях числа t на отрезке $[t - \pi; t + \pi]$ содержится: а) наибольшее количество натуральных чисел; б) наименьшее количество натуральных чисел?

33.42. Точка O на числовой окружности соответствует числу 0, а точка T — числу t. Какому числу будет соответствовать точка T, если точка O будет соответствовать числу:

а) π; б) $-\pi$; в) 1; г) α?

33.43. Точка P на числовой окружности соответствует числу p, а точка T — числу t. Какому числу будет соответствовать точка T, если точка P будет соответствовать числу:

а) 0; б) $p - t$; в) 1; г) α?

33.44. На рисунке изображены точки, которым соответствует множество чисел t (меньшая дуга). Изобразите числа, соответствующие множеству чисел:

а) $t + 2\pi$; в) $t + \frac{\pi}{6}$; д) $2t$;

б) $t + \pi$; г) $t - \frac{\pi}{4}$; е) $0{,}5t$.

33.45. Точка M числовой окружности соответствует числу t и имеет координаты (0; −1). Какие координаты будет иметь точка, соответствующая числу:

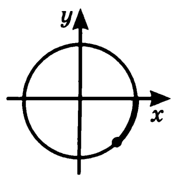
а) $t + \pi$; б) $t - \pi$; в) $t + \frac{\pi}{6}$; г) $t - \frac{\pi}{4}$?

33.46. Точка M числовой окружности соответствует числу t и имеет координаты $(x_0; y_0)$. Какие координаты будет иметь точка, соответствующая числу:

а) $t + \pi$; б) $t - \pi$; в) $t + \frac{\pi}{6}$; г) $t - \frac{\pi}{4}$?

33.47. Назовем число t из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *арксинусом* числа a, если соответствующая ему точка числовой окружности имеет ординату, равную a. Введем обозначение $t = \arcsin a$. Из определения следует, что $-1 \leqslant a \leqslant 1$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, а точка, соответствующая числу t, находится на дуге первой или четвертой четвертей или на их границах. Число $t = \arcsin a$ удобно считать *дугой* числовой окружности, начало которой находится в точке с координатами (1; 0). Об этом напоминает символ arc (от греч. *арка — дуга*).

Заполните таблицу и отметьте точки и дуги, соответствующие найденным числам, по указанному образцу:

a	0	0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	−0,5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1
$t = \arcsin a$							$-\frac{\pi}{4}$		
Дуга числовой окружности									

33.48. Найдите координаты точки, соответствующей числу:

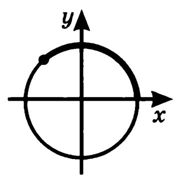
а) $\arcsin 1$; в) $\arcsin 0{,}8$; д) $\arcsin \frac{1}{5}$;

б) $\arcsin (-0{,}5)$; г) $\arcsin \frac{2}{3}$; е) $\arcsin \left(-\frac{5}{7}\right)$.

33.49. Докажите, что $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

33.50. Назовем число t из промежутка $[0; \pi]$ *арккосинусом* числа a, если соответствующая ему точка числовой окружности имеет абсциссу, равную a. Введем обозначение $t = \arccos a$. Из определения следует, что $-1 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, а точка, соответствующая числу t, находится на дуге первой или второй четвертей или на их границах. Число $t = \arccos a$, аналогично числу $\arcsin a$ удобно считать *дугой* числовой окружности, начало которой находится в точке с координатами (1; 0).

Заполните таблицу и отметьте точки и дуги, соответствующие найденным числам, по указанному образцу:

a	0	0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	−0,5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1
$t = \arccos a$							$\frac{3\pi}{4}$		
Точка на числовой окружности									

33.51. Найдите координаты точки, соответствующей числу:

а) $\arccos 1$;
б) $\arccos 0{,}5$;
в) $\arccos 0{,}8$;
г) $\arccos(-0{,}5)$;
д) $\arccos \frac{1}{5}$;
е) $\arccos\left(-\frac{5}{7}\right)$.

33.52. Докажите, что $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

33.53. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, катеты $AC = 3$, $BC = 4$. Выразите углы этого треугольника, используя символы arcsin и arccos.

33.54. Пусть в треугольнике ABC стороны $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Выразите углы этого треугольника, используя символы arcsin и arccos, если:

а) $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$;
б) $a = 3$, $b = 6$, $c = 8$;
в) $a = 15$, $b = 8$, $c = 17$.

33.55. С помощью циркуля и линейки постройте следующие углы и измерьте их транспортиром:

а) $\arcsin \frac{3}{5}$;

в) $\arccos \frac{4}{7}$;

б) $\arcsin \frac{2}{7}$;

г) $\arccos \left(-\frac{3}{5}\right)$.

§ 34. СИНУС И КОСИНУС. ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС

Синус и косинус

34.01. Заполните таблицу:

t / Функция	0	$0{,}5\pi$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos t$				
$\sin t$				

34.02. Заполните таблицу, записав для каждого приведенного значения $\cos t$ координаты соответствующей точки числовой окружности и все соответствующие этим точкам числа:

	Значение $\cos t$		
	1	0	−1
Координаты точки числовой окружности			
Соответствующие числа			

34.03. Заполните таблицу, записав для каждого приведенного значения $\sin t$ координаты соответствующей точки числовой окружности и все соответствующие этим точкам числа:

	Значение $\sin t$		
	1	0	−1
Координаты точки числовой окружности			
Соответствующие числа			

Используя числовую окружность, сравните с нулем число **(34.04—34.08)**:

34.04. а) $\cos 1$; б) $\cos 2$; в) $\cos 3$; г) $\cos \frac{732\pi}{5}$; д) $\cos \frac{109\pi(\sqrt{2}-1)^2}{21-14\sqrt{2}}$; е) $\cos 732$.

34.05. а) $\cos 1{,}6$; б) $\sin 3{,}14$; в) $\sin 3{,}143$; г) $\sin 7$; д) $\sin \frac{113\pi}{17}$; е) $\sin 237$.

34.06. а) $\cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4}$; б) $\cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{4}$; в) $\cos \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4}$; г) $\cos \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4}$; д) $\cos \frac{8\pi}{9} - \cos \frac{10\pi}{9}$; е) $\cos \frac{19\pi}{34} + \cos \frac{53\pi}{34}$; ж) $\sin \frac{8\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9}$; з) $\sin \frac{19\pi}{34} + \sin \frac{18\pi}{17}$.

34.07. а) $\cos 4 + \sin 4$;
б) $\cos 4 - \sin 4$;
в) $\cos 5 + \sin 5$;
г) $\cos 5 - \sin 5$;
д) $\cos 1{,}1 - \cos 1$;
е) $\cos 2{,}2 - \cos 2$;
ж) $\cos 4{,}4 - \cos 4$;
з) $\cos 5{,}5 - \cos 5$;
и) $\sin 15{,}2 - \sin 15$.

34.08. а) $\cos 12 \cdot \sin 21$;
б) $\cos 32 \cdot \sin 23$;
в) $\cos 31 \cdot \sin 13$;
г) $\cos 73 \cdot \sin 37$.

34.09. Являются ли верным неравенство:
а) $\cos(\sin 5) > 0$;
б) $\sin(\cos 5) < 0$;
в) $\cos(\sin t) > 0,\ t \in R$;
г) $\sin(\cos t) < 0,\ t \in R$?

34.10. Заполните таблицу:

t	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$
$\cos t$														
$\sin t$														

34.11. Запишите множество всех чисел t из промежутка $[0; 2\pi]$, для которых справедливо равенство:

а) $\sin t = 0$; в) $\sin t - \cos t = 0$;

б) $\cos t = 0$; г) $\sin t + \cos t = 0$.

34.12. Запишите множество всех чисел t, для которых справедливо равенство:

а) $\sin t = 0$; в) $\sin t - \cos t = 0$;

б) $\cos t = 0$; г) $\sin t + \cos t = 0$.

34.13. Запишите множество всех чисел t из промежутка $[0; 2\pi]$, для которых справедливо неравенство:

а) $\sin t > 0$; в) $\cos t \leqslant 0$;

б) $\sin t \leqslant 0$; г) $\cos t < 0$.

34.14. Запишите множество всех чисел t, для которых справедливо неравенство:

а) $\sin t > 0$; в) $\cos t \leqslant 0$;

б) $\sin t \leqslant 0$; г) $\cos t < 0$.

34.15. Запишите множество всех чисел t из промежутка $[0; 2\pi]$, для которых справедлива система неравенств:

а) $\begin{cases} \sin t > 0, \\ \cos t > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sin t < 0, \\ \cos t < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin t > 0, \\ \cos t < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin t < 0, \\ \cos t > 0. \end{cases}$

34.16. Запишите множество всех чисел t, для которых справедлива система неравенств:

а) $\begin{cases} \sin t > 0, \\ \cos t > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sin t < 0, \\ \cos t < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin t > 0, \\ \cos t < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin t < 0, \\ \cos t > 0. \end{cases}$

34.17. Запишите множество всех чисел t из промежутка $[0; 2\pi]$, для которых справедливо неравенство:

а) $\sin t - \cos t > 0$; в) $\sin t + \cos t \geqslant 0$;

б) $\sin t - \cos t \leqslant 0$; г) $\sin t + \cos t < 0$.

34.18. Запишите множество всех чисел t, для которых справедливо неравенство:

а) $\sin t - \cos t > 0$;
в) $\sin t + \cos t \geqslant 0$;
б) $\sin t - \cos t \leqslant 0$;
г) $\sin t + \cos t < 0$.

34.19. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражений:

а) $\sin t$;
д) $|\sin t|$;
б) $1 + 3\cos 2t$;
е) $4\cos^2 2t - 5$;
в) $5 - 7\sin 3t$;
ж) $2 - 3\sin 3t - \sin^2 3t$;
г) $\dfrac{2\sin t + 5}{7}$;
з) $\dfrac{2\cos t}{4 - 3\cos t}$.

34.20. Из чисел 0; $\frac{\pi}{10}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$; 2003π; 2004π выберите все те, для которых выполняется условие:

а) $\sin x = \sin 2x$;
в) $\begin{cases} \sin 2x = \sin x, \\ \cos 2x = \cos x; \end{cases}$
б) $\cos x = \cos 2x$;
г) $\sin 2x = 2\sin x$.

34.21. Расположите в порядке возрастания значения выражений $\sin x$; $\sin 3x$ и $3\sin x$ при x, равном: а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{5\pi}{6}$; д) $\frac{2\pi}{3}$. Например, для $x = \frac{\pi}{3}$ имеем неравенства $\sin 3x < \sin x < 3\sin x$.

34.22. Сравните сумму синусов чисел t_1 и t_2 и синус суммы этих же чисел при:

а) $t_1 = t_2 = \frac{\pi}{4}$;
г) $t_1 = \frac{\pi}{6}$; $t_2 = \frac{5\pi}{6}$;
б) $t_1 = 0$; $t_2 = \pi$;
д) $t_1 = \frac{\pi}{6}$; $t_2 = -\frac{\pi}{6}$.
в) $t_1 = t_2 = \frac{3\pi}{2}$;

34.23. Сравните значения выражений $\sin x$ и $\sqrt{1 - \cos^2 x}$ при:

а) $x = 1$;
б) $x = 4$;
в) $x = 10$.

34.24. Найдите $\sin \alpha$, если:

а) $\cos \alpha = 0{,}6$ и $2\pi < \alpha < 3\pi$;

б) $\cos \alpha = -0{,}8$ и $-3\pi < \alpha < -2\pi$;

в) $6 \cos^2 \alpha = 5 - \sin \alpha$ и $2\pi < \alpha < 3\pi$;

г) $6 \cos^2 \alpha = 5 + \sin \alpha$ и $-6\pi < \alpha < -5\pi$.

34.25. Найдите $\cos \alpha$, если:

а) $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ и $-3{,}5\pi < \alpha < -2{,}5\pi$;

б) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{15}$ и $\sin \alpha < 0$;

в) $12 \cos^2 \alpha = 11 - \sin \alpha$ и $-5{,}5\pi < \alpha < -5\pi$;

г) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 1{,}5$ и $1{,}5\pi < \alpha < 2\pi$.

34.26. Расположите в порядке убывания значения выражений $\sin x$; $\sin^2 x$ и $\sqrt{\sin x}$ при x, равном $\frac{\pi}{7}$.

34.27. Расположите в порядке убывания значения выражений $\sin x + \cos x$; $\sin^3 x + \cos^3 x$; 1 и $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ при x, равном: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{2\pi}{5}$.

34.28. Пусть a и b — два числа, удовлетворяющие неравенству $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$. Используя числовую окружность, сравните:

а) $\sin a$ и $\sin b$;

б) $\sin \frac{a+b}{2}$ и $\frac{\sin a + \sin b}{2}$;

в) $\cos a$ и $\cos b$;

г) $\cos \frac{a+b}{2}$ и $\frac{\cos a + \cos b}{2}$.

34.29. Решите неравенство:

а) $x^2 - \left(2 \sin \frac{\pi}{7} + 1\right)x + 2 \sin \frac{\pi}{7} < 0$;

б) $x^2 - \left(2 \cos \frac{\pi}{7} + 1\right)x + 2 \cos \frac{\pi}{7} < 0$.

34.30. Определите, какое из заданных чисел расположено на числовой прямой ближе к числу 1:

а) $\sin \frac{\pi}{5}$ или $\cos \frac{\pi}{5}$;

б) $\sin \frac{3\pi}{11}$ или $\cos \frac{3\pi}{11}$.

34.31. Докажите, что для всех значений t справедливо неравенство $\frac{1}{2} < \cos(\sin t) \leqslant 1$, и выясните, при каких значениях t выполняется равенство.

34.32. Значения углов, выраженные в градусах, составляют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 10°$, а $a_2 = 5°$. На единичную окружность нанесены точки, соответствующие миллиону первых членов прогрессии. Сколько точек отмечено на окружности?

34.33. Значения углов, выраженные в градусах, составляют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 0°$, а $a_2 = 19°$. На единичную окружность нанесены точки, соответствующие миллиону первых членов прогрессии. Сколько точек отмечено на окружности?

34.34. Значения углов, выраженные в градусах, составляют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 30°$, а $a_2 = 60°$. Найдите а) сумму косинусов первых 100 членов прогрессии; б) сумму синусов первых 1200 членов прогрессии.

34.35. Значения углов, выраженные в градусах, составляют арифметическую прогрессию. Найдите угол треугольника, лежащий против средней стороны.

34.36. Значения углов треугольника, выраженные в градусах, составляют арифметическую прогрессию с разностью 20°. Найдите угол треугольника, лежащий против большей стороны.

34.37. Рассматривается функция вида $f(x) = \sin(kx + b)$, $k \neq 0$, b — произвольные числа. При каких значениях параметров k и b нулями этой функции являются все члены прогрессии $x_n = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$, и только они?

34.38. Рассматривается функция вида $f(x) = \sin(kx + b)$, $k \neq 0$, b — произвольные числа. При каких значениях параметров k и b нулями этой функции являются все члены прогрессии $x_n = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$, и между двумя произвольными, но соседними членами этой прогрессии есть ровно один нуль этой функции?

34.39. Рассматривается функция вида $f(x) = \sin(kx + b)$, $k \neq 0$, b — произвольные числа. При каких значениях параметров k и b нулями этой функции являются все члены прогрессии $x_n = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, и между двумя произвольными, но соседними членами этой прогрессии есть ровно пять нулей этой функции?

34.40. Рассматривается функция вида $f(x) = \cos(kx + b)$, $k \neq 0$, b — произвольные числа. При каких значениях параметров k и b нули этой функции и члены прогрессии $y_n = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, перемежаются?

34.41. Длины сторон прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найдите тригонометрические функции меньшего его острого угла.

34.42. Пусть числа a_1, a_2, ... составляют арифметическую прогрессию. Найдите суммы:
а) $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^n a_n$;
б) $a_1 \cdot \sin 90° - a_2 \cdot \sin 180° + a_3 \cdot \sin 270° - a_4 \cdot \sin 360° + \ldots + (-1)^n a_n \cdot \sin(90° \cdot n)$.

34.43. Пусть числа a_1, a_2, ... составляют арифметическую прогрессию. Найдите суммы:
а) $\sin a_1 + \sin a_2 + \sin a_3 + \ldots + \sin a_n$;
б) $\cos a_1 + \cos a_2 + \cos a_3 + \ldots + \cos a_n$.

Тангенс и котангенс

34.44. Отметьте на числовой окружности и выпишите все значения t, при которых существует выражение:

а) $1 + \operatorname{tg} t$;
в) $\frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}$;
б) $2 - \operatorname{ctg} t$;
г) $\frac{1 + 3 \operatorname{ctg} t}{1 - \operatorname{ctg}^2 t}$.

34.45. Заполните таблицу:

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\operatorname{tg} t$					
$\operatorname{ctg} t$					

34.46. Заполните таблицу, записав для каждого приведенного значения $\operatorname{tg} t$ координаты соответствующей точки числовой окружности и соответствующие этим точкам числа:

	Значение $\operatorname{tg} t$		
	1	0	-1
Координаты точки числовой окружности			
Соответствующие числа			

34.47. Заполните таблицу, записав для каждого приведенного значения $\operatorname{ctg} t$ координаты всех точек числовой окружности и соответствующие этим точкам числа:

	Значение $\operatorname{ctg} t$		
	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
Координаты точки числовой окружности			
Соответствующие числа			

Используя числовую окружность, сравните каждое из приведенных чисел с нулем **(34.48, 34.49)**:

34.48. а) $\operatorname{ctg} 1$; в) $\operatorname{ctg} 3$; д) $\frac{105\pi(\sqrt{2}+1)^2}{12+8\sqrt{2}}$;

б) $\operatorname{ctg} 2$; г) $\operatorname{ctg}\frac{187\pi}{9}$; е) $\operatorname{ctg} 179$.

34.49. а) $\operatorname{tg} 1{,}6$; $\operatorname{tg} 1{,}6 < 0$;

б) $\operatorname{tg} 3{,}14$; $\operatorname{tg} 3{,}14 < 0$;

в) $\operatorname{tg} 3{,}145$; $\operatorname{tg} 3{,}145 > 0$;

г) $\operatorname{tg}\frac{1187\pi}{19}$; $\operatorname{tg}\frac{1187\pi}{19} > 0$;

д) $\operatorname{tg}\frac{113\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{10\sqrt{6}-25}$; $\operatorname{tg}\frac{113\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{10\sqrt{6}-25} > 0$;

е) $\operatorname{tg} 348$; $\operatorname{tg} 348 < 0$.

34.50. Пусть $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$.

34.51. Пусть $\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}7$. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$.

34.52. Найдите tg a, если $\sin a = -0{,}6$, а $\cos a < 0$.

34.53. Найдите ctg b, если $\cos b = -0{,}8$, а $\sin b < 0$.

34.54. Найдите tg v, если $\cos v = \frac{12}{13}$, а $\operatorname{ctg} v < 0$.

34.55. Найдите cos a, если $\operatorname{tg} a = -6$, а $\sin a < 0$.

34.56. Найдите sin p, если $\operatorname{ctg} p = -\frac{5}{12}$, а $\cos a < 0$.

34.57. Найдите ctg h, если $\sin h = -\frac{1}{3}$, а $\operatorname{ctg} h + \operatorname{tg} h > 0$.

34.58. Сравните $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$ при: а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; б) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; в) $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

34.59. Докажите, что $|\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha| \geqslant 2$ и найдите все значения α, при которых данное неравенство обращается в равенство.

34.60. Пусть $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$. Найдите:
а) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$;
б) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$;
в) $\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha$.

34.61. Пусть $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = -5$. Найдите:
а) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$;
б) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$;
в) $\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha$.

34.62. Пусть $\operatorname{ctg}^4 \beta + \operatorname{tg}^4 \beta = 14$. Какие значения может принимать выражение:
а) $\operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \beta$;
б) $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \beta$;
в) $\operatorname{tg}^3 \beta + \operatorname{ctg}^3 \beta$?

34.63. Какие значения может принимать выражение:
а) $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$;
б) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$;
в) $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha$;
г) $|\operatorname{tg} \alpha| + |\operatorname{ctg} \alpha|$;
д) $\dfrac{\cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \operatorname{ctg} \alpha}$;
е) $\left|\dfrac{\cos \alpha + \sin \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}\right|$?

34.64. Пусть $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 7$. Найдите:
а) $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha} + \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha}$;
б) $\sqrt[4]{\operatorname{tg} \alpha} + \sqrt[4]{\operatorname{ctg} \alpha}$.

34.65. Пусть $\sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \alpha} = 2$. Найдите $3 \operatorname{tg} \alpha + 5 \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

34.66. Пусть $\sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \alpha} = -2$. Найдите $5 \operatorname{tg}^3 \alpha + 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

34.67. Пусть $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 18$. Какие значения может принимать выражение $\sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \alpha}$?

34.68. Пусть $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 4$. Какие значения может принимать выражение $\sqrt[3]{\operatorname{ctg} \alpha} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha}$?

34.69. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если:

а) $\operatorname{ctg} \alpha = 6$;

б) $\dfrac{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}{5 \cos \alpha} = 5$;

в) $\dfrac{5 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}{7 \sin \alpha} = 11$;

г) $\dfrac{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha - 5 \cos \alpha} = 20$.

34.70. Какие значения может принимать $\operatorname{tg} \alpha$, если:

а) $\dfrac{\sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha}{5 \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha} = \dfrac{2}{5}$ и $-\dfrac{19\pi}{2} < \alpha < -9\pi$;

б) $\dfrac{\sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha}{8 \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} = 1$; $11 < \alpha < 12$;

в) $\dfrac{3 \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + 1}{8 \cos^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2} = \dfrac{19}{24}$; $-15\pi < \alpha < -\dfrac{29\pi}{2}$;

г) $\sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha = 1{,}4$?

34.71. Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 4x + \operatorname{tg} 3x$. Найдите:

а) $f(0)$; б) $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$; в) $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$; г) $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$; д) $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

34.72. Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 4x$. Найдите:

а) $f(0)$; б) $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$; в) $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$; г) $f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

34.73. Сравните значения выражений $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$ при:

а) $x = \dfrac{\pi}{6}$; б) $x = \dfrac{\pi}{3}$; в) $x = 7\pi$.

Решите неравенство (34.74, 34.75):

34.74. а) $x \cdot \operatorname{tg} 3 > \operatorname{tg} 3$;

б) $x \cdot \operatorname{ctg} 5 > 3 \operatorname{ctg} (5 + 17\pi)$;

в) $x \cdot (\operatorname{tg} 2 + \operatorname{ctg} 2) > (\operatorname{tg} 2 - \operatorname{ctg} (\pi - 2))$.

34.75. а) $x^2 + x \cdot (\operatorname{tg} 3 + \operatorname{ctg} 3) + 1 > 0$;

б) $x^2 + x(\operatorname{tg} 8 - \operatorname{ctg} 8) - 1 < 0$.

§ 35. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

35.01. Выразите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\sin\alpha$, если:
а) α — число первой четверти;
б) α — число второй четверти;
в) α — число третьей четверти;
г) α — число четвертой четверти.
Например, если α — число третьей четверти, то

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

35.02. Выразите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$, если:
а) α — число первой четверти;
б) α — число второй четверти;
в) α — число третьей четверти;
г) α — число четвертой четверти.

35.03. Проверьте равенство:
а) $\dfrac{1-\sin 11}{\cos 11} = \dfrac{\cos 11}{1+\sin 11}$;
б) $\dfrac{1-\sin t}{\cos t} = \dfrac{\cos t}{1+\sin t}$;
в) $\operatorname{ctg} 5 + \dfrac{\sin 5}{1+\cos 5} = \dfrac{1}{\sin 5}$;
г) $\operatorname{ctg} t + \dfrac{\sin t}{1+\cos t} = \dfrac{1}{\sin t}$.

Упростите выражение (35.04—35.08):

35.04. а) $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2$;
б) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{\operatorname{ctg} x}$.

35.05. а) $\sin t \operatorname{ctg} t$;
б) $\cos t \operatorname{tg} t$;
в) $(1+\operatorname{tg}^2 t)\cos^2 t$;
г) $(1+\operatorname{ctg}^2 t)\sin^2 t$;
д) $\dfrac{1-\sin^2 t}{1-\cos^2 t} + \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t$;
е) $\dfrac{3+\sin^2 t}{|\sin t - 2|} - \dfrac{3+\cos^2 t}{|\cos t - 2|}$.

35.06. а) $\sin^2 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^2 x(1 - \operatorname{tg} x)$;

б) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 t - \cos^2 t}{\operatorname{tg}^2 t - \sin^2 t}$;

в) $\dfrac{\cos t}{\cos t + \operatorname{tg} t \sin t} + \dfrac{\sin t}{\sin t + \operatorname{ctg} t \cos t}$;

г) $\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x)$.

35.07. а) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 t}$;

б) $(1 - \sin t \cos t \operatorname{tg} t) + \sin^2 t + 5$;

в) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} t + \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{ctg} t + \operatorname{ctg}^2 t}$;

г) $\dfrac{2\cos^2 t}{1 + \sin t} : \left(1 + \left(\dfrac{\cos t}{1 + \sin t}\right)^2\right)$.

35.08. а) $(3\sin x + 2\cos x)^2 + (2\sin x - 3\cos x)^2$;

б) $(3\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x)^2 - (3\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)^2$.

Докажите тождество **(35.09—35.12)**:

35.09. а) $1 + \sin t + \cos t + \operatorname{tg} t = (1 + \cos t)(1 + \operatorname{tg} t)$;

б) $\operatorname{ctg}^2 t - \cos^2 t = \operatorname{ctg}^2 t \cos^2 t$;

в) $\sin^4 t + \cos^4 t = 1 - 2\sin^2 t \cos^2 t$;

г) $\sin^6 t + \cos^6 t = 1 - 3\sin^2 t \cos^2 t$.

35.10. а) $\dfrac{1 + \operatorname{ctg} \alpha}{1 - \operatorname{ctg} \alpha} = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1}$;

б) $\dfrac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\operatorname{ctg}^2 t - \operatorname{tg}^2 t} = \sin^2 t \cos^2 t$;

в) $1 - 2\sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = \cos^2 t - \sin^2 t$;

г) $\operatorname{tg}^2 t - \sin^2 t = \operatorname{tg}^2 t \sin^2 t$.

35.11. а) $\dfrac{1 - 4\sin^2 t \cos^2 t}{(\sin t + \cos t)^2} = 1 - 2\sin t \cos t;$

б) $\dfrac{\sin^2 t - \cos^2 t + \cos^4 t}{\cos^2 t - \sin^2 t + \sin^4 t} = \operatorname{tg}^4 t;$

в) $\left(\dfrac{\sin^2 t}{\operatorname{tg}^2 t} + \dfrac{\cos^2 t}{\operatorname{ctg}^2 t} + \dfrac{\operatorname{ctg} t}{\operatorname{tg} t}\right)^{-1} = \sin^2 t;$

г) $\dfrac{1}{\sin t \cos t} + \dfrac{1}{\sin^2 t \cos^2 t} - 2 = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t + \operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t.$

35.12. а) $\dfrac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^6\alpha;$

б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha} = 1;$

в) $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y;$

г) $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}.$

35.13. Выразите заданное отношение двумя способами: через $\operatorname{tg} t$ и через $\operatorname{ctg} t$:

а) $\dfrac{\operatorname{ctg} t - \operatorname{tg} t}{\operatorname{ctg} t + \operatorname{tg} t};$

б) $\dfrac{\sin t - 2\cos t}{3\cos t + 4\sin t};$

в) $\dfrac{2\sin t \cos t}{\cos^2 t - \sin^2 t};$

г) $\dfrac{2\sin^2 t + 3\sin t \cos t - 5\cos^2 t}{6\cos^2 t - 7\sin^2 t}.$

35.14. Существует ли такое число α, что для некоторых чисел a и b выполняется равенство:

а) $\sin\alpha = 1 - (a^2 + b^2);$

б) $\sin\alpha = a + \dfrac{1}{a};$

в) $\cos\alpha = \dfrac{2ab}{a + b};$

г) $\cos\alpha = 1 + a^2 + b^2;$

д) $\sin\alpha + \cos\alpha = b + \dfrac{1}{b};$

е) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}?$

35.15. Найдите $\operatorname{tg} t$, если известно, что для некоторого действительного числа t выполняется равенство:

а) $\dfrac{\sin t + 2\cos t}{4\cos t} = 1;$

б) $\dfrac{\cos t - \sin t}{4\sin t + 7\cos t} = 2.$

35.16. Пусть $\operatorname{tg} t = u$. Вычислите значение выражения:

а) $6\sin^2 t + 11\cos^2 t;$

б) $2\sin^2 t - 3\sin t \cos t + 4\cos^2 t;$

в) $\sin^4 t;$

г) $\cos^4 t;$

д) $\sin t \cos t;$

е) $\sin^3 t \cos t.$

35.17. Пусть α — угол первой четверти. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha}}} = \frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}}.$$

35.18. Докажите $\left(\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)^2 = 4\operatorname{tg}^2\alpha.$

35.19. Упростите выражение $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}.$

Упростите выражение для указанных значений переменной (**35.20, 35.21**):

35.20. а) $\sqrt{1-\sin^2 t} + \cos t,\ t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right);$

б) $\sqrt{1-\sin^2 t} + \cos t,\ t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right);$

в) $\sqrt{\sin^{-2} t - \operatorname{ctg}^2 t + \cos^2 t - 1} - \sqrt{\cos^{-2} t - \operatorname{tg}^2 t + \sin^2 t - 1},$

$t \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right);$

г) $\sqrt{\sin^2 t(1 - 2\operatorname{ctg} t) + 4\cos^2 t(1 - 0{,}5\operatorname{tg} t)},\ t \in \left(-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right).$

35.21. а) $\sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}} + \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}},\ t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right);$

б) $\sqrt{\frac{\cos^{-2} t - 1}{\cos^{-2} t - \operatorname{tg}^2 t}} + \sqrt{\frac{\sin^{-2} t - 1}{\sin^{-2} t - \operatorname{ctg}^2 t}},\ t \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right);$

в) $\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}} - \sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}},\ t \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right).$

Сравнение значений тригонометрических функций

35.22. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$, $\sin 4$, $\sin 5$, $\sin 6$;

б) $\cos 1$, $\cos 2$, $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 5$, $\cos 6$;

в) $\sin 7$, $\sin 8$, $\sin 9$, $\sin 10$, $\sin 11$, $\sin 12$;

г) $\cos 17$, $\cos 18$, $\cos 19$.

35.23. Сравните с нулем произведение:

а) $\sin 1 \sin 2 \sin 3 \sin 4$;

б) $\cos 1 \cos 2 \cos 3 \cos 4 \cos 5$;

в) $\sin 5 \sin 6 \sin 7 \sin 8 \sin 9 \sin 10$;

г) $\cos 6 \cos 7 \cos 8 \cos 9 \cos 10 \cos 11 \cos 12$;

д) $\sin 2000 \cos 2000$;

е) $(2 \operatorname{tg} 2 + 3)(4 \operatorname{ctg} 5 - 6)$.

35.24. Найдите все значения α, если:

а) $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha > 0$;

б) $\cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha < 0$;

в) $\sin \alpha \cos \alpha > 0$;

г) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha > 0$.

35.25. Докажите, что при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ справедливо неравенство:

а) $\sin \alpha < \operatorname{tg} \alpha$;

б) $\cos \alpha < \operatorname{ctg} \alpha$.

35.26. Сравните числа:

а) $\sin \frac{5}{8}$ и $\frac{1}{2}$;

б) $\sin 1$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\cos \frac{5}{8}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin 1$ и $\frac{1}{2}$.

35.27. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $1 + \sin x$;

б) $1 - |\cos x|$;

в) $2 - 5 \sin x$;

г) $\big|1 - 2|\cos x|\big|$;

д) $\dfrac{1}{1 + \cos^2 x}$;

е) $\dfrac{2 - \sin x}{3 \sin x + 4}$;

ж) $3 \sin^2 t + 6 \sin t - 9$;

з) $3 \cos t - 4 \sin^2 t + 5$;

и) $4 \operatorname{tg}^2 t - \operatorname{tg}^4 t + 2$, $t \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$.

35.28. Докажите неравенство:

а) $1 < \sin 1 + \cos^2 1 < 1{,}25$;

б) $-\frac{5}{4} < \operatorname{tg} \frac{15}{7} + \cos^{-2} \frac{15}{7} < -1$;

в) $2 < 2 \sin^2 1{,}2 + \cos 1{,}2 < \frac{17}{8}$;

г) $3 + 4 \operatorname{ctg} t + \sin^2 t \leqslant 6$, где $t \in \boldsymbol{R}$.

35.29. Определите количество точек с координатами $(x;\ y)$, лежащих в круге радиусом R с центром в начале координат, для которых справедливо равенство:

а) $2 + \sin^2 \pi x = 2\cos^2 \frac{\pi y}{2}$, $R = 8$;

б) $\sqrt{\cos^2 \pi y - 1} = \cos^2 \frac{\pi x}{2}$, $R = 5$;

в) $\left|\sin \pi y\right| + \left|2\cos \pi x - 1\right| = 0$, $R = 3$;

г) $\left|2\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2}\right| + \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{4}} - 2\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}} = 0$, $R = 4$.

Разные задачи

35.30. Пусть t — некоторое действительное число.

1. Докажите, что существует такое число $0 < \tau(t) < 2\pi$, что $\sin t = \cos\left(t + \tau(t)\right)$.
2. Найдите значение $\tau(t)$ для следующих значений t: 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$.
3. Получите зависимость величины $\tau(t)$ для всех $t \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Постройте график зависимости $y = \min\{\tau(t)\}$ для всех $t \in [0;\ \pi]$.

35.31. 1. Докажите, что существуют такие числа t и $\tau(t)$, что $0 < \tau(t) < \pi$ и $\sin t = \operatorname{tg}\left(t + \tau(t)\right)$.

2. Найдите все значения $t \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, для каждого из которых существует число $\tau(t) \in (0;\ \pi)$ такое, что $\sin t = \operatorname{tg}(t + \tau(t))$.
3. Найдите число $\tau(t)$ для следующих значений t: 0, $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$.
4. Получите зависимость величины $\tau(t)$ для всех $t \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.
5. Постройте график зависимости $y = \min\{\tau(t)\}$ для всех $t \in \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

§ 36. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛОВОГО АРГУМЕНТА

36.01. Какой угол в течение 5 ч описывает: а) часовая стрелка; б) минутная стрелка; в) секундная стрелка?

36.02. Колесо машины за 2 с делает 6 оборотов. На сколько градусов повернется колесо за 1 с; за 10 с; за одни сутки?

36.03. Зубчатое колесо имеет 72 зубца. На сколько градусов повернется колесо при обороте на 1; 30; 144; 300; k зубцов?

36.04. Зубчатое колесо имеет m зубцов. На сколько градусов повернется колесо при обороте на 1; k зубцов?

36.05. Начертите положение подвижного радиуса единичной (тригонометрической) окружности для угла, равного 45°; 75°; 2200°; 300°; 5000°.

36.06. Переведите градусную меру угла в его радианную меру:

180°	90°	45°	30°	60°	5°	115°	0°	360 030°	–80°	0,01°	1°	0,1°

36.07. Переведите радианную меру угла в его градусную меру:
π; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{18}$; $1\frac{7}{90} \cdot \pi$.

36.08. Переведите радианную меру угла в его градусную меру:

$\frac{\pi}{24}$	$\frac{24}{\pi}$	–1	0,5	2	2,5	$\sqrt{10}$

36.09. При помощи микрокалькулятора заполните таблицу (с точностью до одной сотой):

	Градусная мера угла α													
	10°	18°	40°	72°	89°	100°	108°	153°	162°	190°	198°	252°	272°	288°
$\sin\alpha$														
$\cos\alpha$														
$\operatorname{tg}\alpha$														
$\operatorname{ctg}\alpha$														

Подумайте, почему некоторые значения повторяются по несколько раз.

36.10. При помощи микрокалькулятора заполните таблицу (с точностью до одной сотой):

	Значение угла					
	arcsin 0,5	arcsin 0,2	arccos 0,7	arccos (–0,3)	arctg 2	arcctg $\sqrt{3}$
Приближенное значение угла (в радианах)						
Соответствующая градусная мера угла						

36.11. Рассмотрите равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 1, и получите значения всех тригонометрических функций угла 45°.

36.12. Рассмотрите правильный треугольник со стороной, равной 1, и получите значения всех тригонометрических функций углов 30° и 60°.

36.13. Рассмотрите равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами $AB = AC = 1$ и углом при вершине A, равным 36° (рис. 29). Убедитесь, что основание BC этого треугольника равно $2 \sin 18°$. Пусть BD — биссектриса ΔABC. Докажите, что $\Delta BDC = \Delta ABC$ и найдите значение $\sin 18°$.

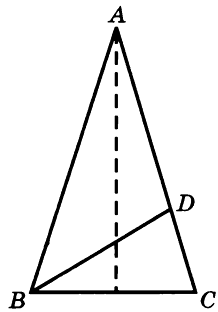


Рис. 29

36.14. Найдите значения всех тригонометрических функций углов 18°, 36°.

Определите знак разности **(36.15—36.17)**:

36.15. а) $\sin 35° - \sin 45°$; б) $\sin 100° - \sin 125°$; в) $\sin 222° - \sin 223°$; г) $\sin 189° - \sin 25°$; д) $\sin 157° - \sin 287°$; е) $\sin 1000° - \sin 2000°$.

36.16. а) $\cos 35° - \cos 45°$; б) $\cos 100° - \cos 125°$; в) $\cos 222° - \cos 223°$; г) $\cos 189° - \cos 25°$; д) $\cos 157° - \cos 287°$; е) $\cos 1000° - \cos 2000°$.

36.17. а) $\operatorname{ctg} 35° - \operatorname{ctg} 45°$;
б) $\operatorname{tg} 100° - \operatorname{tg} 125°$;
в) $\operatorname{ctg} 222° - \operatorname{ctg} 223°$;
г) $\operatorname{tg} 189° - \operatorname{tg} 25°$;
д) $\operatorname{tg} 157° - \operatorname{tg} 287°$;
е) $\operatorname{ctg} 1000° - \operatorname{ctg} 2000°$.

36.18. Запишите радианную меру всех внутренних углов:
а) правильного треугольника;
б) квадрата;
в) правильного 90-угольника;
г) равнобедренного треугольника, величина одного из углов которого в 3 раза больше величины другого угла;
д) равнобедренного треугольника, величина одного из углов которого является квадратом величины каждого из двух других углов.

36.19. Используя микрокалькулятор, найдите радианные меры всех углов треугольника ABC, указав три верных десятичных знака после запятой, если:
а) $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$;
б) $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$;
в) $AB = 2$, $AC = 3$, $\angle A = 2$;
г) $AB = 2$, $AC = 3$, $\angle B = 2$;
д) $AB = 2$, $AC = 3$, $\angle C = 1$;
е) $AB = 2$, $AC = 3$, $S_{ABC} = 0{,}7$, где S_{ABC} — площадь треугольника ABC.

36.20. Рассматриваются всевозможные произведения вида

$$\sin 1° \cdot \sin 2°;\ \sin 1° \cdot \sin 2° \cdot \sin 3°;\ \ldots;$$
$$\sin 1° \cdot \sin 2° \cdot \sin 3° \cdot \ldots \cdot \sin n°,$$

где n — натуральное число. Определите:
а) при каком наименьшем значении n это произведение равно нулю;
б) при каком наименьшем значении n это произведение принимает отрицательное значение;
в) все значения n, при которых это произведение равно нулю.

36.21. Рассматриваются всевозможные произведения вида

$$\cos 1° \cdot \cos 2°;\ \cos 1° \cdot \cos 2° \cdot \cos 3°;\ \ldots;$$
$$\cos 1° \cdot \cos 2° \cdot \cos 3° \cdot \ldots \cdot \cos n°,$$

где n — натуральное число. Определите:
а) при каком наименьшем значении n это произведение равно нулю;
б) при каком наименьшем значении n это произведение принимает отрицательное значение;
в) все значения n, при которых это произведение равно нулю.

36.22. Рассматриваются всевозможные суммы вида

$$\sin 1° + \sin 2°;\ \sin 1° + \sin 2° + \sin 3°;\ \ldots;$$
$$\sin 1° + \sin 2° + \sin 3° + \ldots + \sin n°,$$

где n — натуральное число. Определите:

а) при каком наименьшем значении n эта сумма равна нулю;

б) при каком наименьшем значении n эта сумма принимает отрицательное значение;

в) все значения n, при которых эта сумма равна нулю.

36.23. Используя условие задачи 36.22, докажите, что при любом значении n:

а) данная сумма меньше 179;

б) данная сумма меньше 150.

36.24. Рассматриваются всевозможные суммы вида

$$\cos 1° + \cos 2°;\ \cos 1° + \cos 2° + \cos 3°;\ \ldots;$$
$$\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \ldots + \cos n°,$$

где n — натуральное число. Определите:

а) при каком наименьшем значении n эта сумма равна нулю;

б) при каком наименьшем значении n эта сумма принимает отрицательное значение;

в) все значения n, при которых эта сумма равна нулю.

36.25. Используя условие задачи 36.24, докажите, что при любом значении n: а) данная сумма меньше 89; б) данная сумма меньше 74.

36.26. Вычислите сумму квадратов синусов всех углов, градусные меры которых — натуральные числа от 1 до 90.

36.27. Вычислите сумму квадратов косинусов всех углов, градусные меры которых — натуральные числа от 1 до 180.

36.28. Вычислите произведение тангенсов всех углов, градусные меры которых — натуральные числа от 91 до 179.

36.29. Вычислите произведение котангенсов всех углов, градусные меры которых — натуральные числа от 191 до 273.

36.30. Найдите все значения натурального числа n, при которых произведение $(1 - \mathrm{tg}\ 1°)(1 - \mathrm{tg}\ 2°)(1 - \mathrm{tg}\ 3°) \cdot \ldots \cdot (1 - \mathrm{tg}\ n°)$ равно нулю.

36.31. Сколько существует таких натуральных чисел n, что произведение $(\operatorname{ctg} 23^\circ - \sqrt{3})(\operatorname{ctg} 24^\circ - \sqrt{3})(\operatorname{ctg} 25^\circ - \sqrt{3}) \times \ldots \times (\operatorname{ctg} n^\circ - \sqrt{3}) = 0$?

36.32. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = \sqrt{\sin^2 107^\circ - x^2}$;   б) $y = \sqrt{\cos^2 117^\circ - x^2}$.

36.33. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = (\sin 31^\circ)x^2 - 2x + 3$;

б) $y = (\sin 269^\circ)x^2 - 2x - 5$;

в) $y = x^2 - (3 \sin 70^\circ - 2 \cos 119^\circ)x - 6 \cos 20^\circ \sin 29^\circ$;

г) $y = -x^2 + (\cos 20^\circ + \operatorname{tg} 200^\circ)x - \sin 20^\circ$.

36.34. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = 5 + x \cos 100^\circ$;

б) $y = 11 - 2x \sin 12^\circ + x^2 \cos 12^\circ$;

в) $y = 1 + 2x \sin 123^\circ + x^2 \cos 123^\circ$;

г) $y = x^2 \cos 275^\circ - 2x \sin 275^\circ - \cos 275^\circ$.

36.35. Определите расположение нулей функции $y = x^2 \cos 200^\circ - 2x \sin 200^\circ - \cos 200^\circ$ относительно точек ± 1.

36.36. Из точки, отстоящей на расстоянии a метров от основания башни, имеющей форму цилиндра, верхушка башни видна под углом α. Найдите формулу для определения высоты башни.

36.37. Горная дорога поднимается на 1 м на каждые s метров пути. Найдите формулу для определения угла подъема дороги.

36.38. Человек, пройдя вверх по склону холма 1050 м, поднялся на 90 м над плоскостью основания холма. Определите средний угол наклона холма.

36.39. Строение отбрасывает тень длиною в 45 м. Определите высоту солнца, если высота строения 30 м.

36.40. В полдень при высоте солнца 28° башня отбрасывает тень длиною в 76 м. Определите высоту башни.

36.41. Какова высота солнца в то время, когда: а) длина тени от стоящего человека равна половине его роста; б) длина тени от стоящего человека равна его росту; в) длина тени от стоящего человека вдвое больше его роста?

36.42. Докажите зависимость $\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\alpha$ между углами α и β, образуемыми шатуном $AB = l$ и кривошипом $OA = r$ с горизонтальной плоскостью (рис. 30).

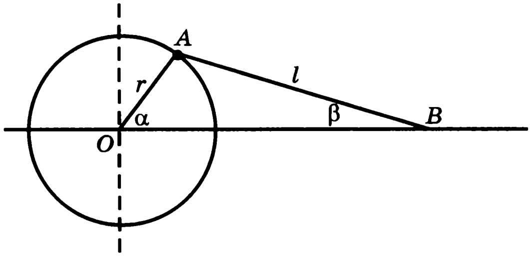


Рис. 30

§ 37. ФУНКЦИИ $y = \sin x$, $y = \cos x$, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

37.01. Используя числовую окружность, объясните, что для любого значения x и для любого целого k справедливо равенство:

а) $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$;
б) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$;
в) $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$;
г) $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x$.

37.02. Пусть y_0 — некоторое значение функции $y = \sin x$. Используя числовую окружность, покажите, что существует бесконечно много таких значений x, что $\sin x = y_0$.

37.03. Решите задачу 37.02 для функций $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$.

Найдите все такие значения x, что **(37.04—37.07)**:

37.04. а) $\sin x = \sin 21°$;
б) $\cos x = \cos 21°$;
в) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 21°$;
г) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 21°$.

37.05. а) $\sin x = \sin(a°)$;
б) $\cos x = \cos(a°)$;
в) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(a°)$;
г) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(a°)$.

37.06. а) $\sin x = \sin 1$;
б) $\cos x = \cos 2$;
в) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3$;
г) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 4$.

37.07. а) $\sin x = \sin a$; в) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$;
б) $\cos x = \cos a$; г) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a$.

37.08. Используя числовую окружность для функции $y = \sin x$, $x \in [-\pi; \pi]$, определите:
а) нули функции;
б) множество значений функции;
в) промежутки знакопостоянства;
г) точки экстремумов и экстремумы функции;
д) промежутки монотонности функции;
е) обладает ли функция свойством четности или нечетности;
ж) выше или ниже расположен график функции $y = \sin x$ относительно прямых $y = x$ и $y = \frac{2x}{\pi}$ на отрезке $[-\pi ; \pi]$.

37.09. Используя числовую окружность для функции $y = \cos x$, $x \in [-\pi; \pi]$, определите:
а) нули функции;
б) множество значений функции;
в) промежутки знакопостоянства;
г) точки экстремумов и экстремумы функции;
д) промежутки монотонности функции;
е) обладает ли функция свойством четности или нечетности;
ж) выше или ниже расположен график функции $y = \cos x$ относительно прямых $y = \pm 1$ и $y = \frac{\pi}{2} \pm x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.
Постройте график функции $y = \cos x$, $x \in [-\pi; \pi]$, и объясните, что графиком функции $y = \cos x$ является синусоида.

37.10. Используя числовую окружность для функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, определите:
а) нули функции;
б) промежутки знакопостоянства;
в) точки экстремумов и экстремумы функции;
г) промежутки монотонности функции;
д) обладает ли функция свойством четности или нечетности;
е) расположение графика функции относительно прямой $y = x$. Постройте график функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

37.11. Используя числовую окружность для функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$, определите:

а) нули функции;

б) промежутки знакопостоянства;

в) точки экстремумов и экстремумы функции;

г) промежутки монотонности функции;

д) обладает ли функция свойством четности или нечетности;

е) расположение графика функции относительно прямой $y = \frac{\pi}{2} - x$ на интервале $(0; \pi)$.

Постройте график функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x(-\pi; 0) \cup (0; \pi)$ и объясните, что графиком функции $y = \operatorname{ctg} x$ является тангенсоида.

37.12. Для всех допустимых значений x постройте графики тригонометрической функции и выясните, имеет ли построенный график ось и/или центр симметрии:

а) $y = \sin x$;

б) $y = \cos x$;

в) $y = \operatorname{tg} x$;

г) $y = \operatorname{ctg} x$.

Найдите множество значений и постройте график функции (**37.13—37.15**):

37.13. а) $y = 2 \sin x - 1$;

б) $y = 1 - 5 \cos x$;

в) $y = 2 - \operatorname{tg} x$;

г) $y = 1 + \operatorname{ctg} x$.

37.14. а) $y = |\sin x| + \sin x$;

б) $y = 0,25(|\cos x| - \cos x)$;

в) $y = |\operatorname{ctg} x| \operatorname{tg} x$;

г) $y = 1 + \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}$;

д) $y = 2 \cos x - \frac{|\sin x|}{\sin x}$;

е) $y = \sin x - \sqrt{\cos^2 x - 1}$.

37.15. а) $y = \frac{|\sin x|}{\sin x} \cos x$;

б) $y = \frac{|\cos x|}{\cos x} \sin x$.

Постройте график функции (37.16, 37.17):

37.16. а) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = -2\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

37.17. а) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$; б) $y = -\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

37.18. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = \dfrac{\sin x - 3}{\sin x + 4}$; в) $y = \sin^2 x - 2\sin x - 3$;

б) $y = \dfrac{2\cos x + 3}{3\cos x + 2}$; г) $y = \sqrt{12 + \cos x - \cos^2 x}$.

37.19. На координатной плоскости xy отметьте все точки $(x;\, y)$ такие, что:

а) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 2, \end{cases}$ $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$;

б) $\begin{cases} x = 1, \\ y = \cos t, \end{cases}$ $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

в) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = -1, \end{cases}$ $-\frac{\pi}{2} < t \leqslant 0$;

г) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $0 \leqslant t < 2\pi$;

е) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$ $0 \leqslant t < 4\pi,\ a > 0$.

37.20. Определите множество значений функции:

а) $y = \pi\left(0{,}25 + \dfrac{2}{2 + x^2}\right)$; б) $f(x) = \cos\left(0{,}25\pi + \dfrac{2\pi}{2 + x^2}\right)$.

37.21. Докажите, что существуют такие числа a и b, что $|a - b| < 0{,}1$ и:

а) $\sin\frac{1}{a} = \sin\frac{1}{b} = 0$;

б) $\sin\frac{1}{a} = \sin\frac{1}{b} = 1$;

в) $\sin\frac{1}{a} = \sin\frac{1}{b} = -1$;

г) $\sin\frac{1}{a} = \sin\frac{1}{b} = q,\ 0 < |q| < 1$.

37.22. Постройте эскиз графика функции:

а) $y = \sin\frac{\pi}{x}$;

б) $y = \cos\frac{\pi}{x}$;

в) $y = \sin\left(x^2\right)$;

г) $y = \cos\left(\sqrt{x}\right)$.

ГЛАВА **8**

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 38. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СУММЫ И РАЗНОСТИ АРГУМЕНТОВ

38.01. Выведите формулу синуса суммы двух острых углов α и β, используя рисунок 31 и равенство

$$S_{ABC} = S_{ABH} + S_{ACH},$$

где буквой S обозначена площадь соответствующего треугольника.

38.02. Выведите формулу синуса разности двух углов, используя результат задачи 38.01.

38.03. Выведите формулу косинуса суммы двух острых углов α и β таких, что $0 < \alpha + \beta < 90°$, используя рисунок 32 и следующую последовательность равенств:

1) $AC = a$, $AD = a\cos\alpha$, $BD = a\sin\alpha\cos\beta$;

2) $BC = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$, $CH = a\cos(\alpha + \beta)$;

3) $AB = AD + DB$, $BH = BC + CH$, $BH = AB\cos\beta$.

38.04. Выведите формулу косинуса разности двух углов, используя результат задачи 38.03.

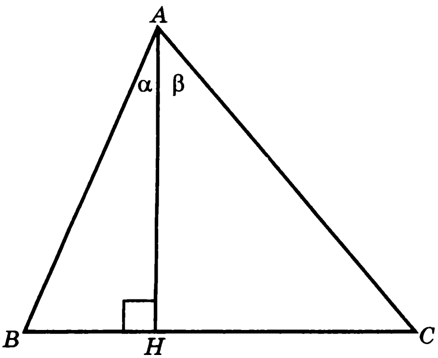


Рис. 31

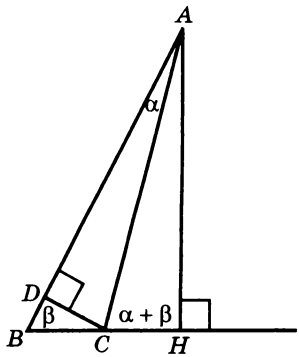


Рис. 32

38.05. Докажите следующие полезные *формулы дополнительных углов*:

а) $\sin(180^\circ - t) = \sin t$;
в) $\sin(90^\circ - t) = \cos t$;

б) $\cos(180^\circ - t) = -\cos t$;
г) $\cos(90^\circ - t) = \sin t$.

38.06. Пусть A, B, C — углы треугольника. Используя задачу 38.05, докажите тождества:

а) $\sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A$;

б) $\cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B$;

в) $\operatorname{tg} C = \dfrac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B - 1}$.

38.07. Используя формулы синуса и косинуса суммы и разности двух углов, получите формулы тангенса и котангенса суммы и разности двух углов.

Выразите через квадратные радикалы **(38.08, 38.09)**:

38.08. $\sin 15^\circ$; $\cos 15^\circ$; $\sin 75^\circ$; $\cos 75^\circ$; $\sin 105^\circ$; $\cos 105^\circ$.

38.09. $\operatorname{tg} 15^\circ$; $\operatorname{ctg} 15^\circ$; $\operatorname{tg} 105^\circ$.

38.10. Вычислите:

а) $(\cos 27^\circ \cos 3^\circ - \sin 27^\circ \sin 3^\circ)\sqrt{3}$;

б) $\dfrac{\sin 14^\circ \cos 31^\circ + \sin 31^\circ \cos 14^\circ}{\sqrt{2}}$;

в) $\dfrac{\sin 43^\circ \cos 17^\circ - \sin 17^\circ \cos 137^\circ}{\sqrt{3}}$;

г) $\dfrac{\sin 43^\circ \cos 17^\circ - \sin 163^\circ \cos 137^\circ}{\sqrt{3}}$.

38.11. Упростите выражение $(\cos 1 + \cos 2)^2 + (\sin 1 - \sin 2)^2 - 2 \cos 3$.

Докажите тождество **(38.12—38.15)**:

38.12. а) $\sin \alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right)$;

б) $\cos \alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right)$;

в) $\sin \alpha = \sin(x + \alpha) \cos x - \cos(x + \alpha) \sin x$;

г) $\cos \alpha = \cos(x + \alpha) \cos x + \sin(x + \alpha) \sin x$.

38.13. а) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta) + 2\cos\alpha \sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta);$

б) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha \sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta).$

38.14. а) $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta;$

б) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta;$

в) $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta;$

г) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\sin\beta.$

38.15. а) $\cos t \cos 3t - \cos 4t = \sin 3t \sin t;$

б) $\sin 5t \cos 3t - \sin 2t = \sin 3t \cos 5t.$

38.16. Для каждого значения x сравните следующие выражения:

а) $\sin(289^\circ + x)\cos x$ и $\cos(289^\circ + x)\sin x;$

б) $\cos(189^\circ - x)\cos x$ и $\sin(189^\circ - x)\sin x.$

38.17. При каких значениях параметра a данное неравенство выполняется при любых значениях x:

а) $\sin(a + x)\cos x > \cos(a + x)\sin x;$

б) $\cos(a - x)\cos x < \sin(a - x)\sin x?$

38.18. Подберите какое-нибудь положительное и какое-нибудь отрицательное число x такое, что:

а) $\cos 73^\circ \cos x^\circ - \sin 73^\circ \sin x^\circ = 0{,}5;$

б) $\cos 155^\circ \sin x^\circ + \sin 25^\circ \cos x^\circ = 1;$

в) $\dfrac{\operatorname{tg}(17^\circ - x^\circ) + \operatorname{tg} 43^\circ}{1 - \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg}(17^\circ - x^\circ)} = 1;$

г) $\dfrac{\operatorname{tg}(107^\circ - x^\circ) + \operatorname{tg} 73^\circ}{1 - \operatorname{tg} 73^\circ \operatorname{tg}(107^\circ - x^\circ)} = \sqrt{3}.$

38.19. Найдите наибольшее отрицательное и наименьшее положительное значения x (в градусах) такие, что:

а) $\cos 32^\circ \cos x - \sin 32^\circ \sin x = -0{,}5;$

б) $\cos 145^\circ \sin x - \sin 35^\circ \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}};$

в) $\dfrac{\operatorname{tg}(117^\circ - x) + \operatorname{tg} 63^\circ}{1 - \operatorname{tg} 63^\circ \operatorname{tg}(117^\circ - x)} = -\sqrt{3}$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}(7^\circ - x) + \operatorname{tg} 173^\circ}{1 - \operatorname{tg} 173^\circ \operatorname{tg}(7^\circ - x)} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

38.20. Вычислите значение выражения:

а) $(\sin 10^\circ \cos 50^\circ + \sin 50^\circ \cos 10^\circ)^4$;

б) $(\cos 17^\circ \cos 28^\circ + \sin 17^\circ \sin 152^\circ)^4$;

в) $\left(\dfrac{\operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 183^\circ}{1 - \operatorname{tg} 63^\circ \operatorname{tg} 3^\circ}\right)^6$;

г) $\left(\dfrac{\operatorname{tg} 47^\circ + \operatorname{tg} 182^\circ}{1 + \operatorname{tg} 47^\circ \operatorname{tg} 2^\circ}\right)^4$.

38.21. Найдите $\cos(a + 30^\circ)$, если $\operatorname{ctg} a = 4\sqrt{3}$ и

а) $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$; б) $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2}$.

38.22. Пусть $\cos(x + y) = a$, $\cos(x - y) = b$. Найдите:

а) $\cos x \cos y$; б) $\sin x \sin y$; в) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

38.23. Пусть $\sin(x + y) = a$, $\sin(x - y) = b$. Найдите:

а) $\sin x \cos y$; б) $\sin y \cos x$; в) $\operatorname{ctg} x \operatorname{tg} y$.

38.24. Найдите $\cos(x + y)$ и $\cos(x - y)$, если $\sin x \sin y = 0{,}5$ и $\cos x \cos y = -0{,}5$.

38.25. Докажите, что не существует ни одной пары $(x; y)$ такой, что $\sin x \cos y = 1$ и $\cos x \sin y = -0{,}5$.

38.26. Известно, что $\sin \alpha = 0{,}6$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите:

а) $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

б) $\cos\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

38.27. Известно, что $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0{,}6$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Найдите:

а) $\sin \alpha$; б) $\cos \alpha$.

38.28. Известно, что $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) = -0{,}1$ и $\dfrac{5\pi}{12} < \alpha < \dfrac{11\pi}{12}$. Найдите:

а) $\sin \alpha$; б) $\operatorname{tg} \alpha$.

38.29. Докажите, что:

а) $\cos a + \sin a \operatorname{tg} b = \dfrac{\cos(a - b)}{\cos b}$;

б) $\cos a - \sin a \operatorname{tg} b = \dfrac{\cos(a + b)}{\cos b}$;

в) $\cos a + \cos a \operatorname{ctg} b = \dfrac{\sin(a + b)}{\sin b}$;

г) $\cos a - \cos a \operatorname{ctg} b = \dfrac{\sin(a - b)}{\sin b}$.

38.30. Известно, что $\sin\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Докажите, что при любом натуральном значении n, меньшем 31, числа $\sin\dfrac{n\pi}{60}$ либо рациональны, либо выражаются через квадратные радикалы. Например, при $n = 30$ имеем $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ — рациональное число, а при $n = 20$ имеем $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ — число выражено через квадратный радикал.

§ 39. ФОРМУЛА ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО УГЛА

39.01. Преобразуйте выражение, используя формулу синуса суммы и синуса разности углов:

а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t$;

б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin t + \dfrac{1}{2}\cos t$;

в) $\sqrt{2}(\sin t + \cos t)$;

г) $\sqrt{3}\sin t + \cos t$;

д) $\dfrac{3}{5}\sin t - \dfrac{4}{5}\cos t$;

е) $3\sin t - 4\cos t$.

39.02. Преобразуйте выражения из задачи 39.01 по формуле косинуса суммы и косинуса разности углов.

39.03. Докажите формулу вспомогательного угла: если $ab \neq 0$, то

$$a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2 + b^2}\cdot\sin(t + \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2}\cdot\cos(t - \beta),$$

где $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

$\sin\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\cos\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

39.04. Докажите формулу вспомогательного угла: если $ab \neq 0$, то

$$a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(t - \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(t + \beta),$$

где $\sin\alpha = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

$\sin\beta = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\cos\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения выражений (39.05, 39.06):

39.05. а) $\cos x - \sin x$;

б) $\cos x + \sin x$;

в) $|\sin x + \cos x|$;

г) $5\cos x - 12\sin x$.

39.06. а) $\cos x - 2\sin x - 1$;

б) $3\cos\dfrac{x}{2} + 4\sin\dfrac{x}{2} - 5$;

в) $|5\sin x + 12\cos x - 17|$;

г) $|7\cos 3x - 24\sin 3x| + 15$.

39.07. Постройте график функциий:

а) $y = 4\sqrt{3}\cos x - 4\sin x$;

б) $y = |\sin x - \cos x|$;

в) $y = 3\cos x + 4\sin x$;

г) $y = 2\cos x - \sin x$.

39.08. Вычислите:

а) $\dfrac{\sin 38^\circ - \cos 38^\circ}{\sqrt{2}\sin 7^\circ}$;

б) $\dfrac{\sin 17^\circ - \sqrt{3}\cos 17^\circ}{2\cos 47^\circ}$;

в) $\dfrac{\sin 377^\circ - \sqrt{3}\cos 17^\circ}{\cos 407^\circ}$;

г) $\dfrac{\sin 752^\circ + \cos 392^\circ}{\sqrt{2}\sin 437^\circ}$.

39.09. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $f(x) = 2\cos x - 5\sin x$;

б) $f(x) = 4\cos x + 3\sin x - 5$;

в) $f(x) = 1 + x + \sqrt{1 - x^2}$;

г) $f(x) = 24x - 7\sqrt{1 - x^2}$.

39.10. Докажите неравенство $3\cos x - 5\sin x \leqslant \sqrt[3]{210}$.

39.11. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство выполняется при всех значениях x:

а) $4\cos x + 3\sin x \leqslant a$;

б) $a\sin x + \cos x < 2$.

39.12. Используя циркуль и линейку, укажите на числовой окружности точки, для которых справедливо равенство:

а) $\cos t + 2\sin t = \sqrt{5}$;

б) $\sin t - 3\cos t = \sqrt{2{,}5}$.

39.13. Найдите хотя бы одно значение x (в градусах), для которого выполняется равенство:

а) $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\sin 3x$;

б) $\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = 2\cos 8x$;

в) $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\sin 4x$;

г) $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = 2\cos x$.

39.14. Представьте сумму в виде произведения:

а) $\sin t + \cos t + 5\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\sin t - \cos t + \sqrt{34}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$.

39.15. Найдите наименьшее значение выражения $\sin t - \sqrt{3}\cos t + 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} - t\right)$.

39.16. Найдите все значения c, при которых наибольшее значение функции $f(x)$ равно заданному числу M:

а) $f(x) = \sin 5x + \cos 5x + c,\quad M = 10$;

б) $f(x) = 4\sin\frac{x}{3} - 3\cos\frac{x}{3} - c,\quad M = 50$.

39.17. Найдите все значения c, при которых наименьшее значение функции $f(x)$ равно заданному числу m:

а) $f(x) = \sin 5x + \cos 5x + c,\quad m = 0$;

б) $f(x) = 4\sin\frac{x}{3} - 3\cos\frac{x}{3} - c,\quad m = -10$.

39.18. Найдите все значения c, при которых наибольшее значение функции $f(x)$ равно наименьшему значению функции $\varphi(x)$:

а) $f(x) = 7 \sin 5x - 24 \cos 5x - 1 + c$, $\varphi(x) = 3 - 2 \cos 4x$;

б) $f(x) = 9 \sin \frac{x}{3} - 12 \cos \frac{x}{3} - 5 - c$, $\varphi(x) = 2 + 7 \sin \frac{4x}{7}$.

§ 40. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

40.01. Точка числовой окружности соответствует углу $\beta = 5678°$. Определите угол α, соответствующий той же точке, если: а) $\alpha \in (-180°; 180°]$; б) $\alpha \in [0; 360°)$.

40.02. Решите задачу 40.01 для следующих углов β: 1300°; 2450°; 3642°.

40.03. Приведите к углу меньше чем 45° и выразите значения через квадратные радикалы:

а) $\operatorname{tg} 6960°$; в) $\operatorname{ctg} 1560°$;

б) $\sin 12\,345°$; г) $\cos 1575°$.

40.04. Пусть $0 < \alpha < 90°$. Используя определения тригонометрических функций острого угла, докажите равенство:

а) $\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$; в) $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$;

б) $\cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$; г) $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

40.05. Пусть α — произвольное число. Отметьте на числовой окружности точки, соответствующие числам $\frac{\pi}{2} + \alpha$; $\pi + \alpha$; $\frac{3\pi}{2} + \alpha$, и убедитесь в справедливости следующих формул приведения:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$; е) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$; ж) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$; з) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$;

г) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$; и) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$.

д) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$;

40.06. Пусть α — произвольное число. Отметьте на числовой окружности точки, соответствующие числам $(-\alpha)$; $\frac{\pi}{2} - \alpha$; $\pi - \alpha$; $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, и убедитесь в справедливости следующих формул приведения:

а) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$;

б) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

в) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$;

г) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$;

д) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$;

е) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$;

ж) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$;

з) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;

и) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$;

к) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$;

л) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$;

м) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$.

40.07. Получите несколько формул приведения из задач 40.02 и 40.03, используя формулы синуса, косинуса и тангенса суммы и разности двух углов.

40.08. Приведите к углу меньше чем 45° и вычислите с помощью калькулятора: а) $\sin 12\,345°$; б) $\operatorname{tg} 6789°$.

40.09. Найдите $\sin\alpha$, если $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\frac{19\pi}{6} = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ и

а) $0 < \alpha < \pi$; б) $-3\pi < \alpha < -2\pi$.

40.10. Определите $\cos\alpha$, если

$$3\sin^2(360° - \alpha) - 7\sin(\alpha - 90°) - 5 = 0.$$

40.11. Определите $\operatorname{tg}\alpha$, если

$$4\sin(2\pi - \alpha)\cos(\pi - \alpha) - \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 4\sin^2(16\pi - \alpha).$$

40.12. Определите $\operatorname{ctg}\alpha$, если

$$5\sin(12\pi + \alpha)\cos(7\pi + \alpha) + \sin^2\left(\frac{31\pi}{2} + \alpha\right) = 6\cos^2\left(\frac{53\pi}{2} + \alpha\right)$$

и угол α лежит: а) во второй четверти; б) в третьей четверти.

40.13. Используя значения тригонометрических функций в точках $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$, вычислите:

а) $\sin\frac{33\pi}{4} + \cos\frac{22\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{19\pi}{6}$;

б) $\sin\frac{125\pi}{6} - \cos\frac{15\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{320\pi}{3}$;

в) $\sin 570° - \cos 855° + \operatorname{ctg} 1020°$;

г) $\sin 480° \operatorname{tg} 495° \cos 1290°$.

Например,

$$\operatorname{tg}\frac{17\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$

40.14. Докажите, что если $a + b = \frac{\pi}{2}$, то:

а) $\sin a = \cos b$;

б) $\cos a = \sin b$;

в) $\operatorname{tg} a = \operatorname{ctg} b$;

г) $\operatorname{ctg} a = \operatorname{tg} b$.

40.15. Вычислите:

а) $\sin^2 57° + \sin^2 33° + \operatorname{tg} 17° \operatorname{tg} 73°$;

б) $\dfrac{\sin 23° \cos 33° \operatorname{tg} 43°}{\sin 57° \cos 67° \operatorname{ctg} 37°}$;

в) $\sin 14° \sin 74° + \sin 76° \sin 16°$;

г) $\dfrac{\sin 71° + \sin 19°}{\cos 71° + \cos 19°}$;

д) $\dfrac{\sin 17° + \cos 17°}{\sqrt{2} \cos 28°}$;

е) $\dfrac{\sqrt{3} \sin 27° - \cos 27°}{\sin 3°}$.

40.16. Постройте график функции:

а) $y = \sin^2(3\pi + 5x) + \sin^2\left(\frac{17\pi}{2} - 5x\right)$;

б) $y = \sin^2\left(\frac{\pi(1 - x)}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

40.17. Докажите, что если $a + b = \pi$, то:

а) $\sin a = \sin b$;

б) $\cos a = -\cos b$.

40.18. Вычислите:

а) $\sin^2 57° + \cos^2 123° + \operatorname{ctg} 18° \operatorname{tg} 162°$;

б) $\dfrac{\sin 23° \cos 33° \operatorname{tg} 9°}{\sin 157° \cos 147° \operatorname{ctg} 81°}$;

в) $\sin 166° \cos 74° + \cos 104° \sin 16°$;

г) $\left(\dfrac{\sin 17° - \cos 163°}{\cos 152°}\right)^4$.

40.19. Докажите, что если $a + b = 1{,}5\pi$, то:

а) $\sin a = -\cos b$; б) $\cos a = -\sin b$.

40.20. Постройте график функции:

а) $y = \sin^2\left(\dfrac{\pi(1 - x)}{2}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\pi(2 - x)}{2}\right) - \dfrac{2\sin(\pi - x)}{\sin x}$;

б) $y = \cos^2\left(\dfrac{3\pi(1 + x)}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{3\pi(2 + x)}{2}\right) - \dfrac{2\cos(\pi - x)}{\sin\left(\dfrac{7\pi}{2} + x\right)}$.

40.21. Найдите значение функции в точке x_0:

а) $f(x) = \sin(\pi - x)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{19\pi}{2} - x\right)\sin^2(x + 24\pi)$,
$x_0 = \dfrac{\pi}{11}$;

б) $f(x) = \cos(\pi + x)\sin\left(\dfrac{15\pi}{2} + x\right) -$
$- \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{19\pi}{2} - x\right)\cos^2\left(x - \dfrac{23\pi}{2}\right)$,
$x_0 = \dfrac{3\pi}{14}$.

Упростите выражение (40.22, 40.23):

40.22. а) $\cos\left(\dfrac{17\pi}{2} - x\right) + \sin(2\pi - 2x)\sin\left(3x + \dfrac{3\pi}{2}\right) -$
$- \sin\left(2x - \dfrac{19\pi}{2}\right)\sin(14\pi + 3x)$;

б) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} + x\right) - \cos(4\pi - 4x)\sin\left(\dfrac{9\pi}{2} - 3x\right) +$
$+ \sin(4x - \pi)\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

40.23. а) $\dfrac{\sin^3(x - 270°)\cos(360° - x)}{\operatorname{tg}^3(x - 90°)\cos^3(270° - x)}$;

б) $\dfrac{2\cos(90° - x)\sin(90° + x)\operatorname{tg}(180° - x)}{\operatorname{ctg}(90° + x)\sin(180° - x)}$.

40.24. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \left|\sin(3\pi + 2x)\cos(5\pi - x) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + 2x\right)\sin(-x) - 1\right|$$

и постройте ее график.

§ 41. ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА. ФОРМУЛЫ КРАТНОГО АРГУМЕНТА. ФОРМУЛЫ ПОНИЖЕНИЯ СТЕПЕНИ

41.01. Выпишите формулы $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$. Замените β на α и выведите формулы синуса и косинуса двойного аргумента.

41.02. Выразите $\cos 2\alpha$ только: а) через $\sin \alpha$; б) через $\cos \alpha$.

41.03. Верна ли формула $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$? Если верна, то докажите ее, если не верна, то объясните почему.

41.04. Выведите формулу тангенса и котангенса двойного аргумента.

41.05. Выразите:

а) $\cos 14\alpha$ и $\sin 14\alpha$ через $\cos 7\alpha$ и $\sin 7\alpha$, а $\operatorname{tg} 14\alpha$ через $\operatorname{tg} 7\alpha$;

б) $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ через $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$, а $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

в) $\cos\frac{3\alpha}{7}$ и $\sin\frac{3\alpha}{7}$ через $\cos\frac{3\alpha}{14}$ и $\sin\frac{3\alpha}{14}$, а $\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{7}$ через $\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{14}$;

г) $\cos(\alpha(\sqrt{3} - 1))$ и $\sin(\alpha(\sqrt{3} - 1))$ через $\cos\frac{\alpha}{\sqrt{3} + 1}$ и $\sin\frac{\alpha}{\sqrt{3} + 1}$.

41.06. Какие значения могут принимать $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$?

41.07. Какие значения могут принимать $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha$?

41.08. Докажите, что если $\sin\alpha = 0$, то $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$.

41.09. Докажите, что если $\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, то $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha$.

41.10. Какие значения может принимать $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha$?

41.11. Какие значения может принимать $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{ctg} 2\alpha = 2\operatorname{ctg}\alpha$?

41.12. Докажите, что если $\operatorname{tg}\alpha = 0$, то $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha$.

41.13. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что:
а) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$;
б) $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha$;
в) $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha$.

41.14. Пусть $\cos 2\alpha + \cos\alpha = 0$. Найдите $\cos\alpha$, если:
а) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;
б) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
в) $-\frac{5\pi}{2} < \alpha < -2\pi$.

41.15. Пусть $\cos 2\alpha + \sin\alpha = 0$. Найдите $\sin\alpha$, если:
а) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;
б) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
в) $-\frac{5\pi}{2} < \alpha < -2\pi$.

41.16. Выпишите формулы $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$. Замените β на 2α и, используя результаты задачи 41.01, выведите формулы тройного аргумента.

41.17. Выведите формулу тангенса и котангенса тройного аргумента.

41.18. Сформулируйте какое-либо необходимое и достаточное условие того, что:

а) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha$;

б) $\cos 3\alpha = 3 \cos \alpha$;

в) $\operatorname{tg} 3\alpha = 3 \operatorname{tg} \alpha$.

41.19. Выпишите формулы $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$. Замените β на 3α и, используя результаты задачи 41.02, выведите формулы синуса и косинуса учетверенного аргумента.

41.20. Сформулируйте какое-либо необходимое и достаточное условие того, что $\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha$.

41.21. Выразите $\cos 5\alpha$ и $\sin 5\alpha$ через $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$.

41.22. Выразите $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma)$ через тангенсы углов α, β, γ.

41.23. Верна ли формула $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$? Если формула верна, то докажите ее, если не верна, то объясните почему.

41.24. Найдите значения тригонометрических функций числа 2γ, если γ — число второй четверти и $\cos \gamma = -0{,}6$.

41.25. Пусть $f(x) = \cos x$ и $f(a) = \frac{1}{3}$. Вычислите $f(2a)$, $f(4a)$, $f(8a)$.

41.26. Пусть $\alpha \neq \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Выразите $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

41.27. Пусть $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{4}$. Найдите $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\operatorname{tg} \beta$.

41.28. Пусть $\sin 4\alpha = -\frac{24}{25}$, $-\pi < 4\alpha < -\frac{\pi}{2}$. Найдите

а) $\operatorname{ctg} 2\alpha$; б) $\operatorname{tg} \alpha$.

41.29. Пусть $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$. Найдите $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

41.30. Выразите $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

41.31. Найдите $\sin\frac{\alpha - \pi}{2}$ и $\cos\frac{\alpha + \pi}{2}$, если:

а) $\cos\alpha = -0{,}1,\quad -\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$;

б) $\cos\alpha = 0{,}2,\quad -2\pi < \alpha < -\frac{3\pi}{2}$.

41.32. Пусть $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$ и $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$. Найдите $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

41.33. Пусть $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Найдите $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

41.34. Пусть $\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = a$. Найдите $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

41.35. Пусть $\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = a$. Найдите $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

Вычислите (41.36—41.38):

41.36. а) $4\sin\frac{7\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}\left(\cos^4\frac{5\pi}{12} - \sin^4\frac{5\pi}{12}\right)$;

б) $\left(\frac{\sin 21^\circ}{\sin 7^\circ} - \frac{\cos 21^\circ}{\cos 7^\circ}\right)(\operatorname{ctg} 165^\circ - \operatorname{tg} 165^\circ)$;

в) $4\sin\frac{17\pi}{12}\cos\frac{17\pi}{12}\left(\cos^6\frac{3\pi}{8} - \sin^6\frac{3\pi}{8}\right)$;

г) $\left(\frac{\sin 63^\circ}{\sin 21^\circ} - \frac{\cos 63^\circ}{\cos 21^\circ}\right)(\operatorname{ctg} 105^\circ - \operatorname{tg} 105^\circ)$.

41.37. а) $\left(\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}\right)\left(\cos^3\frac{5\pi}{12} + \sin^3\frac{5\pi}{12}\right)$;

б) $\left(\cos\frac{21\pi}{8} + \sin\frac{21\pi}{8}\right)\left(\cos^3\frac{21\pi}{8} - \sin^3\frac{21\pi}{8}\right)$.

41.38.

а) $\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^6\frac{\pi}{8} + \sin^6\frac{\pi}{8}$;

б) $\left(\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^4\frac{\pi}{12} - \sin^4\frac{\pi}{12} + \cos^6\frac{\pi}{12} - \sin^6\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}$.

41.39. Сравните числа:

а) 0,5 и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$;
в) 0,25 и $\sin\frac{\pi}{12}$;

б) 3 и $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$;
г) 0,2 и $\cos\frac{5\pi}{12}$.

41.40. Пусть $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Выразите $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

41.41. Выразите $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ через квадратные радикалы.

41.42. Считая заданным отрезок длины 1, постройте циркулем и линейкой отрезки, равные $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

41.43. Докажите, что для любого числа a найдется такое число b, что $\frac{\sin b}{1 + \cos b} = a$.

41.44. Докажите, что для любого числа a найдется такое число b, что $\frac{1 - \cos b}{\sin b} = a$.

41.45. Найдите хотя бы одно значение α из интервала (3; 9), для которого выполняется равенство:

а) $\cos\alpha + \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = 0$;

б) $\cos\alpha + \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = 2\cos\alpha$;

в) $\sin\alpha + \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = 0$;

г) $\sin\alpha + \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = 2\sin\alpha$.

41.46. Обозначим символом $\arcsin a$ такое число, заключенное в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, что $\sin(\arcsin a) = a$. Найдите $\cos(2\arcsin a)$, $\sin(2\arcsin a)$ и $\operatorname{tg}(2\arcsin a)$.

41.47. Обозначим символом $\arccos a$ такое число, заключенное в промежутке $[0; \pi]$, что $\cos(\arccos a) = a$. Найдите $\cos(2 \arccos a)$, $\sin(2 \arccos a)$ и $\operatorname{tg}(2 \arccos a)$.

41.48. Обозначим символом $\operatorname{arctg} a$ такое число, заключенное в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$. Найдите $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} a)$, $\sin(2 \operatorname{arctg} a)$ и $\cos(2 \operatorname{arctg} a)$.

41.49. Обозначим символом $\operatorname{arcctg} a$ такое число, заключенное в промежутке $(0; \pi)$, что $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$. Найдите $\operatorname{ctg}(2 \operatorname{arcctg} a)$, $\sin(2 \operatorname{arcctg} a)$, $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arcctg} a)$ и $\cos(2 \operatorname{arcctg} a)$.

41.50. Может ли число $\cos a$ быть иррациональным, а число $\cos 2a$ рациональным? Если может, то приведите пример, если не может, то объясните почему.

41.51. Может ли число $\cos 2a$ быть иррациональным, а число $\cos a$ рациональным? Если может, то приведите пример, если не может, то объясните почему.

41.52. Могут ли одновременно числа $\cos a$, $\sin a$ быть иррациональными, а число $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ рациональным? Если могут, то приведите пример, если не могут, то объясните почему.

41.53. Упростите $\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha \cdot \ldots \cdot \cos (2^{n-1}\alpha)$, где $\alpha \ne k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. Чему равно указанное произведение, если $\alpha = k\pi$?

41.54. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $f(x) = 5 - \cos x + \cos 2x$;

б) $f(x) = 2 + \sin x + 3 \cos 2x$;

в) $f(x) = 7 + 4 \sin x - 4 \sin x \cos^2 x + \sin 3x$;

г) $f(x) = 4 \cos^3 x - \cos 3x + \cos 2x + 1$.

41.55. Найдите все значения c, при которых наибольшее значение функции равно M:

а) $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x + c$, $M = 8$;

б) $f(x) = \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x - 1 - c$, $M = 10$.

§ 42. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММУ И СУММЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

42.01. Используя формулы для $\cos(x \pm y)$, получите формулы для преобразования в сумму следующих произведений: $\sin x \sin y$ и $\cos x \cos y$.

Вычислите (42.02, 42.03):

42.02. а) $2 \sin 78° \sin 42° - \cos 36°$;

б) $2 \cos 13° \cos 58° - \sin 19°$;

в) $2 \sin 139° \sin 101° + \cos 218°$;

г) $\sin 5° \sin 10° - \cos 35° \cos 40°$.

42.03. а) $2 \sin 41° \sin 19° - \cos 22°$;

б) $2 \cos 91° \cos 54° - \sin 36°$;

в) $2 \sin 101° \sin 49° + \sin 325°$;

г) $\cos 29° \cos 332° - \sin 74° \sin 134°$.

42.04. Используя формулы для $\sin(x \pm y)$, получите формулы для преобразования в сумму произведения $\sin x \sin y$ и $\cos x \cos y$.

Вычислите (42.05, 42.06):

42.05. а) $2 \sin 28° \cos 17° - \sin 11°$;

б) $2 \sin 38° \cos 7° - \cos 59°$;

в) $2 \sin 101° \cos 49° + \sin 232°$;

г) $\sin 129° \cos 201° - \sin 171° \cos 99°$.

42.06. а) $\sin(30° - 2t)\cos(30° + 2t) + \sin(45° + 2t)\cos(2t - 45°)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{11\pi}{12} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right)$;

в) $\sin\left(60° + \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 60°\right) +$

$+ \sin 330° \sin(x + y)$;

г) $\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{a}{2} + \frac{x}{2}\right) -$

$- \sin\left(\frac{7\pi}{8} + \frac{x}{2} - \frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} - \frac{a}{2}\right)$.

42.07. Докажите важные *формулы понижения степени*:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}; \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

42.08. Выразите $\sin^4 x + \cos^4 x$ через:

а) $\cos 2x$; б) $\sin 2x$; в) $\cos 4x$.

42.09. Найдите $\sin^6 t + \cos^6 t$, если $\sin 2t = s$.

42.10. Найдите $\sin^8 t + \cos^8 t$, если $\sin 2t = s$.

42.11. Используя результаты задач 42.01, 42.04, преобразуйте в сумму следующие произведения:

а) $\sin x \sin y \sin z$; в) $\sin x \cos y \cos z$;

б) $\sin x \cos y \sin z$; г) $\cos x \cos y \cos z$.

42.12. Докажите, что для любых чисел a и b существует единственная пара чисел x и y таких, что $\begin{cases} x - y = a, \\ x + y = b. \end{cases}$

42.13. Используя формулы сложения и результат задачи 42.12, представьте в виде произведения тригонометрических функций сумму:

а) $\sin a + \sin b$; в) $\cos a + \cos b$;

б) $\sin a - \sin b$; г) $\cos a - \cos b$.

Представьте в виде произведения или частного тригонометрических функций выражение **(42.14—42.16)**:

42.14. а) $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$; г) $\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b$;

б) $\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b$; д) $\operatorname{ctg} a + \operatorname{tg} b$;

в) $\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b$; е) $\operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} b$.

42.15. а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$;

б) $\sin x + \sin 2x - \sin 3x - \sin 4x$;

в) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x$;

г) $\cos^2 x - \cos^2 2x + \cos^2 3x - \cos^2 4x$.

42.16. а) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$;

б) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

42.17. Вычислите:

а) $\dfrac{\sin\frac{7\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{7\pi}{18} - \cos\frac{\pi}{9}}$; б) $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{18} - \sin\frac{2\pi}{9}}{\cos\frac{5\pi}{18} - \cos\frac{2\pi}{9}}$.

42.18. Изобразите на координатной плоскости все точки $(x;\ y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $2\sin(x + y)\cos x = \sin y$;

б) $\cos\dfrac{x(y-1)}{2}\cos\dfrac{x(y+1)}{2} = \cos^2\dfrac{x}{2}$.

42.19. Сравните заданные числовые выражения:

а) $\dfrac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ}$ и $\dfrac{\cos 1^\circ}{\cos 2^\circ}$; в) $\cos 1 \sin 3$ и $\cos 1{,}5 \sin 3{,}5$;

б) $\dfrac{\sin 3{,}2}{\sin 3{,}8}$ и $\dfrac{\cos 3{,}2}{\cos 3{,}8}$; г) $\sin 1 \sin 3$ и $\cos 1{,}5 \cos 3{,}5$.

42.20. Сравните заданные числовые выражения с нулем:

а) $\sin^2\frac{1}{2}\cos^2\frac{7}{2} + \sin 3 \sin 4$;

б) $\sin^2\frac{1}{3}\cos^2\frac{10}{3} + \sin 3 \sin\frac{11}{3}$.

42.21. Сравните:

а) $\cos x \cos 2x$ и $\cos 3x$, если x — число первой четверти;

б) $\cos x \cos 2x$ и $\cos 3x$, если x — число второй четверти;

в) $\sin x \cos 2x$ и $\sin 3x$, если $0 < x < \pi$;

г) $\sin x \sin 2x$ и $\sin 3x$, если $\pi < x < \frac{\pi}{4}$.

42.22. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $f(x) = \cos x \sin 2x - \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right)$;

б) $f(x) = \sin\frac{11x}{2}\cos\frac{5x}{2} - \cos\left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $f(x) = \sin 6x \cos 2x + \cos\left(6x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

г) $f(x) = 6\left(\sin 5x \cos 3x + \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right) +$
$+ \cos 8x$.

42.23. Найдите все значения c, при которых наибольшее значение функции $f(x)$ равно заданному числу M. Для каждого найденного значения c найдите наименьшее значение функции $f(x)$:

а) $f(x) = c + 5\sin x \cos 7x - 2{,}5\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - 6x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + 6x\right)\right)$,

$M = -8$;

б) $f(x) = c + \sqrt{32}\left(\sin 3x\ \sin 5x + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\right)$,

$M = 100$.

42.24. Найдите все значения c, при которых функция $g(x) = 2\sin\frac{(c+3)x}{2}\cos\frac{(c-3)x}{2} - \sin 3x$ принимает наибольшее значение в точке: а) $x = \frac{\pi}{6}$; б) $x = \frac{\pi}{4}$; в) $x = \pi$; г) $x = \frac{5\pi}{12}$. В ответе запишите наименьшее положительное значение c.

42.25. Найдите все значения c, при которых функция

$$g(x) = 14\cos\left(\frac{\pi}{10} + \frac{(c+2)x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10} + \frac{(c-2)x}{2}\right) - 7\cos 2x$$

принимает наименьшее значение в точке:

а) $x = \frac{\pi}{6}$; б) $x = \frac{\pi}{4}$; в) $x = \pi$; г) $x = \frac{5\pi}{12}$.

В ответе запишите наибольшее отрицательное значение c.

42.26. Докажите, что для любого значения x выполняется неравенство $\cos(x+1)\cos(x-1) < \cos(x+3)\cos(x-3)$.

42.27. Пусть числа x, y, z таковы, что $\cos x = \cos y \cos z$ и $\cos x + \cos y \neq 0$. Докажите, что в этом случае верно равенство $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{z}{2}$.

42.28. Пусть числа x, y таковы, что $2\sin x = \sin(x + 2y)$. Докажите, что в этом случае верно равенство $\operatorname{tg}(x+y) = 3\operatorname{tg} y$.

42.29. Пусть $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Докажите, что в этом случае верно равенство:

а) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin \dfrac{(n+1)x}{2} \sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}$;

б) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\cos \dfrac{(n+1)x}{2} \sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}$.

§ 43. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Докажите тождество (43.01—43.07):

43.01. $\dfrac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \dfrac{3 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

43.02. $\dfrac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$.

43.03. $\dfrac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = \sin 2x$.

43.04. а) $(\sin \alpha - \sin \beta)(\sin \alpha + \sin \beta) = \sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)$;

б) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha = 8 \operatorname{ctg} 8\alpha$.

43.05. а) $\dfrac{\sin^2 4\alpha}{2 \cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = 2 \sin \alpha \sin 2\alpha$;

б) $\sin \alpha + 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha = 4 \sin 3\alpha \cos^2 \alpha$;

в) $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha = 4 \sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha$.

43.06. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - \sin^3\left(\frac{7}{2}\pi - x\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)} = \sin^2 x$.

43.07. а) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$;

б) $\dfrac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha$.

Докажите тождество (43.08—43.13):

43.08. а) $1 - \sin 4\alpha + \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right)\cos 4\alpha = 0$;

б) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} - \dfrac{\sec^2 x + 2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \dfrac{2}{\operatorname{tg} x + 1}$.

43.09. $\dfrac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}(270° + \alpha)}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}(270° + \alpha)} - 2\cos(135° + \alpha)\cos(315° - \alpha) =$

$= 2\cos 2\alpha$.

43.10. $\cos^2 \alpha - \sin^2 2\alpha = \cos^2 \alpha \cos 2\alpha - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

43.11. $1 - \cos(2x - \pi) - \cos(4x + \pi) + \cos(6x - 2\pi) =$
$= 4\cos x \cos 2x \cos 3x$.

43.12. $\sin \alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 4\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\cos \alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

43.13. а) $3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 8\sin^4 \alpha$;

б) $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha$.

Упростите выражение (43.14—43.18):

43.14. $\dfrac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

43.15. $\dfrac{\sin 2x - \sin 3x + \sin 4x}{\cos 2x - \cos 3x + \cos 4x}$.

43.16. $\dfrac{(\sin 2\alpha - \sin 6\alpha) + (\cos 2\alpha - \cos 6\alpha)}{\sin 4\alpha - \cos 4\alpha}$.

43.17. а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\dfrac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$;

б) $\sin^2 \alpha\left(1 + \dfrac{1}{\sin \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha\right)\left(1 - \dfrac{1}{\sin \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha\right)$;

в) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha)}$.

43.18. а) $\dfrac{\operatorname{tg}(180° - \alpha)\cos(180° - \alpha)\operatorname{tg}(90° - \alpha)}{\sin(90° + \alpha)\operatorname{ctg}(90° - \alpha)\operatorname{tg}(90° + \alpha)}$;

б) $\dfrac{2(\sin 2\alpha + 2\cos^2 \alpha - 1)}{\cos \alpha - \sin \alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha}$;

в) $3\cos^2 x - 4\sin x \cos x - \sin^2 x - 1$.

Вычислите (43.19—43.23):

43.19. а) $4(\cos 24° + \cos 48° - \cos 84° - \cos 12°)$;

б) $\dfrac{96 \sin 80° \sin 65° \sin 35°}{\sin 20° + \sin 50° + \sin 110°}$.

43.20. а) $128 \sin^2 20° \sin^2 40° \sin^2 60° \sin^2 80°$;

б) $\mathrm{tg}\, 20° \,\mathrm{tg}\, 40° \,\mathrm{tg}\, 80°$;

в) $\dfrac{\mathrm{ctg}\, 15° + 1}{2\, \mathrm{ctg}\, 15°}$.

43.21. а) $\mathrm{tg}\, 9° - \mathrm{tg}\, 63° + \mathrm{tg}\, 81° - \mathrm{tg}\, 27°$;

б) $96\sqrt{3} \sin \dfrac{\pi}{48} \cos \dfrac{\pi}{48} \cos \dfrac{\pi}{24} \cos \dfrac{\pi}{12} \cos \dfrac{\pi}{6}$.

43.22. а) $\cos 10° \cos 50° \cos 70°$;

б) $\sin 160° \cos 110° + \sin 250° \cos 340°$.

43.23. $\dfrac{\sin 110° \sin 250° + \cos 540° \cos 290° \cos 430°}{\cos^2 1260°}$.

ПОВТОРЕНИЕ: ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ В ВУЗЫ[1]

МГПУ

1. Решите уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7$.

2. Найдите область определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x+3}{5-x}}}$.

3. При каком значении a кривая $y = x^2 + |a|x + 25$ касается оси Ox?

4. К 20%-му раствору соли добавили 25 г соли, после чего концентрация раствора стала равной 36%. Найдите вес первоначального раствора.

5. Без помощи калькулятора выясните, что больше: $\sqrt[3]{7 + 2\sqrt{2}}$ или $1 + \sqrt{2}$.

6. Найдите минимальное целое b, при котором уравнение $x^2 + 2(b-2)x + b^2 - 10b + 12 = 0$ имеет два различных корня.

7. Числа x, y, z, t образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что $x^2 - 3y^2 + 3z^2 - t^2 = 0$.

МГУ

Факультет государственного управления

8. Решите уравнение $|x^2 - 13x + 36| = |36 - x^2|$.

9. В магазине одежды проводилась распродажа. Костюмы продавались со скидкой 20%, плащи — со скидкой 40%. Покупатель купил костюм и плащ за 9180 р. в сумме, заплатив на 32% меньше их суммарной первоначальной цены. Найдите первоначальные цены костюма и плаща.

Институт стран Азии и Африки

10. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{2x^2 - 5x - 3}}{6 + 3x\sqrt{3} - 2x^2} \geqslant 0$.

11. Из пункта A в пункт $Б$, расстояние между которыми равно 10 км, отправились в разное время пешеход, всадник и вело-

---

[1] Задачи, приведенные в данном разделе книги, подобраны в соответствии с темами, изучаемыми в 9-м классе, поэтому могут быть рассмотрены школьниками этого возраста.

сипедист. Известно, что их скорости постоянны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Первым из пункта A вышел пешеход, которого в середине маршрута обогнал велосипедист, выехавший из A на 50 мин позже пешехода. В пункт $Б$ пешеход прибыл одновременно с всадником, выехавшим из A на 1 ч 15 мин позже пешехода. Определите скорости участников маршрута.

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x+2)+y=3a, \\ a+2x^3=y^3+(a+2)x^3 \end{cases}$$

имеет не более двух решений.

13. Решите неравенство $\dfrac{4+3x-x^2}{\sqrt{9+2\sqrt{3}x-x^2}} \leqslant 0$.

14. Расстояние между городами A и $Б$ равно 200 км. Из пункта A в разное время выехали автобус, мотоцикл и автомобиль, скорости которых постоянны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Первым из A отправился автобус, в середине маршрута его догнал автомобиль, выехавший на 4 ч позже автобуса. В пункт $Б$ автобус прибыл одновременно с мотоциклом, выехавшим из A на 6 ч 40 мин позже автобуса. Определите скорость автобуса, мотоцикла и автомобиля.

15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x+a(y+1)=2a, \\ x^3+a(2y^3+1)=ay^3+2a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Социологический факультет

16. В городе N за последний год численность населения уменьшилась на 4%, а число безработных увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей составляют безработные, если год назад их было 8%?

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых расстояние между корнями уравнения $ax^2+(2a+2)x+(a+3)=0$ больше 1.

18. Решите уравнение $\sqrt[3]{\dfrac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{2-6x}{x}} = 1.$

Факультет психологии

19. При каждом значении параметра a решите неравенство $ax^4 + x^3 + (2a + 3a^2)x^2 + 2x + 6a^3 > 0.$

Экономический факультет

20. Решите неравенство $|x^2 - 8x + 15| \leqslant |15 - x^2|.$

21. Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем их продала на общую сумму 7 млн 680 тыс. р., получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго — 20%?

Филологический факультет
(специальность «Прикладная лингвистика»)

22. При каких значениях параметра a на плоскости $(x;\ y)$ существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases} 2y - x \leqslant 1, \\ y + 2x \leqslant 2, \\ y + ax \geqslant -1? \end{cases}$

23. При каких значениях параметра p на плоскости $(x;\ y)$ существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases} 1 - y \geqslant px, \\ x - 2y \leqslant 1, \\ y + 2x \leqslant -2? \end{cases}$

Географический факультет

24. При каких целых значениях параметра k система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \leqslant k^2 + 10k + 20, \\ 5x^2 + 5y^2 - 2kx + 4ky \leqslant 5 - k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Геологический факультет

25. Решите неравенство $\dfrac{|x-3| + 2}{|2x-3| - 5} \leqslant 0.$

26. При проведении опыта раствор A был получен растворением ненулевого объема кислоты в воде. Раствор B был получен из раствора A добавлением некоторого объема воды, а раствор C получен из раствора B добавлением уже другого количества воды. Известно, что концентрация (отношение объема кислоты к общему объему раствора) при получении раствора B уменьшилась по сравнению с концентрацией раствора A на 20%, а концентрация раствора C в 2 раза меньше концентрации раствора A. Во сколько раз больше было добавлено воды при получении раствора C из раствора B, чем при получении раствора B из раствора A?

27. Решите неравенство $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-1}{1-\dfrac{1}{x-7}} \geqslant 0.$

28. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{xy}{2} + \dfrac{5}{2x + y - xy} = 5, \\ 2x + y + \dfrac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$

29. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{xy}{2} + \dfrac{5}{x + 2y - xy} = 5, \\ \dfrac{10}{xy} - xy = 4 - x - 2y. \end{cases}$

Факультет почвоведения

30. Найдите арифметическую прогрессию, в которой сумма членов, начиная с первого, сколько бы их ни взять, всегда равна утроенному квадрату числа этих членов.

31. Найдите сумму n членов ряда $7 + 77 + 777 + \ldots$.

32. Решите уравнение в целых числах: $5x^2 + 6xy + y^2 = 7$.

Биологический факультет и факультет фундаментальной медицины

33. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2 + 5x - 84}}{x - 7} \geqslant 0.$

Химический факультет
и Высший колледж наук о материалах

34. Решите уравнение $|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+$ $+\ldots+|x-100|+|x+100|=200x$.

35. Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению $f(x+1)=$ $=f(x)+2x+1$. Найдите $f(2001)$, если $f(0)=0$.

36. Решите неравенство $\dfrac{1}{|x-2|}>\dfrac{1}{|x+2|}$.

37. Решите уравнение

$$\sqrt{6x-x^2-5}+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{4x-x^2-3}.$$

38. Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению $f(x+1)=$ $=f(x)+2x+3$. Найдите $f(2001)$, если $f(0)=1$.

Высший колледж наук о материалах (олимпиада)

39. Решите уравнение $\dfrac{1}{2}-x^2=\sqrt{\dfrac{1}{2}-x}$.

40. Учительница принесла в класс счетные палочки. Дети раскладывали их в пакетики. Когда разложили по 2 палочки в каждый пакетик, то осталась 1 лишняя палочка. Затем разложили по 13 штук в пакетик, и тогда осталось 7 лишних палочек. Когда же палочки разложили по 9 штук в пакетик, то лишних не оказалось. Сколько, самое меньшее, было счетных палочек?

Химический факультет (олимпиада)

41. Решите уравнение $\dfrac{|x-1|}{|x-2|}=\dfrac{|x+1|}{|x+2|}$.

42. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ устроена следующим образом: $a_1=1$, каждое последующее число равно удвоенной сумме предыдущих чисел, т. е. $a_2=2a_1$, $a_3=2(a_1+a_2)$ и т. п. Найдите произведение всех чисел от a_1 до a_{2001}.

43. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ устроена следующим образом: $a_1=1$, каждое последующее число равно утроенной сумме предыдущих чисел, т. е. $a_2=3a_1$, $a_3=3(a_1+a_2)$ и т. п. Найдите произведение всех чисел от a_1 до a_{2001}.

Физический факультет

44. Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}>\dfrac{1}{x-2}$.

45. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 27, а сумма первых пяти членов равна 80. Сумма какого числа первых членов прогрессии равна 486?

46. Из пункта A в пункт B выехал первый велосипедист. Одновременно с ним с такой же скоростью из пункта B в A выехал второй велосипедист. Через некоторое время первый велосипедист увеличил скорость на 10 км/ч. Если бы он сразу же двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым велосипедистом состоялась бы на 3 ч раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 180 км, в момент изменения скорости первым велосипедистом расстояние между ним и вторым велосипедистом было меньше 70 км, на весь путь из A в B первый велосипедист затратил 15 ч. Найдите первоначальную скорость велосипедистов.

47. Третий член арифметической прогрессии в 6 раз больше первого члена, а сумма первых семи членов равна 119. Сумма какого числа первых членов прогрессии равна 416?

48. Из пункта A в пункт B вышел первый пешеход. Одновременно с ним с такой же скоростью из пункта B в A вышел второй пешеход. Через некоторое время первый пешеход увеличил скорость на 2 км/ч. Если бы он сразу же двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым пешеходом состоялась бы на 1 ч раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 60 км, в момент изменения скорости первым пешеходом расстояние между ним и вторым пешеходом было больше 20 км, на весь путь из A в B первый пешеход затратил 11 ч. Найдите первоначальную скорость пешеходов.

49. Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 56. Все члены этой прогрессии — натуральные числа. Двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найдите двадцатый член этой прогрессии.

50. Среди всех решений системы $\begin{cases} y + 3x \leqslant -3, \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y \leqslant 11 \end{cases}$ найдите такое, при котором выражение $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$ принимает минимальное значение.

51. При всех значениях параметра b решите неравенство $|2x + 3b| \leqslant x + 1$.

52. Среди всех решений системы $\begin{cases} 2y - x \leqslant -6, \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y \leqslant -9 \end{cases}$ найдите такое, при котором выражение $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2$ принимает минимальное значение.

53. Пусть $[x]$ означает целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Найдите все корни уравнения $\left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{7}{4} \cdot \sqrt{x} - [x]$.

Механико-математический факультет

54. Решите уравнение
$3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2\left|\sqrt{3x + 18} - 2\right|$.

55. Решите уравнение
$4x - 3|x - 1| = 4\sqrt{5x + 14} - 3\left|\sqrt{5x + 14} - 1\right|$.

56. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых графики функций $y = \frac{3x + 1}{x}$ и $y = \frac{4x + 3a - 7}{ax - 1}$ разбивают координатную плоскость ровно на пять частей.

57. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых графики функций $y = \frac{4x + 1}{x}$ и $y = \frac{(7a + 4)x + 3a}{ax - 1}$ разбивают координатную плоскость ровно на пять частей.

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

58. Решите неравенство $\frac{x + 4}{x + 1} > 2 - x$.

59. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 24, а сумма трех последних — 105. Первый член равен 5. Найдите все члены этой прогрессии.

60. Расстояние между пунктами A и B равно 2800 км. Из пункта A в пункт B выехал танк с постоянной скоростью 60 км/ч. Одновременно навстречу ему из пункта B выехал бронетранспортер с постоянной скоростью 80 км/ч. В это время из пункта A с постоянной скоростью вылетела пуля. Долетев до бронетранспортера, пуля отскакивает и летит назад к танку, не меняя абсолютной величины своей скорости. Отразившись от танка, она опять летит к бронетранспортеру, не меняя абсолютной величины своей скорости, и т. д. Таким образом, пуля летает между танком и бронетранспортером с постоянной по абсолютной величине скоростью вплоть до момента их встречи. Известно, что к моменту встречи танка и бронетранспортера пуля пролетела 20 000 км. Найдите ее скорость.

61. Для каждого значения параметра b найдите число корней уравнения $4x^2 + 12x + |8x + 24| = b$.

62. Фирма продает автомобили двух типов: А и В. Каждый проданный автомобиль типа А приносит 500 долларов прибыли. Каждый проданный автомобиль типа В приносит фирме 1000 долларов прибыли. Спрос на автомобили диктует следующие ограничения. Общее число автомобилей, проданных фирмой за неделю, не превышает 10 штук. Число автомобилей типа В, проданных фирмой за неделю, составляет менее 20% от общего числа проданных за неделю. Из-за привлекательности для покупателей более дешевой модели автомобиля число проданных автомобилей типа А превышает 5 штук. Вычислите максимальную прибыль, которую фирма может получить за неделю при данных ограничениях (при условии, что за неделю фирма продает целое число автомобилей каждого типа). Какое при этом должно быть число проданных автомобилей типа А и какое число проданных автомобилей типа В?

63. Сколько корней больше -1 (в зависимости от параметра a) имеет уравнение $2x^2 + (2a + 6)x + 4a + 12 = 0$?

64. Два фирменных киоска, представляющих фирмы «Пепси-кола» и «Кока-кола», расположены на одном перекрестке и делят рынок прохладительных напитков в этой точке города (каждая из фирм продает напитки в закрытых бутылках). В течение получаса им удалось продать 66 бутылок. Число бутылок, проданных каждой из них, меньше удвоенного числа бутылок, проданных другой фирмой. Квадрат одной шестой числа бутылок, проданных «Пепси-колой», меньше уменьшенной на 5 половины числа бутылок, проданных фирмой «Кока-кола». Сколько бутылок продала каждая фирма?

65. От пристани A к пристани B против течения реки отошел катер, собственная скорость которого (скорость в стоячей воде) в 7 раз больше скорости течения реки. Одновременно навстречу ему от пристани B, расстояние от которой до A по реке равно 20 км, отошла лодка. На каком расстоянии от B произошла встреча катера и лодки, если известно, что через полчаса после начала движения лодке оставалось 4 км до места встречи и что катер затратил на путь до встречи с ней на 20 мин больше, чем на путь от места встречи до пункта B?

66. При каких значениях параметра a один корень уравнения $(a + 1)x^2 - (3a + 2)x + a - 1 = 0$ больше 2, а другой — меньше 2?

67. Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 1 + |x + 1|}{x \cdot (x - 2)} \geqslant 0.$

68. Найдите функцию $f(x)$ при всех допустимых значениях x, удовлетворяющую равенству $f\left(\dfrac{x + 1}{x - 2}\right) + 2f\left(\dfrac{x - 2}{x + 1}\right) = x.$

69. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги А, В и С. Результаты опроса оказались таковы: книгу А читали 25 учащихся, книгу В — 22, книгу С — также 22 чел. Книги А или В читали 33 ученика, А или С читали 32 учащихся, В или С читал 31 ученик. Все три книги прочли 10 учащихся. Сколько из них прочли только по одной книге? Сколько не читали ни одной из этих книг?

70. Известно, что $y \geqslant |5x - 2| + |5x - 3|$. Найдите наименьшее значение выражения $x + y$.

71. При каждом значении параметра a найдите все решения уравнения $(ax^2 - 2x + a)\sqrt{\dfrac{-x - 2}{5x + 1}} = 0.$

72. При каких x максимальное из чисел $x^3 - 10$ и $6x - x^2 - 14$ больше -8?

ИНСТИТУТ СТАЛИ И СПЛАВОВ

73. Решите уравнение $5 + \dfrac{96}{25x^2 - 16} = \dfrac{10x - 1}{5x + 4} - \dfrac{15x - 1}{4 - 5x}$ и в ответе запишите сумму его корней.

74. Найдите сумму наименьшего и наибольшего значений функции $y = -x^2 + 2x + 6$ на отрезке $[-1; 2]$.

75. Около фигуры, ограниченной графиком функции $y = 9 - 0{,}75|x + 13|$ и осью абсцисс, описана окружность. Найдите абсциссу центра окружности.

76. Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс, а две другие — на графике функции $f(x) = \begin{cases} \dfrac{22}{x}, \text{ при } x > 0, \\ -\dfrac{14}{x}, \text{ при } x < 0. \end{cases}$

Найдите сторону этого квадрата.

77. Найдите сумму квадратов расстояний от всех точек $A(x; y)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 + 4x = y^2 - 1, \\ 4x^2 + y^2 - 3xy = 1. \end{cases}$$

78. Сколько существует таких целых значений параметра b, что система уравнений $\begin{cases} \dfrac{b}{\sqrt{x}} + 5y + 2 = b, \\ \dfrac{5}{\sqrt{x}} + by - 6 = b \end{cases}$ не имеет решений?

79. Сумма всех членов бесконечной геометрической прогрессии относится к сумме ее первых двух членов как 4 : 3. Найдите сумму квадратов всех членов этой прогрессии, если ее первый член равен 3.

80. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{3x^2 + 16xy + 15y^2}{x^2 + y^2}.$$

81. Пусть $S_n = \dfrac{5}{2^2 \cdot 8^2} + \dfrac{8}{5^2 \cdot 11^2} + \ldots + \dfrac{3n + 2}{(3n - 1)^2(3n + 5)^2}$,

$Z_n = \dfrac{1}{(3n + 2)^2} + \dfrac{1}{(3n + 5)^2}$, а $P_n = 100\,(12S_n + Z_n)$.

Найдите P_{2003}.

82. Пусть в последовательности a_n $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 7a_n - 6n + 1$. Найдите сумму 999 членов этой последовательности.

ИНСТИТУТ СТРАН АЗИИ И АФРИКИ

83. На счет, который вкладчик имел в начале первого квартала, в конце этого квартала начисляется $r_1\%$, а на тот же счет, который он имел в начале второго квартала, в конце этого квартала начисляется $r_2\%$, причем $r_1 + r_2 = 150$. Вкладчик положил на счет в начале первого квартала некоторую сумму и снял в конце того же квартала половину этой суммы. При каком значении $r_1\%$ счет вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным?

84. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 + 4x + 6a\,|x + 2| + 9a^2 \leqslant 0$ имеет не более одного решения.

85. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} y \geqslant |x| - 1, \\ y \leqslant -2|x| + 5. \end{cases}$$

86. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} y \geqslant |x - 1| - 3, \\ y \leqslant \sqrt{4 - x^2}. \end{cases}$$

87. Решите уравнение $\sqrt{9 - 2x} + \sqrt{3}(x - 2) = 0$.

88. Решите уравнение $2|x - 5| - 1 = 3|2x - 5| - 4|x - 1|$.

89. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих уравнению $3xy - 14x - 17y + 71 = 0$.

90. Решите неравенство $|2x - 1| > \dfrac{1}{x - 2}$.

91. Найдите все значения параметра a, при которых на отрезке $[-1; 2]$ нет ни одного решения неравенства $|x^2 - 2x + a| > 5$.

92. Найдите сумму всех таких натуральных чисел n, являющихся делителем числа 5600, для которых $n + 5$ является делителем числа 3024.

Филологический факультет

93. Решите неравенство $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{|1 + x|} \leqslant 0$.

94. Три буквы А, И, Б сидели на трубе. К ним стали по очереди подсаживаться другие буквы так, что порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр порядковых номеров двух предыдущих букв. Оказалось, что, начиная с некоторого момента, буквы стали циклически повторяться: а) какая буква (из циклически повторяющихся) наиболее часто встречается; б) может ли циклически повторяющийся набор состоять из одной буквы? Если да, то укажите эту букву.

Факультет психологии

95. Решите уравнение $|4x - |x - 2| + 3| = 16$.

96. Решите неравенство $\dfrac{5 - 3x + \sqrt{4x + 7}}{16 - 3x^2 + 22x} \leqslant 0$.

97. Найдите все такие пары чисел a и b, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = b^2 + 2x - 4y, \\ x^2 + (12 - 2a)x + y^2 = 2ay + 12a - 2a^2 - 27 \end{cases}$

имеет относительно x и y два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, удовлетворяющие условию $\dfrac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \dfrac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$.

Социологический факультет

98. Решите неравенство $\dfrac{x^2 + 1}{x} < \dfrac{1}{x} + 1$.

99. В дошкольном учреждении провели опрос. На вопрос: «Что вы предпочитаете, кашу или компот?» — большая часть ответила: «Кашу», меньшая: «Компот», а один респондент: «Затрудняюсь ответить». Далее выяснили, что среди любителей компота 30% предпочитают абрикосовый, а 70% — грушевый. У любителей каши уточнили, какую именно кашу они предпочитают. Оказалось, что 56,25% выбрали манную, а 37,5% — рисовую, и лишь один ответил: «Затрудняюсь ответить». Сколько детей было опрошено?

100. В городе N 9% коренного населения в зимний период занято народным промыслом. Летом 36% коренного населения уезжает из города, но общая их численность за счет приезжающих туристов составляет 80% от численности в зимний период. Определите, какая часть от общей численности населения в летний период занята народным промыслом, если среди коренного населения доля занятых народным промыслом осталась такой же, как и в зимний период.

101. Найдите все натуральные значения параметра n, при каждом из которых задача: «Найти арифметическую прогрессию, если известны ее семнадцатый член и сумма n первых членов», — не имеет решений или ее решением является бесконечное множество арифметических прогрессий.

102. Две кривые на плоскости $(x;\ y)$, заданные уравнениями $y = x^2 - 2x$ и $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ соответственно, пересекаются в четырех точках. Докажите, что: 1) по крайней мере, существуют две различные параболы, каждая из которых проходит через эти четыре точки; 2) эти четыре точки лежат на одной окружности, и найдите радиус этой окружности.

103. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, для которой сумма первых пяти членов с нечетными номерами на единицу больше суммы первых пяти членов с четными номерами и равна квадрату первого члена.

104. Кандидат в депутаты за время избирательной кампании имеет право на одно бесплатное выступление в газете, а также на платные выступления по радио и телевидению. Выступление в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает количество голосов на 40% и стоит 32 тыс. р.; каждое выступление по телевидению — на 80% и стоит 47 тыс. р. Определите количество и последовательность выступлений в этих средствах массовой информации, при которых кандидат получит наибольшее возможное число голосов, если на всю кампанию можно израсходовать не более 112 тыс. р.

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

105. Решите неравенство $|2x - 1| - |x - 3| \geqslant \frac{x + 2}{x}$.

106. Упростите $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{2\cos^2 x - 1}$.

107. Найдите все натуральные числа, обладающие следующим свойством: если от числа, полученного из искомого приписыванием к нему слева одной цифры, вычесть число, полученное из искомого приписыванием к нему справа одной цифры, не равной нулю или восьми, то разность окажется в 15 раз больше искомого числа.

108. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2|x - 1|$ и найдите ее наименьшее значение.

109. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{y + \dfrac{1}{x}} = 10, \\ 1 + xy = 16\sqrt{xy}. \end{cases}$

110. Сумма первого и седьмого членов возрастающей геометрической прогрессии в 7 раз больше суммы первого и третьего ее членов. Найдите сумму первых 10 членов прогрессии, если первый член прогрессии равен 2.

111. Решите неравенство $\dfrac{1}{|x| - 1} \geqslant |x^2 - 2x| - 1$.

112. Найдите все неотрицательные значения параметра a, $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, из неравенства $axy \geqslant 4x + 7y + a$ следует неравенство $xy \geqslant 5$.

113. При каждом значении параметра k решите неравенство $\dfrac{x - k}{x + k} + k^3 \leqslant x(x^2 - k^2 + kx)$.

114. При каких значениях b уравнение $\dfrac{x^4}{x - 1} + b(x - 1) = 6x^2$ имеет более двух разных решений?

115. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + 4y = a - 5, \\ 2xy + 4x - 2y = a + 3 \end{cases}$$

имеет не более двух различных решений?

116. Двузначное, трехзначное и четырехзначное натуральные числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если в записи двузначного числа стереть последнюю цифру, а в трехзначном и четырехзначном числах стереть по две последние цифры, то полученные три числа в указанном порядке будут являться последовательными членами геометрической прогрессии. Какие числа остались после стирания цифр?

117. При каких значениях параметра m наибольшее значение функции $f(x)$ больше m, если при всех x выполняется равенство $x \cdot f(x) + m \cdot f(m - x) = 1$?

118. Старшие коэффициенты квадратных трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют с одной и той же прямой по одной общей точке соответственно $F(1; 1)$ и $G(3; 5)$. Прямая $y = 7 - 3x$ пересекает каждый график в двух точках. Найдите сумму абсцисс и сумму ординат этих четырех точек пересечения.

119. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $2x|y| = x + 2y + 5$.

120. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b} - b}{\sqrt[3]{a^2} - b} + \dfrac{a}{a + \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b}}$.

121. При каких значениях параметра a наибольшее значение функции $f(x) = \dfrac{7x^2 - 14ax + 14a^2 + 8a + 28}{8x^2 - 16ax + 16a^2 + 32}$ является целым числом?

122. Перед началом письменного экзамена каждому абитуриенту была выдана тетрадь. В процессе экзамена 2% абитуриентов попросили еще по одной дополнительной тетради. Оказалось, что всего было использовано 1734 тетради. Сколько абитуриентов сдавало экзамен?

123. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 7x + 26 \geqslant \dfrac{224 - 112x}{x^2 - 7x + 10}, \\ \dfrac{-x}{x + |x + 1|} \leqslant 4x. \end{cases}$$

124. Уравнение $x^3 - 2a^2x^2 - a^4x + 2a^6 = 0$ с параметром a имеет два разных корня, которые являются третьим и одиннадцатым членами возрастающей арифметической прогрессии. При каком n сумма первых n членов этой прогрессии будет наименьшей?

125. При каких значениях параметра a сумма корней уравнения $|2x^2 - 5x - 1 - a| = |x^2 + 6x + a|$ минимальна?

126. Для всякого значения a решите уравнение $|x^2 - 7x - a| = x^2 + 3x + a$.

127. Седьмой член арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равен наибольшему значению функции $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x} + 3$ на отрезке

[1; 11], а семнадцатый член этой же прогрессии равен наименьшему значению этой функции на этом отрезке. Сколько корней на отрезке [1; 11] имеет уравнение $x^3 - \frac{1}{x} + 3 = a_{20}$?

128. На графике функции $y = \frac{1}{x}$ взяты семь точек, абсциссы которых составляют геометрическую прогрессию $b_1 = 0{,}5$; $q = 3$. Найдите сумму ординат этих точек.

129. На графике функции $y = \frac{1}{x}$ взяты семь точек A_1; A_2; ... ; A_7, абсциссы которых составляют геометрическую прогрессию $b_1 = 0{,}4$; $q = 2$. B_1; B_2; ... ; B_7 соответственно проекции этих точек на ось абсцисс. Рассматриваются шесть прямоугольников, три вершины которых $A_1B_1B_2$; $A_2B_2B_3$; ... ; $A_6B_6B_7$. Найдите сумму площадей всех этих прямоугольников.

ОТВЕТЫ

1.01. д) $(-\sqrt{2} - \sqrt{3}; +\infty)$; е) решений нет. **1.02.** а) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; -0{,}4] \cup [0; +\infty)$; в) $\left(-\sqrt{\frac{7}{5}}; \sqrt{\frac{7}{5}}\right)$; г) $(1 - \sqrt{5}; 0)$; д) $(-\infty; -0{,}6) \cup (-0{,}6; +\infty)$; е) $\boldsymbol{R}$; ж) $\frac{1}{3}$; з) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; и) $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$; к) $(-2; 4)$; л) $\boldsymbol{R}$; м) $(-\sqrt{3}; -\sqrt{2})$. **1.03.** а) $\left[-3\frac{1}{3}; 1\right]$; б) $(1; 5{,}5)$; в) $\left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{4}\right)$; г) $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{4}{5}; +\infty\right)$. **1.10.** г) 1) $\boldsymbol{R}$; 2) -2; 0; 1; 3) -2; 4) $(-\infty; -2)$ $f(x) < 0$, $(-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ $f(x) > 0$; з) 1) $\boldsymbol{R}$; 2) -2; 0; 1; 3) -2; 0; 1; 4) $(-\infty; -2) \cup (0; 1)$ $f(x) < 0$; $(-2; 0) \cup (1; +\infty)$ $f(x) > 0$. **1.11.** а) $(-2; -1) \cup (5; +\infty)$; б) $[-2; -1] \cup [5; +\infty) \cup \{0\}$; в) $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (0; 5)$; г) $(-\infty; -2] \cup [-1; 5]$. **1.12.** а) $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; -2) \cup [-1; 0] \cup (3; +\infty)$. **1.13.** а) $(-2; -1) \cup (3; +\infty)$; б) $(-2; -1] \cup (3; +\infty) \cup \{0\}$. **1.14.** г) $(-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup [0; 3)$. **1.19.** а) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$; б) $(-\infty; 1] \cup \left[12\frac{4}{7}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; -6] \cup [-1; +\infty)$; г) решений нет. **1.20.** а) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$; б) $(-\infty; -9) \cup (9; +\infty)$; в) $(-\infty; -8) \cup (1; +\infty)$;

г) $(-7; -1)$. **1.21.** а) $(-1; 1)$; б) $(-\infty; -9) \cup (9; +\infty) \cup \{1\}$; в) $(-\infty; -8) \cup$ $\cup (1; +\infty) \cup \{-1\}$; г) $(-\infty; -7) \cup (-1; +\infty) \cup \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. **1.22.** а) $(-\infty; -1{,}5]$;

б) $\left[\frac{8}{3}; 7\right) \cup (7; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup (-3; -1{,}5]$; г) $\left(-\infty; -1\frac{3}{7}\right] \cup$

$\cup \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$. **1.23.** а) $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$;

б) $(-3; 0) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$; в) $(-\infty; -4) \cup (-2; 0) \cup (0; 6)$; г) $(-\infty; 3) \cup$ $\cup (4; 5) \cup (5; 8)$; д) $(-9; -3) \cup (-3; -1) \cup (1; +\infty)$; е) $(-3; 0) \cup (0; 3)$.
1.27. а) $[-2; 0] \cup [2; +\infty)$; б) $[-2; 0] \cup [2; +\infty)$; в) $[-2; -1) \cup (-1; 0] \cup$ $\cup [2; +\infty)$; г) $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$; д) $(-2; 0] \cup [2; +\infty)$; е) $\left[-2; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup$

$\cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right) \cup (-1; 0] \cup \left[2; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$.

1.28. а) $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$; б) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; в) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; г) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$. **1.29.** а) $(-\sqrt{11}; -1) \cup (\sqrt{11}; 4)$; б) $(1; 4)$.

1.30. а) $(-6; 5)$; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty)$; г) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

1.31. а) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $(0; 1) \cup (2; +\infty) \cup (1; +\infty)$; в) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$; г) $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup$ $\cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$. **1.32.** а) $\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}-2}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$;

в) $\left[-\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}-2}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; г) $\left(-\infty; -\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}-2}{2}; 0\right) \cup$

$\cup \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$. **1.33.** а) $\left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[-\frac{2}{3}; 0\right) \cup$

$\cup \left(0; \frac{\sqrt{7}-1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$; б) $\left[-\frac{1+\sqrt{7}}{2}; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{7}-1}{2}; 1\right]$;

в) $\left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{7}-1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$. **1.34.** а) $(-\infty; 1) \cup$

$\cup \left(-1; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(4-\sqrt{15}; 4+\sqrt{15})$;

г) $\left[-\frac{1}{5}; \frac{3-\sqrt{14}}{5}\right] \cup \left[1; \frac{3+\sqrt{14}}{5}\right]$. **1.35.** а) $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{7}}{2}; 0\right) \cup$

$\cup \left(0; \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{7}}{2}; +\infty\right)$; б) $\varnothing$. **1.36.** а) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \cup$ $\cup \{0{,}5\}$; б) $(-\infty; -11] \cup [-2; +\infty)$. **1.37.** а) $\left[\frac{3-\sqrt{14}}{2}; \frac{2-\sqrt{13}}{6}\right] \cup$ $\cup \left[\frac{2+\sqrt{13}}{6}; \frac{3+-\sqrt{14}}{2}\right]$; б) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$. **1.38.** а) $\left(\frac{12}{7}; \frac{5}{2}\right)$; б) $\left[\frac{21-\sqrt{421}}{2}; \frac{11-\sqrt{105}}{2}\right] \cup \left[\frac{11+\sqrt{105}}{2}; \frac{21+\sqrt{421}}{2}\right]$; в) $(-\infty; 1-\sqrt{2}\,] \cup [1+\sqrt{2}; +\infty)$. **1.39.** а) $(-2; 1)$. **1.40.** а) $[-7; -2) \cup$ $\cup \left[\frac{1}{3}; 1\right)$; б) $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; 4]$; в) $[-4; -2) \cup (-2; 1)$.

2.01. а), б) Бесконечные; в), г) конечные. **2.05.** а) Множество квадратов; б) множество трапеций; в) множество равнобоких трапеций; г) множество прямоугольных трапеций; д) множество прямоугольников; е) множество правильных многоугольников. **2.06.** а) Точка B; отрезок AB; отрезок BC; б) отрезок AB; отрезок BC; отрезок AC. **2.07.** а) $(0; 5]$; б) $[8; 13)$. **2.10.** а) $\left\{-9; -3\frac{1}{3}; 1\right\}$; б) $\varnothing$; в) $\boldsymbol{R}$; г) $[0; +\infty)$; д) $[0{,}1) \cup (1; +\infty)$. **2.11.** а) $(-1; +\infty)$; б) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; в) $[-3; 0) \cup (0; 3]$. **2.12.** а) 2; б) 1; в) 2; г) 3. **2.13.** а) $(-\infty; -64) \cup (-64; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $(3; 4)$; в) $m = 2$. **2.14.** а) $\{-8; -1; 1; 2\}$; б) $\{-7; -2; 1; 2\}$; в) $\{-8; -7; -2; -1; 1; 2\}$; г) $\{1; 2\}$; д) $\{-8; -1\}$; е) $\{-7; -2\}$. **2.15.** а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) A/B; г) B/A; д) $A \cup B$; е) $A \cup B$; ж) $A \cap B$. **2.16.** а) $M \cup N$; б) $M \cap N$; в) M/N; г) N/M. **2.17.** а) 1; б) 2; в) 3; г) 2; д) 3; е) 4; ж) 3; з) 2. **2.20.** а) 5; 6; ... ; 15; б) 20; 21; ... ; 30; в) 0; 1; ... ; 10; г) 0; 1; ... ; 10.

3.01. а) $(\pi; +\infty)$; б) $\left(1\frac{5}{9}; +\infty\right)$; в) $\left(\frac{1463}{7547}; +\infty\right)$; г) $(1+\sqrt{3}; +\infty)$. **3.02.** а) $(-\infty; \pi)$; б) $(-\infty; 1233 \cdot 1235]$; в) $\left(-\infty; \frac{6463}{1547}\right]$; г) $(-\infty; \sqrt{72}+\sqrt{30})$. **3.03.** а) $[3(14); \pi)$; б) $(0,(6); 0,(7)]$; в) решений нет; г) 12,(36). **3.04.** а) 1) $a > 0{,}5$; 2) $a \leqslant 0{,}5$; 3) таких a нет; б) 1) $a \geqslant 0{,}5$; 2) $a < 0{,}5$; 3) $a = 0{,}5$; г) 1) $a \leqslant 1$; 2) $a > 1$; 3) $a = 1$. **3.05.** а) Решений нет; б) $[-2; 3{,}5)$; в) $\{4,(3)\}$; г) решений нет.

3.06. а) $(-3{,}5;\ -3{,}4] \cup [2;\ +\infty)$; б) $[2;\ +\infty)$; в) $\{-3{,}4\} \cup [2;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -3{,}4]$. **3.09.** а) $\left\{\frac{8}{3}\right\}$; б) $\left(\frac{9-\sqrt{73}}{4};\ \frac{8}{3}\right) \cup \left(\frac{8}{3};\ \frac{9+\sqrt{73}}{4}\right)$; в) $\left(-\infty;\ \frac{9-\sqrt{73}}{4}\right] \cup \left[\frac{9+\sqrt{73}}{4};\ +\infty\right)$; г) решений нет. **3.10.** а) При $a \leqslant 1$ решений нет; при $1 < a \leqslant 2$, $[1;\ a)$; при $a > 2$, $[1;\ 2]$; г) при $a < -1$, $\left[-1;\ \frac{1}{a}\right]$; при $a = -1$, $x = -1$; при прочих a решений нет.

3.11. а) При $a \leqslant 1$, $[1;\ 2]$; при $1 < a < 2$, $\{1\} \cup [a;\ 2]$; при $a = 2$, $\{1;\ 2\}$; при $a > 2$, $\{1\}$; г) при $a < -1$, $[a;\ 1]$; при $-1 \leqslant a < -0{,}5$, $[a;\ -a]$; при $a = -0{,}5$, $[-0{,}5;\ 0{,}5] \cup \{1\}$; при $-0{,}5 < a < 0$, $[a;\ -a] \cup$ $\cup\ [-2a;\ 1]$; при $0 \leqslant a < 1$, $[a;\ 1]$; при $a = 1$, $x = 1$; при $a > 1$, $[1;\ a]$. **3.15.** а) При $a < 0$, $[-4;\ -3]$; при $0 \leqslant a \leqslant 3$, $[-4;\ -3] \cup \{0\}$; при $3 < a \leqslant 4$, $[-4;\ -a] \cup \{0\}$; при $a > 4$, $x = 0$; г) при $a \leqslant -6$ или $a \geqslant 3{,}5$, $[-4;\ -3] \cup \{0\}$; при $-6 < a \leqslant -5$, $[a + 2;\ -3] \cup \{0\}$; при $-5 < a \leqslant -2$, $x = 0$; при $-2 < a < 1{,}5$ решений нет; $1{,}5 \leqslant a < 3$, $x = 0$; при $a = 3$, $\{-3;\ 0\}$; при $3 < a < 3{,}5$, $[3 - 2a;\ -3] \cup \{0\}$.
3.21. а) $\left[\frac{1}{3};\ \sqrt{7}\right)$; б) $\left[\frac{5+\sqrt{21}}{2};\ +\infty\right)$; в) $[0;\ 6]$; г) $(-\infty;\ -\sqrt{10}]$.
3.23. в) $[-3;\ 11]$; е) $[1;\ +\infty)$. **3.25.** в) $(1;\ 3)$; е) $(-\infty;\ -2] \cup \{0\}$.
3.26. а) $(-\infty;\ -2) \cup [-1;\ 1) \cup \left(1;\ \frac{8}{3}\right)$; б) $[-11;\ 1) \cup (1{,}5;\ 2) \cup [3;\ \pi) \cup$ $\cup\ (\pi;\ 10]$; в) 2; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.31.** а) $(-\infty;\ 0)$. **3.40.** а) $0 \leqslant a \leqslant 4$.
3.41. а) $a \geqslant 0$. **3.42.** а) $a \geqslant 0$.

4.02. а) $(-3{,}5;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 5)$; в) $(0;\ 7) \cup (18;\ +\infty)$; г) $\left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.
4.04. а) При $a \geqslant 10{,}5$ $\left(-\frac{a}{3};\ +\infty\right)$; при $a < 10{,}5$ $(-3{,}5;\ +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$ при $a < 25$; $(-\infty;\ 5) \cup (\sqrt{a};\ +\infty)$ при $a \geqslant 25$; в) $(-\infty;\ 6a) \cup (0;\ 7)$ при $a < 0$; $(0;\ 7)$ при $a = 0$; $(0;\ +\infty)$ при $0 < a < \frac{7}{6}$; $(0;\ 7) \cup (6a;\ +\infty)$ при $a \geqslant \frac{7}{6}$; г) $(-\infty;\ -8] \cup \left(\frac{4}{9};\ +\infty\right)$ при $a < -\frac{4}{9}$; $(-\infty;\ -8] \cup [-a;\ +\infty)$ при $-\frac{4}{9} \leqslant a < 8$; $\boldsymbol{R}$ при $a = 8$; при $a > 8$ $(-\infty;\ -a] \cup [-8;\ +\infty)$.
4.10. а) $(-3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 2{,}5)$; д) $(-\infty;\ 4]$; е) $(-\infty;\ 1]$.

4.13. а) $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -4\sqrt{3}\,] \cup [4{,}9;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 2)$. **4.14.** а) $(-\infty;\ 1]$; в) $(-\infty;\ -3] \cup \left(0;\ \frac{\sqrt{13}-3}{2}\right]$.

5.01. а) $(-3;\ 3)$; в) $\left[-\frac{1}{3};\ 5\right]$; д) -2. **5.02.** а) $(-\infty;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 0) \cup \left[\frac{22}{3};\ +\infty\right)$; д) $(-\infty;\ +\infty)$. **5.03.** а) $[0;\ 1] \cup [6;\ 7]$; в) $\left(-\frac{4}{3};\ 1\right)$; д) $(-\infty;\ +\infty)$. **5.06.** а) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; б) $[4;\ 12)$. **5.08.** а) $(-4;\ -1) \cup (1;\ 4)$; в) $(-9;\ 0) \cup (0;\ 2) \cup (2;\ 5)$. **5.10.** а) $(-\infty;\ -4) \cup \left(\frac{1-\sqrt{33}}{2};\ -2\right) \cup (-2;-1) \cup \left(\frac{1+\sqrt{33}}{2};\ +\infty\right)$; в) $\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};\ 3\right) \cup (3;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ -1) \cup (0{,}5;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

5.12. а) $\left(-\frac{4}{3};\ -\frac{2}{7}\right)$; г) $[-6;\ 0]$. **5.13.** а) $(-\infty;\ -13) \cup \left(\frac{1-\sqrt{21}}{3};\ 1\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{21}}{3};\ +\infty\right)$; г) $(-\infty;\ -1] \cup \left[\frac{5}{3};\ +\infty\right)$. **5.14.** в) $(-\infty;\ -\sqrt[3]{6}\,] \cup \left[\frac{1}{6};\ +\infty\right)$; г) $[-\sqrt[3]{6};\ -1] \cup [1;\ +\infty)$. **5.15.** а) $\left(-\frac{5}{3};\ -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3};\ 0\right)$; б) $(-\infty;\ -6] \cup \left[-\frac{4}{3};\ 0\right) \cup (0;\ +\infty)$; в) $\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \cup \left(\frac{-1\sqrt{13}}{6};\ 1\right)$; г) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. **5.17.** б) $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$. **5.18.** $(-\infty;\ +\infty)$ при $a < 0$; $(-\infty;\ 0)$ при $a = 0$; $\left(-\infty;\ \frac{a}{2}\right) \cup \left(\frac{a}{2};\ +\infty\right)$ при $a > 0$.

5.22. Если x_0 таково, что $f(x_0) \geqslant 0$, то $|f(x_0)| = f(x_0)$ и неравенство $|f(x_0)| \leqslant f(x_0)$ обращается в верное равенство $f(x_0) = f(x_0)$, т. е. каждое решение неравенства $f(x) \geqslant 0$ является решением неравенства $|f(x_0)| \leqslant f(x_0)$. Пусть x_1 таково, что $|f(x_1)| \leqslant f(x_1)$. Тогда $f(x_1)$ не может быть отрицательным, т. е. $f(x_1) \geqslant 0$. Таким образом, каждое решение неравенства $|f(x)| \leqslant f(x)$ является решением неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $|f(x)| \leqslant f(x) \Leftrightarrow f(x) \geqslant 0$. **5.23.** б) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right] \cup (0;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 2] \cup [3;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$. **5.25.** а) $(6;\ +\infty)$;

в) $\left(-\infty;\ -\frac{9}{14}\right] \cup [1;\ +\infty)$. **5.26.** а) $\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$; в) $\left(-2;\ -\frac{29}{37}\right)$. **5.27.** б) 1; г) −1. **5.29.** б) $(-3;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -1] \cup [0;\ +\infty)$. **5.30.** а) $\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$; б) $(-\infty;\ -2) \cup [2;\ +\infty)$; в) $\left(-2;\ -\frac{29}{37}\right)$; г) $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ -1] \cup (0;\ 2]$.

5.33. а) $(0;\ 2)$; в) $\left[-\frac{7}{3};\ +\infty\right)$. **5.35.** а) $(-\infty;\ -6) \cup (-5;\ +6)$; в) $(-\sqrt{6};\ -\sqrt{5}) \cup (0;\ 2) \cup (\sqrt{5};\ \sqrt{6})$.

5.38. а) $(-\infty;\ -3) \cup (-1;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$; в) $[-1;\ 4]$.

5.39. а) $\left[\frac{-5-\sqrt{21}}{2};\ \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{5-\sqrt{21}}{2};\ \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right]$;

б) $(-\infty;\ -1-\sqrt{2}] \cup [1-\sqrt{2};\ 0) \cup (0;\ \sqrt{2}-1] \cup [\sqrt{2}+1;\ +\infty)$;

д) $\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{17}}{2};\ \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$; е) $(-\infty;\ -1] \cup$ $\cup \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right] \cup [1;\ +\infty)$. **5.40.** а) $-\frac{3}{2}$; 2; б) $\left[-\frac{3}{2};\ 2\right]$; в) $\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right) \cup$ $\cup\ (2;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -2] \cup \left[-\frac{3}{5};\ +\infty\right)$. **5.41.** а) $[-5;\ 11]$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(-\infty;\ -5) \cup (11;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 2) \cup (2;\ 3]$. **5.42.** а) $[-2;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. **5.43.** а) 0; в) $\left[-3;\ \frac{-1-\sqrt{41}}{4}\right] \cup$ $\cup\ [1{,}5;\ 5]$; г) $\boldsymbol{R}$. *Указание*. Обозначим $u = x^2 + x$, $v = 2x^2 + x$. Тогда неравенство принимает вид $|u| + |v| \geqslant u + v$. Полученное неравенство справедливо при любых u и v; д) $(-\infty;\ 0) \cup$ $\cup\ (0;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$; е) $\left(-\infty;\ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2};\ +\infty\right)$. *Указание*.

Обозначим $u = x^2 + x - 3$, тогда $x^2 + x - 2 = u + 1$ и данное неравенство принимает вид:

$$|u| + |u + 1| \leqslant 2u + 1,$$

которое обращается в равенство при $u \geqslant 0$. Если $u < 0$, то неравенство не выполняется. Осталось решить неравенство $x^2 + x - 3 \geqslant 0$. **5.44.** а) $(-3;\ 1)$; б) $(-2;\ -1) \cup (3;\ 4)$. **5.45.** а) $\left[-\frac{63}{28};\ 0\right)$. *Указание*.

Докажите, что промежутки знакопостоянства функции $H(x) = |f(x)| - |g(x)|$ совпадают с промежутками знакопостоянства функции $S(x) = f^2(x) - g^2(x)$ и замените данное неравенство на неравенство $\frac{(2x+1)^2 - 4(x+4)^2}{(3x-1)^2 - (1+3x)^2} \leqslant 0$. **5.46.** $t < 9$. **5.47.** $t \leqslant 13$. **5.49.** Таких t не существует. **5.50.** $[11; +\infty]$. **5.51.** 25. **5.52.** 20. **5.53.** Если n — четное натуральное число, то $\min f(x) = \frac{n^2}{4}$. Если n — нечетное натуральное число, то $\min f(x) = \frac{n^2-1}{4}$.

6.01. а) $x < 1$; б) $x > 13\frac{2}{3}$; в) $x > \frac{1}{7}$; г) $x \leqslant 3\frac{2}{3}$. **6.02.** а) $a \geqslant 24$; б) $x \leqslant 0$; в) $x \leqslant \frac{5}{11}$; г) $x \leqslant \frac{1}{29}$. **6.03.** а) $-4 \leqslant x < 2$; б) $-0{,}25 \leqslant x < 1{,}25$; в), г) нет решений. **6.04.** а) $[0; 1{,}8]$; б) $\left[-\frac{1}{8}; 15\right]$; в) $\left\{\frac{5}{3}\right\}$; г) решений нет. **6.05.** а) $-17 \leqslant x \leqslant 1$; б) $-\frac{9}{17} \leqslant x \leqslant 3$; в) $\{-1\}$; г) решений нет.

6.06. а), в) $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$; г) R. **6.07.** а) $(-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$; б) $(-\infty; -2) \cup (12; +\infty)$; в) $(-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$; г) R. **6.08.** а) $(0; 4)$; б) $(0; 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}; 4)$; в) $[0; 4]$; г) $[2-\sqrt{5}; 1) \cup (3; 2+\sqrt{5}]$. **6.09.** а) $(-\infty; -10] \cup [3; +\infty)$; б) $(-\infty; -6) \cup (5; +\infty)$; в) $\{0; 1\}$; г) $[2-\sqrt{5}; 1) \cup (3; 2+\sqrt{5}]$. **6.10.** а) $[0; \sqrt{7}]$; б) $[0; \sqrt{7})$; в) $(\sqrt{7}; +\infty)$; г) $\{0\} \cup [\sqrt{7}; +\infty)$. **6.11.** а) $[0; 2] \cup \{-1\}$; б) $(-\infty; 4) \cup (-3; 3)$; в) $(2; +\infty)$; г) $(-\infty; -2]$. **6.12.** а) $\left[0; \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right]$; б) $\left(0; \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; 0)$; г) $(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right\}$. **6.13.** а) $(1{,}4; +\infty)$; б) $[1{,}4; +\infty)$; в) $\left(\frac{1}{3}; 1{,}6\right)$; г) $\left\{\frac{1}{3}\right\} \cup [1{,}6; +\infty)$. **6.14.** а) $[0; +\infty)$; б) $[0; 3) \cup (3; +\infty)$; в) $\left[-\frac{1}{3}; 2\right) \cup (4; +\infty)$; г) $\left\{-\frac{1}{3}\right\} \cup (0; 6)$. **6.15.** а) $[0{,}5; 3) \cup (5; +\infty)$; б) $\{-5{,}5\} \cup (-1; 3]$; в) $(13; 17)$; г) $\{0\} \cup [25; 35)$. **6.16.** а) $[1; 4]$; б) $[0; 1] \cup [16; +\infty)$; в) $[0; +\infty)$; г) решений нет. **6.17.** а) $[-3; 0]$; б) $[-1; 3]$;

в) $(-87; -6]$; г) $(-\infty; 3]$. **6.18.** а) $(4; 16)$; б) $[-1; 5]$; в) $(-\infty; -23) \cup (-1; 2]$; г) $\left(-\infty; -\frac{137}{3}\right]$. **6.19.** а) $[1; 2)$; б) $[0; 1]$; в) $(-\infty; -9)$; г) $(-\infty; -3] \cup \{-2\}$. **6.20.** а) $\left(\frac{11}{2}; 10\right]$; б) $\left[-\frac{2}{7}; -\frac{1}{7}\right)$; в) $\left(-\frac{34}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; г) $(-\infty; -1) \cup \{3\}$. **6.21.** а) $[0{,}25; 0{,}64) \cup (1; 4]$; б) $(2; 9)$; в) $(0; 1) \cup [4; 9)$; г) $[0; 1) \cup (4; 9)$. **6.22.** а) $(-\infty; -1) \cup [-0{,}5; 1{,}5)$; б) $(-10; -1] \cup (2; +\infty)$; в) $\left(-\frac{5}{4}; 1\right) \cup (3; +\infty)$; г) $\left[\frac{3}{7}; \frac{13}{28}\right) \cup \left(\frac{6}{7}; 1\right)$. **6.24.** а) $(1{,}5; +\infty)$; б) $\left[\frac{5}{8}; 17\right]$; в) $\left(-\frac{2}{3}; 5\right]$; г) $(-\infty; 1]$.

6.25. а) $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right]$; б) $[-0{,}25; 2)$; в) $\{1\} \cup [12; +\infty)$; г) 3.

6.26. а) $(-\infty; -8)$; б) $(-\infty; -6)$; в) $(-5; 2] \cup [4; +\infty)$; г) 7.
6.27. а) $D(f)$: $[0; +\infty)$; б) 9; в) $f(x) < 0$ при каждом $x \in (0; 9)$ и $f(x) > 0$ при каждом $x \in (9; +\infty)$. **6.28.** а) $D(f)$: $(-\infty; 0{,}6) \cup (0{,}6; +\infty)$; б) -3; в) $f(x) < 0$ при каждом $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0{,}6)$ и $f(x) > 0$ при каждом $x \in (0{,}6; +\infty)$. **6.29.** а) $D(f)$: $(-\infty; -\sqrt{7}) \cup (-\sqrt{7}; -1] \cup [5; +\infty)$; б) $2 \pm 3\sqrt{2}$; в) $f(x) < 0$ при каждом $x \in (-\sqrt{7}; 2 - 3\sqrt{2}) \cup [5; 2 + 3\sqrt{2})$ и $f(x) > 0$ при каждом $x \in (-\infty; \sqrt{7}) \cup (2 - 3\sqrt{2}; -1] \cup (2 + 3\sqrt{2}; +\infty)$. **6.30.** а) $D(f)$: $[1{,}5; +\infty)$; б) нулей нет; в) $f(x) < 0$ при каждом $x \in [1{,}5; +\infty)$. **6.31.** а) $D(f)$: $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{14}}{4}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{14}}{4}; +\infty\right)$; б) 1 и 23; в) $f(x) < 0$ при каждом $x \in [23; +\infty)$ и $f(x) > 0$ при каждом $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{14}}{4}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{14}}{4}; 1\right) \cup (1; 23)$. **6.34.** а) $(-1; 0{,}4)$; б) $\left[\frac{3 + \sqrt{33}}{3}; +\infty\right)$; в) $\left(\frac{11}{6}; 6 - \sqrt{14}\right] \cup [6 + \sqrt{14}; +\infty)$; г) $\left[4 - \sqrt{17}; \frac{7 - \sqrt{33}}{2}\right]$. **6.35.** а) $[-2; 1]$; б) $(-\infty; -6]$; в) $\left(-\infty; -\frac{42}{11}\right]$; г) $(-\infty; -2] \cup \left(\frac{49}{16}; +\infty\right)$. **6.36.** а) $(2; 10)$; б) $\left[-\frac{9}{4}; -\frac{36}{25}\right) \cup (4; +\infty)$; в) $[-5; -4) \cup (11; +\infty)$; г) $\frac{7}{5}$. **6.37.** а) $\left(-\frac{2}{3}; 7\right) \cup \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; б) $\left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup \left(1; 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; в) $\left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \{0\}$; г) $\left[1; \frac{5}{3}\right) \cup \{2\}$.

6.38. а) $\left[0;\ \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2};\ 5\right]$; б) $[8-\sqrt{55};\ 8-\sqrt{15}) \cup$ $\cup\ (8+\sqrt{15};\ 8+\sqrt{55}]$. **6.39.** а) $\left[\frac{1}{4};\ 1\right)$; б) $[1;\ 2) \cup (2;\ 4]$;

в) $[-1;\ 2(1-\sqrt{2})] \cup [4;\ 2(1+\sqrt{2})]$;

г) $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{33}}{8};\ 1\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right]$. **6.41.** а) 1,8;

б) 2. **6.42.** а) 4; б) 3. **6.44.** а) $[-1;\ \sqrt{2}\,]$. *Указание*. Неравенство сводится к неравенству $f(x) \leqslant f(\sqrt{2})$, где $x \in D(f) = [-1;\ +\infty)$;

б) $[0;\ \sqrt[4]{2}]$. **6.45.** $[0;\ \pi)$. **6.46.** $[0;\ 4]$.

7.01. а) При $a \leqslant -3$, $(-3;\ +\infty)$; при $a > -3$, $(a;\ +\infty)$; б) при $a \leqslant -3$ решений нет; при $a > -3$, $(-3;\ a)$; в) при $a \leqslant -3$, $(a;\ -3)$; при $a > -3$ решений нет; г) при $a \leqslant -3$, $(-\infty;\ a]$; при $a > -3$, $(-\infty;\ -3)$; д) при $a > -3$ решений нет; при $a = -3$, $\{-3\}$; при $a > -3$, $[a;\ -3]$; е) при $a < -3$ решений нет; при $a = -3$, $\{-3\}$; при $a \geqslant -3$, $[-3;\ a]$. **7.02.** а) При $a < 3$, $[a;\ 3]$; при $a = 3$, $\{3\}$; при $a > 3$, $[3;\ a]$; б) при $a < 0$, $(-\infty;\ 2a) \cup [a;\ +\infty)$; при $a = 0$, $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; при $a > 0$, $(-\infty;\ a] \cup (2a;\ +\infty)$. **7.04.** При $a = -3$. **7.05.** а) При $a \leqslant -3$, $(-3;\ 3)$; при $-3 < a < 3$, $(a;\ 3)$; при $a \geqslant 3$ решений нет; б) при $a < -3$ решений нет; при $a = -3$, $\{-3\}$; при $-3 < a \leqslant 3$, $[-3;\ a]$; при $a > 3$, $[-3;\ 3]$; в) при $a < -3$, $(a;\ -3] \cup [3;\ +\infty)$; при $-3 \leqslant a < 3$, $[3;\ +\infty)$; при $a \geqslant 3$, $(a;\ +\infty)$; г) при $a \leqslant -3$, $(-\infty;\ a]$; при $-3 < a \leqslant 3$, $(-\infty;\ 3)$; при $a > 3$, $(-\infty;\ 3] \cup (3;\ a]$. **7.08.** а) При $a \leqslant 0$, $(0;\ +\infty)$; при $a > 0$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{a}};\ 0\right) \cup$ $\cup \left(\frac{1}{\sqrt{a}};\ +\infty\right)$; б) при $a < 0$, $(0;\ -0{,}5a) \cup (-a;\ +\infty)$; при $a = 0$, $(0;\ +\infty)$; при $a > 0$, $(-a;\ -0{,}5a) \cup (0;\ +\infty)$; в) *Указание*. Использовать графоаналитический метод. При $a < 0$, $(-\infty;\ -2) \cup \left[\frac{2a}{1-a};\ 0\right)$; при $a = 0$, $(-\infty;\ -2)$; при $0 < a < 1$, $(-\infty;\ -2) \cup \left(0;\ \frac{2a}{1-a}\right]$; при $a = 1$, $(-\infty;\ -2) \cup$

$\cup (0; +\infty)$; при $a > 1$, $\left[\frac{2a}{1-a}; -2\right) \cup (0; +\infty)$. **7.09.** $[5; 7) \cup (11; 13]$.

7.10. а) $a = 7$; б) при любых a; в) $a \geqslant -2$; г) $-2 \leqslant a \leqslant 7$. **7.11.** а) $a = 7$; б) $a \geqslant 7$; в) $a > -2$; г) $-2 \leqslant a \leqslant 7$. **7.12.** а) При $a = -2$; б) при $a \leqslant -2$ или при $a \geqslant 7$; в) при всех a; г) при $-2 \leqslant a \leqslant 2{,}5$. **7.13.** $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. **7.14.** $(3; +\infty)$. **7.15.** $[-2; -0{,}5]$. **7.16.** При $a = 1$. Наибольшая длина равна 6. **7.17.** При $b > 0{,}5$. **7.18.** При $b > 1{,}41$. **7.19.** $\left[-\frac{14}{3}; 2\right)$. **7.20.** $(-\infty; -3) \cup (-1; 1)$. **7.21.** $\left[-\frac{2}{3}; 1\right]$. **7.22.** $(-2; 2]$. **7.23.** $(-6; 2)$. **7.24.** $a \leqslant -1$; $a \geqslant 0{,}5$.

7.25. $\left(-\frac{11}{12}; \frac{11}{4}\right)$. **7.26.** $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$. **7.34.** $[0; 2)$. **7.35.** а) -1 или 7; б) -1; 0; 2; ... ; 7. **7.36.** а) 2; б) -1; 0; 1; 2. **7.37.** а) Два значения: -101 и 101; б) двести три значения: -101; -100; -99; ... ; 101; в) три значения: 0; ± 1. **7.38.** $(-10; 74)$. **7.39.** а) При $a \leqslant 0$ решений нет; при $a > 0$, $[0; a)$; б) при $a < 0$ решений нет; при $a = 0$, $\{0\}$; при $a > 0$, $[0; a]$; в) при $a < 0$, $[0; +\infty)$; при $a \geqslant 0$, $(a; +\infty)$; г) при $a \leqslant 0$, $[0; +\infty)$; при $a > 0$, $[a; +\infty)$. **7.40.** а) При $a < 0$, $[0; +\infty)$; при $a > 0$, $(a^2; +\infty)$; б) при $a < 0$, $[0; +\infty)$; при $a > 0$, $(a^2; +\infty)$; в) при $a \leqslant 0$ решений нет; при $a > 0$, $[0; a^2]$; г) при $a \leqslant 0$ решений нет; при $a > 0$, $[0; a^2]$. **7.41.** а) При $a \leqslant 0$, $(13; +\infty)$; при $\sqrt{13} \geqslant a > 0$, $[0; a^2) \cup (13; +\infty)$; при $a > \sqrt{13}$, $[0; 13) \cup (a^2; +\infty)$; б) при $a \leqslant 0$, $[13; +\infty)$; при $\sqrt{13} > a > 0$, $[0; a^2) \cup [13; +\infty)$; при $a = \sqrt{13}$, $[0; 13) \cup (13; +\infty)$; при $a > \sqrt{13}$, $[0; 13] \cup (a^2; +\infty)$; в) при $a < 0$, $[0; 13)$; при $a = 0$, $(0; 13)$; при $\sqrt{13} \geqslant a > 0$, $(a^2; 13)$; при $a > \sqrt{13}$, $(13; a^2)$; г) при $a < 0$, $[0; 13]$; при $a = 0$, $(0; 13]$; при $\sqrt{13} > a > 0$, $(a^2; 13]$; при $a = \sqrt{13}$ решений нет; при $a > \sqrt{13}$, $[13; a^2)$. **7.42.** а) При $a \leqslant 0$, $[9; +\infty)$; при $0 < a \leqslant 9$, $[0; a) \cup [9; +\infty)$; при $a > 9$, $[0; a] \cup (a; +\infty)$. **7.43.** а) При $a < 0$, $[0; 1) \cup (2; +\infty)$; при $1 > a > 0$, $(a^2; 1) \cup (2; +\infty)$; при $a = 1$, $(2; +\infty)$; при $\sqrt{2} \geqslant a > 1$, $(1; a^2) \cup (2; +\infty)$; при $a > \sqrt{2}$, $(1; 2) \cup (a^2; +\infty)$. **7.44.** а) При $a \leqslant -5$ решений нет; при $a > -5$, $[3; a^2 + 10a + 28)$; б) при $a < -5$, $[-3; +\infty)$; при $a \geqslant -5$, $(a^2 + 10a + 28; +\infty)$. **7.45.** При $a > 5$, $\{3\}$. **7.46.** При $a < 10$, $\{5\}$. **7.47.** При $0 \leqslant a \leqslant 2$, $\{a\}$. **7.48.** 3. **7.49.** При $p \leqslant 1$, $[1; 5]$;

при $1 < p < 5$, $[p;\ 5]$; при $p = 5$, $\{5\}$; при $p > 5$ решений нет. **7.50.** При $a \leqslant -1$ решений нет; при $-1 < a \leqslant 0$, $[0;\ a^2 + 2a + 1]$; при $a > 0$, $[a^2;\ a^2 + 2a + 1]$. **7.51.** При $a < -3$, $[0;\ 9] \cup [a^2;\ +\infty)$; при $a = -3$, $[0;\ +\infty)$; при $-3 < a < 0$, $[0;\ a^2] \cup [9;\ +\infty)$; при $a = 0$, $[3;\ +\infty)$; при $0 < a \leqslant 81$, $[0;\ \sqrt{a}) \cup [9;\ +\infty)$; при $a > 81$, $[0;\ 9] \cup (\sqrt{a};\ +\infty)$.

7.52. $(0;\ 2]$. **7.53.** а) Решений нет при $p \leqslant 0$; $(0;\ p)$ при $p > 0$; б) решений нет при $p < 0$; $\{0\}$ при $p = 0$; $[0;\ p]$ при $p > 0$; в) $(0;\ +\infty)$ при $p \leqslant 0$; $(p;\ +\infty)$ при $p > 0$; г) $[0;\ +\infty)$ при $p \leqslant 0$; $\{0\} \cup [p;\ +\infty)$ при $p > 0$. **7.54.** а) $(a;\ 0)$ при $a < 0$; решений нет при $a \geqslant 0$; б) $[a;\ 0]$ при $a < 0$, $\{0\}$; при $a \geqslant 0$; в) $(0;\ +\infty)$ при $a \leqslant 0$; $(a;\ +\infty)$ при $a > 0$; г) $\{a\} \cup [0;\ +\infty)$ при $a \leqslant 0$; $[a;\ +\infty)$ при $a > 0$. **7.55.** а) $(a - 2;\ a + 2)$ при любом a; б) $[a - 2;\ a + 2]$ при любом a; в) решений нет при любом a; г) $\{0\}$ при любом a. **7.56.** а) $(-\infty;\ a - 5) \cup (a + 5;\ +\infty)$ при любом a; б) $(-\infty;\ a - 5] \cup [a + 5;\ +\infty)$ при любом a; в) $\boldsymbol{R}$ при любом a; г) $(-\infty;\ a) \cup (a;\ +\infty)$ при любом a. **7.57.** а) При $a \leqslant 0$ решений нет; при $a > 0$, $(7 - a;\ 7 + a)$. **7.58.** а) При $a \leqslant 0$ решений нет; при $a > 0$, $(0{,}5a;\ +\infty)$. **7.64.** а) При $a < 8$ любое действительное число; при $a \geqslant 8$, $(-\infty;\ -0{,}5a - 1) \cup (0{,}5a - 1;\ +\infty)$; б) при $a \leqslant 8$ решений нет; при $a > 8$, $(-0{,}5a - 1;\ -5) \cup (3;\ 0{,}5a - 1)$; в) при $a \leqslant 8$ любое действительное число; при $a > 8$, $(-\infty;\ -0{,}5a - 1] \cup [0{,}5a - 1;\ +\infty)$. **7.67.** а) При $4 < a \leqslant 5$; б) $4 \leqslant a < 5$; в) $4{,}4 < a \leqslant 4{,}6$; г) $7 - \sqrt{7} \leqslant a < 1 + \sqrt{7}$. **7.68.** а), б) Таких значений a нет; в) $2{,}6 < a \leqslant 3{,}4$; г) $2{,}6 \leqslant a < 3{,}4$. **7.69.** а) При $a \leqslant 2$, $\left[\dfrac{2a - 3}{2};\ +\infty\right)$; при $a > 2$, $\{0{,}5\} \cup \left[\dfrac{2a - 3}{2};\ +\infty\right)$; б) $a > 1$, $(-\infty;\ a] \cup [a^2;\ +\infty)$; $a = 1$, $a = 0$, $\boldsymbol{R}$; $0 < a < 1$, $(-\infty;\ a^2] \cup [a;\ +\infty)$; $a < 0$, $(-\infty;\ a] \cup [a^2;\ +\infty)$.
7.70. При $a < -1$, $(0;\ -a - \sqrt{a^2 - 1}] \cup [-a + \sqrt{a^2 - 1};\ -a + \sqrt{a^2 + 1}]$; при $a \geqslant -1$, $(0;\ a + \sqrt{a^2 + 1}]$. **7.71.** При $a < 1$, $[a;\ 1)$; при $a = 1$ решений нет; при $a > 1$, $(1;\ a]$. **7.72.** $(-5;\ 1)$. **7.73.** -9. **7.74.** -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3. **7.75.** $[-\sqrt{3};\ -1] \cup \{0;\ 1\}$. **7.76.** $[-\sqrt{3};\ -1] \cup \{0;\ 1\}$.

8.18. а), б) $2\sqrt{2}$; в), г) 5; д) $\sqrt{a^2 + b^2}$. **8.19.** а) $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{\sqrt{17}}{3}$; г) $\dfrac{b^2 - a^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}$. **8.26.** а) $(-1;\ 2)$; б) $(-2;\ 2]$; в) $[0;\ 1]$; г) $(-\infty;\ 4) \cup \cup (4;\ +\infty)$. **8.46.** $(2;\ 3)$.

9.13. а) $(-\infty; -x)$; б) $(-x; +\infty)$; в) при $y \leqslant -1$ $x \geqslant 2y + 3$, при $y > -1$ $x \geqslant 1$; г) при $y \leqslant 2$ $(-\infty; -2] \cup (-y; 2 - y)$, при $y > 2$ $(-\infty; -y) \cup \cup (-y; 2 - y)$. **9.18.** а) $(-\infty; 3]$ при $a > -2$; $[3; +\infty)$ при $a < -2$. **9.21.** а) Все внутренние точки квадрата с вершинами в точках (4; 0), (−4; 0), (0; 4), (0; −4), включая его границу, $a = \pm 4$; б) все внутренние точки квадрата с вершинами в точках (−1; −2), (−1; 8), (4; 3), (−6; 3), включая его границу, $a = -2$, $a = 8$; в) все внутренние точки ромба с вершинами в точках (3; 0), (−3; 0), (0; 2), (0; −2), включая его границу, $a = \pm 2$; г) $a = -6$, $a = 4$. **9.27.** $a \in \left(0; \frac{2}{3}\right) \cup \cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$. **9.28.** $b \in (0; 3) \cup \{5\}$. **9.31.** $8(\pi + \sqrt{3})$. **9.33.** а) 2; б) −8. **9.34.** а) 6; б) 16. **9.35.** 4,6. **9.36.** 12. **9.38.** $1{,}8 \leqslant x \leqslant 3$; $y = \frac{5}{3}$. **9.39.** (−0,5; 0,25).

10.07. а) −6; 6; б) $-2\sqrt{7}$ и $2\sqrt{7}$; в) $6 + 2\sqrt{7}$; $6 - 2\sqrt{7}$; $-6 + 2\sqrt{7}$; $-6 - 2\sqrt{7}$. **10.14.** Например, $9 - \pi$ и $8 + \pi$. **10.15.** Например, $\sqrt{5}$ и $\frac{\sqrt{5}}{10}$. **10.16.** (1; 1); (1; 2); (2; 1). **10.17.** $x = -123\,456\,789$. **10.18.** (8; −2). **10.19.** [−13; 13]. **10.20.** $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$. **10.21.** Да. **10.22.** Да. **10.23.** Нет. **10.24.** Да. **10.25.** Нет. **10.26.** Да. **10.27.** Нет. **10.28.** Нет. **10.29.** $a = 1$.

11.02. а) $\frac{\sqrt{2}}{10}$; $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$; б) решений нет. **11.03.** а) (1; 1); б) решений нет. **11.04.** а) При $a \neq -2$; б) при $a = -2$; в) таких значений a не существует. **11.05.** а) При $a \neq 0$; б) таких значений a не существует; в) при $a = 0$. **11.06.** а) При $a \neq \pm 2$; б) при $a = \pm 2$; в) таких значений a не существует. **11.07.** а) При $a \neq \frac{2}{3}$ и $a \neq 3$; б) при $a = 3$; в) при $a = \frac{2}{3}$. **11.11.** а) (0; 2); (0; −2); б) $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(1; \frac{3}{2}\right)$; $\left(3; \frac{1}{2}\right)$; $\left(3; \frac{5}{2}\right)$; в) (2; 1). **11.12.** а) (1; 1); в) решений нет. **11.13.** а) $\left(\frac{9}{17}; \frac{23}{17}\right)$; г) (1; 1); (−1; −1). **11.14.** а) $\left(2; \frac{3}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$;

г) (1; −1); (7; 8). **11.15.** в) $\left(\frac{1}{7};\ -\frac{3}{7}\right)$ и $(t;\ -t)$, $t \in \boldsymbol{R}$. **11.21.** б) (±1; ±1). **11.23.** а) $(\sqrt{10};\ -\sqrt{10})$; $(-\sqrt{10};\ \sqrt{10})$; (4; 2); (−4; −2); б) нет решений. **11.25.** б) $a = 1;\ -0{,}5;\ \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$. **11.30.** в) (−6; −2); д) (1; −1); е) (1; −2); $\left(-\frac{2}{3};\ 3\right)$. **11.33.** а) (−1; −3); (−3; −1); б) (5; 5); в) $\left(-3;\ -\frac{7}{3}\right)$; $\left(-\frac{7}{3};\ -3\right)$; г) $(2\sqrt{2} + 5;\ 2\sqrt{2} - 5)$; $(2\sqrt{2} - 5;\ 2\sqrt{2} + 5)$.

11.35. а) $a = 4$; б) $a \neq 4$; в) ни при каких значениях. **11.36.** а) $a = 2$; б) $a \neq 2$; в) ни при каких значениях. **11.38.** При $a = 0$, (1; 0); при $a \in \left(-\frac{1}{4};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2};\ \frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2a}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2};\ \frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2a}\right)$; при $a = -\frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{2};\ -2\right)$; при $a = \frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$; при $a \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4};\ +\infty\right)$ решений нет. **11.42.** а) (2; 2); б) (2; ±4); (17; ±1); в) (0; 3); д) (0; 2); (1; 1); (1; 3); (2; 2); е) (−3; −2); (−1; −2); (1; 2); (3; 2); ж) (0; 0); з) (−5; 1); (3,1). **11.43.** а) (−4; −3). *Указание*. Записать уравнение в виде $(x - y + 1)^2 + (2y - x + 2)^2 = 0$; б) $\left(-\frac{4}{7};\ -\frac{1}{7}\right)$. *Указание*. Записать уравнение в виде $(5x + y + 3)^2 + (7y + 1)^2 = 0$; в) (±1; ±1) — всего четыре пары. **11.44.** б) $(a;\ a;\ a)$, $a \in \boldsymbol{R}$; в) (−1; 2; 3); г) (−0,5; 0,5; 0); д) (±1; ±1; ±1) — всего восемь троек. **11.45.** а) (2; 1; 3); в) $\left(\frac{b + c}{2};\ \frac{a + c}{2};\ \frac{a + b}{2}\right)$. **11.47.** б) Все тройки чисел вида $\left(t;\ -\frac{3\sqrt{3}}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{4} - t\right)$, где $t \in \boldsymbol{R}$.

12.01. а) (2; 3); (3; 2); б) (1; 2); (2; 1); г) (1; 2); (2; 1). **12.06.** (1; −4); (−4; 1); $(-1 + \sqrt{6};\ -1 - \sqrt{6})$; $(-1 - \sqrt{6};\ -1 + \sqrt{6})$. **12.07.** а) (44; −22); б) (2; 2); (−2; −2); в) (1; 2); (−1; −2); г) (1; 2); (−1; −2). **12.09.** а) (−1; 0); $\left(-1;\ \frac{3}{2}\right)$; (0; 1); б) (−2; −6); (2; 6);

в) (1; 2); (−4; ±3); (4; −1); г) (1; 2); (−1; 0). **12.12.** а) (2; −1); (−2; 1). **12.13.** а) (0; 0); б) $(3t; 0; -t)$, $t \in \mathbf{Z}$; в) $(3t; 0; -t)$, $t \in \mathbf{Z}$; г) $(3t; 0; -t)$, $t \in \mathbf{Z}$. **12.14.** а) (0; 0); б) (5; 5), (9; 3); в) (1; −1), (−1; 1), $\left(5\sqrt{\frac{2}{7}}; \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$, $\left(-5\sqrt{\frac{2}{7}}; -\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$; г) (1; −1), (−1; 1), $\left(10\sqrt{\frac{2}{111}}; -\sqrt{\frac{2}{111}}\right)$, $\left(-10\sqrt{\frac{2}{111}}; \sqrt{\frac{2}{111}}\right)$.
12.15. а) При $a = -1$, (−1; −1); б) при $a = 0{,}125$, (1; 1); в) при $a = -1$, (2; 2); при $a = 0{,}75$, (−1,5; −1,5); г) при $a = 9$, (3; 3). **12.16.** а) 8; б) 18; в) 2; г) −1, 3.

13.01. б) (2; 0); (−2; 0). **13.02.** б) (4; 2); $\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

13.03. б) $(\sqrt{30}; 0)$; (5; 1). **13.04.** б) $\left(1; \frac{2}{3}\right)$. **10.05.** б) $\begin{cases} x \geqslant -5, \\ y \geqslant 2. \end{cases}$

13.06. б) (0; 7); (0; −7); $\left(\frac{\sqrt{7849} - 3}{16}; \frac{3\sqrt{7849} - 9}{80}\right)$; $\left(\frac{-3 - \sqrt{7849}}{16}; \frac{-9 - 3\sqrt{7849}}{80}\right)$. **13.07.** б) Решений нет; г) (4; 1); $\left(9; \frac{4}{9}\right)$.

13.08. а) (0; 1); $\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$; б) (1; 0). **13.09.** б) (6; −1). **13.11.** 10. **13.12.** 6. **13.13.** 7. **13.14.** −5. **13.15.** 2. **13.16.** 2. **13.17.** 6. **13.18.** −3. **13.19.** 6. **13.20.** 5. **13.21.** 15. **13.22.** 21. **13.23.** 5. **13.24.** 5. **13.25.** 10. **13.26.** а) (4; 5); б) (3; 2). **13.27.** а) $a \in (-\infty; 1) \cup \{1{,}25\}$; б) $a \in [1; 1{,}25)$. **13.28.** $a \in (1{,}25; +\infty)$.
13.29. а) $a \in (-\infty; 8) \cup (16; +\infty)$; б) $a = 8$; в) $a \in (8; 16]$.
13.30. а) $\left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$; (0; 2). **13.31.** б) (−5,5; 5,5); (−3,25; 3,25).

13.32. б) $\begin{cases} x \in [0; 2] \text{ и } (0; -1), \\ y \in [0; 1], \\ x + y \geqslant 1. \end{cases}$ **13.33.** б) (−5; −3); (−1; −3); (1; 1).

13.34. $a = 1{,}5$ — одно решение; $\frac{3}{2} < a < 3$ — два решения; $a \in (-\infty; -3) \cup [3; +\infty)$ — одно решение, $a \in \left[-3; \frac{3}{2}\right)$ — нет решений. **13.35.** $a \in [3; +\infty)$ — одно решение; $a \in (-\infty; -3)$ — нет решений. **13.36.** $a \in \left[-\frac{4}{3};\ +\infty\right)$ — одно решение; $a \in \left(-\infty;\ -\frac{4}{3}\right)$ — решений нет. **13.37.** При $a < -4$ решений нет; при $0 < a \leqslant 4$: если $x > 0$, то $\begin{cases} x = \frac{a}{4}, \\ y = \frac{a+16}{4}, \end{cases}$ если $x \in (-2;\ 0)$, то $\begin{cases} x = -\frac{a}{2}, \\ y = \frac{8-a}{2}, \end{cases}$ если $x \in (-4;\ -2)$ и $x \neq -3$, то $\begin{cases} x = \frac{a}{4} - 3, \\ y = 3 - \frac{a}{4}, \end{cases}$ если $x < -4$ $x \neq -6$ и $x \neq -8$, то $\begin{cases} x = \frac{-12-a}{2}, \\ y = \frac{12+a}{2}; \end{cases}$ при $a = 0$: $\begin{cases} x = 0, \\ y = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3, \\ y = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -6, \\ y = 6; \end{cases}$ при $a = 4$: $(1;\ 5)$, $(-2;\ 2)$, $(-8;\ 8)$; при $a > 4$: $\begin{cases} x = \frac{a}{4}, \\ y = \frac{a+16}{4}, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{-12-a}{2}, \\ y = \frac{12+a}{2}. \end{cases}$

13.38. б) $(-5;\ -5)$; $(5;\ 5)$. **10.39.** б) $(1;\ 1)$; $(1;\ -2)$; $(-2;\ 1)$. **13.40.** а) $(1;\ -1)$; $(-1;\ 1)$; б) $(1;\ 2)$; $(2;\ 1)$.
13.41. б) $a \in \left(-2;\ -\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}\right) \cup \left(\sqrt{2\cdot\sqrt{2}};\ 2\right)$;
в) $a = 0{,}01024$. **13.42.** а) $a \in (-\infty;\ -3] \cup [4;\ +\infty)$; б) $a \in (-\infty;\ 2)$.
13.43. $a \in \left[-1;\ -\frac{7}{8}\right)$.

14.01. 30 км/ч; 10 км. **14.04.** 4 км. **14.06.** За 2 ч или за 6 мин. **14.07.** 90 км/ч; 96 км/ч. **14.08.** 27 км/ч; 36 км/ч. **14.10.** Скорости лыжников равны 5 км/ч и 6 км/ч. **14.11.** $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. **14.13.** 15 ч 05 мин; 127,5 км. **14.14.** 12 км/ч; 10,5 км/ч. **14.15.** 35 км/ч; 15 км/ч. **14.16.** 3 км/ч. **14.17.** 40 км/ч. **14.18.** Катер прибыл в пункт B в 4 ч 48 мин. **14.19.** 90 км/ч. **14.20.** 330 км. **14.21.** В 10 ч. **14.22.** $\frac{l}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)$; $\frac{l}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$. **14.24.** 84 км, 6 км/ч, 4 км/ч. **14.26.** Через 2 ч. **14.32.** Первый — за 10 ч, второй — за 8 ч. **14.33.** 10 мин. **14.34.** 65 ч и 104 ч или 72 ч и 90 ч. **14.35.** Оба за 10 ч. **14.37.** За 20 ч и за 12 ч. **14.38.** За 4 ч. **14.39.** 12 ч; 24 ч.

14.40. $\frac{3}{11}\cdot 100\%$. **14.41.** а) Не успеют; б) нельзя дать определенного ответа. **14.42.** Вес первоначального сплава 3 кг, его проба 0,8. **14.43.** 10 кг; 69%. **14.44.** 9 кг и 3 кг. **14.45.** Было куплено 6 тетрадей. **14.46.** 187. **14.47.** 603. **14.48.** 71. **14.49.** 41; 31. **14.50.** Каждые часы пробили по 11 раз. **14.51.** 120 дней. **14.52.** 24 и 7 деталей. **14.53.** В первой группе 22 студента, во второй — 31 студент. **14.55.** Прогадал. **14.56.** 20 см.

15.08. в) $[\pi; +\infty)$; г) $a < -1$, $[a; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; $a = -1$, $(-1; 1) \cup (1; +\infty)$; $-1 < a < 1$, $[a; 1) \cup (1; +\infty)$; $a = 1$, $(1; +\infty)$; $a > 1$, $[a; +\infty)$. **15.09.** а) $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{7-\sqrt{41}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{41}}{2}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{7-\sqrt{41}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{41}}{2}; 12\right) \cup (12; +\infty)$; в) $a < 0$, $(-\infty; a) \cup (a; 0) \cup \left(0; \frac{7-\sqrt{41}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{41}}{2}; +\infty\right)$; $a = 0$, $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{7-\sqrt{41}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{41}}{2}; +\infty\right)$; $0 < a < \frac{7-\sqrt{41}}{2}$, $(-\infty; 0) \cup (0; a) \cup \left(a; \frac{7-\sqrt{41}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{41}}{2}; +\infty\right)$; $a = \frac{7-\sqrt{41}}{2}$, $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{7-\sqrt{41}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{41}}{2}; +\infty\right)$; $\frac{7+\sqrt{41}}{2} > a > \frac{7-\sqrt{41}}{2}$, $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{7-\sqrt{41}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{41}}{2}; +\infty\right)$;

$a = \frac{7+\sqrt{41}}{2}$, $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{7-\sqrt{41}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{41}}{2}; +\infty\right)$; $a > \frac{7+\sqrt{41}}{2}$, $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{7-\sqrt{41}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{41}}{2}; 0\right) \cup (a; +\infty)$. **15.10.** $[-8; 1]$; б) $[-3; 1]$; в) $\{1\}$; г) $a \leqslant -8$, $[-8; 1]$; $-8 < a < 1$, $[a; 1]$; $a = 1$, $\{1\}$; $a > 1$, $\varnothing$. **15.11.** а) $(-\infty; 1]$; б) $[-3; -2) \cup (-2; 1]$; в) $\{1\}$; г) $a < -9$, $[-8; 1]$; $-9 < a \leqslant -8$, $[-8; a+1) \cup (a+1; 1]$; $-8 < a < 0$, $[a; a+1) \cup (a+1; 1]$; $a = 0$, $[0; 1)$; $0 < a < 1$, $[a; 1]$; $a = 1$, $\{1\}$; $a > 1$, $\varnothing$. **15.12.** а) $[-5; +\infty)$; б) $[3; +\infty) \cup \{0\}$; в) $b < 0$, $[b; +\infty)$; $b = 0$, $[0; +\infty)$; $b > 0$, $[b; +\infty) \cup \{0\}$.

15.13. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $[-1{,}8; 1{,}8]$; в) $a \leqslant 0$, $(-\infty; +\infty)$; $a > 0$, $\left[-\frac{9}{a}; \frac{9}{a}\right]$. **15.14.** а) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1]$; б) $[-3; -2]$; в) $(-3; -2]$; г) $(-\infty; -3) \cup (-3; -0{,}5) \cup (-0{,}5; 1]$; д) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1]$. **15.15.** а) $[4; 5]$; б) $[4; 5)$; в) $(-1; 0) \cup [4; 5]$; г) $[-1; 0) \cup [4; 5)$; д) $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$; е) $[0; 5]$. **15.16.** а) $[-4; 8]$; б) $[-4; 8]$; в) $[-4; 8)$; г) $[-4; 5) \cup (5; 8]$. **15.17.** а) $[-3; 11]$; б), в) $[-3; 3]$. **15.18.** а) $[0; 10]$; б) $[-6; 4]$; в) $[-1{,}5; 3{,}5]$; г) $\left[-23\frac{1}{3}; 10\right]$; д) $\left[-3{,}5; \frac{8}{7}\right]$; е) $[0; \sqrt{7}]$; ж) $\left[-4\frac{1}{3}; -3\frac{6}{7}\right]$; з) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{7}\right]$; и) $[0; 25]$. **15.19.** $a \leqslant -11$. **15.20.** $a \geqslant 4$. **15.21.** $a > 0$ — луч; $a = 0$ — пустое множество; $a < 0$ — отрезок; точка и множество всех действительных чисел не будут образовываться ни при каких значениях a. **15.24.** а) $b = (-3; -2] \cup \{-31\}$; б) $b = [5{,}5; 6{,}5) \cup \{-29\}$; в) $b = (-\infty; -31) \cup (-31; -29) \cup (-29; -3] \cup \cup [6{,}5; +\infty)$; г) $b = (-\infty; -32) \cup (-31; -4] \cup [4{,}5; +\infty)$; д) $b = (-3; 3{,}5)$; е) $b = [-32; -31] \cup (-4; 3{,}5)$. **15.25.** а) $b = (8; 9] \cup \{-\pi - 1\}$; б) $b = [-9; -8) \cup \{-\pi + 1\}$; в) $b = [-8; -\pi - 1) \cup (-\pi - 1; -\pi) \cup \cup (-\pi; -\pi + 1) \cup (-\pi + 1; 8]$; г) $b = [-9; -\pi - 1) \cup (-\pi - 1; -\pi) \cup \cup (-\pi; -\pi + 1) \cup (-\pi + 1; 7]$; д) $b = (8; 9]$; е) $b = [-\pi - 2; -\pi - 1] \cup \cup (7; 8]$. **15.26.** а) $x = 2$; б) $\varnothing$; в) $x = 3$ при $a = 3$; $x = -3$ при $a = -3$. **15.38.** а) $\left(0; \frac{1}{4}\right)$; б) $(0; 1]$; в) $\left[-\frac{1}{6}; 0\right)$; г) $(0; 10]$. **15.39.** а) $(1; 1{,}25]$; б) $[0; 1)$; в) $\left[-\frac{7}{6}; -1\right)$. **15.40.** а) $[0; +\infty)$; б) $[\sqrt{14}; +\infty)$; в) $(-\infty; 1]$; г) $(-\infty; -4]$. **15.41.** а) $[0; 3]$; б) $[-9; 5]$; в) $[-9; 5]$; г) $[5; 9]$. **15.43.** а) $[1; 5]$; б) $[0; 9)$. **15.44.** а), в) $[-3; 5]$; б), г) $[-1; 7]$. **15.45.** а) $[-1; 10]$; б) $[-1; 32]$; в) $[-5; 72]$; г) $[-68; 9]$. **15.46.** а) $[-1{,}8; 4{,}6]$; б) $\left[-\frac{11}{7}; \frac{13}{7}\right]$. **15.47.** а) 1; 2; 3; б) 2; 3; 4; 5; 6; 7; в) нет целочисленных значений; г) 0; 1; 2; 3; 4; 5. **15.48.** а) $[0; 25]$; б) $[-27; 125]$; в) $[0; 5]$; г) $[1; 3]$. **15.49.** а) $[-12; +\infty)$; б) $[-24; +\infty)$; в) $[-8; +\infty)$; г) $a < -2$ $x \in \left[-\frac{1}{4}(a + 2)^2 - 8; +\infty\right)$; $-2 \leqslant a \leqslant 2$ $x \in [-8; +\infty)$; $a > 2$ $x \in \left[\frac{1}{4}(a - 2)^2 - 8; +\infty\right)$. **15.50.** а), б) $\boldsymbol{R}$. **15.51.** а) $\{-1\}$; б) $\{-1; 1\}$. **15.52.** а) $(-\infty; -5) \cup$

$\cup (-5; +\infty)$; б)—г) $\boldsymbol{R}$. **15.53.** а) $[-3; +\infty)$; б) $[-3; 1) \cup (1; +\infty)$; в) $(-3; +\infty)$; г) $[-3; +\infty)$ $a < -3$ $(-3; +\infty)$; $a = -3$; $[-3; a) \cup (a; +\infty)$ $a > -3$. **15.54.** а) $[-1; 1]$; б) $(-\infty; -1]$. **15.55.** а) $D(f) = \boldsymbol{R}$; $b \geqslant -5$; б) $a \geqslant -7$; $E(f) = [-7; +\infty)$. 1) Сначала находим такие значения a, при которых есть хотя бы один корень (через D). Там, где $y = a$ (прямая пересекает график $y = f(x)$), имеется хотя бы один корень для $f(x) = a \Rightarrow$ там есть график, т. е. его область дополнительных значений. 2) $y = a$ — горизонтальная прямая. Если нам известно, где есть функция и какое ее значение, то нетрудно видеть, что $y = a$ будет пересекать график в месте, где его значение a, т. е. если $a \in E(f)$, то $y = a$ пересечет $f(x)$ (график). **15.56.** $\boldsymbol{R}$.

15.57. а) $a \in [-2; 2]$; $E(y) = [-2; 2]$. **15.58.** а) $(-\infty; -4\sqrt{2}] \cup [4\sqrt{2}; +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$. **15.59.** а) $\left(-\infty; \frac{12 + 2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{12 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $[3 - \sqrt{19}; 3 + \sqrt{19}]$. **15.60.** а) $x = 2$; б) решений нет; в) $x = 1$.

16.40. а) $S = \frac{8}{a}$ при $0 < a \leqslant 1$; $S = 16 - 8a$ при $a > 1$; б) $S = 16 - \frac{8}{a}$ при $0 < a \leqslant 1$; $S = 8a$ при $a > 1$. **16.41.** а) $S = -\frac{a^2}{2}$ при $0 < a \leqslant 4$; $S = -\frac{a^2}{2} + 8a - 16$ при $8 > a > 4$; б) $S = 16 - \frac{a^2}{2}$ при $0 < a \leqslant 4$; $S = \frac{(8 - a)^2}{2} + 8a - 16$ при $8 > a > 4$.

16.42. а) $f(x) = \begin{cases} 60t & \text{при } 0 < t \leqslant 4; \\ 240 & \text{при } 4 < t \leqslant 5; \\ 240 - 80(t - 5) & \text{при } 5 < t \leqslant 8; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 240 - 60t & \text{при } 0 < t \leqslant 4; \\ 0 & \text{при } 4 < t \leqslant 5; \\ 80(t - 5) & \text{при } 5 < t \leqslant 8; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} |120 - 60t| & \text{при } 0 < t \leqslant 4; \\ 120 & \text{при } 4 < t \leqslant 5; \\ |120 - 80(t - 5)| & \text{при } 5 < t \leqslant 8. \end{cases}$

16.47. а) $-\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{19}{6}$; г) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{3x}{4}$. **16.61.** а) $P(t) = 1000(t + 3)$; б) $P(t) = 3000 + (1000 + 5k)t$ при $1 \leqslant t \leqslant 11$, $P(12) = 1200 + 60k$.

17.06. а) $\{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$. **17.09.** $a = -2$. **17.10.** $a = 1$. **17.11.** $-1 \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$. **17.12.** При $-2 < a < -1$ или при $a > 2$.

17.30. а) $(-\infty; 0]$ — возрастание, $[0; +\infty)$ — убывание; б) $(-\infty; -3]$ — возрастание, $[-3; +\infty)$ — убывание; в) $(-\infty; 1)$ — убывание, $(1; +\infty)$ — убывание; г) $(-\infty; -4)$ — возрастание, $(-4; 2]$ — возрастание, $[2; 8)$ — убывание; $(8; +\infty)$ — убывание; **17.34.** а) $(-\infty; -3]$ — убывание, $[-3; +\infty)$ — возрастание; б) $[-5; 0]$ — возрастание, $[0; 5]$ — убывание. **17.36.** а) $x = -2$; б) $\left(-2{,}5; -2\frac{1}{3}\right) \cup [-2; 1)$.

17.37. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. **17.38.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. **17.40.** $(-1; 1)$.

17.43. а) 5; б) 4; в) $\frac{1}{4}$; г) 0. **17.52.** а) Наибольшее — 2; наименьшее не достигается; б) наибольшее — 1; наименьшее — -1; в) наибольшее — $\frac{1}{3}$; наименьшее не достигается; г) наименьшее — $-\frac{1}{6}$; наибольшее — 1. **17.54.** $\frac{1}{2}$. **17.55.** а) 2; б) решений нет. **17.56.** а) 1; б) 2; в) 4; г) $\frac{n}{2}$. **17.57.** а) При всех значениях a: наименьшее — $5a - 3$; наибольшее — $5a + 5$; б) при всех значениях a: наименьшее — $-a - 5$; наибольшее — $-a + 4$. **17.59.** а) $a < 2$ наибольшее — $a^2 - 4a$; наименьшее — 5; $5 \geqslant a \geqslant 2$ наибольшее — 5; наименьшее — -4; $a > 5$ наибольшее — $a^2 - 4a$; наименьшее — -4. **17.60.** а) Наименьшее — 8; наибольшее — $202 + \sqrt{34}$; б) наименьшее — 8; наибольшее — $102 + \sqrt{34}$. **17.61.** а) Наименьшее — 0; наибольшее — 36; б) наименьшее — -29; наибольшее — 10; в) наименьшее — 2; наибольшее — 66. **17.62.** а) 5; б) 2.

18.25. а) Да (эта точка 0); б) да (сумма этих точек 0); в) да (одна из точек 0 и их сумма 0). **18.26.** а) Тот же, что и в **18.25.** **18.27.** $f(0) = 0$. **18.28.** Любому числу. **18.29.** *Указание*: см. 18.27. **18.30.** а) 0; б) 0. **18.31.** а) 0; б) 0. **18.34.** 0. **18.35.** 9. **18.36.** в) 0; г) равен 0. **18.38.** 0. **18.39.** 0. **18.43.** в) 0. **18.44.** Сумма и произведение абсцисс — 0. **18.49.** а), б), г) Нет; в) да. **18.52.** а) 7; б) 7; в) 14; г) 35. **18.53.** а), е) Да; б)—д) нет. **18.56.** $\max f(x) = 8$; $\min f(x) = -11$. **18.57.** 0. **18.59.** Убывает на $(-\infty; -5]$; возрастает на $[-5; 5]$; убывает на $[5; +\infty)$; -5 — точка минимума; 5 — точка максимума. **18.60.** Возрастает на $(-\infty; -5]$; убывает $[-5; 0]$; возрастает $[0; 5]$; убывает $[5; +\infty)$; -5 и 5 — точки максимума; 0 — точка минимума; 7 — максимум; -3 — минимум. **18.62.** а) Да; б) нет. **18.63.** а) Да; б) нет. **18.64.** а) $a = 0$; б) $a < 0$. **18.65.** а) B; б) C.

19.60. а) Не обладает; б) функция четная; в) функция нечетная; г) не обладает; д) функция четная; е) не обладает; ж) функция нечетная.

20.24. а) $\sqrt[3]{34} < 1 + \sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{33} > 1 + \sqrt{5}$; в) $\sqrt[3]{43} > \sqrt{6} + 1$; г) используйте свойства функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$ при $x \geqslant 1$. **20.26.** а) $(1; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

21.04. $a_n = n!$ **21.11.** $a_n = 2n \sin\frac{\pi}{n}$. **38.12.** $a_n = \cos\frac{\pi}{n}$. **21.16.** $x_n = 17n - 10$. **21.17.** $x_1 = 74$; $x_n = x_{n-1} + 74$, $n > 1$. **21.20.** $x_n = 4n - 2$. **21.21.** $x_1 = 2$; $x_n = x_{n-1} + 4$, $n > 1$. **21.22.** $x_n = 3n - 2 + \frac{1 + (-1)^n}{2}$. *Указание.* Заметим, что данная последовательность может быть получена из последовательности y_n: 1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; ..., в которой все нечетные члены увеличены на 1, а четные остались без изменения. Следовательно, $x_n = y_n + \frac{1 + (-1)^n}{2}$, поскольку последовательность $\frac{1 + (-1)^n}{2}$ имеет вид: 1; 0; 1; 0; 1; 0; ... ; $\frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}$; ... . **21.23.** $x_n = \frac{10^{n-1}}{9} \cdot 7$. **21.24.** $x_n = \frac{10^{3n} - 1}{9} \cdot 7$. **21.25.** $x_n = \frac{10^{9n} - 1}{9} \cdot 7$. **21.26.** $x_n = \frac{10^{4n} - 1}{9} \cdot 7$. **21.30.** а) $x_n = 3n - 2$; б) $x_n = (3n - 2)^2 = 9n^2 - 12n + 4$; в) $x_n = (3n - 2)^2 - 1 = 9n^2 - 12n + 3$; г) $x_n = \frac{1}{3n - 2}$; д) $x_n = \frac{n + 1}{3n - 1}$; е) $x_n = \frac{1}{(3n - 2)(3n + 1)}$. **21.31.** а) $x_n = \frac{1}{n}$; б) $x_n = \frac{1}{n + 1}$; в) $x_n = \frac{3^{n-1}}{n}$. **21.32.** а) $x_n = n^2$; б) $x_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$. **21.33.** а) $x_n = n^2 - 1$; б) $x_n = n^3 + 1$. **21.34.** а) $x_n = (-1)^{n-1} \cdot n$; б) $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. **21.36.** а) $x_n = (-1)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$. **21.39.** 40. **21.41.** 11. **21.42.** $a_{42} = -1777$. **21.43.** 3. **21.44.** $a_{613} = 172{,}9$; б) $a_{3370} = 1000$; в) $a_{50} = 4$.

22.08. а), б) Убывающие; в), г) возрастающие. **22.09.** а), в) Возрастающая; б) убывающая; г) — з) может быть как возрастающей, так и убывающей. **22.10.** а), в), г), е) Возрастающие; б), д) убывающие. **22.11.** а) Ограничена снизу; б) ограничена сверху; в), е) неограничена; г), д) ограничена. **22.12.** Относительно а), б) и г) в случае в) последовательность можеть быть неотрицательной, например, если $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. **22.16.** а) Верно; б) неверно. **22.17.** а) Возрастающей при $a > 0$ и убывающей при $a < 0$; б) возрастающей при $a < 0$ и убывающей при $a > 0$; в) возрастающей при $a \leqslant 4$ и убывающей ни при каких значениях a; г) возрастающей при $u \leqslant a \leqslant 4$ и убывающей при $a \leqslant -1$. **22.22.** а) $n \geqslant 60$; б) $n \geqslant 30$. **22.25.** $k = 2$.

23.09. а) $a_n = 3n + 11$; б) $a_n = 7 - 5n$. **23.10.** а) $a_n = 3n - 20$ или $a_n = 4n - 29$. **23.11.** а) $a_n = 5n - 22$ или $a_n = 44{,}2n - 355{,}2$; б) $a_n = 18 - 2n$ или $a_n = 2n - 18$. **23.19.** $\frac{2}{13 \cdot 15 \cdot 17} = \frac{2}{3315}$. **23.23.** 7. **23.33.** $|d| \leqslant \frac{38}{33}$. *Указание*. Расстояние между точками числовой прямой, соответствующими первому и сотому членам прогрессии, не может быть больше длины отрезка $[-2; 112]$. **23.34.** $-2 \leqslant a_1 \leqslant 15$. **23.37.** 3; 10; 17; 24; 31. **23.38.** 4; 7. **23.61.** 4. *Указание*. Для решения можно использовать теорему Виета, но с просмотром дискриминантов. В данном случае мы должны рассмотреть три уравнения: $6x + 2 = x^2 + 6x - 10$ (сумма корней — 0); $10x - 14 = x^2 + 4x - 2$ (корней нет) и $2x^2 + 2x - 6 = 10x - 6$ (сумма корней — 4). Первое и третье уравнения не имеют общих корней. **23.62.** 7. **23.64.** 82. **23.65.** 1313. **23.69.** $a_5 = b_{19} = 42$; $a_{200} = b_{97} = 2772$. **23.71.** а) 14 413; б) 13 920; в) 22 704; г) 9120. **23.72.** а) −25 451; б) −24 822; в) −29 468; г) −1790. **23.94.** 156. **23.95.** 180. **23.96.** 16 °С. **23.97.** 4 ч. **23.103.** На 16. **23.104.** 120. **23.105.** 50. **23.106.** 17. **23.107.** −16. **23.108.** 4, 5 и 6 км/ч. **23.109.** −1; 2; 5 или 5; 2; −1. **23.110.** $y = -2; -1; 1$. **23.111.** $a_1 = 2$; $d = 3$. **23.112.** 31. **23.113.** $a_n = 3n - 5$, $n \in N$. **23.115.** 7 дней. **23.116.** 17 м и 13 м.

24.05. $7 \cdot 2^{-7}$ $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ или $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. **24.16.** а) 3 и 384; б) 81 и 16. **24.17.** б) $q = -0{,}5$; $b_1 = 32$; $S_{10} = 63\frac{15}{16}$. **24.18.** 2046. **24.19.** −250. **24.20.** 64. **24.21.** 3; 4 или 48; 0,25. **24.23.** 12. **24.24.** P^2. **24.26.** ab.

24.31. $a_1 = 1$; $q = 2$ и $a_1 = 1$; $q = \sqrt{2}$ и $a_1 = 1$; $q = \sqrt[5]{2}$. **24.36.** $a = 0{,}5$; $b = 2$ или $a = -4{,}5$; $b = -18$. **24.37.** $a = -1 - \sqrt{2}$; $b = -41 - 29\sqrt{2}$ или $a = -1 + \sqrt{2}$; $b = 7 + 5\sqrt{2}$. **24.38.** -4. **24.39.** а) $\frac{10(10^n - 1) - 9n}{81}$; б) $\frac{70(10^n - 1) - 63n}{81}$. **24.43.** а) $(1{,}02^2 - 1) \cdot 100\%$; б) $(1{,}02^4 - 1) \cdot 100\%$; в) $(1{,}02^6 - 1) \cdot 100\%$; г) $(1{,}02^{12} - 1) \cdot 100\%$; д) $(1{,}02^{120} - 1) \cdot 100\%$. **24.44.** а) 12%; б) $(\sqrt[4]{1{,}44} - 1) \cdot 100\%$; в) $(\sqrt[6]{1{,}44} - 1) \cdot 100\%$; г) $(\sqrt[12]{1{,}44} - 1) \cdot 100\%$. **24.46.** а) $\frac{R}{3^{10}}$; б) $\frac{R}{3^n}$. **24.49.** $\left(\frac{4}{3}\right)^{10} l$. **24.50.** $x = y = z$, x — произвольное число, не равное 0. **24.51.** $q = 1$ или -2. **24.52.** 2; 6; 18. **24.55.** 5; 25; 45; ... и 5; 15; 45; ... . **24.56.** 1; 2; 3; ... и 1; 3; 9; ... . **24.57.** -2. **24.58.** 1; 3; 9 или $\frac{1}{9}$; $-\frac{5}{9}$; $\frac{25}{9}$. **24.59.** 258. **24.60.** 931. **24.61.** 2; 4; 8; 12 или 12,5; 7,5; 4,5; 1,5. **24.62.** 3; 6; 12; 18 или 18,75; 11,25; 6,75; 2,25. **24.64.** а) 1,25; 5; б) $x = -\frac{1}{4}$. **24.67.** а) $\frac{5}{9}$; б) $45\frac{35}{99}$; в) $21\frac{218}{333}$; г) $-54\frac{4}{3333}$. **24.68.** а) $\frac{7}{45}$; б) $\frac{41}{396}$; в) $1\frac{181}{900}$; г) $-\frac{1}{99\,900}$. **24.69.** $\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{9}$; ... . **24.72.** $-2 + \sqrt{3}$; $(-2 + \sqrt{3})^2$; ... . **24.74.** $q = \frac{100}{101}$, a — произвольное число, не равное нулю. **24.75.** $q = \frac{n}{n + 1}$, a_1 — произвольное число, не равное нулю. **24.76.** $q = \frac{1}{101}$, a — произвольное число, не равное нулю. **24.77.** $q = \frac{1}{n + 1}$, a_1 — произвольное число, не равное нулю.

25.02. а) $S_n^{(k)} = \frac{n}{k(k + n)}$; б) $\Omega_n = \frac{n}{3n + 1}$.

26.01. а) 90; б) 81; в) 3; г) 10. **26.02.** а) 764; б) 476; в) 2; г) 6. **26.03.** б) 12; в) хлеб ржаной (6 случаев) менее вероятен, чем бутерброд с сыром (9 случаев); г) из 18 ветвей следует убрать 6.

26.04. б) 8; в) 6; г) равновероятно. **26.05.** б) 3; в) 4. **26.06.** а) 32; б) 16; в) 24; г) 16. **26.07.** а) 9; б) 45; в) 17; г) 24. **26.08.** а) 210; б) 30; в) 180; г) 24. **26.09.** а) 36; б) 8; в) 24; г) 16. **26.10.** а) 1 и 810 000; б) 125; в) 25; г) 45. **26.11.** а) 600; б) 24; в) 30 240; г) 462. **26.12.** а) да; б) да; в) да; г) нет. **26.13.** а) 2; б) 3; в) 6; г) 24. **26.14.** а) n; б) $2k(2k+1)$; в) $\frac{n(n-1)}{2}$; г) $(4m-1)(4m-2)$. **26.15.** а) 1, 2; б) 1, 2, 3, 4; в) 1, 2, 3, 4; г) 1, 2, 3. **26.17.** а) 200; б) 200, 202, 208, 209, 220, 222, 228, 229; в) 909, 999; г) 200, 280, 800, 880, 920. **26.18.** а) 12; б) 24; в) 2; г) 2. **26.19.** а) 120; б) 48; в) 80; г) 96. **26.20.** а) 12 и 2250; б) 24; в) 6; г) 8. **26.21.** а) 720; б) 120; в) 600; г) 240. **26.22.** а) 100; б) 97; в) 83; г) 90. **26.23.** а) 100; б) 50; в) 52; г) 10. **26.24.** а) 0; б) 1; в) 3; г) 2. **26.25.** а) 100; б) 15; в) 15; г) 39.

27.03. а) 60; б) от 4 до 25 кг с шагом 0,5; в) 5 и 12; г) 2, 14 и 3; д) 5,5. **27.04.** а) От 140 до 210 см; б) 157 и 190; в) 4 и 4; г) 161. **27.05.** а) 200; б) 0,19; в) 6,5%;

г)

	Ценовая категория, р.					
	0—20	20—50	50—100	100—150	150—200	⩾ 200
Кол-во ценников	31	52	47	38	19	13
Частота	0,155	0,26	0,235	0,19	0,095	0,065
Частота, %	15,5	26	23,5	19	9,5	6

27.06. а) 7; б) 0,04; в) 22%; г) 38%.

27.07.

	Варианта				Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Кратность	9	5	2	4	20
Частота	0,45	0,25	0,1	0,2	1
Частота, %	45	25	10	20	100

27.08. а) 7; б) 50; в) 5; г) 8%. **27.09.** а) 4; б) 2; в) 1,8 ч. **27.10.** а) 2, 4, 6, 8; б) 4, 8, 2, 8, 6, 4, 8; в) 6, 2, 8, 2, 4, 6, 2; г) 4. **27.11.** а) От 12 до 20 баллов; б) 19, 13, 17, 14, 20, 19, 20, 13, 14, 17, 14, 17, 17, 17, 17; в) 2, 3 и 0; г) 13, 13, 14, 14, 14, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 19, 19, 20, 20.

27.12.

	Варианта					Сумма
	–2	–1	0	1	2	
Подсчет кратностей	~~////~~ ~~////~~ //	~~////~~ ////	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	~~////~~	~~////~~ ///	
Кратность	12	9	16	5	8	50
Частота	0,24	0,18	0,32	0,1	0,16	1
Частота, %	24	18	32	10	16	100

27.13.

	Варианта						Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	
Кратность	291	122	113	202	79	193	1000
Частота	0,291	0,122	0,113	0,202	0,079	0,193	1
Частота, %	29,1	12,2	11,3	20,2	7,9	19,3	100

27.14. а) 200; б) 4; 0,27. **27.15.** а) Мода равна 431; б) 91%; в)

Вес, г	427	428	429	430	431	432	433	434	435
Частота, %	2	4	11	18	30,5	21,5	10	2	1

27.16. а) 3,875; б) 3,75; в) 4; г) 3. **27.17.** а) 22; б) 18 и 4; в) нет; г) $\frac{10x - 34}{3}$. **27.18.** а) 36; б) 7 и 11; в) нет; г) $\frac{48}{5}$. **27.19.** а) $\frac{33x - 30}{7x + 16}$; в) 3, 4, 5, 6; г) да, при $x = 7$. **27.20.** а) $\frac{17x + 52}{6x + 19}$; в) 1, 2, 3; г) нет.

28.01. а) 0,5; б) 0,125; в) 0,375; г) 0,5. **28.02.** а) 0,1; б) 0,1; в) 0,2; г) $\frac{44}{45}$. **28.03.** а) 0,5; б) 0,5; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{5}{6}$. **28.04.** а) $\frac{1}{90}$;

б) $\frac{2}{45}$; в) 0,4; г) $\frac{4}{9}$. **28.05.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{5}{12}$. **28.06.** а) 0,2; б) 0,8; в) 0,64; г) 0,12. **28.07.** а) 0; б) 0,2; в) 0,4; г) 0,6. **28.08.** а) 0,23; б) 0,63; в) 0,6; г) 0,4. **28.09.** а) 0,75; б) 0,75; в) $\frac{13}{14}$; г) $\frac{15}{28}$. **28.10.** а) 0,1; б) 0,1; в) 0,6; г) 0,4. **28.11.** а) 0,8; б) 0,6; в) 0,7; г) $\frac{\sqrt{6}}{5}$. **28.12.** а) 0,6; б) 0,4; в) 0; г) 0,3. **28.13.** а) 0,5; б) $\frac{4}{9}$; в) $1 - \frac{\pi}{3 + 2\sqrt{2}}$; г) $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$. **28.14.** а) $\frac{1}{6}$; б) 0,125; в) 0,875; г) $\frac{25}{48}$. **28.15.** а) 0,05; б) 0,6; в) 0,2; г) 0,25. **28.16.** а) 0,125; б) 0,125; в) 0,5; г) 0,375. **28.17.** а) 0,4; б) 0,6; в) 0,4; г) 0. **28.18.** а) 0,2; б) 0,4; в) $\frac{1}{30}$; г) 0,5. **28.19.** а) $\frac{1}{24}$; б) 0,75; в) 0,25; г) 0,5. **28.20.** а) 0; б) 0,1; в) 0,9; г) 0,09. **28.21.** а) 0,05; б) 1; в) 0,15; г) 0,55. **28.22.** а) 0; б) 0,6; в) 0,2; г) 0,8. **28.23.** а) $\frac{1}{6}$; б) 0,25; в) 0,5; г) 0,5. **28.24.** а) 0,2; б) 0,7; в) 0,1; г) 0,2. **28.25.** а) 0,5; б) 0,36; в) 0,14; г) $\frac{\pi}{6}$.

29.01. а) 4; б) $\frac{4}{17}$;

в)

n	17	18	19	20	27	28	29	30	40	60	80	100
Кол-во чисел, кратных 4, от 1 до n	4	4	4	5	6	7	7	7	10	15	20	25
Частота	0,235	0,222	0,21	0,25	0,222	0,25	0,24	0,23	0,25	0,25	0,25	0,25

г) 0,25. **29.02.** а) 16; б) 30; в) 45; г) 1. **29.03.** а) 6; б) 7; в) 8; г) 330. **29.04.** а) 137; б) 2145; в) от 880 до 1076; г) около 40 000: от 36 520 до 44 630. **29.05.** а) Около 32 000; б) 5440; в) 13 540; г) около 67,5 тыс. (67 630). **29.06.** а) 2; б) 0,118;

в)

n	17	27	57	77	100	125	150	173	200	1000
Кол-во чисел, оканчивающихся на 4	2	3	6	8	10	13	15	17	20	100
Частота	0,118	0,111	0,105	0,104	0,1	0,104	0,1	0,098	0,1	0,1

г) 0,1. **29.07.** а) 1; б) 0,06;

в)

n	17	57	100	400	500	1000	4000	5000	10000
Кол-во чисел, начинающихся с 4	1	11	11	12	111	111	112	1111	1111
Частота	0,06	0,19	0,11	0,03	0,222	0,111	0,028	0,2222	0,1111

г) нет; от $\frac{1}{36}$ до $\frac{2}{9}$. **29.08.** а) 189 тыс.; б) 448 тыс.; в) около 75 тыс. (74 966); г) около 121 тыс. (120 826) . **29.09.** г) Примерно по 16,7% $(16,(6) = \frac{100}{6})$. **29.10.** г) Примерно к 16,7% $(16,(6) = 100\% \cdot \frac{6}{36})$.

31.01. а) 10; в) −2. **31.02.** а) 2^7; в) $2^4 \cdot 3^7$. **31.03.** а) 2,5; б) −0,5; в) 2. **31.04.** а) −10; в) 12,34. **31.06.** а) $5 \cdot \sqrt[3]{3}$; в) $3 \cdot \sqrt[4]{5}$. **31.08.** а) $2xy^2 \cdot \sqrt[3]{2x}$; в) $2x^2 \cdot |y|^3 \cdot \sqrt[4]{5x}$. **31.09.** а) $\sqrt[3]{x^3y}$; б) $\sqrt[4]{x^5}$; в) $\sqrt[4]{x^4y}$ при $x \geqslant 0$; $-\sqrt[4]{x^4y}$ при $x \leqslant 0$; г) $\sqrt[4]{x^5y}$ при $x \geqslant 0$; $-\sqrt[4]{x^5y}$ при $x \leqslant 0$; д) $\sqrt[4]{(xy)^5}$. **31.10.** а) 6; б) 6. **31.11.** а) $\sqrt[3]{2} < \sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{12} < \sqrt[6]{145}$; в) числа равны. **31.15.** (−3; 1). **31.16.** $p = 0$. **31.17.** $0 \leqslant p < 6$.

32.05. 157 080. **32.06.** а) Не существует; б) существует, например число 3,1415. **32.09.** а) 440 ч; б) 4399 ч. **32.10.** а) $\frac{22}{7}$; д) $\frac{977}{311}$. *Указание*. Найдите натуральное число k, ближайшее к числу πn, для каждого заданного числа n. **32.11.** $-4 < -\pi < -\sqrt{3} < -\frac{\pi}{2} < 0 < 1 < \frac{\pi}{3} < 6\pi < 19,2$. **32.12.** а) $\left(-\infty; \frac{7}{13 - 4\pi}\right)$; б) $(7\pi; 22)$;

в) $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right) \cup \left[\frac{3}{2\pi}; +\infty\right)$; г) $x \in [-\sqrt{11-\pi}; \sqrt{11-\pi}] \cup [\pi; +\infty)$.
32.13. а) $m \in [-19; 19]$, $m \in \boldsymbol{Z}$; б) $m \in [-14; 14]$, $m \in \boldsymbol{Z}$. **32.14.** а) Одно число; б) два числа; в) ни одного числа; г) 18 чисел. **32.16.** а) $\pi - 3{,}14$; б) $\sqrt{10} - \pi$; $\pi < \sqrt{10}$; $3{,}15^2 < 10$; в) $\sqrt{39} - \pi$; г) $\frac{11\pi}{15}$; д) $22 - \pi$; е) $223 - 70\pi$; $\pi < 3{,}15$; $70\pi < 220{,}5 < 223$.
32.17. 5 точек. **32.18.** а) Одна или ни одной точки; б) 3 или 4 точки; в) 6 или 7 точек; г) 100 или 101 точка. **32.20.** а) В первый раз встретятся в точке B: $s_1 = 2$, $v_1 = 8$ м/с, $t = \frac{1}{4}$ с; $s_2 = \frac{\pi}{2}$, $v_2 = 2\pi$ м/с, $t = \frac{1}{4}$ с; б) во второй раз через $\frac{1}{2}$ с; в) в десятый раз через $\frac{5}{2}$ с; г) в n-й раз через $\frac{n}{4}$ с. **32.28.** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; е) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; ж) $\frac{28\pi}{33} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; з) $\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; и) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; к) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; л) $(-1)^k \frac{2\pi}{5} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; м) $(-1)^{k+1} \times \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; н) $\frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; о) $\pm\frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; п) $-\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
32.32. а) Верно; б) неверно: a может быть равно 2; $1 + 2\pi$; ...; в) верно; г) неверно: a может быть равно $\frac{8\pi}{3}$ и т. д. **32.33.** а) $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\left(\pi + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) $\left[2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\pi + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; **32.34.** а) $\left[\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\left[\frac{2\pi}{3} + \pi k; \pi + \pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) $\left[\frac{2\pi}{7} + 2\pi k; \frac{12\pi}{7} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
32.35. а) $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) $\left[-\frac{9\pi}{7} + 2\pi k; \frac{2\pi}{7} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **32.36.** а) $y = 0$; $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $y = 1$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) $y = -1$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; ж) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; з) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

и) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$: $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$. **32.38.** $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

32.40. Рис. 33. а) M_1: $\frac{10\pi}{7} + 2\pi k,\ k \in Z$; б) M_2: $-\frac{3\pi}{7} + 2\pi k,\ k \in Z$; в) M_3: $\frac{4\pi}{7} + 2\pi k,\ k \in Z$; г) M_4: $\frac{\pi}{14} + 2\pi k,\ k \in Z$; д) M_5: $\frac{15\pi}{14} + 2\pi k$, $k \in Z$.

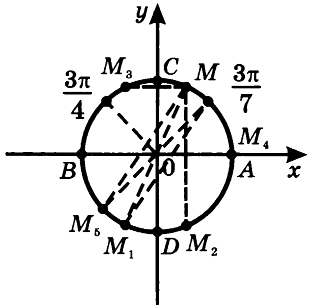


Рис. 33

33.05. $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{5}$, где $k \in Z$. **33.30.** а) $t_1 + t_2 = (2k + 1)\pi$, где k — некоторое целое число; б) $t_1 + t_2 = 2k\pi$, где k — некоторое целое число.

34.08. а), г) Больше 0; б), в) меньше 0. **34.09.** а), в) Является; б), г) нет. **34.24.** а) 0,8; б) −0,6; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{3}$. **34.25.** а) $-\frac{12}{13}$; б) $-\frac{8}{17}$; в) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; г) $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **34.30.** а) $\cos\frac{\pi}{5}$; б) $\sin\frac{3\pi}{11}$. *Указание*. Сравните числа $\frac{3\pi}{11}$ и $\frac{\pi}{4}$. **34.31.** $k\pi$, где k — целое число. *Указание*. Пусть $y = \sin t$. Тогда y принимает все значения из отрезка $[-1; 1]$ и поэтому $\cos 1 < \cos y \leqslant 1$. Далее, так как $\pi > 3$, то $\cos 1 > > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Отсюда имеем неравенство $\frac{1}{2} < \cos(\sin t) \leqslant 1$, причем $\cos(\sin t) = 1$ тогда и только тогда, когда $\sin t = 0$. Откуда получим $t = k\pi$, где k — целое число. **34.32.** 73 точки. **34.33.** 360 точек. **34.51.** $\frac{4}{3}$. **34.52.** −0,75. **34.54.** $-\frac{5}{12}$. **34.57.** $2\sqrt{2}$. **34.60.** а) 7; б) 18; в) 47. **34.61.** а) 23; б) −110; в) 527. **34.62.** а) 4; б) $\pm\sqrt{6}$; в) $\pm 3\sqrt{6}$. **34.63.** а) 1; б) $(-1; 1)$; в) $(-1; 1)$; г) $(2; +\infty)$; д) $[-1; 0) \cup (0; 1]$; е) $(0; 1]$. **34.64.** а) 3; б) $\sqrt{5}$. **34.65.** 8. **34.66.** −2. **34.67.** 3. **34.68.** 1. **34.69.** б) 20; в) $\frac{1}{36}$; г) 6. **34.70.** а) $-\sqrt{5}$; б) −4; в) 2; г) 0,5 или 7.

35.04. а) 4; б) 1. **35.06.** а) 1; б) $\operatorname{ctg}^6 x$; в) 1; г) $\sin x + \cos x$. **35.08.** а) 13; б) 12. **35.13.** а) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{\operatorname{ctg}^2 - t}{\operatorname{ctg}^2 + t}$; б) $\frac{\operatorname{tg} t - 2}{4 \operatorname{tg} t + 3} = \frac{1 - 2\operatorname{ctg} t}{4 + 3\operatorname{ctg} t}$; в) $\frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t} = \frac{2\operatorname{ctg} t}{\operatorname{ctg}^2 t - 1}$. **35.14.** а), в), г), е) Существуют; б), д) не существуют. **35.15.** а) 2; б) $-\frac{13}{9}$. **35.16.** а) $\frac{11 + u^2}{1 + u^2}$; б) $\frac{2u^2 - 3u + 4}{1 + u^2}$; в) $\frac{u^4}{(1 + u^2)^2}$; г) $\frac{1}{(1 + u^2)^2}$; д) $\frac{u}{1 + u^2}$; е) $\frac{u^3}{(1 + u^2)^2}$. **35.19.** $\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$. **35.20.** а) $2\cos t$; б) 0; в) $-(\sin t + \cos t)$; г) $2\cos t - \sin t$. **35.22.** а) sin 5; sin 4; sin 6; sin 3; sin 1; sin 2; г) cos 17; cos 18; cos 19. **35.24.** а) $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2};\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $k \in Z$; г) $\left(k\pi - \frac{\pi}{2};\ k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $k \in Z$. **35.26.** а) $\sin\frac{5}{8} > \frac{1}{2}$. **35.27.** а) 2; 0; б) 1; 0; в) 7; −3; г) 1; 0; д) 1; $\frac{1}{2}$; е) 3; $\frac{1}{7}$; ж) 0; −15; з) 8; $\frac{7}{16}$; и) 6; 2. **35.29.** а) 125.

36.18. в) $\frac{44\pi}{45}$; г) $\frac{\pi}{7}$; $\frac{3\pi}{7}$; $\frac{3\pi}{7}$ или $\frac{\pi}{5}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{5}$; д) $\sqrt{1 + \pi} - 1$; $\sqrt{1 + \pi} - 1$; $(\sqrt{1 + \pi} - 1)^2$ или $\left(\frac{\sqrt{1 + 8\pi} - 1}{4}\right)^2$; $\left(\frac{\sqrt{1 + 8\pi} - 1}{4}\right)^2$; $\frac{\sqrt{1 + 8\pi} - 1}{4}$. **36.19.** е) *Указание*. С тремя верными знаками после запятой $\angle A = 0{,}235$ или $\angle A = 2{,}906$. **36.20.** а) 180; б) такого значения нет; в) при $n \geqslant 180$. **36.21.** а) 90; б) такого значения нет; в) при $n \geqslant 90$. **36.22.** а) 359; б) такого значения нет; в) при $n = 359 + 360k$ и при $n = 360m$, где k и m — натуральные числа. **36.23.** б) *Указание*. Воспользуйтесь неравенством $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant \sqrt{2}$, справедливым при любом α. Это неравенство можно, например, доказать следующим образом. Пусть $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} x + y = s, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ и найдем все значения s, при которых данная система имеет решение. Выразив $y = s - x$ из первого уравнения и подставив найденное выражение во второе, замечаем, что задача сводится к нахождению всех значений s, при которых уравнение $x^2 + (s - x)^2 = 1$ имеет решения. Переписав последнее уравнение в виде $2x^2 - 2sx + s^2 - 1$, заключаем, что полученное квадратное уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда его дискриминант $D = 4s^2 - 8(s^2 - 1) \geqslant 0$. Решив полученное неравенство, найдем, что уравнение имеет решение при всех таких s, что $s^2 \leqslant 2$. Откуда следует, что наибольшее значение $s = \cos\alpha + \sin\alpha$ будет равно $\sqrt{2}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Можно рассуждать иначе. Пусть $s = \sin\alpha + \cos\alpha$. Тогда $s^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \sin 2\alpha \leqslant 2$. Отсюда следует, что $|s| = |\sin\alpha + \cos\alpha| \leqslant \sqrt{2}$, причем при $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}$ неравенство обращается в равенство. **36.24.** а) 179; б) 180; в) при $n = 179 + 180k$, где k — натуральное число. **36.25.** в) $\frac{179° + 360°k}{360°m}$. **36.26.** 45,5. **36.27.** 90.

Указание. Используйте формулы приведения. Например, $\cos^2 1° = \cos^2 179°$ и заметьте, что $\cos^2 1° + \cos^2 89° = \cos^2 1° + \sin^2 1° = 1$.

36.28. -1. **36.29.** 0. **36.30.** Все натуральные числа от 45 до 89 включительно. **36.31.** 150 чисел. **36.33.** а) На $(-\infty; +\infty)$ значения функции положительны; б) на $(-\infty; +\infty)$ значения функции отрицательны; в) значения функции отрицательны на интервале $(-2\sin 29°; 3\cos 20°)$ и положительны при всех остальных значениях x, за исключением точек $\sin 29°$ и $\cos 20°$. **36.34.** а) Функция убывает на $\boldsymbol{R}$; б) убывает на $(-\infty; \operatorname{tg} 12°]$; возрастает на $[\operatorname{tg} 12°; +\infty)$; в) возрастает на $(-\infty; -\operatorname{tg} 123°]$; убывает на $[-\operatorname{tg} 123°; +\infty)$. **36.35.** $-1 < x_1 < 1 < x_2$. **36.38.** 4°55′. **36.39.** 33°41′. **36.40.** 40 м. **36.41.** а) 63°26′; в) 26°34′.

38.10. а) 1,5; б) 0,5; в) 0,5; г) 0,5. **38.16.** а) $\sin(289° + x)\cos x < \cos(289° + x)\sin x$; б) $\cos(189° - x)\cos x < \sin(189° - x)\sin x$. **38.18.** а) $x = -13°$ при $\cos 60° = \frac{1}{2}$ или $x = 347°$ при $\cos 420° = \frac{1}{2}$; б) $x = -65°$ при $\sin 90° = 1$ или $x = 295°$ при $\sin(-270°) = 1$; в) $x = -15°$ при $\operatorname{tg} 45° = 1$ или $x = 195°$ при $\operatorname{tg}(-135°) = 1$; г) $x = 120°$ при $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$ или $x = -240$ при $\operatorname{tg} 420° = \sqrt{3}$. **38.19.** а) $x = -152°$; $x = 88°$; б) $x = 80°$; $x = -10°$; в) $x = 60°$; $x = -120°$; г) $x = 150°$; $x = -30°$. **38.20.** а) $\frac{9}{16}$; б) $\cos^4 11$. **38.21.** а) $\frac{11}{14}$; б) $-\frac{13}{14}$. **38.23.** а) $\frac{a + b}{2}$; б) $\frac{a - b}{2}$; в) $\frac{a + b}{a - b}$. **38.28.** а) $\frac{3\sqrt{3} - 1}{20} < \frac{1}{2}$; б) $\frac{3\sqrt{3} - 1}{3\sqrt{6}}$.

39.01. а) $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(t - \frac{7\pi}{4}\right)$; б) $\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$, $\sin\left(t - \frac{11\pi}{6}\right)$; д) $\sin(t + \alpha)$, $\sin(t - \beta)$, где $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\beta = \frac{3}{5}$; $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$; $\cos\beta = \frac{4}{5}$. **39.05.** а) $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$; в) $\sqrt{2}$ и 0. **39.06.** а) $\sqrt{5} - 1$ и $-\sqrt{5} - 1$; в) 30 и 4. **39.08.** а) -1; б) -1; в) -2; г) 1. **39.09.** в) $1 + \sqrt{2}$ и 0. **39.11.** а) $a \geqslant 5$; б) $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$. **39.13.** а) $-45°$. **39.14.** а) $3\sqrt{3}\cos\left(t + \frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, где $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{9}$; $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{9}$. **39.15.** -4. **39.16.** а) $c = 10 - \sqrt{2}$. **39.18.** а) $c = -23$.

40.23. а) $\cos x$; б) $2\cos x$.

41.06. $\sin\alpha = 0$; $\cos\alpha = 1$. **41.07.** $\cos\alpha = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$; $\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. **41.10.** $\operatorname{tg}\alpha = 0$. **41.11.** Данное равенство не выполняется ни при каких значениях α. **41.25.** $f(2a) = \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$; $f(4a) = \cos 4a = 2\cos^2 2a - 1 = \frac{98}{81} - 1 = \frac{17}{81}$. **41.27.** $\sin\beta = \frac{8}{17}$; $\cos = \frac{15}{17}$. **41.28.** а) $-0{,}75$; б) $-0{,}5$.

42.05. а), б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **42.06.** а) $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$; б) 0,5; в) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

43.14. $\operatorname{tg}^2\alpha$. **43.15.** $\operatorname{tg}3x$. **43.16.** $2\sin^2\alpha$. **43.17.** а) 1; б) $\sin 2\alpha$; в) 0,25. **43.18.** в) $2\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. **43.19.** а) 2; б) 24. **43.20.** а) 4,5; **43.22.** а) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; б) -1.

Задачи вступительных экзаменов в вузы

8. $\left\{0; \frac{72}{13}; \frac{13}{2}\right\}$. **9.** 5400 р. и 8100 р. **10.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup [3; 2\sqrt{3}]$. **11.** 4; 8; 12 км/ч. **12.** $\{-1\} \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$. **13.** $(-\sqrt{3}; -1] \cup$

$\cup\ [4;\ 3\sqrt{3})$. **14.** 20; 60; 100 км/ч. **15.** $(-\infty;\ -1)\cup\left(-1;\ -\frac{1}{2}\right)\cup\{0\}\cup$ $\cup\left(\frac{1}{2};\ 1\right)\cup(1;\ +\infty)$. **16.** 8,75%. **17.** $(2-2\sqrt{2};\ 0)\cup(0;\ -2+2\sqrt{2})$.

19. $a\leqslant-\sqrt[4]{\frac{1}{12}}\Rightarrow x\in\varnothing$; $\sqrt[4]{\frac{1}{12}}<a<0\Rightarrow x\left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a};\ \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right)$; $a=0\Rightarrow x\in(0;\ \infty)$; $0<a\leqslant\sqrt[4]{\frac{1}{12}}\Rightarrow x\in\left(-\infty;\ \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a};\ +\infty\right)$; $a>\sqrt[4]{\frac{1}{12}}\Rightarrow x\in(-\infty;\ +\infty)$. **20.** $\left[0;\ \frac{15}{4}\right]\cup$ $\cup\ [4;\ +\infty)$. **21.** 2 млн 400 тыс. р. и 3 млн 600 тыс. р. **22.** $(-0{,}5;\ 2)$. **23.** $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)$. **24.** $Z\setminus\{-11;\ -10;\ \dots;\ -4;\ -3\}$. **25.** $(-1;\ 4)$. **26.** В 3 раза.

27. $(1;\ 2]\cup(7;\ 8)$. **28.** $\left\{(1;\ 5);\ \left(\frac{5}{2};\ 2\right)\right\}$. **29.** $\left\{(5;\ 1);\ \left(2;\ \frac{5}{2}\right)\right\}$.

30. $a_1=3;\ d=6$. **31.** $\frac{1}{9}\left(\underbrace{7\dots7}_{n}0-7n\right)$. **32.** $(2;\ -9)$. **33.** $\{-12\}\cup(7;\ +\infty)$.

34. $[100;\ +\infty)$. **35.** 4 004 001. **36.** $(0;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. **37.** 3. **38.** 4 008 004. **39.** $2+\sqrt{12}$. **41.** 0; $\pm\sqrt{2}$. **42.** $2^{2000}\cdot3^{1999000}$.

43. $3^{2000}\cdot4^{1999000}$. **44.** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}<x<3$; $x<2$. **45.** 12. **46.** 10 км/ч.

47. 13. **48.** 5 км/ч. **49.** $a_{20}=119$. **50.** $\left\{\left(-\frac{9}{5};\ \frac{12}{5}\right)\right\}$. **51.** Если $b<\frac{2}{3}$, то $x\in\left[-\frac{3b+1}{3};\ -3b+1\right]$; если $b=\frac{2}{3}$, то $x=-2$; если $b>\frac{2}{3}$, то решений нет. **52.** $\left\{\left(\frac{4}{5};\ -\frac{13}{5}\right)\right\}$. **53.** $\left\{\left(0;\ \frac{64}{49}\right)\right\}$. **54.** 6. **55.** 7. **56.** $[0;\ 1]$.

57. $[-1;\ 0]$. **58.** $(-1;\ +\infty)$. **59.** $\{5;\ 8;\ 11;\ \dots;\ 38\}$. **60.** 1000 км/ч. **61.** При $b<-1$ — нуль корней; при $b=-1$ — один корень; при $b>-1$ — два корня. **62.** \$ 5500; 9 автомобилей типа A и 1 автомобиль типа B. **63.** Корней, больших -1, не существует при $a>-3$. При $a=-3$ и при $a\leqslant-4$ существует ровно один корень больше -1. При $-4<a<-3$ уравнение имеет два корня, больших -1. **64.** Фирма «Пепси-кола» продала 23 бутылки, а фирма «Кока-кола» продала 43 бутылки. **65.** 8 км. **66.** $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ +\infty)$. **67.** $x\in(-\infty;\ -1]\cup(2;\ +\infty)$. **68.** $f(x)=\frac{4x+5}{3(1-x)}$. **69.** Книгу A прочитали только 6 учащихся, книгу B — только 5, книгу C — только

4 ученика; по одной книге прочитали только 15 учащихся, не прочитали ни одной 3 ученика. **70.** 4,6. **71.** При $a = -1$ $x \in \{-2; -1\}$; при $a \in (-1; -0,8)$ $x \in \left\{-2; \frac{1\sqrt{1-a^2}}{a}; \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right\}$; при $a \in \left[-0,8; -\frac{5}{13}\right)$ $x \in \left\{-2; \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right\}$; при всех остальных значениях a уравнение имеет единственный корень $x = -2$. **72.** $x \in \left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$. **73.** 1,6. **74.** 10. **75.** –3,5. **76.** 6. **77.** 2,25. **78.** 9. **79.** 12. **80.** 19. **81.** 29. **82.** 499 500. **83.** 100%. **84.** $a \geqslant \frac{2}{3}$. **85.** 12. **86.** $2\pi + 7$. **87.** $\frac{1}{3}$.

88. $\left\{\frac{5}{4}\right\} \cup [5; +\infty)$. **89.** (4; 3); (6; 13); (14; –5). **90.** $(-\infty; 2) \cup \left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$. **91.** [–4; 2]. **92.** 30. **93.** [–3; –1). **94.** а) И; б) Р.

95. $-\frac{17}{5}$; $\frac{11}{3}$. **96.** $\left[-\frac{7}{4}; -\frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{17+\sqrt{127}}{9}; 8\right)$. **97.** $a = 4$, $b \in (-1 - 3\sqrt{5}; 3 - 3\sqrt{5}) \cup (3\sqrt{5} - 1; 3\sqrt{5} + 1)$. **98.** $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$.

99. 27 детей. **100.** 7,2%. **101.** 33. **103.** Разность прогрессии равна –0,2, а ее первый член либо равен 1, либо 4. **104.** В газете, 2 раза по радио и 1 раз по телевидению. **105.** $(-\infty; -2] \cup [-1; 0) \cup [2; +\infty)$. **106.** –1. **107.** 1; 2; 29.

108. –3. **109.** $(32 + 12\sqrt{7}; 2 + 0,75\sqrt{7})$; $(32 - 12\sqrt{7}; 2 - 0,75\sqrt{7})$; $(2 + 0,75\sqrt{7}; 32 + 12\sqrt{7})$; $(2 - 0,75\sqrt{7}; 32 - 12\sqrt{7})$.

110. $242(1 + \sqrt{3})$. **111.** $\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right) \cup \{0\} \cup \left(1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

112. $0 < a \leqslant \sqrt{35}$. **113.** Если $k \in (-\infty; 0)$, то $x \in [k; -k) \cup [-k + 1; +\infty)$; если $k = 0$, то $x \in [1; +\infty)$; если $k \in (0; 0,5]$, то $x \in (-k; k] \cup [-k + 1; +\infty)$; если $k \in (0,5; +\infty)$, то $x \in (-k; -k + 1] \cup [k; +\infty)$. **114.** $b \leqslant 0$. **115.** $a \leqslant 0,5$. **116.** 3; 6; 12 или 4; 8; 16. **117.** $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$. **118.** 8 и 4. **119.** (–5; 0), (3; –1), (3; 2), (7; 1).

120. 1. **121.** $4 \pm 2\sqrt{3}$. **122.** 1700. **123.** $\left[-\frac{5}{8}; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; 2) \cup (2; 3] \cup (5; +\infty)$. **124.** 6 или 7. **125.** $a > 14,625$.

ОГЛАВЛЕНИЕ