А. Г. МОРДКОВИЧ

Алгебра

Часть 1

УЧЕБНИК

8

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$ax^2 + 2kx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0, \\ b^2 = a \end{cases}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geqslant 0; b \geqslant 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geqslant 0; b > 0)$$

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n \quad (a \geqslant 0)$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

За разработку и внедрение
новой концепции изучения курсов алгебры
в общеобразовательных учреждениях
авторам учебно-методических комплектов
для 7 — 11 классов
(руководитель — А. Г. Мордкович)
присуждена премия
Президента Российской Федерации
в области образования за 2001 год

А. Г. МОРДКОВИЧ

Алгебра

8 класс

В двух частях

Часть 1

УЧЕБНИК

для учащихся
общеобразовательных учреждений

*Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации*

12-е издание, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2010

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721
М79

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 2—10106—5215/1434 от 25.10.2006)
и Российской академии образования (№ 1—187/5/7д от 19.07.2006)

Мордкович А. Г.

М79 Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. — 12-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2010. — 215 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01427-0

Учебник написан в соответствии с действующими программами для общеобразовательной школы. Материалы учебника изложены подробно и обстоятельно, что позволяет использовать их для самостоятельного изучения. Приоритетной содержательно-методической основой учебника является функционально-графическая линия, а идейным стержнем концепции — математическая модель и математический язык.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721

ISBN 978-5-346-01427-0 (ч. 1)
ISBN 978-5-346-01426-3 (общ.)

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Учебно-методический комплект* для изучения курса алгебры в 8-м классе общеобразовательной школы, выпускаемый издательством «Мнемозина», состоит из следующих элементов:

Программы. Математика. 5—6 классы. Алгебра. 7—9 классы. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы / авт.-сост. И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович;

А. Г. Мордкович. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник;

А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник;

А. Г. Мордкович. Алгебра. 8 класс. Методическое пособие для учителя;

Л. А. Александрова. Алгебра. 8 класс. Контрольные работы / Под ред. А. Г. Мордковича;

Л. А. Александрова. Алгебра. 8 класс. Самостоятельные работы / Под ред. А. Г. Мордковича;

Е. Е. Тульчинская. Алгебра. 8 класс. Блицопрос;

В. В. Шеломовский. Электронное сопровождение курса «Алгебра—8» / Под ред. А. Г. Мордковича.

Для изучения курса алгебры в 8-м классе ученики должны иметь две книги: учебник и задачник. Хорошим помощником как для учителя, так и для учеников станет современное мультимедийное средство обучения (компьютерный диск), созданный В. В. Шеломовским.

У вас в руках первая книга указанного комплекта — учебник. Автор надеется, что этот учебник будут читать и учителя, и ученики, и родители, поскольку стиль изложения доступный, во многом расцвеченный непривычными для математической рутинной лексики оборотами.

---

* Более подробную информацию об УМК можно получить на сайтах www.mnemozina.ru и www.ziimag.narod.ru

В то же время изложение характеризуется четкостью, алгоритмичностью, выделяются основные этапы рассуждений с фиксацией внимания читателя на выделенных этапах. Например, решение практически всех текстовых задач оформлено в виде трех этапов: составление математической модели; работа с составленной моделью; ответ на вопрос задачи.

На уроках математики учитель всегда сочетает обыденный язык (язык общения, язык литературного повествования) с предметным языком — строгим, сухим, лаконичным, строящимся по принятым в математике законам. Так написан и этот учебник, представляющий собой книгу не для заучивания, а для изучения, т. е. для чтения и понимания.

Опираясь на содержание учебника, учитель прекрасно разберется в том, что́ надо рассказать учащимся на уроке, что́ заставить их запомнить, а что́ просто предложить им прочитать дома (и, возможно, обсудить в классе на следующем уроке в жанре беседы).

Всюду, где возможно, автор старался следовать идеям проблемного обучения. Проблема (по большому счету) — это то, что мы сегодня решить не можем и завтра не решим; это то, что мучает нас продолжительное время; это то, к решению чего мы постепенно приближаемся, ощущая это приближение; это то, наконец, что, будучи разрешено, дает эмоциональный заряд, приносит радость. Именно такое (не локальное, а глобальное) понимание проблемного обучения руководило автором в работе над учебником. Примеров можно привести очень много, внимательный читатель (прежде всего, конечно, учитель математики) все увидит и поймет.

Лишь простейшие понятия даются сразу в готовом виде, остальные же вводятся постепенно, с уточнениями и корректировкой, а некоторые вообще остаются на интуитивном уровне восприятия до тех пор, пока не наступит благоприятный момент для их точного определения. К числу таких понятий относится, например, понятие функции, которое, по глубокому убеждению автора, не нужно вводить с самого начала, оно должно «созреть». Во всяком случае, в этом учебнике (равно как и в нашем учебнике для 7-го класса) строгого определения функции нет, оно будет введено лишь в курсе алгебры 9-го класса.

Работая над учебником, автор понимал, что его главная задача заключается не в сухом сообщении математических фактов, а в развитии учащихся посредством продвижения в предмете. Иными словами, приоритетным является не информационное, а развивающее поле курса. В учебнике практически реализованы принципы развивающего обучения, сформулированные Л. В. Занковым: обучение на высоком уровне трудности; прохождение тем программы достаточно быстрым темпом; ведущая роль теоретических знаний; осмысление процесса обучения (ученик должен видеть, как он умнеет в процессе изучения материала — это достигается проблемным обучением); развитие всех учащихся (естественно, учитывая, что у каждого из них свой предел возможностей).

Каждая глава заканчивается разделом «Основные результаты». Это своеобразный смотр достижений, «сухой остаток», подведение итогов, что для успешности процесса обучения очень важно.

Обращаем внимание читателя на то, что это издание учебника существенно отличается от изданий 1998—2006 гг. последовательностью изучения материала. Эти изменения отражены в методических пособиях: книге для учителя, самостоятельных работах и контрольных работах.

Автор

Учитесь работать с книгой

В учебнике используются на полях значки-символы.

Цель введения символов состоит в том, чтобы помочь учащимся усвоить и закрепить учебный материал, побудить учителей к воспитанию у школьников навыков быстрой ориентации в изучаемом материале, помочь родителям правильно проконтролировать знания детей.

От редакции

■ — окончание решения примера (при отсутствии рубрики «ответ»).

ГЛАВА 1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Понятие алгебраической дроби знакомо вам из курса алгебры 7-го класса, где мы довольно много внимания уделили сокращению алгебраических дробей. Теперь настало время специально заняться изучением теории алгебраических дробей.

Определение. **Алгебраической дробью** называют выражение $\frac{P}{Q}$, где P и Q — многочлены; P — **числитель алгебраической дроби, Q — знаменатель алгебраической дроби.**

Примеры алгебраических дробей:

$$\frac{x+y}{x-y},\quad \frac{x^3+1}{x^2-x+2},\quad \frac{a^2-4}{a+2},\quad \frac{a}{2},\quad \frac{3a+7}{5}.$$

Многочлен можно считать частным случаем алгебраической дроби. Например, многочлен $2x^2 + 5x + 3$ можно записать в виде дроби $\frac{2x^2 + 5x + 3}{1}$. Дробь $\frac{3a + 7}{5}$ можно переписать в виде двучлена $\frac{3}{5}a + \frac{7}{5}$. Да и в третьем из приведенных на с. 7 примеров после сокращения получается двучлен $a - 2$. Но, в сущности, это не столь важно, так было и с обыкновенными дробями. Скажем, $\frac{10}{5}$ *по форме* — обыкновенная дробь, а *по содержанию* — натуральное число 2.

Пример 1. Найти значение алгебраической дроби

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)},$$

если: а) $a = 2$, $b = 1$; б) $a = 5$, $b = 0$; в) $a = 4$, $b = 4$.

Решение. а) При $a = 2$, $b = 1$ получаем:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2}{(2 + 1)(2 - 1)} = \frac{4 + 4 + 1}{3 \cdot 1} = 3.$$

б) При $a = 5$, $b = 0$ получаем:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 0 + 0^2}{(5 + 0)(5 - 0)} = \frac{25 + 0 + 0}{5 \cdot 5} = \frac{25}{25} = 1.$$

в) При $a = 4$, $b = 4$ выражение $a - b$ обращается в нуль, а потому знаменатель данной дроби обращается в нуль. Но *на нуль делить нельзя*. Значит, пара значений $a = 4$, $b = 4$ является для заданной дроби *недопустимой*, т. е. алгебраическая дробь в этом случае не имеет смысла.

алгебраическая дробь

числитель

знаменатель

допустимые значения переменных

Условимся в дальнейшем, что переменные, входящие в состав алгебраической дроби, принимают лишь **допустимые значения**, т. е. такие значения, при которых знаменатель дроби не обращается в нуль.

Замечание. Пример 1 решен правильно, но «некультурно». Ведь алгебраическую дробь $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)(a-b)}$ можно сократить. Напомним, как мы это делали в 7-м классе:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Согласитесь, что если бы мы начали с сокращения дроби, то все вычисления существенно упростились. Поэтому у математиков как бы выработался рефлекс: если им встретилась алгебраическая дробь, то прежде всего они выясняют, нельзя ли ее сократить.

Пример 2. Лодка прошла 10 км по течению реки и 6 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Чему равна собственная скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — собственная скорость лодки, тогда по течению реки она плывет со скоростью $(x+2)$ км/ч, а против течения — со скоростью $(x-2)$ км/ч.

По течению реки, т. е. со скоростью $(x+2)$ км/ч, лодка прошла путь 10 км. Значит, время, затраченное на этот путь, выражается формулой $\dfrac{10}{x+2}$ ч.

Против течения реки, т. е. со скоростью $(x-2)$ км/ч, лодка прошла путь 6 км. Следовательно, время, затраченное на этот путь, выражается формулой $\dfrac{6}{x-2}$ ч.

По условию задачи на весь путь (т. е. на 10 км по течению и 6 км против течения) суммарно затрачено 2 ч. Это значит, что

$$\frac{10}{x+2}+\frac{6}{x-2}=2.$$

Составленное уравнение — математическая модель задачи.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Обратите внимание на левую часть уравнения. Она представляет собой сумму алгебраических дробей. Таким образом, приходим к следующим выводам:

1) алгебраические дроби могут входить в состав той или иной математической модели;

2) надо научиться оперировать с алгебраическими дробями, чтобы, в частности, сложить дроби $\frac{10}{x+2}$ и $\frac{6}{x-2}$;

3) пока мы не научимся оперировать с алгебраическими дробями, мы не сможем осуществить второй этап решения задачи — этап работы с составленной моделью.

Придется нам вернуться к этой задаче позднее, когда мы будем готовы довести ее до конца, — это произойдет в § 7.

Итак, теперь вы не сомневаетесь в том, что алгебраические дроби нужны и что мы должны научиться оперировать с ними. Этим и займемся в следующих параграфах.

§ 2. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ДРОБИ

Вам известно, что значение обыкновенной дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель одновременно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число. Например:

$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ (и числитель и знаменатель мы одновременно умножили на одно и то же число 4; значение дроби не изменилось);

$\frac{22}{33} = \frac{2}{3}$ (и числитель и знаменатель мы одновременно разделили на одно и то же число 11; значение дроби не изменилось).

обратите внимание

Алгебраическая дробь — это в определенном смысле обобщение обыкновенной дроби; над алгебраическими дробями можно осуществлять преобразования, аналогичные тем, которые мы только что указали для обыкновенных дробей.

1. *И числитель и знаменатель алгебраической дроби можно умножить на один и тот же многочлен (в частности, на один и тот же одночлен, на одно и то же отличное от нуля число)*; это — тождественное преобразование заданной алгебраической дроби.

2. *И числитель и знаменатель алгебраической дроби можно разделить на один и тот же многочлен (в частности, на один и тот же одночлен, на одно и то же отличное от нуля число)*; это — тождественное преобразование заданной алгебраической дроби, его называют **сокращением** алгебраической дроби.

Сформулированные правила представляют собой **основное свойство алгебраической дроби.**

Пользуясь основным свойством алгебраической дроби, можно дробь $\frac{x}{x-1}$ заменить (если, конечно, в этом есть необходимость) дробью $\frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)}$ (числитель и знаменатель дроби $\frac{x}{x-1}$ одновременно умножили на $x-2$) или дробью $\frac{2x^2}{2x(x-1)}$ (числитель и знаменатель дроби $\frac{x}{x-1}$ одновременно умножили на $2x$). Пользуясь основным свойством алгебраической дроби, можно заменить дробь $\frac{2x^2}{2x(x-1)}$ более простой дробью $\frac{x}{x-1}$ (числитель и знаменатель одновременно разделили на $2x$, т. е. сократили дробь).

Пример. Преобразовать заданные дроби так, чтобы получились дроби с одинаковыми знаменателями:

а) $\frac{a}{4b^2}$ и $\frac{a^2}{6b^3}$; б) $\frac{x}{x+y}$ и $\frac{x}{x-y}$.

Решение.

а) $$\frac{a}{4b^2} = \frac{a \cdot 3b}{4b^2 \cdot 3b} = \frac{3ab}{12b^3};$$

$$\frac{a^2}{6b^3} = \frac{a^2 \cdot 2}{6b^3 \cdot 2} = \frac{2a^2}{12b^3}.$$

Дроби приведены к одинаковому знаменателю (обычно говорят «к общему знаменателю»). Для этого пришлось числитель и знаменатель первой дроби умножить на дополнительный множитель $3b$, а числитель и знаменатель второй дроби — на дополнительный множитель 2; сделать это позволяет основное свойство дроби.

б) $$\frac{x}{x+y} = \frac{x(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2-xy}{x^2-y^2};$$

$$\frac{x}{x-y} = \frac{x(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2+xy}{x^2-y^2}.$$

Дроби приведены к общему знаменателю $x^2 - y^2$ с помощью дополнительных множителей — соответственно $x - y$ и $x + y$.

Приводя в этом примере алгебраические дроби к общему знаменателю, мы заменяли одну алгебраическую дробь другой дробью, тождественно равной первой. Однако если при сокращении дроби мы ее упрощаем, то в рассмотренном примере каждая дробь заменялась более сложной. Наверное, у вас возник вопрос: а нужно ли такое «усложняющее» преобразование?

Оказывается, нужно, и в этом мы с вами скоро убедимся.

С основным свойством алгебраической дроби связаны правила изменения знаков у числителя и знаменателя. Так, имеет место равенство

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{b-a}{d-c};$$

здесь числитель и знаменатель первой дроби мы одновременно умножили на одно и то же число -1.

обратите внимание

Если же изменить знаки только в числителе или только в знаменателе, то следует изменить знак и перед дробью:

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{-(b-a)}{c-d}=-\frac{b-a}{c-d};$$

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a-b}{-(d-c)}=-\frac{a-b}{d-c}.$$

§ 3. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ С ОДИНАКОВЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ

Алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями складывают и вычитают по тому же правилу, что и обыкновенные дроби:

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}=\frac{a+b-c}{d},$$

т. е. составляют соответствующую алгебраическую сумму числителей, а знаменатель оставляют без изменений.

П р и м е р. Выполнить действия:

$$\frac{2a^2+5}{a^2-ab}+\frac{2ab+b}{a^2-ab}-\frac{b+5}{a^2-ab}.$$

Р е ш е н и е. Применив правило сложения и вычитания алгебраических дробей, получим:

$$\frac{2a^2+5}{a^2-ab}+\frac{2ab+b}{a^2-ab}-\frac{b+5}{a^2-ab}=\frac{(2a^2+5)+(2ab+b)-(b+5)}{a^2-ab}.$$

Теперь можно упростить числитель, выполнив соответствующие операции над многочленами:

$$(2a^2 + 5) + (2ab + b) - (b + 5) =$$
$$= 2a^2 + 5 + 2ab + b - b - 5 = 2a^2 + 2ab.$$

Таким образом, заданную алгебраическую сумму трех дробей нам удалось преобразовать в дробь $\frac{2a^2 + 2ab}{a^2 - ab}$.

А теперь вспомните то, что мы говорили в предыдущем параграфе: получив алгебраическую дробь, нужно посмотреть, нельзя ли ее сократить. Оказывается, можно:

$$\frac{2a^2 + 2ab}{a^2 - ab} = \frac{2a(a + b)}{a(a - b)} = \frac{2(a + b)}{a - b} = \frac{2a + 2b}{a - b}.$$

Приведем теперь решение рассмотренного примера без комментариев (как это вы будете делать в тетрадях):

$$\frac{2a^2 + 5}{a^2 - ab} + \frac{2ab + b}{a^2 - ab} - \frac{b + 5}{a^2 - ab} = \frac{(2a^2 + 5) + (2ab + b) - (b + 5)}{a^2 - ab} =$$

$$= \frac{2a^2 + 5 + 2ab + b - b - 5}{a^2 - ab} = \frac{2a^2 + 2ab}{a^2 - ab} = \frac{2a(a + b)}{a(a - b)} =$$

$$= \frac{2(a + b)}{a - b} = \frac{2a + 2b}{a - b}.$$

Как видите, в результате преобразований получилось алгебраическое выражение более простое, чем было задано в условии примера. Именно в упрощении и состоит цель преобразований, поэтому часто вместо словосочетания «выполнить действия» используют словосочетание «упростить выражение».

§ 4. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ С РАЗНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ

Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями выполняют по тому же алгоритму, что используется для сложения и вычитания обыкновенных дробей с разными знаменателями: сначала приводят дроби к общему знаменателю с помощью соответствующих дополнительных множителей, а затем складывают или вычитают полученные дроби с одинаковыми знаменателями по правилу из § 3. Можно сформулировать алгоритм, охватывающий любые случаи сложения (вычитания) алгебраических дробей.

Алгоритм сложения (вычитания) алгебраических дробей

1. Привести все дроби к общему знаменателю; если они с самого начала имели одинаковые знаменатели, то этот шаг алгоритма опускают.
2. Выполнить сложение (вычитание) полученных дробей с одинаковыми знаменателями.

Пример 1. Выполнить действия:

а) $\frac{a}{4b^2} + \frac{a^2}{6b^3}$; б) $\frac{x}{x+y} - \frac{x}{x-y}$.

Решение. Для каждой пары заданных здесь алгебраических дробей общий знаменатель был найден выше, в примере из § 2. Опираясь на решение указанного примера, получаем:

а) $\frac{a}{4b^2} + \frac{a^2}{6b^3} = \frac{3ab}{12b^3} + \frac{2a^2}{12b^3} = \frac{3ab + 2a^2}{12b^3}$;

б) $\dfrac{x}{x+y} - \dfrac{x}{x-y} = \dfrac{x^2 - xy}{x^2 - y^2} - \dfrac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} =$

$$= \frac{(x^2 - xy) - (x^2 + xy)}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 - xy - x^2 - xy}{x^2 - y^2} = \frac{-2xy}{x^2 - y^2}.$$

Самое трудное в приведенном на с. 15 алгоритме — это, конечно, первый шаг: отыскание общего знаменателя и приведение дробей к общему знаменателю. В примере 1 вы этой трудности, может быть, не ощутили, поскольку мы воспользовались готовыми результатами из § 2.

Чтобы выработать правило отыскания общего знаменателя, проанализируем пример 1.

Для дробей $\dfrac{a}{4b^2}$ и $\dfrac{a^2}{6b^3}$ общим знаменателем является одночлен $12b^3$. Он делится и на $4b^2$ и на $6b^3$, т. е. на оба одночлена, служащие знаменателями дробей. Обратите внимание: число 12 — наименьшее общее кратное чисел 4 и 6. Переменная b входит в знаменатель первой дроби с показателем 2, в знаменатель второй дроби — с показателем 3. Это наибольшее значение показателя 3 фигурирует в общем знаменателе.

Для дробей $\dfrac{x}{x+y}$ и $\dfrac{x}{x-y}$ общим знаменателем служит произведение $(x + y)(x - y)$ — оно делится и на знаменатель $x + y$ и на знаменатель $x - y$.

При отыскании общего знаменателя приходится, естественно, все заданные знаменатели разлагать на множители (если это не было подготовлено в условии). А далее следует провести работу по этапам: найти наименьшее общее кратное для числовых коэффициентов (речь идет о целочисленных коэффициентах), определить для каждого несколько раз встречающегося буквенного множителя наибольший показатель степени, собрать все это в одно произведение.

Теперь можно оформить соответствующий алгоритм.

Алгоритм отыскания общего знаменателя для нескольких алгебраических дробей

1. Разложить все знаменатели на множители.
2. Найти наименьшее общее кратное для числовых коэффициентов, имеющихся в разложениях на множители, составленных на первом шаге.
3. Составить произведение, включив в него в качестве множителей все буквенные множители разложений, полученных на первом шаге алгоритма. Если некоторый множитель имеется в нескольких разложениях, то его следует взять с показателем степени, равным наибольшему из имеющихся.
4. Приписать к произведению, полученному на третьем шаге, числовой коэффициент, найденный на втором шаге; в итоге получится общий знаменатель.

Прежде чем двигаться дальше, попробуйте применить этот алгоритм к обоснованию поиска общего знаменателя для алгебраических дробей из примера 1.

Замечание. На самом деле общих знаменателей для двух алгебраических дробей можно найти сколько угодно. Для дробей $\frac{a}{4b^2}$ и $\frac{a^2}{6b^3}$ общим знаменателем, кроме найденного выше одночлена $12b^3$, может быть и $24b^3$ и $48a^2b^4$. Чем же одночлен $12b^3$ лучше, чем $24b^3$, чем $48a^2b^4$? Он проще (по виду). Его иногда называют даже не общим знаменателем, а *наименьшим общим знаменателем*. Таким образом, приведенный алгоритм — это алгоритм отыскания самого простого из общих знаменателей нескольких алгебраических дробей, *алгоритм отыскания наименьшего общего знаменателя.*

Снова вернемся к примеру 1,а. Общим знаменателем для дробей $\frac{a}{4b^2} + \frac{a^2}{6b^3}$ является одночлен $12b^3$. Дополнительный множитель для первой дроби равен $3b$ (поскольку $12b^3 : 4b^2 = 3b$), для второй дроби он равен 2 (поскольку $12b^3 : 6b^3 = 2$). Решение примера 1,б можно оформить так:

$$\frac{a^{\rfloor 3b}}{4b^2} + \frac{a^{2\rfloor 2}}{6b^3} = \frac{3ab + 2a^2}{12b^3}.$$

Выше был сформулирован алгоритм отыскания общего знаменателя для нескольких алгебраических дробей. Но опыт показывает, что этот алгоритм не всегда бывает понятен учащимся, поэтому мы дадим несколько видоизмененную формулировку.

Алгоритм приведения алгебраических дробей к общему знаменателю

1. Разложить все знаменатели на множители.
2. Из первого знаменателя выписать произведение всех его множителей, из остальных знаменателей приписать к этому произведению недостающие множители. Полученное произведение и будет общим (новым) знаменателем.
3. Найти дополнительные множители для каждой из дробей: это будут произведения тех множителей, которые имеются в новом знаменателе, но которых нет в старом знаменателе.
4. Найти для каждой дроби новый числитель: это будет произведение старого числителя и дополнительного множителя.
5. Записать каждую дробь с новым числителем и новым (общим) знаменателем.

Пример 2. Упростить выражение $\frac{3a}{4a^2 - 1} - \frac{a + 1}{2a^2 + a}$.

Решение.

<u>Первый этап.</u> Найдем общий знаменатель и дополнительные множители для каждой из двух дробей. Сначала разложим знаменатели на множители:

$$4a^2 - 1 = (2a - 1)(2a + 1),$$
$$2a^2 + a = a(2a + 1).$$

Первый знаменатель берем целиком, а из второго — добавляем множитель a, которого нет в первом знаменателе. Получим общий знаменатель $a(2a-1)(2a+1)$.

Удобно расположить записи в виде таблицы:

Знаменатели	Общий знаменатель	Дополнительные множители
$(2a-1)(2a+1)$	$a(2a-1)(2a+1)$	a
$a(2a+1)$		$(2a-1)$

Второй этап. Выполним преобразования:

$$\frac{3a}{4a^2-1}-\frac{a+1}{2a^2+a}=\frac{3a^{|a}}{(2a-1)(2a+1)}-\frac{a+1^{|2a-1}}{a(2a+1)}=$$

$$=\frac{3a^2-(a+1)(2a-1)}{a(2a-1)(2a+1)}=\frac{3a^2-(2a^2-a+2a-1)}{a(2a-1)(2a+1)}=$$

$$=\frac{3a^2-2a^2+a-2a+1}{a(2a-1)(2a+1)}=\frac{a^2-a+1}{a(2a-1)(2a+1)}.$$

При наличии некоторого опыта первый этап можно не выделять, выполняя его одновременно со вторым этапом.

В заключение рассмотрим более сложный пример.

П р и м е р 3. Упростить выражение

$$\frac{b}{2a^4+4a^3b+2a^2b^2}-\frac{1}{3ab^2-3a^3}+\frac{b}{6a^4-6a^3b}.$$

Р е ш е н и е.

Первый этап. Разложим все знаменатели на множители:

1) $2a^4+4a^3b+2a^2b^2=2a^2(a^2+2ab+b^2)=2a^2(a+b)^2$;

2) $3ab^2-3a^3=3a(b^2-a^2)=3a(b-a)(b+a)$;

3) $6a^4-6a^3b=6a^3(a-b)$.

Первый знаменатель берем целиком, из второго возьмем недостающие множители 3 и $b - a$ (или $a - b$), из третьего — недостающий множитель a (поскольку третий знаменатель содержит множитель a^3).

Знаменатели	Общий знаменатель	Дополнительные множители
$2a^2(a+b)^2$		$3a(a-b)$
$3a(b-a)(b+a)$	$6a^3(a-b)(a+b)^2$	$-2a^2(a+b)$
$6a^3(a-b)$		$(a+b)^2$

Заметим, что если у дополнительного множителя появляется знак «−», то его обычно ставят перед всей дробью, т. е. перед второй дробью придется поменять знак.

Второй этап. Выполним преобразования:

$$\frac{b}{2a^4+4a^3b+2a^2b^2} - \frac{1}{3ab^2-3a^3} + \frac{b}{6a^4-6a^3b} =$$

$$= \frac{b^{\underline{|3a(a-b)}}}{2a^2(a+b)^2} + \frac{1^{\underline{|2a^2(a+b)}}}{3a(a-b)(a+b)} + \frac{b^{\underline{|(a+b)^2}}}{6a^3(a-b)} =$$

$$= \frac{3ab(a-b)+2a^2(a+b)+b(a^2+2ab+b^2)}{6a^3(a-b)(a+b)^2} =$$

$$= \frac{3a^2b-3ab^2+2a^3+2a^2b+a^2b+2ab^2+b^3}{6a^3(a-b)(a+b)^2} = \frac{2a^3+6a^2b-ab^2+b^3}{6a^3(a-b)(a+b)^2}.$$

Отметим, что замена выражения, данного в примере 3, той алгебраической дробью, которая получилась в результате, есть тождественное преобразование при допустимых значениях переменных. В данном случае допустимыми являются любые значения переменных a и b, кроме $a = 0$, $a = b$, $a = -b$ (в этих случаях знаменатели обращаются в нуль).

§ 5. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ. ВОЗВЕДЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ДРОБИ В СТЕПЕНЬ

Умножение алгебраических дробей осуществляется по тому же правилу, что и умножение обыкновенных дробей:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Аналогично обстоит дело с делением алгебраических дробей, с возведением алгебраической дроби в натуральную степень. Правило деления выглядит так:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

а правило возведения в степень — так:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Прежде чем выполнять умножение и деление алгебраических дробей, полезно их числители и знаменатели разложить на множители — это облегчит сокращение той алгебраической дроби, которая получится в результате умножения или деления.

Пример 1. Выполнить действия:

а) $\frac{5x + 5y}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{10x}$; б) $\frac{7a^3b^5}{3a - 3b} \cdot \frac{6b^2 - 12ab + 6a^2}{49a^4b^5}$.

Решение.

а) $$\frac{5x + 5y}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{10x} = \frac{5(x + y)}{x - y} \cdot \frac{(x - y)(x + y)}{10x} =$$

$$= \frac{5(x + y)(x - y)(x + y)}{(x - y) \cdot 10x} = \frac{(x + y)^2}{2x};$$

б) $$\frac{7a^3b^5}{3a-3b}\cdot\frac{6b^2-12ab+6a^2}{49a^4b^5}=\frac{7a^3b^5}{3(a-b)}\cdot\frac{6(b^2-2ab+a^2)}{49a^4b^5}=$$

$$=\frac{7a^3b^5\cdot 6(b-a)^2}{3(a-b)\cdot 49a^4b^5}=\frac{2(b-a)^2}{7a(a-b)}.$$

Воспользуемся тем, что $(b-a)^2=(a-b)^2$. Получим:

$$\frac{2(b-a)^2}{7a(a-b)}=\frac{2(a-b)^2}{7a(a-b)}=\frac{2(a-b)}{7a}.$$

Пример 2. Выполнить действия:

а) $\dfrac{x^3-1}{8y}:\dfrac{x^2+x+1}{16y^2}$; б) $\dfrac{a^4-b^4}{ab+2b-3a-6}:\dfrac{b-a}{a+2}$.

Решение.

а) $$\frac{x^3-1}{8y}:\frac{x^2+x+1}{16y^2}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{8y}:\frac{x^2+x+1}{16y^2}=$$

$$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)\cdot 16y^2}{8y\cdot(x^2+x+1)}=(x-1)\,2y=2xy-2y;$$

б) $$\frac{a^4-b^4}{ab+2b-3a-6}:\frac{b-a}{a+2}=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{(ab+2b)-(3a+6)}:\frac{b-a}{a+2}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}{b(a+2)-3(a+2)}:\frac{b-a}{a+2}=\frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}{(a+2)(b-3)}:\frac{b-a}{a+2}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a+2)}{(a+2)(b-3)(b-a)}=\frac{-(a+b)(a^2+b^2)}{(b-3)}.$$

Мы учли, что в результате деления $a-b$ на $b-a$ получится -1. Впрочем, знак «$-$» в данном случае лучше переместить в знаменатель:

$$\frac{-(a+b)(a^2+b^2)}{(b-3)}=\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{-(b-3)}=\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{3-b}.$$

Пример 3. Выполнить действия:

$$\left(\frac{x+2}{3x^2-6x}\right)^3 : \left(\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}\right)^2.$$

Решение.

$$\left(\frac{x+2}{3x^2-6x}\right)^3 : \left(\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}\right)^2 = \left(\frac{x+2}{3x(x-2)}\right)^3 : \left(\frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(x+2)^3}{27x^3(x-2)^3} : \frac{(x+2)^4}{(x-2)^4} = \frac{(x+2)^3(x-2)^4}{27x^3(x-2)^3(x+2)^4} = \frac{(x-2)}{27x^3(x+2)}.$$

§ 6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Этот параграф подводит итог всему тому, что мы, начиная с 7-го класса, говорили о математическом языке, о математической символике, о числах, переменных, степенях, многочленах и алгебраических дробях. Но сначала совершим небольшой экскурс в прошлое.

Вспомните, как в младших классах обстояло дело с изучением чисел и числовых выражений. Сначала вы изучали натуральные числа (1, 2, 3, 4, 5, ...) и операции над ними (но, конечно, этому предшествовало знакомство с цифрами). Затем появились целые числа (0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, ...) — к ним относятся все натуральные числа, число 0 и целые отрицательные числа. Затем вы изучали рациональные числа — к ним относятся все целые числа и все дроби, как положительные, так и отрицательные. Таким образом, ко всякому натуральному числу, например к числу 2, можно «приклеить» три «ярлыка»: число 2 — натуральное, целое, рациональное. И это правильно, просто третий «ярлык» — рациональное число — достаточно широк, второй «ярлык» — целое число — поконкретнее, первый «ярлык» — натуральное число — самый конкретный.

Ко всякому целому числу, например к числу -2, можно «приклеить» два «ярлыка» — целое число, рациональное число. А, скажем, к дроби $\frac{3}{5}$ можно «приклеить» только один «ярлык» — рациональное число.

Аналогично обстоит дело с алгебраическими выражениями: первый этап их изучения — числа, переменные, степени («цифры»); второй этап их изучения — одночлены («натуральные числа»); третий этап их изучения — многочлены («целые числа»); четвертый этап их изучения — алгебраические дроби («рациональные числа»). При этом каждый следующий этап как бы вбирает в себя предыдущий: так, числа, переменные, степени — частные случаи одночленов; одночлены — частные случаи многочленов; многочлены — частные случаи алгебраических дробей. В алгебре используют иногда и такие термины: многочлен — **целое выражение**, алгебраическая дробь — **дробное выражение** (это лишь усиливает аналогию).

целое выражение

дробное выражение

рациональное выражение

Продолжим упомянутую аналогию. Вы знаете, что любое числовое выражение после выполнения всех входящих в его состав арифметических действий принимает конкретное числовое значение — рациональное число (разумеется, оно может оказаться и натуральным числом, и целым числом, и дробью — это неважно). Точно так же любое алгебраическое выражение, составленное из чисел и переменных с помощью арифметических операций и возведения в натуральную степень (для таких выражений в алгебре используют термин **рациональное выражение**), после выполнения преобразований принимает вид алгебраической дроби (и опять-таки, в частности, может получиться не дробь, а многочлен или даже одночлен).

П р и м е р. Доказать тождество

$$\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)+\frac{8a^2}{2a+b}=2a.$$

Р е ш е н и е. Доказать тождество — это значит установить, что при всех допустимых значениях переменных его левая и правая части равны. В алгебре тождества доказывают различными способами:

1) выполняют преобразования левой части и получают в итоге правую часть;

2) выполняют преобразования правой части и получают в итоге левую часть;

3) по отдельности преобразуют правую и левую части и получают и в первом и во втором случае одно и то же выражение;

4) составляют разность левой и правой частей и в результате ее преобразований получают нуль.

Какой способ выбрать — зависит от конкретного вида тождества, которое вам предлагается доказать. В данном примере целесообразно выбрать первый способ.

Для преобразования рациональных выражений принят тот же порядок действий, что и для преобразования числовых выражений. Это значит, что сначала выполняют действия в скобках, затем действия второй ступени (умножение, деление, возведение в степень), затем действия первой ступени (сложение, вычитание). Выполним преобразования по действиям, опираясь на те правила, что были выработаны в предыдущих параграфах.

1) $$\frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2} = \frac{2a^{|2a+b}}{2a+b} - \frac{4a^2}{(2a+b)^2} =$$

$$= \frac{2a(2a+b)-4a^2}{(2a+b)^2} = \frac{4a^2+2ab-4a^2}{(2a+b)^2} = \frac{2ab}{(2a+b)^2}.$$

2) $$\frac{2a}{4a^2-b^2} + \frac{1}{b-2a} = \frac{2a}{(2a-b)(2a+b)} - \frac{1^{|2a+b}}{2a-b} =$$

$$= \frac{2a-(2a+b)}{(2a-b)(2a+b)} = \frac{2a-2a-b}{(2a-b)(2a+b)} = \frac{-b}{(2a-b)(2a+b)}.$$

3) $\frac{2ab}{(2a+b)^2} : \frac{-b}{(2a-b)(2a+b)} = -\frac{2ab(2a-b)(2a+b)}{(2a+b)^2 \cdot b} =$

$= -\frac{2a(2a-b)}{2a+b} = \frac{-(4a^2-2ab)}{2a+b} = \frac{2ab-4a^2}{2a+b}$.

4) $\frac{2ab-4a^2}{2a+b} + \frac{8a^2}{2a+b} = \frac{2ab-4a^2+8a^2}{2a+b} =$

$= \frac{2ab+4a^2}{2a+b} = \frac{2a(b+2a)}{2a+b} = 2a.$

Как видите, нам удалось преобразовать левую часть проверяемого тождества к виду правой части. Это значит, что тождество доказано. Однако напомним, что тождество справедливо лишь для допустимых значений переменных. Таковыми в данном примере являются любые значения a и b, кроме тех, которые обращают знаменатели дробей в нуль. Значит, допустимыми являются любые пары чисел (a; b), кроме тех, при которых выполняется хотя бы одно из равенств:

$$2a - b = 0, \quad 2a + b = 0, \quad b = 0.$$

§ 7. ПЕРВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О РЕШЕНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Если $p(x)$ — рациональное выражение, то уравнение $p(x) = 0$ называют *рациональным уравнением*. Далеко не любое рациональное уравнение мы с вами сможем решить уже сейчас, для этого надо изучить другие разделы алгебры. Но справиться с некоторыми рациональными уравнениями нам уже по силам.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$\frac{2x-1}{5} - \frac{3x+2}{4} - 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Выполним действия в левой части уравнения, для чего сначала приведем имеющиеся дроби к общему знаменателю 20:

$$\frac{2x-1^{\lfloor 4}}{5} - \frac{3x+2^{\lfloor 5}}{4} - 1^{\lfloor 20} = \frac{4(2x-1)-5(3x+2)-20}{20} =$$

$$= \frac{8x-4-15x-10-20}{20} = \frac{-7x-34}{20}.$$

Теперь заданное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{-7x-34}{20}=0.$$

Дробь обращается в нуль лишь при условиях, что числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Значит, получаем:

$$-7x-34=0;\quad -7x=34;\quad x=-\frac{34}{7}.$$

О т в е т: $x=-4\frac{6}{7}$.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$\frac{2}{x+3}+1=\frac{x^2-10}{x^2-9}.$$

Р е ш е н и е. Равенства $A=B$ и $A-B=0$ выражают одну и ту же зависимость между A и B. Учитывая это, перепишем данное уравнение в виде $\frac{2}{x+3}+1-\frac{x^2-10}{x^2-9}=0.$

Это — рациональное уравнение. Выполним преобразования его левой части:

$$\frac{2}{x+3}+1-\frac{x^2-10}{x^2-9}=\frac{2^{|x-3}}{x+3}+1^{|(x-3)(x+3)}-\frac{x^2-10}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\frac{2(x-3)+(x-3)(x+3)-(x^2-10)}{(x-3)(x+3)}=\frac{2x-6+x^2-9-x^2+10}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\frac{2x-5}{(x-3)(x+3)}.$$

В итоге мы приходим к уравнению $\frac{2x-5}{(x-3)(x+3)}=0.$

Воспользуемся условиями равенства дроби нулю (они сформулированы в ходе решения примера 1). Приравняв нулю числитель дроби, получим:

$$2x-5=0;\quad 2x=5;\quad x=2{,}5.$$

Но напомним, что условий равенства дроби нулю — два: равенство нулю числителя (этим мы уже воспользовались) и отличие от нуля ее знаменателя. Это второе условие надо проверить.

Если $x = 2{,}5$, то знаменатель $(x - 3)(x + 3)$ отличен от нуля. Все в порядке: $x = 2{,}5$ — корень уравнения.

О т в е т: $x = 2{,}5$.

обратите внимание

К обоим условиям равенства дроби $\frac{a}{b}$ нулю надо относиться одинаково уважительно, т. е. сначала надо воспользоваться условием $a = 0$, а затем не забыть проверить условие $b \neq 0$.

П р и м е р 3. Решить уравнение $\frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 9} - \frac{x - 1}{x - 3} = 0$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{2x^2 + 5x - 3}{(x - 3)(x + 3)} - \frac{x - 1^{|(x+3)}}{x - 3} = 0;$$

$$\frac{2x^2 + 5x - 3 - (x - 1)(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} = 0.$$

Приравняв числитель алгебраической дроби, содержащейся в левой части уравнения, нулю, получим:

$$2x^2 + 5x - 3 - (x^2 - x + 3x - 3) = 0;$$

$$x^2 + 3x = 0;$$

$$x(x + 3) = 0;$$

$$x_1 = 0, \ x_2 = -3.$$

Выполним проверку найденных значений.

При $x = -3$ знаменатель $(x - 3)(x + 3)$ обращается в нуль, значит, это значение корнем уравнения не является.

При $x = 0$ знаменатель в нуль не обращается, это значение является корнем уравнения.

О т в е т: 0.

П р и м е р 4. Решить уравнение $\frac{10}{x + 2} + \frac{6}{x - 2} = 2$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{10}{x+2}+\frac{6}{x-2}-2=0.$$

Выполним преобразования левой части уравнения:

$$\frac{10^{|x-2}}{x+2}+\frac{6^{|x+2}}{x-2}-2^{|(x+2)(x-2)}=\frac{10(x-2)+6(x+2)-2(x^2-4)}{(x+2)(x-2)}=$$

$$=\frac{10x-20+6x+12-2x^2+8}{(x+2)(x-2)}=\frac{16x-2x^2}{(x+2)(x-2)}=\frac{2x(8-x)}{(x+2)(x-2)}.$$

Теперь заданное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{2x(8-x)}{(x+2)(x-2)}=0.$$

Первое условие равенства дроби нулю приводит к уравнению $2x(8-x)=0$, откуда получаем: $2x=0$ или $8-x=0$, т. е. $x=0$ или $x=8$.

Второе условие равенства дроби нулю обязывает нас поочередно подставить найденные значения $x=0$ и $x=8$ в знаменатель $(x+2)(x-2)$. Поскольку ни при $x=0$, ни при $x=8$ знаменатель не обращается в нуль, оба значения являются корнями уравнения.

Ответ: 0; 8.

Пример 5. Лодка прошла 10 км по течению реки и 6 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Чему равна собственная скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Этот этап нами уже пройден ранее — см. пример 2 из § 1. Математическая модель задачи — уравнение

$$\frac{10}{x+2}+\frac{6}{x-2}=2,$$

где x км/ч — собственная скорость лодки.

<u>Второй этап.</u> *Работа с составленной моделью.*

В § 1 мы этого сделать не смогли. Теперь мы с вами знаем побольше, и эту модель, т.е. это уравнение, уже решили выше в примере 4. Получили: $x_1 = 0$, $x_2 = 8$.

<u>Третий этап.</u> *Ответ на вопрос задачи.*

Нужно выяснить, чему равна собственная скорость лодки, т.е. чему равно значение x. Мы получили, что либо $x = 0$, либо $x = 8$. Первое значение нас явно не устраивает: собственная скорость лодки не может быть равной 0 км/ч (по условию лодка плывет, а не стоит на месте). Второе значение нас устраивает.

О т в е т: собственная скорость лодки равна 8 км/ч.

§ 8. СТЕПЕНЬ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Вы умеете вычислять значение степени с любым натуральным показателем. Например,

$0{,}2^1 = 0{,}2$; $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$; $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$;
$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$;
$0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ и т. д.

Но математики на этом не остановились.

Так, еще в курсе алгебры 7-го класса мы познакомились с понятием степени с нулевым показателем: если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$. Например, $5{,}7^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$ и т. д.

Постепенно продвигаясь в изучении математического языка, мы с вами поймем, что означают в математике символы 2^{-3}, $3^{\frac{1}{2}}$ и т. д. Частично это мы сделаем уже в настоящем параграфе, а частично — в курсе алгебры 11-го класса.

Зададим вопрос: если уж вводить символ 2^{-3}, то каким математическим содержанием его наполнить? Хорошо бы, рассуждали математики, чтобы сохранялись привычные свойства степеней, например чтобы при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складывались; в частности, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$2^{-3} \cdot 2^3 = 2^0 \text{ (подробнее: } 2^{-3} \cdot 2^3 = 2^{-3+3} = 2^0\text{)}.$$

Но $2^0 = 1$, а тогда из равенства $2^{-3} \cdot 2^3 = 1$ получаем, что $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$. Значит, появились основания определить 2^{-3} как $\frac{1}{2^3}$. Подобные рассуждения и позволили ввести следующее определение.

Определение. Если n — натуральное число и $a \neq 0$, то под a^{-n} понимают $\frac{1}{a^n}$:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0.}$$

Например, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $7^{-1} = \frac{1}{7^1} = \frac{1}{7}$ и т. д.

Естественно, что записанную выше формулу при необходимости используют справа налево, например:

$$\frac{1}{5} = 5^{-1}, \quad \frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}.$$

Отметим одно важное тождество, которое часто используется на практике:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}.$$

В частности,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n,\ a \neq 0.$$

Пример 1. Вычислить $2^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - 16^{-1}$.

Решение.

1) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$;

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{27}{8}$;

3) $16^{-1} = \dfrac{1}{16}$;

4) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{27}{8} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{57}{16}$.

Ответ: $3\dfrac{9}{16}$.

Пример 2. Доказать, что:

а) $a^{-3} \cdot a^{-5} = a^{-8}$; б) $a^4 : a^{-3} = a^7$; в) $(a^{-2})^{-3} = a^6$.

Решение. а) $a^{-3} \cdot a^{-5} = \dfrac{1}{a^3} \cdot \dfrac{1}{a^5} = \dfrac{1}{a^3 \cdot a^5} = \dfrac{1}{a^8} = a^{-8}$.

б) $a^4 : a^{-3} = a^4 : \dfrac{1}{a^3} = a^4 \cdot a^3 = a^7$.

в) $(a^{-2})^{-3} = \left(\dfrac{1}{a^2}\right)^{-3} = (a^2)^3 = a^6$.

Рассмотрим тождества, доказанные в примере 2, повнимательнее. Первое означает, что

$$a^{-3} \cdot a^{-5} = a^{-3+(-5)}$$

(*при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются*).

Второе тождество означает, что

$$a^4 : a^{-3} = a^{4-(-3)}$$

(*при делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя делимого надо вычесть показатель делителя*).

Третье тождество означает, что

$$(a^{-2})^{-3} = a^{(-2)\cdot(-3)}$$

(*при возведении степени в степень показатели перемножаются*).

обратите внимание

Как видите, те свойства степеней, к которым вы привыкли, имея дело с натуральными показателями, сохраняются и для отрицательных целых показателей.

Вообще, справедливы следующие свойства (мы считаем, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, s и t — произвольные целые числа):

1. $a^s \cdot a^t = a^{s+t}$.

2. $a^s : a^t = a^{s-t}$.

3. $(a^s)^t = a^{st}$.

4. $(ab)^s = a^s \cdot b^s$.

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}$.

Заметим, что теперь мы имеем право не делать в свойстве 2 ограничения $s > t$ (как это было тогда, когда мы оперировали только с натуральными показателями степени). Например, верно как равенство $a^7 : a^2 = a^{7-2}$, так и равенство $a^2 : a^7 = a^{2-7}$.

Частичные обоснования указанных свойств были сделаны выше, этим и ограничимся.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этой главе вы познакомились со следующими понятиями:
алгебраическая дробь; числитель и знаменатель алгебраической дроби;
основное свойство алгебраической дроби;
приведение нескольких алгебраических дробей к общему знаменателю;
рациональное выражение, целое выражение, дробное выражение;
рациональное уравнение;
степень с отрицательным целым показателем.

Мы сформулировали следующие правила:
правило приведения нескольких алгебраических дробей к общему знаменателю;
правила сложения, вычитания, умножения и деления алгебраических дробей;

правило возведения алгебраической дроби в натуральную степень;

правило решения уравнений вида $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Мы получили новые тождества, справедливые для любых отличных от нуля значений a и b и любых целочисленных показателей t и s:

$a^s \cdot a^t = a^{s+t}$;

$a^s : a^t = a^{s-t}$;

$(a^s)^t = a^{st}$;

$(ab)^s = a^s \cdot b^s$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}$.

ГЛАВА 2

ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$. СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ

§ 9. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Некоторые символы математического языка

Вам хорошо известны натуральные числа:

$$1, 2, 3, 4, \ldots .$$

Множество всех **натуральных чисел** обычно обозначают буквой N.

Если к натуральным числам присоединить число 0 и все целые отрицательные числа: -1, -2, -3, -4, ..., — то получится **множество целых чисел**. Это множество обычно обозначают буквой Z.

Если к множеству целых чисел присоединить все обыкновенные дроби: $\frac{2}{3}$, $\frac{15}{8}$, $-\frac{33}{58}$ и т. д., — то получится **множество рациональных чисел**. Это множество обычно обозначают буквой Q.

Любое целое число m можно записать в виде дроби $\frac{m}{1}$, поэтому справедливо утверждение о том, что *множество* Q *рациональных чисел — это множество, состоящее из чисел вида* $\frac{m}{n}$, $-\frac{m}{n}$ (*где* m, n *— натуральные числа*) *и числа* 0.

знак включения

знак принадлежности

множество

подмножество

Используя введенные обозначения N, Z, Q, условимся о следующем:

1. Вместо фразы «n — натуральное число» можно писать $n \in N$ (читают: «элемент n принадлежит множеству N»). Математический символ $\in$ называют *знаком принадлежности*.

2. Вместо фразы «m — целое число» можно писать $m \in Z$.

3. Вместо фразы «r — рациональное число» можно писать $r \in Q$.

Понятно, что N — часть множества Z, а Z — часть множества Q. Для описания этой ситуации в математике также имеется специальное обозначение:

$$N \subset Z, \ Z \subset Q.$$

Математический символ $\subset$ называют *знаком включения* (одного множества в другое).

Вообще, в математике запись $x \in X$ означает, что x — один из элементов множества X. Запись $A \subset B$ означает, что множество A представляет собой часть множества B. Математики чаще говорят так: A — *подмножество множества* B.

Обратите внимание: множества в математике обычно обозначают прописными буквами, а элементы множества — строчными буквами.

И еще на один момент обратите внимание: знаки принадлежности (элемент принадлежит множеству) и включения (одно множество содержится в другом) — различные, соответственно $\in$ и $\subset$.

А как записать, что элемент x не принадлежит множеству X или что множество A не является частью (подмножеством) множества B? Используют те же символы, но перечеркнутые косой чертой: $x \notin X, A \not\subset B$.

Приведем несколько примеров использования введенных математических символов для сокращения записи верных математических утверждений — их называют также *истинными высказываниями*.

Пример 1.

а) $5 \in \boldsymbol{N}$, $5 \in \boldsymbol{Z}$, $5 \in \boldsymbol{Q}$;

б) $-7 \notin \boldsymbol{N}$, $-7 \in \boldsymbol{Z}$, $-7 \in \boldsymbol{Q}$;

в) $3{,}5 \notin \boldsymbol{N}$, $3{,}5 \notin \boldsymbol{Z}$, $3{,}5 \in \boldsymbol{Q}$.

Пример 2.

$2 \in [1; 3]$; $1 \in [1; 3]$; $1 \notin (1; 3)$.

Пример 3.

а) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z} \not\subset \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q} \not\subset \boldsymbol{Z}$;

б) $(1; 3) \subset [1; 3]$, $[1; 3] \not\subset (1; 3)$, $[1; 3] \subset (0; +\infty)$, $[2; 5] \subset (-3; 8)$.

2. Рациональные числа как бесконечные десятичные периодические дроби

Для всех рациональных чисел можно использовать один и тот же способ записи, который мы сейчас и обсудим.

Рассмотрим, например, целое число 5, обыкновенную дробь $\frac{7}{22}$ и десятичную дробь 8,377. Целое число 5 можно записать в виде бесконечной десятичной дроби: 5,0000... . Десятичную дробь 8,377 также можно записать в виде бесконечной десятичной дроби: 8,377000... . Для числа $\frac{7}{22}$ воспользуемся методом «деления углом»:

$$
\begin{array}{l|l}
-7{,}000000\ldots & \underline{22\qquad} \\
\ \ \underline{6\,6} & 0{,}31818\ldots \\
\ \ -40 & \\
\ \ \ \ \underline{22} & \\
\ \ -180 & \\
\ \ \ \ \underline{176} & \\
\ \ \ \ -40 & \\
\ \ \ \ \ \ \underline{22} & \\
\ \ \ \ \ \ 180 & \\
\ \ \ \ \ \ \ldots &
\end{array}
$$

период дроби

бесконечная десятичная периодическая дробь

Как видите, начиная со второй цифры после запятой происходит повторение одной и той же группы цифр: 18, 18, 18, ... Таким образом, $\frac{7}{22} = 0{,}3181818\ldots$. Короче это записывают так: 0,3(18). Повторяющуюся группу цифр после запятой называют **периодом**, а саму десятичную дробь — **бесконечной десятичной периодической дробью.**

Между прочим, и число 5 можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Для этого надо в периоде записать число 0:

$$5 = 5{,}00000\ldots = 5{,}(0).$$

Так же обстоит дело и с числом 8,377:

$$8{,}377 = 8{,}377000\ldots = 8{,}377(0).$$

Чтобы все было аккуратно, говорят так: 8,377 — конечная десятичная дробь, а 8,377000... — бесконечная десятичная дробь.

Таким образом, и число 5, и число $\frac{7}{22}$, и число 8,377 удалось записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Замечание. Этот вывод удобен для теории, но не очень удобен для практики. Ведь если дана конечная десятичная дробь 8,377, то зачем нужна ее запись в виде 8,377(0)? Поэтому обычно говорят так:

любое рациональное число можно записать в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Выше мы показали, как обыкновенную дробь представляют в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Верно и обратное: *любую бесконечную десятичную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби*. Это значит, что *любая бесконечная десятичная периодическая дробь есть рациональное число*.

Покажем на примере, как бесконечную десятичную периодическую дробь превращают в обыкновенную дробь.

Пример. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь:

а) 1,(23); б) 1,5(23); в) 0,1(9).

Решение. а) Положим $x = 1,(23)$, т. е. $x = 1,232323...$. Умножим x на такое число, чтобы запятая передвинулась вправо ровно на один период. Поскольку в периоде содержатся две цифры, нужно, чтобы запятая передвинулась вправо на две цифры, а для этого число x надо умножить на 100. Получим:

$$100x = 123,232323... .$$

Значит,

$$-\begin{array}{r} 100x = 123,232323... \\ x = \quad 1,232323... \end{array}$$

$$\overline{100x - x = 123,232323... - 1,232323...},$$

т.е.

$$99x = 122,$$

откуда находим: $x = \dfrac{122}{99}$.

Итак, $1,(23) = \dfrac{122}{99} = 1\dfrac{23}{99}$.

б) Положим $x = 1,5(23) = 1,5232323...$. Сначала умножим x на 10, чтобы в полученном произведении период начинался сразу после запятой: $10x = 15,232323...$. Теперь число $10x$ умножим на 100 — тогда запятая сместится ровно на один период вправо: $1000x = 1523,232323...$. Далее:

$$\begin{array}{r} _{-}\begin{array}{rl} 1000x = & 1523{,}232323\ldots \\ 10x = & 15{,}232323\ldots \end{array} \\ \hline 990x = 1508; \end{array}$$

$$x = \frac{1508}{990} = \frac{754}{495} = 1\frac{259}{495}.$$

Итак, $1{,}5(23) = \frac{754}{495} = 1\frac{259}{495}$.

в) Положим $x = 0{,}1(9)$. Тогда

$$\begin{array}{r} _{-}\begin{array}{rl} 100x = & 19{,}999\ldots \\ 10x = & 1{,}999\ldots \end{array} \\ \hline 90x = 18. \end{array}$$

Из последнего уравнения находим: $x = \frac{1}{5}$. Обратите внимание: $\frac{1}{5} = 0{,}2 = 0{,}2000\ldots = 0{,}2(0)$. Таким образом, число $\frac{1}{5}$ имеет две записи в виде бесконечной десятичной периодической дроби:

$$\frac{1}{5} = 0{,}2(0); \ \frac{1}{5} = 0{,}1(9).$$

О т в е т: а) $1\frac{23}{99}$; б) $1\frac{259}{495}$; в) $\frac{1}{5}$.

Замечание. В примере мы видели, что $0{,}1(9) = 0{,}2(0)$. Аналогично можно установить, что $2{,}45(9) = 2{,}46(0)$, $1{,}(9) = 2{,}(0)$ и т. д. Поэтому обычно десятичные дроби с периодом 9 не рассматривают, заменяют их соответствующими дробями с периодом 0.

Теперь мы сформулируем основной результат этого параграфа: *множество Q рациональных чисел можно рассматривать как множество чисел вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число, или как множество бесконечных десятичных периодических дробей.*

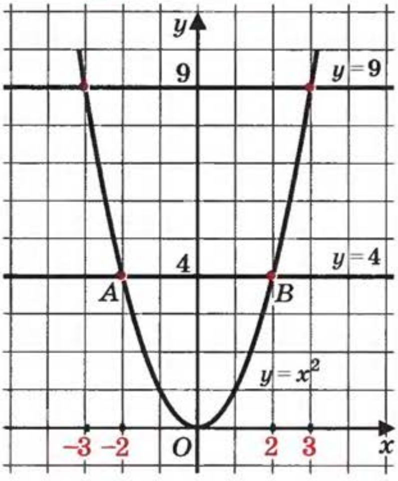


Рис. 1

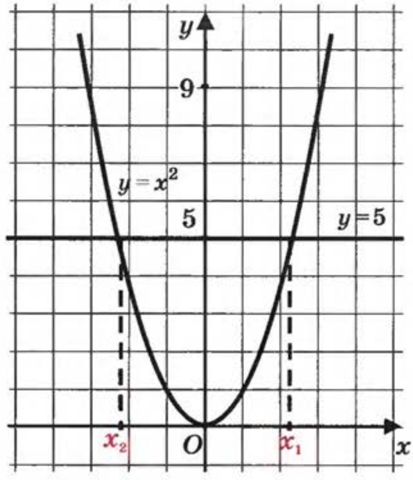


Рис. 2

§ 10. ПОНЯТИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Рассмотрим уравнение $x^2 = 4$. Решим его графически. Для этого в одной системе координат построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 4$ (рис. 1). Они пересекаются в двух точках $A(-2;\ 4)$ и $B(2;\ 4)$. Абсциссы точек A и B являются корнями уравнения $x^2 = 4$. Итак, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Рассуждая точно так же, находим корни уравнения $x^2 = 9$ (см. рис. 1): $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

А теперь попробуем решить уравнение $x^2 = 5$; геометрическая иллюстрация представлена на рис. 2. Ясно, что это уравнение имеет два корня x_1 и x_2, причем эти числа, как и в двух предыдущих случаях, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку ($x_1 = -x_2$). Но в отличие от предыдущих случаев, где корни уравнения были найдены без труда (причем их можно было найти и не пользуясь графиками), с уравнением $x^2 = 5$ дело обстоит не так: по чертежу мы не можем указать значения корней, можем только установить, что один корень располагается чуть левее точки −2, а второй — чуть правее точки 2.

Что же это за число (точка), которое располагается чуть правее точки 2 и которое в квадрате дает 5? Ясно, что это не 3, так как $3^2 = 9$, т. е. получается больше, чем нужно ($9 > 5$). Значит, интересующее нас число расположено между числами 2 и 3. Но между числами 2 и 3 находится бесконечное множество рациональных чисел, например $\frac{17}{8}$, $\frac{25}{11}$, $\frac{2973}{1000}$ и т. д. Может быть, среди них найдется такая дробь $\frac{m}{n}$, что $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$? Тогда никаких проблем с уравнением $x^2 = 5$ у нас не будет, мы сможем написать, что $x_1 = \frac{m}{n}$, $x_2 = -\frac{m}{n}$.

Но тут нас ждет неприятный сюрприз. Оказывается, *нет такой дроби* $\frac{m}{n}$, *для которой выполняется равенство* $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$.

Доказательство сформулированного утверждения довольно сложно. Тем не менее мы его приводим (петитом), поскольку оно красиво и поучительно, очень полезно попытаться его понять.

Предположим, что имеется такая несократимая дробь $\frac{m}{n}$, для которой выполняется равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$. Тогда $\frac{m^2}{n^2} = 5$, т. е. $m^2 = 5n^2$. Последнее равенство означает, что натуральное число m^2 делится без остатка на 5 (в частном получится n^2). Следовательно, число m^2 оканчивается либо цифрой 5, либо цифрой 0. Но тогда и натуральное число m оканчивается либо цифрой 5, либо цифрой 0, т. е. число m делится на 5 без остатка. Иными словами, если число m разделить на 5, то в частном получится какое-то натуральное число k. Это значит, что $m = 5k$.

А теперь смотрите:

$$m^2 = 5n^2; \quad m = 5k.$$

Подставим $5k$ вместо m в первое равенство:

$$(5k)^2 = 5n^2, \quad \text{т. е. } 25k^2 = 5n^2 \quad \text{или } n^2 = 5k^2.$$

Последнее равенство означает, что число n^2 делится на 5 без остатка. Рассуждая, как и выше, приходим к выводу о том, что и число n делится на 5 без остатка.

Итак, m делится на 5, n делится на 5, значит, дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить (на 5). Но ведь мы предполагали, что дробь $\frac{m}{n}$ — несократимая.

В чем же дело? Почему, правильно рассуждая, мы пришли к абсурду или, как чаще говорят математики, *получили противоречие*? Да потому, что неверной была исходная посылка, будто бы существует такая несократимая дробь $\frac{m}{n}$, для которой выполняется равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$. Отсюда делаем вывод: такой дроби нет.

метод доказательства от противного

Метод доказательства, который мы применили только что, называют в математике **методом доказательства от противного.** Суть его в следующем. Нам нужно доказать некоторое утверждение, а мы предполагаем, что оно не выполняется (математики говорят: «предположим противное» — не в смысле «неприятное», а в смысле «противоположное тому, что требуется»). Если в результате правильных рассуждений приходим к противоречию с условием, то делаем вывод: наше предположение неверно, значит, верно то, что требовалось доказать.

Итак, располагая только рациональными числами (а других чисел мы с вами пока не знаем), уравнение $x^2 = 5$ мы решить не сможем.

Встретившись впервые с подобной ситуацией, математики поняли, что надо придумать способ ее описания на математическом языке. Они ввели в рассмотрение новый символ $\sqrt{}$ и с его помощью корни уравнения $x^2 = 5$ записали так: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$ (читают: «корень квадратный из пяти»). Теперь для любого уравнения вида $x^2 = a$, где $a > 0$, можно записать корни: $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$ (рис. 3).

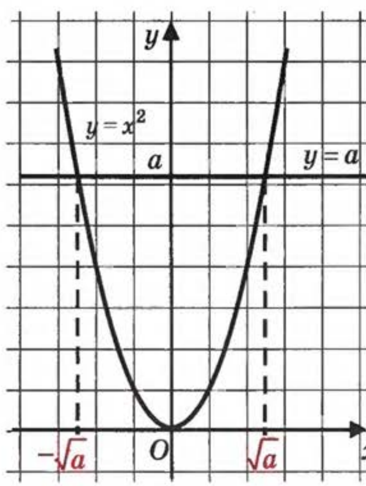


Рис. 3

Еще раз подчеркнем, что число $\sqrt{5}$ не целое и не дробь, т. е. $\sqrt{5}$ — не рациональное число, это *число новой природы*, о таких числах мы специально поговорим позднее, в § 11.

Пока лишь отметим, что новое число $\sqrt{5}$ находится между числами 2 и 3, поскольку $2^2 = 4$, а это меньше, чем 5; $3^2 = 9$, а это больше, чем 5. Можно уточнить:

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3.$$

В самом деле, $2{,}2^2 = 4{,}84 < 5$, а $2{,}3^2 = 5{,}29 > 5$. Можно еще уточнить:

$$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24;$$

действительно, $2{,}23^2 = 4{,}9729 < 5$, а $2{,}24^2 = 5{,}0176 > 5$.

На практике обычно полагают, что число $\sqrt{5}$ равно 2,23 или оно равно 2,24, только это не обычное равенство, а *приближенное равенство*, для обозначения которого используют символ $\approx$.

Итак,

$$\sqrt{5} \approx 2{,}23 \text{ или } \sqrt{5} \approx 2{,}24.$$

Обсуждая решение уравнения $x^2 = a$, мы столкнулись с довольно типичным для математики положением дел. Попадая в нестандартную, нештатную (как любят выражаться космонавты) ситуацию и не найдя выхода из нее с помощью известных средств, математики придумывают для впервые встретившейся им математической модели *новый термин* и *новое обозначение* (новый символ); иными словами, они вводят новое понятие, а затем изучают *свойства* этого понятия. Тем самым новое понятие и его обозначение становятся достоянием математического языка. Мы действовали так же: ввели термин «корень квадратный из числа a», ввели символ $\sqrt{a}$ для его обозначения, а чуть позднее (в § 14) изучим свойства нового понятия. Пока мы знаем лишь одно: если $a > 0$, то $\sqrt{a}$ — положительное число, удовлетворяющее уравнению $x^2 = a$. Иными словами, $\sqrt{a}$ — это такое положительное число, при возведении которого в квадрат получается число a.

Поскольку уравнение $x^2 = 0$ имеет корень $x = 0$, условились считать, что $\sqrt{0} = 0$.

Теперь мы готовы дать строгое определение.

Определение. **Квадратным корнем из неотрицательного числа** a называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это число обозначают $\sqrt{a}$, число a при этом называют **подкоренным числом**.

Итак, если a — неотрицательное число, то:

$$1)\ \sqrt{a} \geqslant 0; \qquad 2)\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ не имеет корней, говорить в этом случае о квадратном корне из числа a не имеет смысла. Таким образом, ***выражение*** $\sqrt{a}$ ***имеет смысл лишь при*** $a \geqslant 0$.

квадратный корень

подкоренное число

извлечение квадратного корня

Равенства $\sqrt{a} = b$ и $b^2 = a$ выражают одну и ту же зависимость между неотрицательными числами a и b, но только вторая описана на более простом языке, чем первая (использует более простые символы).

Операцию нахождения квадратного корня из неотрицательного числа называют **извлечением квадратного корня**. Эта операция является обратной по отношению к возведению в квадрат. Сравните:

Возведение в квадрат	Извлечение квадратного корня
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$
$0{,}3^2 = 0{,}09$	$\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$

обратите внимание

Еще раз обратите внимание: в таблице фигурируют только положительные числа, поскольку это оговорено в определении квадратного корня. И хотя, например, $(-5)^2 = 25$ — верное равенство, перейти от него к записи с использованием квадратного корня (т.е. написать, что $\sqrt{25} = -5$) нельзя. По определению $\sqrt{25}$ — положительное число, значит, $\sqrt{25} = 5$ (а не -5).

Иногда говорят не «квадратный корень», а «арифметический квадратный корень». Термин «арифметический» мы опускаем для краткости.

Пример 1. Вычислить:

а) $\sqrt{49}$; в) $\sqrt{0}$; д) $\sqrt{-4}$; ж) $\sqrt{5625}$;

б) $\sqrt{0{,}25}$; г) $\sqrt{17}$; е) $\sqrt{961}$; з) $\sqrt{\dfrac{49}{169}}$.

Решение.

а) $\sqrt{49} = 7$, поскольку $7 > 0$ и $7^2 = 49$.

б) $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, так как $0{,}5 > 0$ и $0{,}5^2 = 0{,}25$.

в) $\sqrt{0} = 0$.

г) В отличие от предыдущих примеров мы не можем указать точное значение числа $\sqrt{17}$. Ясно лишь, что оно больше, чем 4, но меньше, чем 5, поскольку $4^2 = 16$ (это меньше, чем 17), а $5^2 = 25$ (это больше, чем 17).

Впрочем, приближенное значение числа $\sqrt{17}$ можно найти с помощью микрокалькулятора, который содержит операцию извлечения квадратного корня; это значение равно 4,123. Итак, $\sqrt{17} \approx 4{,}123$.

обратите внимание

Число $\sqrt{17}$, как и рассмотренное выше число $\sqrt{5}$, не является рациональным.

д) Вычислить $\sqrt{-4}$ нельзя, поскольку квадратный корень из отрицательного числа не существует; запись $\sqrt{-4}$ лишена смысла. Предложенное задание *некорректно*.

е) $\sqrt{961} = 31$, так как $31 > 0$ и $31^2 = 961$. В подобных случаях приходится использовать таблицу квадратов натуральных чисел или микрокалькулятор.

ж) $\sqrt{5625} = 75$, поскольку $75 > 0$ и $75^2 = 5625$.

з) $\sqrt{\dfrac{49}{169}} = \dfrac{7}{13}$, поскольку $\dfrac{7}{13} > 0$ и $\left(\dfrac{7}{13}\right)^2 = \dfrac{49}{169}$.

В простейших случаях значение квадратного корня вычисляется сразу: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$ и т. д. В более сложных случаях приходится использовать таблицу квадратов чисел или проводить вычисления с помощью микрокалькулятора. А как быть, если под рукой нет ни таблицы, ни калькулятора? Ответим на этот вопрос, решив следующий пример.

Пример 2. Вычислить $\sqrt{2809}$.

Решение.

<u>Первый этап.</u> Нетрудно догадаться, что в ответе получится 50 с «хвостиком». В самом деле, $50^2 = 2500$, а $60^2 = 3600$, число же 2809 находится между числами 2500 и 3600.

<u>Второй этап.</u> Найдем «хвостик», т. е. последнюю цифру искомого числа. Пока мы знаем, что если корень извлекается, то в ответе может получиться 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58 или 59. Проверить надо только два числа: 53 и 57, поскольку только они

при возведении в квадрат дадут в результате четырехзначное число, оканчивающееся цифрой 9, т. е. той же цифрой, которой оканчивается число 2809.

Имеем: $53^2 = 2809$ — это то, что нам нужно (нам повезло, мы сразу попали в «яблочко»). Значит, $\sqrt{2809} = 53$.

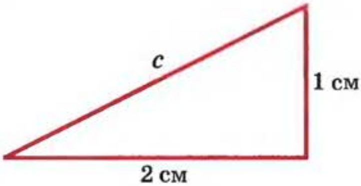


Рис. 4

О т в е т: $\sqrt{2809} = 53$.

П р и м е р 3. Катеты прямоугольного треугольника равны 1 см и 2 см. Чему равна гипотенуза треугольника (рис. 4)?

Р е ш е н и е. Совсем скоро на уроках геометрии вы узнаете о знаменитой теореме Пифагора, которая заключается в том, что сумма квадратов длин катетов прямоугольного треугольника равна квадрату длины его гипотенузы, т. е. $a^2 + b^2 = c^2$, где a, b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника. Значит,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ т. е. } c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

О т в е т: $\sqrt{5}$ см.

Этот пример показывает, что введение квадратных корней — не прихоть математиков, а объективная необходимость: в реальной жизни встречаются ситуации, математические модели которых содержат операцию извлечения квадратного корня. Пожалуй, самая важная из таких ситуаций связана с решением квадратных уравнений. Когда мы в 7-м классе встречались с квадратными уравнениями $ax^2 + bx + c = 0$, мы либо раскладывали левую часть на множители (что получалось далеко не всегда), либо использовали графические методы (что тоже не очень надежно, хотя и красиво). На самом деле для отыскания корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в математике используются формулы

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ (их мы

выведем позднее, в § 25, а пока примем на веру), содержащие, знак квадратного корня. Эти формулы применяются на практике следующим образом. Пусть, например, надо решить уравнение $2x^2 + 5x - 7 = 0$. Здесь $a = 2$, $b = 5$, $c = -7$. Следовательно, $b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 81$. Далее находим $\sqrt{81} = 9$. Значит,

$$x_1 = \frac{-5 + 9}{2 \cdot 2} = 1, \quad x_2 = \frac{-5 - 9}{2 \cdot 2} = -3{,}5.$$

кубический корень

Подобно тому как выше мы определили понятие квадратного корня, можно определить и понятие кубического корня: **кубическим корнем из неотрицательного числа** a называют такое неотрицательное число, куб которого равен a. Иными словами, равенство $\sqrt[3]{a} = b$ означает, что $b^3 = a$.

Например, $\sqrt[3]{27} = 3$, так как $3^3 = 27$; $\sqrt[3]{64} = 4$, так как $4^3 = 64$; $\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$, так как $0{,}1^3 = 0{,}001$.

Более того, в математике введено понятие *корня n-й степени* ($n = 2, 3, 4, \ldots$) *из неотрицательного числа*: если $a \geqslant 0$, то запись $\sqrt[n]{a} = b$ означает, что $b \geqslant 0$ и $b^n = a$. Например, $\sqrt[4]{81} = 3$, так как $3 > 0$ и $3^4 = 81$; $\sqrt[5]{32} = 2$, так как $2 > 0$ и $2^5 = 32$. Все это мы будем изучать в курсе алгебры 11-го класса.

§ 11. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Мы уже неоднократно отмечали, что не все числа, с которыми приходится встречаться в реальной жизни, являются рациональными. Так, не является рациональным числом длина гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами 1 см и 2 см. Как мы видели в предыдущем параграфе (см. пример 3), она равна $\sqrt{5}$ см, а $\sqrt{5}$ — не рациональное число. Корни уравнения $x^2 = 7$ также не являются рациональными числами — это числа $\sqrt{7}$ и $-\sqrt{7}$. Что же это за числа, которые не являются рациональными?

Прежде всего заметим, что в математике не принято говорить «нерациональное число», обычно используют термин *иррациональное число*. Термины «рациональное число», «иррациональное число» происходят от латинского слова *ratio* — разум (буквальный перевод: «рациональное число — разумное число», «иррациональное число — неразумное число»; впрочем, так говорят и в реальной жизни: «он поступил рационально» — это значит, что он поступил разумно; «так действовать нерационально» — это значит, что так действовать неразумно).

Рассмотрим уже известное нам иррациональное число $\sqrt{5}$. В §10 мы отмечали, что оно заключено между числами 2 и 3; если точнее, то между числами 2,2 и 2,3; если еще точнее, — то между числами 2,23 и 2,24. Можно продолжить уточнения оценок числа $\sqrt{5}$ и определить границы для третьего десятичного знака после запятой. Имеем: $2{,}236^2 = 4{,}999696$, что меньше 5; $2{,}237^2 = 5{,}004167$, что больше 5. Итак, $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$.

Точно так же можно определить границы для четвертого знака после запятой, для пятого знака и т. д. Выполняется приближенное равенство $\sqrt{5} \approx 2{,}236$. Если же считать, что для числа $\sqrt{5}$ выписаны все последующие десятичные знаки, то можно воспользоваться записью $\sqrt{5} = 2{,}236...$; справа — бесконечная десятичная дробь. В предыдущем параграфе мы уже встречались с бесконечными десятичными дробями, но все они были периодическими и выражали рациональные числа. Иррациональное число $\sqrt{5}$ выражается *бесконечной десятичной непериодической дробью*.

иррациональное число

Вообще, **иррациональным числом** называют бесконечную десятичную непериодическую дробь. Можно доказать, что если натуральное число n не является точным квадратом, т. е. $n \neq k^2$, где $k \in N$, то $\sqrt{n}$ — иррациональное число.

Иррациональные числа встречаются не только при извлечении квадратного корня, но и во многих других случаях, в чем вы не раз убедитесь в старших классах.

Пока приведем только один пример. Если длину любой окружности разделить на ее диаметр, то в частном получится иррациональное число 3,141592... . Для этого числа в математике введено специальное обозначение π (буква греческого алфавита «пи»; версия происхождения этого понятия такова: с буквы π начинается греческое слово *периферия* — окружность). Иррациональность числа π была доказана в 1766 г. немецким математиком И. Ламбертом.

Любая арифметическая операция над рациональными числами приводит в результате к рациональному числу. Это и понятно, ведь сумма (разность, произведение, частное) обыкновенных дробей есть обыкновенная дробь (все логично, ведь рациональные числа — «разумные» числа). А как обстоит дело с иррациональными числами? Оказывается, ничего определенного сказать нельзя (что тоже логично, ведь иррациональные числа — «неразумные» числа). Смотрите: $\sqrt{5}$ — иррациональное число, а $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$ — рациональное число, т. е. произведение двух иррациональных чисел оказалось рациональным числом; $\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}$ — иррациональные числа, и их произведение, т. е. $\sqrt{15}$ (в § 14 мы докажем, что $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$), — тоже иррациональное число. То же относится к сложению, вычитанию, делению иррациональных чисел: в ответе может получиться как рациональное, так и иррациональное число.

А что получится, если в операции участвуют одно рациональное число и одно иррациональное число, какое «пересилит»? Оказывается, «пересилит» иррациональное число. Рассмотрим такой пример: дано рациональное число 3 и иррациональное число $\sqrt{2}$; составим их сумму $3 + \sqrt{2}$. Предположим, что это рациональное число r, т. е. $3 + \sqrt{2} = r$. Тогда $\sqrt{2} = r - 3$, а $r - 3$ — рациональное число (как разность двух рациональных чисел). Получается, что $\sqrt{2}$ — рациональное число, а это неверно: $\sqrt{2}$ — иррациональное число. Получили противоречие, значит, сделанное нами предположение неверно, т. е. $3 + \sqrt{2}$ — иррациональное число. Аналогично можно доказать, что $3 - \sqrt{2}$ — иррациональное число. А вот сумма иррациональных чисел $3 + \sqrt{2}$ и $3 - \sqrt{2}$ равна 6, т. е. является рациональным числом.

Замечание. **Обратите внимание, что в проведенном рассуждении мы снова использовали метод доказательства от противного, о котором в первый раз говорили выше, в § 10.**

Итак, можно сделать следующие *выводы*:

- Любая арифметическая операция над рациональными числами (кроме деления на 0) приводит в результате к рациональному числу.
- Арифметическая операция над иррациональными числами может привести в результате как к рациональному, так и к иррациональному числу.
- Если в арифметической операции участвуют рациональное и иррациональное числа, то в результате получится иррациональное число (кроме умножения и деления на 0).

иррациональное выражение

Поскольку операция извлечения квадратного и кубического корня из положительного числа часто приводит к иррациональным числам, условились алгебраическое выражение, в котором присутствует операция извлечения квадратного и кубического корня из переменной, называть *иррациональным выражением*.

§ 12. МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Если множество рациональных чисел дополнить множеством иррациональных чисел, то вместе они составят **множество действительных чисел**. Множество действительных чисел обычно обозначают буквой $\boldsymbol{R}$; используют также символическую запись $(-\infty; +\infty)$ или $(-\infty; \infty)$.

Множество действительных чисел можно описать так: это *множество конечных и бесконечных десятичных дробей*; конечные десятичные дроби и бесконечные десятичные периодические дроби — рациональные числа, а бесконечные десятичные непериодические дроби — иррациональные числа.

действительное число

числовая прямая

Каждое действительное число можно изобразить точкой на координатной прямой. Верно и обратное: каждая точка координатной прямой имеет действительную координату. Математики обычно говорят так: между множеством R действительных чисел и множеством точек координатной прямой установлено *взаимно-однозначное соответствие*. Координатная прямая есть геометрическая модель множества действительных чисел; по этой причине для координатной прямой часто используют термин **числовая прямая**.

Вдумайтесь в этот термин: не кажется ли он вам противоестественным? Ведь *число* — объект алгебры, а *прямая* — объект геометрии. Нет ли здесь «смешения жанров»? Нет, все логично, все продумано. Этот термин в очередной раз подчеркивает единство различных областей математики, дает возможность отождествления понятий «действительное число» и «точка на координатной (числовой) прямой».

Обратите внимание: координатной прямой вы пользовались начиная с 5-го класса. Но, оказывается, в ваших знаниях был вполне оправданный пробел: не для любой точки координатной прямой вы сумели бы найти координату — просто учитель оберегал вас от такой неприятности.

Рассмотрим пример. Дана координатная прямая, на ее единичном отрезке, как на катете, построен прямоугольный треугольник, второй катет которого равен 2 (рис. 5). Гипотенуза OB треугольника отложена на координатной прямой от точки O вправо, получилась точка D. Чему равна

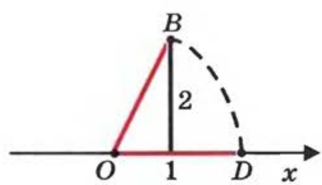


Рис. 5

координата точки D? Она равна длине гипотенузы, т. е. $\sqrt{5}$. Это число, как мы теперь знаем, не целое и не дробь. Значит, ни в 5-м, ни в 6-м, ни в 7-м классе координату точки D вы найти бы не смогли. Потому мы до сих пор и говорили «координатная прямая», а не «числовая прямая».

Заметим, что был еще один оправданный пробел в ваших знаниях по алгебре. Рассматривая выражения с переменными, мы всегда подразумевали, что переменные могут принимать любые допустимые значения, но только рациональные, ведь других-то не было. На самом деле переменные могут принимать любые допустимые *действительные* значения. Например, в тождестве

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

в роли a и b могут выступать любые числа, не обязательно рациональные.

Для действительных чисел a, b, c выполняются привычные законы:

$$a+b=b+a;$$
$$ab=ba;$$
$$a+(b+c)=(a+b)+c;$$
$$a(bc)=(ab)c;$$
$$(a+b)c=ac+bc \text{ и т. д.}$$

Выполняются и привычные правила:

произведение (частное) двух положительных чисел — положительное число;

произведение (частное) двух отрицательных чисел — положительное число;

произведение (частное) положительного и отрицательного чисел — отрицательное число.

Действительные числа можно сравнивать друг с другом, используя следующее определение.

Определение. Говорят, что действительное число a **больше (меньше)** действительного числа b, если их разность $a - b$ — положительное (отрицательное) число. Пишут: $a > b$ $(a < b)$.

Из этого определения следует, что *всякое положительное число a больше нуля* (поскольку разность $a - 0 = a$ — положительное число), а *всякое отрицательное число b меньше нуля* (поскольку разность $b - 0 = b$ — отрицательное число).

Итак, $a > 0$ означает, что a — положительное число;
$a < 0$ означает, что a — отрицательное число;
$a > b$ означает, что $a - b$ — положительное число, т. е. $a - b > 0$;
$a < b$ означает, что $a - b$ — отрицательное число, т. е. $a - b < 0$.

Наряду со знаками *строгих неравенств* ($<$, $>$) используют знаки *нестрогих неравенств*:

$a \geqslant 0$ означает, что a больше нуля или равно нулю, т. е. a — *неотрицательное число* (положительное или 0), или что a не меньше нуля;

$a \leqslant 0$ означает, что a меньше нуля или равно нулю, т. е. a — *неположительное число* (отрицательное или 0), или что a не больше нуля;

$a \geqslant b$ означает, что a больше или равно b, т. е. $a - b$ — неотрицательное число, или что a не меньше b; $a - b \geqslant 0$;

$a \leqslant b$ означает, что a меньше или равно b, т. е. $a - b$ — неположительное число, или что a не больше b; $a - b \leqslant 0$.

Например, для любого числа a верно неравенство $a^2 \geqslant 0$; для любых чисел a и b верно неравенство $(a - b)^2 \geqslant 0$.

Впрочем, для сравнения действительных чисел не обязательно каждый раз составлять их разность и выяснять, положительна она или отрицательна. Можно сделать соответствующий вывод, сравнивая записи чисел в виде десятичных дробей.

Геометрическая модель множества действительных чисел, т. е. числовая прямая, делает операцию сравнения чисел особенно наглядной: *из двух чисел a, b больше то, которое располагается на числовой прямой правее.*

Таким образом, к сравнению действительных чисел нужно подходить достаточно гибко, что мы и сделаем в следующем примере.

П р и м е р 1. Сравнить числа:

а) $\frac{22}{5}$ и 4; б) $2 + \sqrt{5}$ и 5; в) $-3{,}7$ и $\sqrt{2}$; г) $-\sqrt{5}$ и $-\sqrt{7}$.

Решение. а) Имеем $\frac{22}{5} - 4 = \frac{2}{5}$; $\frac{2}{5} > 0$, значит, $\frac{22}{5} > 4$;

б) имеем $2 + \sqrt{5} = 2 + 2{,}236... = 4{,}236...$; $4{,}236... < 5$; таким образом, $2 + \sqrt{5} < 5$;

в) $-3{,}7$ — отрицательное число, $\sqrt{2}$ — положительное число. Любое отрицательное число меньше любого положительного числа, поэтому $-3{,}7 < \sqrt{2}$;

г) $-\sqrt{5} = -2{,}23...$; $-\sqrt{7} = -2{,}64...$. Точка $-2{,}64...$ располагается на координатной прямой левее точки $-2{,}23...$, следовательно, $-\sqrt{5} > -\sqrt{7}$.

Пример 2. Расположить в порядке возрастания числа

$$\sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ -2,\ \frac{\pi}{2},\ \sqrt{17},\ \pi.$$

Решение. Воспользуемся тем, что $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, $\pi \approx 3{,}14$, $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, а $\sqrt{17} \approx 4{,}12$. Теперь ясно, что заданные числа расположатся в порядке возрастания следующим образом:

$$-2,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{2},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \sqrt{17}.$$

§ 13. ФУНКЦИЯ $y=\sqrt{x}$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

В 7-м классе мы изучали функции $y = C$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$ и пришли в итоге к выводу о том, что уравнение с двумя переменными вида $y = f(x)$ (функция) есть математическая модель, удобная для того, чтобы, задав конкретное значение независимой переменной x (аргумента), вычислить соответствующее значение зависимой переменной y.

Например, если дана функция $y = x^2$, т. е. $f(x) = x^2$, то при $x = 1$ получаем: $y = 1^2 = 1$; короче это записывают так: $f(1) = 1$. При $x = 2$ получаем: $f(2) = 2^2 = 4$, т. е. $y = 4$; при $x = -3$ получаем: $f(-3) = (-3)^2 = 9$, т. е. $y = 9$, и т. д.

Уже в 7-м классе мы с вами начали понимать, что в равенстве $y = f(x)$ правая часть, т. е. выражение $f(x)$, не исчерпывается перечисленными выше пятью случаями (C, kx, $kx + m$, x^2, $-x^2$). Так, например, нам уже встречались *кусочные функции*, т. е. функции, заданные разными формулами на разных промежутках. Вот одна из таких функций: $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 0; \\ 2x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Как строить графики таких функций? Сначала надо построить параболу $y = x^2$ и взять ее часть при $x \leqslant 0$ (левая ветвь параболы, рис. 6), затем надо построить прямую $y = 2x$ и взять ее часть при $x > 0$ (рис. 7). И наконец, надо обе выделенные части объединить на одном рисунке, т. е. построить на одной координатной плоскости (рис. 8).

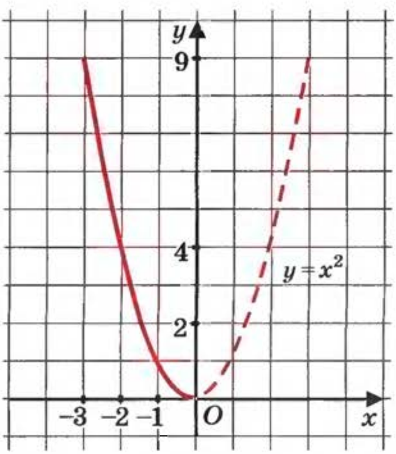


Рис. 6

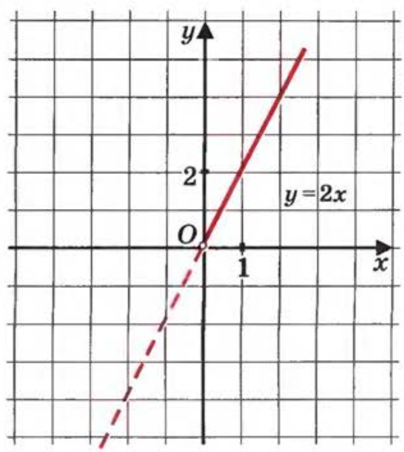


Рис. 7

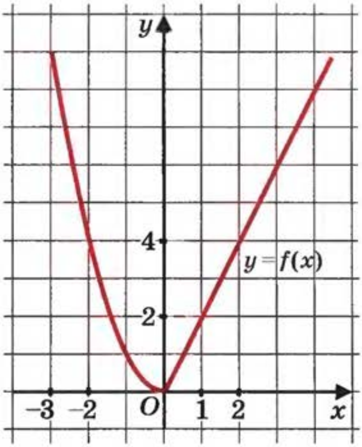


Рис. 8

Теперь наша задача состоит в следующем: пополнить запас изученных функций. В реальной жизни встречаются процессы, описываемые различными математическими моделями вида $y = f(x)$, не только теми, что мы перечислили выше. В этом параграфе мы рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$.

Для построения графика функции $y = \sqrt{x}$ дадим, как обычно, независимой переменной x несколько конкретных значений (неотрицательных, поскольку при $x < 0$ выражение $\sqrt{x}$ не имеет смысла) и вычислим соответствующие значения зависимой переменной y. Разумеется, мы будем давать x такие значения, для которых известно точное значение квадратного корня:

если $x = 0$, то $y = \sqrt{0} = 0$;

если $x = 1$, то $y = \sqrt{1} = 1$;

если $x = 4$, то $y = \sqrt{4} = 2$;

если $x = 6{,}25$, то $y = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$;

если $x = 9$, то $y = \sqrt{9} = 3$.

Итак, мы составили таблицу значений функции:

x	0	1	4	6,25	9
y	0	1	2	2,5	3

Построим найденные точки (0; 0), (1; 1), (4; 2), (6,25; 2,5), (9; 3) на координатной плоскости (рис. 9, а). Они располагаются на некоторой линии, начертим ее (рис. 9, б). Получили график функции $y = \sqrt{x}$. Обратите внимание: график *касается оси y*

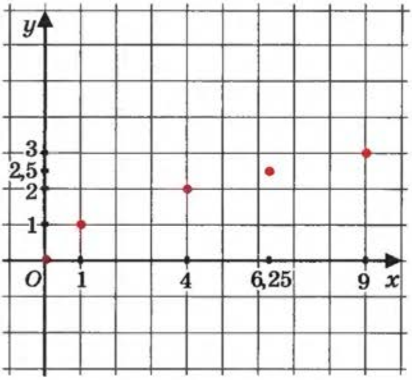


Рис. 9, а

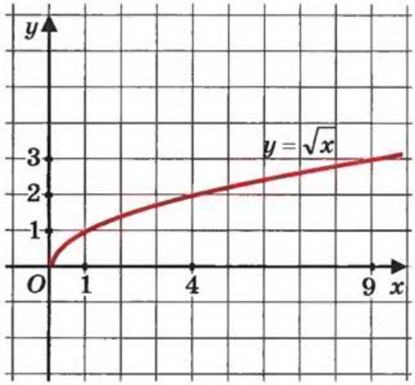


Рис. 9, б

в точке (0; 0). Заметим, что, имея шаблон параболы $y = x^2$, можно без труда с его помощью построить график функции $y = \sqrt{x}$, ведь это ветвь той же параболы, только ориентированная не вверх, а вправо ($x = y^2$).

Свойства функции $y = \sqrt{x}$

Описывая свойства этой функции, будем опираться на ее геометрическую модель — ветвь параболы (рис. 9, *б*).

<u>*Свойство 1*</u>. Область определения функции — луч $[0; +\infty)$.

<u>*Свойство 2*</u>. $y = 0$ при $x = 0$; $y > 0$ при $x > 0$.

<u>*Свойство 3*</u>. Функция возрастает на луче $[0; +\infty)$. Напомним, что в курсе алгебры 7-го класса мы договорились называть функцию, график которой на рассматриваемом промежутке идет слева направо как бы в горку, *возрастающей*, а функцию, график которой на рассматриваемом промежутке идет слева направо как бы под горку, — *убывающей*. Более точно можно сказать так: функцию $y = f(x)$ называют *возрастающей на промежутке* X, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции; функцию $y = f(x)$ называют *убывающей на промежутке* X, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Замечание 1. Мы отметили, что $y = \sqrt{x}$ — возрастающая функция, опираясь на ее график. Математики, как правило, не приветствуют такие выводы. В § 32 мы дадим строгое доказательство возрастания функции $y = \sqrt{x}$ на луче $[0; +\infty)$.

Свойство 4. $y_{наим} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{наиб}$ не существует. Напомним, что $y_{наим}$ — это наименьшее значение функции, а $y_{наиб}$ — наибольшее значение функции на заданном промежутке; если промежуток не указан, то $y_{наим}$ и $y_{наиб}$ — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции во всей ее области определения.

Свойство 5. $y = \sqrt{x}$ — непрерывная функция. Напомним, что этот термин мы рассматриваем пока как синоним предложения «график функции есть сплошная линия, которую можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги». В старших классах будет дано точное математическое истолкование понятия непрерывности функции, не опирающееся на геометрическую иллюстрацию.

А теперь обратим внимание на одно любопытное обстоятельство. Рассмотрим две функции: $y = \sqrt{x}$ (ее график изображен на рис. 9, б) и $y = x^2$, где $x \geqslant 0$ (ее график изображен на рис. 10). Мы только что перечислили пять свойств для первой функции, но абсолютно теми же свойствами обладает и вторая функция. Словесные «портреты» двух различных функций одинаковы. Математики не смогли вынести такой несправедливости, когда разные функции, имеющие разные графики, словесно описываются одинаково. Они обнаружили принципиальные различия в характере графиков, заметив, что график функции $y = \sqrt{x}$ обращен *выпук-*

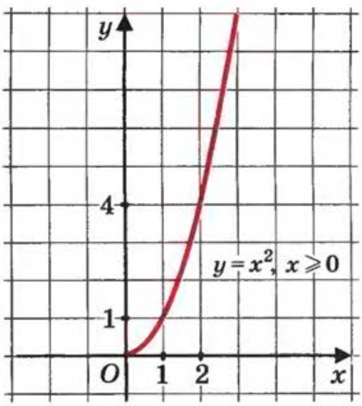


Рис. 10

лостью вверх, тогда как график функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, обращен *выпуклостью вниз*.

выпуклость вниз
выпуклость вверх

Обычно говорят, что *функция выпукла вниз*, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит *ниже* проведенного отрезка (рис. 11); *функция выпукла вверх*, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит *выше* проведенного отрезка (рис. 12).

область значений функции

Функция $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt{x}$, принимает любые неотрицательные значения. В самом деле, какое бы конкретное значение $y \geqslant 0$ ни задать, всегда найдется такое x, что выполняется равенство $f(x) = y$, т. е. $\sqrt{x} = y$; для этого достаточно положить $x = y^2$. Множество всех значений функции называют обычно **областью значений функции**. Для функции $y = \sqrt{x}$ областью значений является луч $[0; +\infty)$. Это хорошо читается по графику функции (рис. 9, *б*). Если спроецировать график на ось y, как раз и получится луч $[0; +\infty)$.

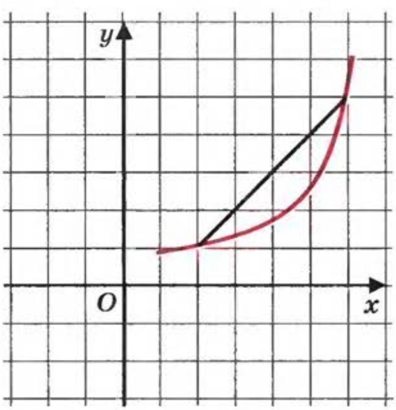


Рис. 11

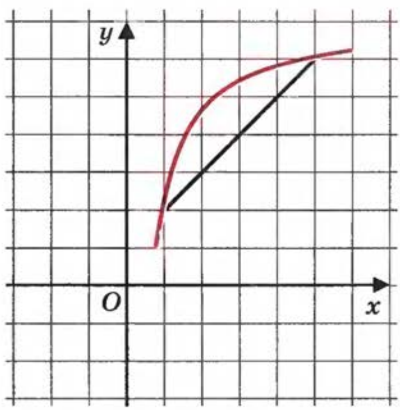


Рис. 12

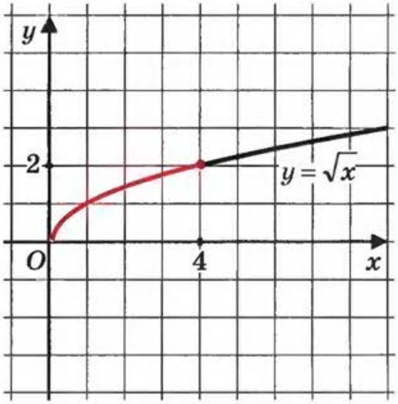


Рис. 13

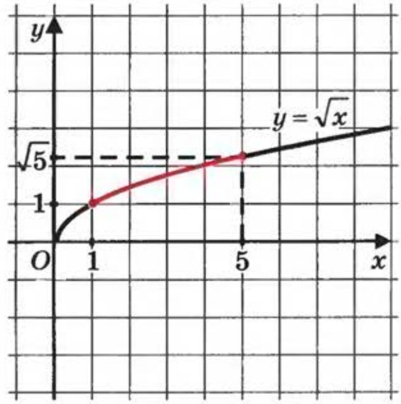


Рис. 14

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt{x}$ на отрезке: а) [0; 4]; б) [1; 5].

Решение. а) Построим график функции $y = \sqrt{x}$ и выделим его часть на отрезке [0; 4] (рис. 13). Замечаем, что $y_{\text{наим}} = 0$ (достигается при $x = 0$), а $y_{\text{наиб}} = 2$ (достигается при $x = 4$).

Впрочем, можно было и не опираться на графическую иллюстрацию: функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на [0; 4], значит, $y_{\text{наим}} = 4$ (достигается при $x = 0$), $y_{\text{наиб}} = 2$ (достигается при $x = 4$).

б) Построим график функции $y = \sqrt{x}$ и выделим его часть на отрезке [1; 5] (рис. 14). Замечаем, что $y_{\text{наим}} = 1$ (достигается при $x = 1$), а $y_{\text{наиб}} = \sqrt{5}$ (достигается при $x = 5$).

Ответ: а) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = 2$; б) $y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = \sqrt{5}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x} = 6 - x$.

Решение. В учебнике «Алгебра–7» мы выработали алгоритм графического решения уравнений, напомним его.

Чтобы графически решить уравнение $f(x) = g(x)$, нужно:

1) рассмотреть две функции: $y = f(x)$ и $y = g(x)$;

2) построить график функции $y = f(x)$;

3) построить график функции $y = g(x)$;

4) найти точки пересечения построенных графиков; абсциссы этих точек — корни уравнения $f(x) = g(x)$.

Применим этот алгоритм к заданному уравнению.

1) Рассмотрим две функции: $y = \sqrt{x}$ и $y = 6 - x$.

2) Построим график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 15).

3) Построим график линейной функции $y = 6 - x$. Это прямая, которую можно построить по двум точкам: (0; 6) и (6; 0). Прямая изображена на том же чертеже (рис. 15).

4) По чертежу устанавливаем, что графики пересекаются в одной точке $A(4; 2)$. Так ли это на самом деле? Проверим: пара (4; 2) удовлетворяет и уравнению $y = \sqrt{x}$ и уравнению $y = 6 - x$. Это значит, что точка (4; 2) на самом деле служит точкой пересечения построенных графиков. Заданное уравнение имеет один корень 4 — это абсцисса точки A.

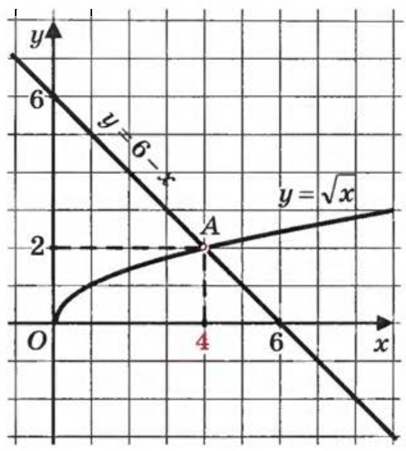


Рис. 15

О т в е т: 4.

Замечание 2. Обратим внимание на один тонкий момент, связанный с графическим методом решения уравнений. Мы обнаружили, что графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 6 - x$ пересекаются в точке (4; 2), и, доверясь чертежу, объявили, что это единственная общая точка графиков, а потому уравнение имеет единственный корень $x = 4$. Но, как говорится, доверяй, но проверяй. На самом деле, надо было строго доказать без помощи чертежа, что других точек пересечения у графиков нет. Например, так. Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает, значит, если $x > 4$, то значения функции больше 2, а если $x < 4$, то значения функции меньше 2. Функция же $y = 6 - x$ убывает, значит, если $x > 4$, то значения функции меньше 2, а если $x < 4$, то значения функции больше 2. Таким образом, в точке, отличной от точки (4; 2), графики пересечься не могут.

П р и м е р 3. Построить и прочитать график функции $y = -\sqrt{x}$.

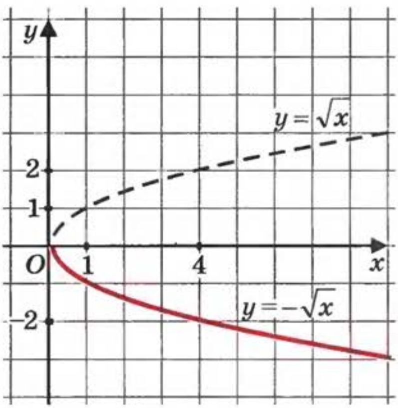


Рис. 16

Р е ш е н и е. В курсе алгебры 7-го класса мы говорили о том, что график функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси x. Воспользовавшись этим, построим график функции $y = \sqrt{x}$ и отобразим его симметрично относительно оси x (рис. 16). Это и будет график функции $y = -\sqrt{x}$.

Перечислим свойства функции $y = -\sqrt{x}$ (по графику):

1. Область определения функции — луч $[0; +\infty)$.
2. $y = 0$ при $x = 0$; $y < 0$ при $x > 0$.
3. Функция убывает на луче $[0; +\infty)$.
4. $y_{наиб} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{наим}$ не существует.
5. Функция непрерывна на луче $[0; +\infty)$.
6. Область значений функции — луч $(-\infty; 0]$.
7. Функция выпукла вниз.

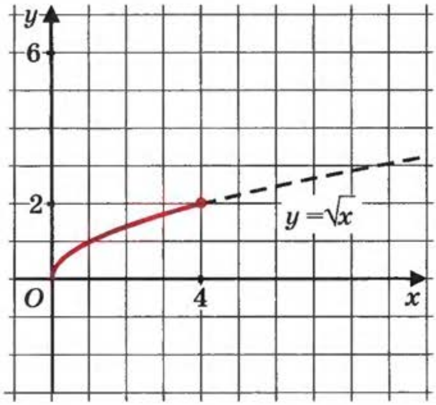


Рис. 17

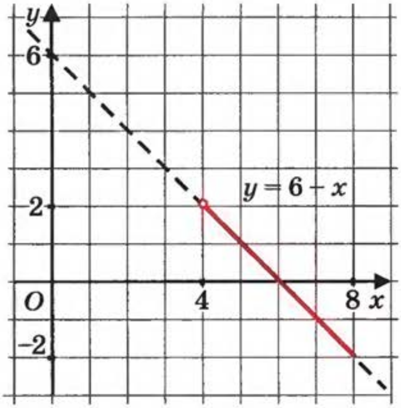


Рис. 18

Пример 4. Построить и прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 4; \\ 6 - x, & \text{если } 4 < x \leqslant 8. \end{cases}$$

Решение. Речь идет о построении графика кусочной функции, т. е. функции, заданной разными формулами на разных промежутках области определения. В начале параграфа мы напомнили, как строить графики подобных функций. Сначала надо построить график функции $y = \sqrt{x}$ (ветвь параболы) и выделить его часть на отрезке [0; 4] (рис. 17). Затем построить прямую $y = 6 - x$ и выделить ее часть на полуинтервале (4; 8] (рис. 18). И наконец, надо обе выделенные части изобразить в одной системе координат — это и будет требуемый график кусочной функции (рис. 19).

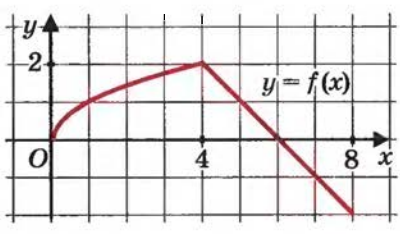


Рис. 19

Прочитать график — это значит перечислить свойства функции, которые иллюстрирует построенный график. Сделаем это.

1. Область определения функции — отрезок [0; 8].

2. $y = 0$ при $x = 0$ и при $x = 6$; $y > 0$ при $0 < x < 6$; $y < 0$ при $6 < x \leqslant 8$.

3. Функция возрастает на отрезке [0; 4] и убывает на отрезке [4; 8].

4. $y_{\text{наим}} = -2$ (достигается в точке $x = 8$), $y_{\text{наиб}} = 2$ (достигается в точке $x = 4$).

5. Функция непрерывна в заданной области определения.

6. Область значений функции — отрезок $[-2; 2]$. ■

§ 14. СВОЙСТВА КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

До сих пор мы осуществляли над числами пять арифметических операций: сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень, причем при вычислениях активно использовали различные свойства этих операций, например:

$$a + b = b + a, \qquad a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

и т. д.

В этой главе введена новая операция — извлечение квадратного корня из неотрицательного числа. Чтобы успешно ее использовать, нужно познакомиться со свойствами этой операции, что мы и сделаем в настоящем параграфе.

Теорема 1 ***Квадратный корень из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению квадратных корней из этих чисел:***

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\sqrt{ab} = x$, $\sqrt{a} = y$, $\sqrt{b} = z$.

Нам надо доказать, что для неотрицательных чисел x, y, z выполняется равенство $x = yz$.

Так как $\sqrt{ab} = x$, то $x^2 = ab$. Аналогично, так как $\sqrt{a} = y$ и $\sqrt{b} = z$, то соответственно $y^2 = a$ и $z^2 = b$.

Итак, $x^2 = ab$, $y^2 = a$, $z^2 = b$. Тогда $x^2 = y^2z^2$, т. е. $x^2 = (yz)^2$. Если квадраты двух неотрицательных чисел равны, то и сами числа равны, значит, из равенства $x^2 = (yz)^2$ следует, что $x = yz$, а это и требовалось доказать.

Приведем краткую запись доказательства теоремы.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\sqrt{ab} = x$ $\sqrt{a} = y$ $\sqrt{b} = z$	$x^2 = ab$ $y^2 = a$ $z^2 = b$	$x^2 = y^2z^2$ $x^2 = (yz)^2$ $x = yz$
Доказать: $x = yz$		

Из доказанной теоремы следует, в частности, что $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$, чем мы воспользовались в § 11.

Замечание 1. Теорема остается справедливой и для случая, когда подкоренное выражение представляет собой произведение более чем двух неотрицательных множителей.

Замечание 2. Теорему 1 можно оформить, используя конструкцию «если... , то» (как это принято для теорем в математике). Приведем соответствующую формулировку: *если a и b — неотрицательные числа, то справедливо равенство* $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Следующую теорему мы именно так и оформим.

Теорема 2

Если $a \geq 0$, $b > 0$, то справедливо равенство

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.}$$

(Краткая формулировка, которую удобнее использовать на практике: *корень из дроби равен дроби от корней* или *корень из частного равен частному от корней.*)

Доказательство. На этот раз мы приведем только краткую запись доказательства, а вы попробуйте сделать соответствующие комментарии, аналогичные тем, что составили суть доказательства теоремы 1.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\sqrt{\frac{a}{b}} = x$ $\sqrt{a} = y$ $\sqrt{b} = z$	$x^2 = \frac{a}{b}$ $y^2 = a$ $z^2 = b$	$x^2 = \frac{y^2}{z^2}$ $x^2 = \left(\frac{y}{z}\right)^2$ $x = \frac{y}{z}$
Доказать: $x = \frac{y}{z}$		

П р и м е р 1. Вычислить $\sqrt{36 \cdot 64 \cdot 9}$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись первым свойством квадратных корней (теорема 1), получаем:

$$\sqrt{36 \cdot 64 \cdot 9} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} \cdot \sqrt{9} = 6 \cdot 8 \cdot 3 = 144.$$

Замечание 3. Конечно, этот пример можно решить по-другому, особенно если у вас под рукой микрокалькулятор: перемножить числа 36, 64, 9, а затем извлечь квадратный корень из полученного произведения. Однако, согласитесь, предложенное выше решение выглядит более культурно.

П р и м е р 2. Вычислить $\sqrt{10\frac{9}{16}}$.

Р е ш е н и е. Обратим смешанное число $10\frac{9}{16}$ в неправильную дробь: $10\frac{9}{16} = 10 + \frac{9}{16} = \frac{169}{16}$. Воспользовавшись вторым свойством квадратных корней (теорема 2), получим:

$$\sqrt{\frac{169}{16}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{16}} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}.$$

О т в е т: $\sqrt{10\frac{9}{16}} = 3\frac{1}{4}$.

Пример 3. Вычислить $\sqrt{37^2-12^2}$.

Решение.

I способ. Последовательно находим: $37^2 = 1369$, $12^2 = 144$, $37^2 - 12^2 = 1369 - 144 = 1225$, $\sqrt{1225} = 35$.

II способ. $37^2 - 12^2 = (37 - 12)(37 + 12) = 25 \cdot 49$,

$$\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{49} = 5 \cdot 7 = 35.$$

Замечание 4. При первом способе мы проводили вычисления «в лоб». Второй способ изящнее: мы применили формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ и воспользовались свойством квадратных корней.

Замечание 5. Некоторые «горячие головы» предлагают иногда такое «решение» примера 3:

$$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{37^2} - \sqrt{12^2} = 37 - 12 = 25.$$

Это, конечно, неверно: вы видите — результат получился не такой, как у нас в примере 3. Дело в том, что нет свойства $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, как нет и свойства $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Имеются только свойства, касающиеся умножения и деления квадратных корней. Будьте внимательны и осторожны, не принимайте желаемое за действительное.

Пример 4. Вычислить: а) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}$; б) $\sqrt{24} : \sqrt{6}$.

Решение. Любая формула в алгебре используется не только справа налево, но и слева направо. Так, первое свойство квадратных корней означает, что $\sqrt{ab}$ в случае необходимости можно представить в виде $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, и обратно, что $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ можно заменить выражением $\sqrt{ab}$. То же относится и ко второму свойству квадратных корней. Учитывая это, решим предложенный пример.

а) $\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{24\cdot 6}=\sqrt{144}=12;$

б) $\sqrt{24}:\sqrt{6}=\sqrt{\dfrac{24}{6}}=\sqrt{4}=2.$

Завершая параграф, отметим еще одно достаточно простое и в то же время важное свойство (докажите его!):

если $a \geqslant 0$ и n — натуральное число, то

$$\boxed{\sqrt{a^{2n}}=a^n.}$$

Например,

$$\sqrt{a^6}=a^3,\ \sqrt{a^{10}}=a^5 \text{ и т. д.}$$

Пример 5. Вычислить $\sqrt{7056}$, не используя таблицу квадратов чисел и микрокалькулятор.

Решение. Разложим подкоренное число на простые множители:

7056	2
3528	2
1764	2
882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

Значит, $7056=2^4\cdot 3^2\cdot 7^2$. Тогда

$$\sqrt{7056}=\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 7^2}=\sqrt{2^4}\cdot\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{7^2}=2^2\cdot 3\cdot 7=84.$$

Ответ: $\sqrt{7056}=84.$

Замечание 6. Этот пример можно было решить так же, как и аналогичный пример в § 10. Нетрудно догадаться, что в ответе получится 80 «с хвостиком», поскольку $80^2<7056<90^2$. Найдем «хвостик», т. е. последнюю цифру искомого числа. Пока мы знаем, что если корень извлекается, то в ответе может получиться 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88 или 89. Проверить надо только два числа: 84 и 86, поскольку только они при возведении в квадрат дадут в результате четырехзначное число, оканчивающееся цифрой 6, т. е. той же цифрой, которой оканчивается число 7056. Имеем: $84^2 = 7056$ — это то, что нужно. Значит, $\sqrt{7056} = 84$.

§ 15. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОПЕРАЦИЮ ИЗВЛЕЧЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

До сих пор мы с вами выполняли преобразования только рациональных выражений, используя для этого правила действий над многочленами и алгебраическими дробями, формулы сокращенного умножения и т. д. В этой главе мы ввели новую операцию — операцию извлечения квадратного корня; мы установили, что

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a;$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n,$$

где, напомним, a, b — неотрицательные числа.

Используя эти формулы, можно выполнять различные преобразования выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня. Рассмотрим несколько примеров, причем во всех примерах будем предполагать, что <u>переменные принимают только неотрицательные значения.</u>

Пример 1. Упростить выражение:

а) $\sqrt{a^2b^4}$; б) $\sqrt{\frac{16a^4}{9b^6}}$.

Р е ш е н и е. а) $\sqrt{a^2b^4} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^4} = ab^2$;

б) $\sqrt{\dfrac{16a^4}{9b^6}} = \dfrac{\sqrt{16a^4}}{\sqrt{9b^6}} = \dfrac{4a^2}{3b^3}$.

П р и м е р 2. Вынести множитель из-под знака квадратного корня: а) $\sqrt{81a}$; б) $\sqrt{32a^2}$; в) $\sqrt{9a^7b^5}$.

Р е ш е н и е. а) $\sqrt{81a} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{a} = 9\sqrt{a}$;

б) $\sqrt{32a^2} = \sqrt{16 \cdot a^2 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = 4a\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{9a^7b^5} = \sqrt{9 \cdot a^6 \cdot a \cdot b^4 \cdot b} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^4} \cdot \sqrt{b} =$

$= 3a^3b^2\sqrt{ab}$.

П р и м е р 3. Внести множитель под знак квадратного корня:

а) $2\sqrt{2}$; б) $\dfrac{3a\sqrt{b}}{\sqrt{3a}}$.

Р е ш е н и е. а) $2\sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{8}$;

б) $\dfrac{3a\sqrt{b}}{\sqrt{3a}} = \dfrac{\sqrt{9a^2} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\dfrac{9a^2 \cdot b}{3a}} = \sqrt{3ab}$.

П р и м е р 4. Выполнить действия:

а) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$; б) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

Р е ш е н и е. а) Пусть $\sqrt{a} = x$, $\sqrt{b} = y$. Тогда

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (x + y)(x - y) = x^2 - y^2.$$

Но $x^2 = a$, $y^2 = b$, значит, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$.

На самом деле новые переменные x и y можно было и не вводить, тогда запись решения будет короче:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b.$$

б) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$.

Пример 5. Разложить на множители: а) $4a - 4\sqrt{ab} + b$;
б) $x\sqrt{x} + 1$.

Решение.

а) $4a - 4\sqrt{ab} + b = \left(2\sqrt{a}\right)^2 - 2\cdot 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2$.

Заметим, что это квадрат разности выражений $2\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$. Значит, $4a - 4\sqrt{ab} + b = \left(2\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$.

б) $x\sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x}\right)^2\cdot\sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x}\right)^3 + 1^3$.

Остается лишь вспомнить формулу разложения на множители суммы кубов:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Здесь в роли a выступает $\sqrt{x}$, а в роли b — число 1. Получаем:

$$\left(\sqrt{x}\right)^3 + 1^3 = \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - \sqrt{x}\cdot 1 + 1^2\right) = \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right).$$

Пример 6. Упростить выражение

$$\frac{a\sqrt{a} + 3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3a}}\cdot\left(\sqrt{a} - \sqrt{3}\right).$$

Решение.

1) $a\sqrt{a} + 3\sqrt{3} = \left(\sqrt{a}\right)^3 + \left(\sqrt{3}\right)^3 =$

$= \left(\sqrt{a} + \sqrt{3}\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2 - \sqrt{a}\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\right) = \left(\sqrt{a} + \sqrt{3}\right)\left(a - \sqrt{3a} + 3\right)$;

2) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3a} = \left(\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\right) + \sqrt{3a} =$

$= a - 2\sqrt{3a} + 3 + \sqrt{3a} = a - \sqrt{3a} + 3$ (мы привели подобные члены: $-2\sqrt{3a} + \sqrt{3a} = -\sqrt{3a}$);

3) $\dfrac{\left(\sqrt{a} + \sqrt{3}\right)\left(a - \sqrt{3a} + 3\right)}{a - \sqrt{3a} + 3} = \sqrt{a} + \sqrt{3}$ (сократили дробь на $a - \sqrt{3a} + 3$, т. е. на общий множитель числителя и знаменателя дроби);

4) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=a-3.$

П р и м е р 7. Преобразовать заданное алгебраическое выражение к такому виду, чтобы знаменатель дроби не содержал знаков квадратных корней:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Р е ш е н и е. В обоих случаях воспользуемся тем, что значение дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель одновременно умножить на одно и то же отличное от нуля число или выражение.

а) Умножив числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2}$, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Умножив числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

освобождение от иррациональности в знаменателе дроби

Если знаменатель алгебраической дроби содержит знак квадратного корня, то обычно говорят, что в *знаменателе содержится иррациональность*. Преобразование выражения к такому виду, чтобы в знаменателе дроби не оказалось знаков квадратных корней, называют **освобождением от иррациональности в знаменателе.** Два основных приема освобождения от иррациональности в знаменателе мы как раз и рассмотрели в примере 7:

если знаменатель имеет вид $\sqrt{a}$, то числитель и знаменатель дроби следует умножить на $\sqrt{a}$;

если знаменатель имеет вид $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ или $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, то числитель и знаменатель дроби надо умножить соответственно на $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ или на $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ (*сопряженное выражение*).

Зачем нужно уметь освобождаться от иррациональности в знаменателе? Во многих случаях это облегчает тождественные преобразования алгебраических выражений, в чем мы сейчас и убедимся.

Пример 8. Упростить выражение

$$\frac{7}{\sqrt{7}} - \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}.$$

Решение.

1) $\frac{7}{\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{7} = \sqrt{7}$;

2) $\frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{2\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} =$

$= \frac{2\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)}{7 - 5} = \frac{2\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)}{2} = \sqrt{7} + \sqrt{5}$;

3) $\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{4\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)} = \frac{4\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} =$

$= \frac{4\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)}{5 - 3} = \frac{4\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)}{2} = 2\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$;

4) $\sqrt{7} - \left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) + 2\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{7} - \sqrt{7} - \sqrt{5} + 2\sqrt{5} -$
$- 2\sqrt{3} = \sqrt{5} - 2\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$.

§16. МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

1. Модуль действительного числа и его свойства

В младших классах вы уже встречались с понятием модуля (или абсолютной величины) числа, пользовались обозначением $|a|$. Вы знаете, что, например, $|5| = 5$, $|-3| = 3$. Правда, раньше речь шла только о рациональных числах. Теперь надо ввести понятие модуля для любого действительного числа.

Определение. **Модулем неотрицательного действительного числа x называют само это число: $|x| = x$; модулем отрицательного действительного числа x называют противоположное число: $|x| = -x$.**

Короче это записывают так:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Например,

$|5| = 5$; $|-5| = -(-5) = 5$; $|-3{,}7| = -(-3{,}7) = 3{,}7$;

$\left|\sqrt{5} - 2\right| = \sqrt{5} - 2$ (так как $\sqrt{5} - 2 > 0$);

$\left|\sqrt{5} - 3\right| = -\left(\sqrt{5} - 3\right) = 3 - \sqrt{5}$ (так как $\sqrt{5} - 3 < 0$).

На практике используют различные свойства модулей, например:

1. $|a| \geqslant 0$.
2. $|ab| = |a||b|$.
3. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.
4. $|a|^2 = a^2$.
5. $|a| = |-a|$.

2. Геометрический смысл модуля действительного числа

Вернемся к множеству R действительных чисел и его геометрической модели — числовой прямой. Отметим на прямой две точки: a и b (два действительных числа a и b), обозначим через $\rho(a; b)$ расстояние между точками a и b (ρ — буква греческого алфавита «ро»). Это расстояние равно $b - a$, если $b > a$ (рис. 20, а), оно равно $a - b$, если $a > b$ (рис. 20, б), наконец, оно равно нулю, если $a = b$.

Рис. 20, а

Рис. 20, б

Все три случая охватываются одной формулой:

$$\boxed{\rho(a; b) = |a - b|.}$$

П р и м е р 1. Решить уравнение:

а) $|x - 2| = 3$; б) $|x + 3{,}2| = 2$; в) $|x| = 2{,}7$; г) $\left|x - \sqrt{2}\right| = 0$.

Р е ш е н и е. а) Переведем аналитическую модель $|x - 2| = 3$ на геометрический язык: нам нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; 2) = 3$, т. е. удалены от точки 2 на расстояние, равное 3. Это точки -1 и 5 (рис. 21). Следовательно, уравнение имеет два корня: -1 и 5.

б) Уравнение $|x + 3{,}2| = 2$ перепишем в виде $|x - (-3{,}2)| = 2$ и далее $\rho(x; -3{,}2) = 2$. На координатной прямой есть две точки, которые удалены от точки $-3{,}2$ на расстояние, равное 2. Это точки $-5{,}2$ и $-1{,}2$ (рис. 22). Значит, уравнение имеет два корня: $-5{,}2$ и $-1{,}2$.

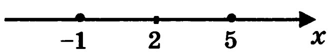


Рис. 21

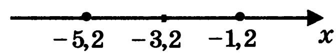


Рис. 22

в) Уравнение $|x| = 2{,}7$ перепишем в виде $|x - 0| = 2{,}7$, или, что то же самое, $\rho\,(x;\,0) = 2{,}7$. На координатной прямой имеются две точки, которые удалены от точки 0 на расстояние, равное 2,7. Это точки $-2{,}7$ и $2{,}7$ (рис. 23). Таким образом, уравнение имеет два корня: $-2{,}7$ и $2{,}7$.

г) Для уравнения $\left|x - \sqrt{2}\right| = 0$ можно обойтись без геометрической иллюстрации, ведь если $|a| = 0$, то $a = 0$. Поэтому $x - \sqrt{2} = 0$, т. е. $x = \sqrt{2}$.

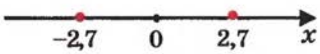


Рис. 23

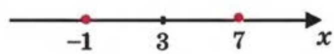


Рис. 24

П р и м е р 2. Решить уравнение:

а) $|2x - 6| = 8$; б) $|5 - 3x| = 6$; в) $|4x + 1| = -2$.

Р е ш е н и е. а) Имеем:

$$|2x - 6| = |2\,(x - 3)| = |2| \cdot |x - 3| = 2\,|x - 3|.$$

Значит, заданное уравнение можно преобразовать к виду $2\,|x - 3| = 8$, откуда получаем: $|x - 3| = 4$.

Переведем аналитическую модель $|x - 3| = 4$ на геометрический язык: нам нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x;\,3) = 4$, т. е. удалены от точки 3 на расстояние, равное 4. Это точки -1 и 7 (рис. 24). Итак, уравнение имеет два корня: -1 и 7.

б) Имеем:

$$|5 - 3x| = \left|-3\left(x - \frac{5}{3}\right)\right| = |-3| \cdot \left|x - \frac{5}{3}\right| = 3\left|x - \frac{5}{3}\right|.$$

Поэтому заданное уравнение можно преобразовать к виду $3\left|x - \frac{5}{3}\right| = 6$, откуда получаем: $\left|x - \frac{5}{3}\right| = 2$.

Переведем аналитическую модель $\left|x-\frac{5}{3}\right|=2$ на геометрический язык: нам нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho\left(x;\frac{5}{3}\right)=2$. Значит, они удалены от точки $\frac{5}{3}$, т. е. от точки $1\frac{2}{3}$, на расстояние, равное 2.

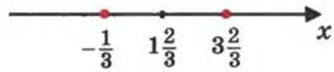


Рис. 25

Это точки $-\frac{1}{3}$ и $3\frac{2}{3}$ (рис. 25). Итак, уравнение имеет два корня: $-\frac{1}{3}$ и $3\frac{2}{3}$.

в) Для уравнения $|4x+1|=-2$ никаких преобразований делать не нужно. Оно явно не имеет корней, поскольку в левой его части содержится неотрицательное выражение, а в правой — отрицательное число.

3. Функция $y=|x|$

Для любого действительного числа x можно вычислить $|x|$, т. е. можно говорить о функции $y=|x|$. Воспользовавшись соотношениями (1) из п.1, вместо $y=|x|$ запишем

$$y=\begin{cases}x, & \text{если } x \geqslant 0;\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Построение графика, как обычно в таких случаях, осуществим «по кусочкам». Сначала построим прямую $y=x$ и выделим ее часть на луче $[0;+\infty)$ (рис. 26). Затем построим прямую

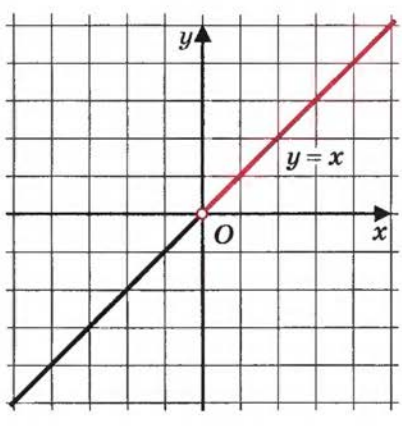


Рис. 26

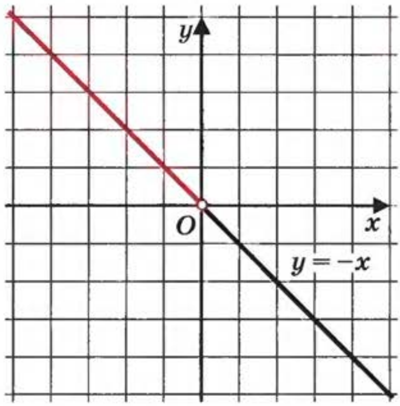


Рис. 27

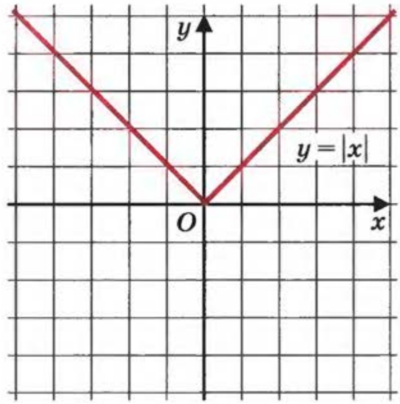


Рис. 28

$y = -x$ и выделим ее часть на открытом луче $(-\infty; 0)$ (рис. 27). Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат; получим график функции $y = |x|$ (рис. 28).

4. Тождество $\sqrt{a^2} = |a|$

Мы знаем, что если $a \geqslant 0$, то $\sqrt{a^2} = a$. А как быть, если $a < 0$? Написать $\sqrt{a^2} = a$ в этом случае нельзя, ведь $a < 0$ и получится, что $\sqrt{a^2} < 0$, а это неверно, так как значение квадратного корня не может быть отрицательным.

Чему же равно выражение $\sqrt{a^2}$ при $a < 0$? По определению квадратного корня в ответе должно получиться такое число, которое, во-первых, положительно и, во-вторых, при возведении в квадрат дает подкоренное число, т. е. a^2. Таким числом будет $-a$. Смотрите:

1) $-a > 0$ (еще раз напомним, что a — отрицательное число, значит, $-a$ — положительное число);

2) $(-a)^2 = a^2$.

Итак,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Вам ничего не напоминает конструкция, полученная в правой части равенства? Вспомните, ведь точно так же определяется модуль числа a:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Значит, $\sqrt{a^2}$ и $|a|$ — одно и то же. Тем самым мы доказали важное тождество:

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|.}$$

В роли a может выступать любое числовое или алгебраическое выражение.

Пример 3. Упростить выражение $\sqrt{(a-1)^2}$, если:

а) $a - 1 > 0$; б) $a - 1 < 0$.

Решение. Как мы только что установили, справедливо тождество

$$\sqrt{(a-1)^2} = |a - 1|.$$

а) Если $a - 1 > 0$, то $|a - 1| = a - 1$. Таким образом, в этом случае получаем: $\sqrt{(a-1)^2} = a - 1$.

б) Если $a - 1 < 0$, то $|a - 1| = -(a - 1) = 1 - a$. Значит, в этом случае получаем: $\sqrt{(a-1)^2} = 1 - a$.

Пример 4. Упростить выражение $\frac{1}{2a} \cdot \sqrt{32a^2}$, если $a < 0$.

Решение.

$$\frac{1}{2a} \cdot \sqrt{32a^2} = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{a^2}}{2a} = \frac{4\sqrt{2} \cdot |a|}{2a} = \frac{2\sqrt{2} \cdot |a|}{a}.$$

Так как по условию $a < 0$, то $|a| = -a$. В результате получаем:

$$\frac{2\sqrt{2} \cdot |a|}{a} = \frac{2\sqrt{2} \cdot (-a)}{a} = -2\sqrt{2}.$$

О т в е т: $-2\sqrt{2}$.

П р и м е р 5. Вычислить $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}$.

Р е ш е н и е.

$$\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} = \left|\sqrt{3} - 2\right|; \ \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \left|\sqrt{3} - 1\right|.$$

Осталось, как обычно говорят, «раскрыть знаки модулей». Воспользуемся тем, что $1 < \sqrt{3} < 2$. Значит, $\sqrt{3} - 2 < 0$, а $\sqrt{3} - 1 > 0$. Но тогда $\left|\sqrt{3} - 2\right| = -\left(\sqrt{3} - 2\right) = 2 - \sqrt{3}$, а $\left|\sqrt{3} - 1\right| = \sqrt{3} - 1$. В итоге получаем:

$$\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \left|\sqrt{3} - 2\right| + \left|\sqrt{3} - 1\right| =$$
$$= 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 1.$$

О т в е т: 1.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этой главе вы познакомились с новыми терминами математического языка:

бесконечная десятичная периодическая дробь (рациональное число);
бесконечная десятичная непериодическая дробь (иррациональное число);
числовая прямая;
квадратный корень из неотрицательного числа;
кубический корень из неотрицательного числа;
подкоренное выражение;
извлечение квадратного (кубического) корня;
освобождение от иррациональности в знаменателе.

Мы ввели несколько новых обозначений (новых символов математического языка):

N — множество натуральных чисел;
Z — множество целых чисел;
Q — множество рациональных чисел;
R — множество действительных чисел;
$x \in X$ — элемент x принадлежит множеству X;
$A \subset B$ — множество A является частью (подмножеством) множества B.

Мы ввели новое обозначение $\sqrt{a}$ (имеющее смысл только при условии, что $a \geqslant 0$). Запись $\sqrt{a} = b$ означает, что $b \geqslant 0$ и $b^2 = a$.

Мы изучили новые математические модели — функции $y = \sqrt{x}$ и $y = |x|$ (свойства и графики).

При этом к известным свойствам функций добавили три новых свойства:
выпуклость функции вверх;
выпуклость функции вниз;
область значений функции.
Мы изучили новые тождества, справедливые для любых неотрицательных чисел a, b:

$$(\sqrt{a})^2 = a; \qquad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$

$\sqrt{a^{2n}} = a^n$ (n — натуральное число).

Мы доказали, что для любого значения a справедливо тождество $\sqrt{a^2} = |a|$.

ГЛАВА 3

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$

§ 17. ФУНКЦИЯ $y = kx^2$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Продолжим знакомиться с новыми функциями. В этом параграфе речь пойдет о функции $y = kx^2$, где k — действительное число, отличное от нуля.

На самом деле функция $y = kx^2$ в одном случае вам знакома. Смотрите: если $k = 1$, то получаем $y = x^2$; эту функцию вы изучили в 7-м классе и знаете, что ее графиком является парабола. Обсудим, что происходит при других значениях коэффициента k.

Рассмотрим две функции: $y = 2x^2$ и $y = 0{,}5x^2$. Составим таблицу значений для первой функции $y = 2x^2$:

x	0	1	−1	2	−2	1,5	−1,5
y	0	2	2	8	8	4,5	4,5

Построим точки (0; 0), (1; 2), (−1; 2), (2; 8), (−2; 8), (1,5; 4,5), (−1,5; 4,5) на координатной плоскости (рис. 29); они намечают некоторую линию, проведем ее (рис. 30).

Составим таблицу значений для второй функции $y = 0{,}5x^2$:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	0	0,5	0,5	2	2	4,5	4,5

Построим точки (0; 0), (1; 0,5), (−1; 0,5), (2; 2), (−2; 2), (3; 4,5), (−3; 4,5) на координатной плоскости (рис. 31); они намечают некоторую линию, проведем ее (рис. 32).

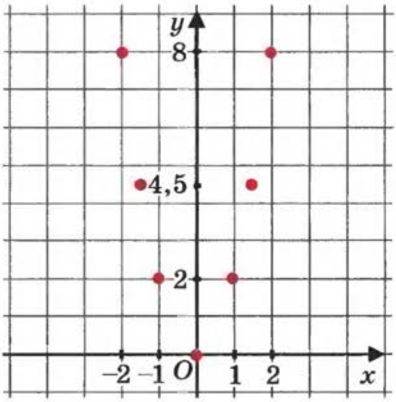


Рис. 29

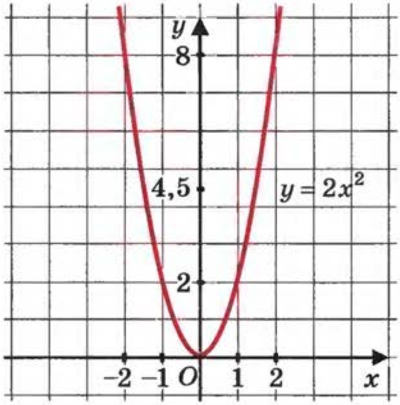


Рис. 30

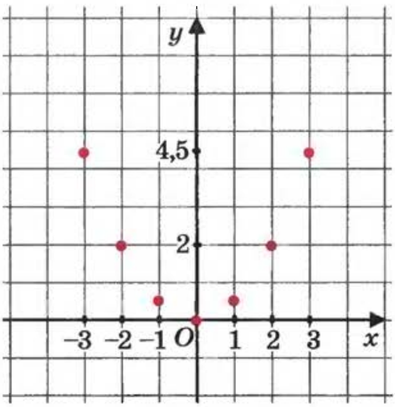


Рис. 31

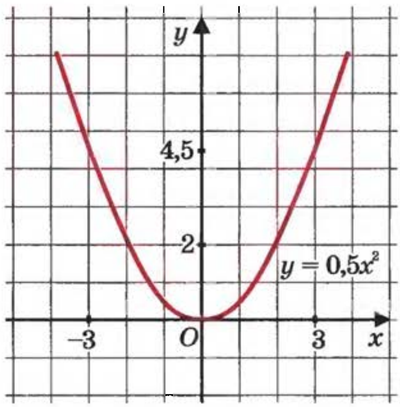


Рис. 32

Сравните рис. 1 (в § 10), 30 и 32. Не правда ли, проведенные линии похожи? Каждую из них называют **параболой**; при этом точку (0; 0) называют **вершиной параболы**, а ось y — **осью симметрии параболы**. От величины коэффициента k зависит «скорость устремления» ветвей параболы вверх, или, если так можно выразиться, «степень крутизны» параболы. Это хорошо видно на рис. 33, где все три указанные параболы расположены на одной координатной плоскости.

Рабочий словарь

парабола

вершина параболы

ось параболы

ветви параболы

Точно так же обстоит дело с любой другой функцией вида $y = kx^2$, где $k > 0$. Графиком ее является парабола с вершиной в начале координат, ветви параболы направлены вверх, причем тем круче, чем больше коэффициент k. Ось y является осью симметрии параболы. Кстати, ради краткости речи математики часто вместо длинной фразы «парабола, служащая графиком функции $y = kx^2$», говорят «парабола $y = kx^2$», а вместо термина «ось симметрии параболы» используют термин «ось параболы».

Вы замечаете, что имеется аналогия с функцией $y = kx$? Если $k > 0$, то графиком функции $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат (помните, мы говорили коротко: прямая $y = kx$), причем и здесь от величины коэффициента k зависит «степень крутизны» прямой. Это хорошо видно на рис. 34, где в одной системе координат изображены графики линейных функций $y = kx$ при трех значениях коэффициента k $\left(k = \frac{1}{2}, k = 1, k = 2\right)$.

Вернемся к функции $y = kx^2$. Выясним, как обстоит дело в случае отрицательного коэффициента k. Построим, например, график функции $y = -x^2$ (здесь $k = -1$). Составим таблицу значений:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	0	−1	−1	−4	−4	−9	−9

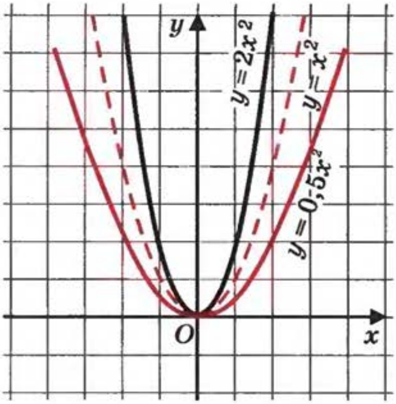


Рис. 33

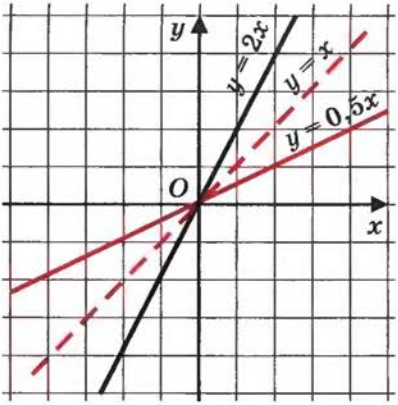


Рис. 34

Отметим точки (0; 0), (1; −1), (−1; −1), (2; −4), (−2; −4), (3; −9), (−3; −9) на координатной плоскости (рис. 35); они намечают некоторую линию, проведем ее (рис. 36). Это — парабола с вершиной в точке (0; 0), ось y — ось симметрии, но в отличие от случая, когда $k > 0$, на этот раз ветви параболы направлены вниз. Аналогично обстоит дело и для других отрицательных значений коэффициента k.

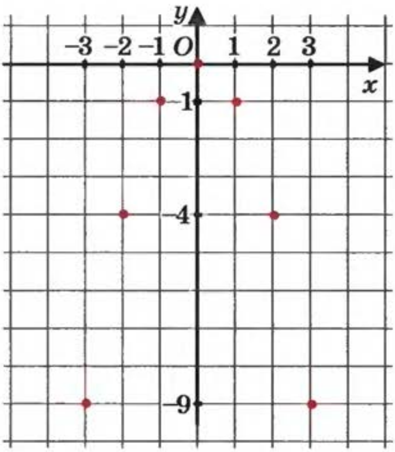


Рис. 35

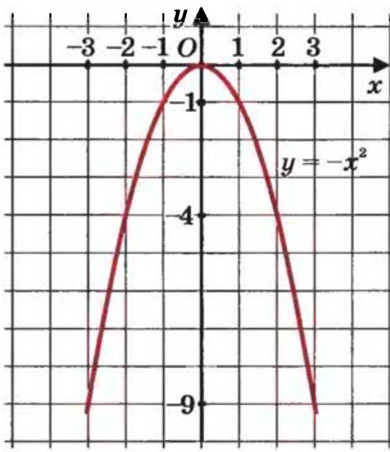


Рис. 36

Итак, ***графиком функции $y = kx^2 (k \neq 0)$ является парабола с вершиной в начале координат; ось y является осью параболы; ветви параболы направлены вверх при $k > 0$ и вниз при $k < 0$.***

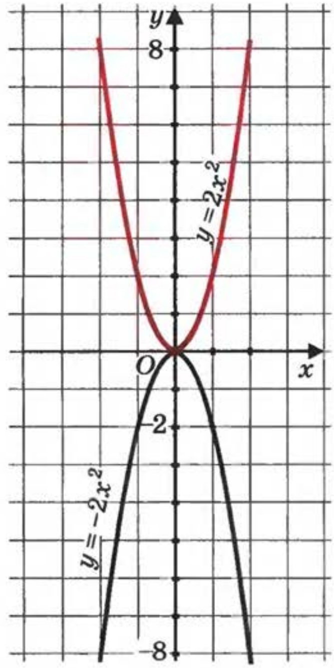


Рис. 37

Отметим еще, что парабола $y = kx^2$ *касается оси x в точке* (0; 0), т. е. одна ветвь параболы плавно переходит в другую, как бы прижимаясь к оси x.

Если построить в одной системе координат графики функций $y = 2x^2$ и $y = -2x^2$, то нетрудно заметить, что эти параболы симметричны друг другу относительно оси x; это хорошо видно на рис. 37.

Вообще, ***график функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс*** (впрочем, этим свойством мы уже пользовались в главе 2).

Свойства функции $y = kx^2$ при $k > 0$

Описывая свойства этой функции, мы будем опираться на ее геометрическую модель — параболу (рис. 38).

<u>*Свойство 1*</u>. Так как для любого значения x по формуле $y = kx^2$ можно вычислить соответствующее значение y, то функция определена в любой точке x (при любом значении аргумента x). Короче это записывают так: область определения функции есть $(-\infty; +\infty)$, т. е. вся числовая прямая.

<u>*Свойство 2*</u>. $y = 0$ при $x = 0$; $y > 0$ при $x \neq 0$. Это видно и по графику функции (он весь расположен выше оси x), но можно обосновать и без помощи графика: если $x \neq 0$, то $kx^2 > 0$ как произведение двух положительных чисел k и x^2.

Свойство 3. $y = kx^2$ — непрерывная функция.

Свойство 4. $y_{\text{наим}} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{\text{наиб}}$ не существует.

Свойство 5. Функция $y = kx^2$ возрастает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$.

Процесс перечисления свойств функции мы называем *чтением графика*. Этот процесс будет постепенно становиться все насыщеннее и интереснее — по мере изучения новых свойств функций. Добавим еще одно новое свойство.

Функцию $y = f(x)$ называют *ограниченной снизу*, если все значения функции больше некоторого числа. Геометрически это означает, что график функции расположен *выше* некоторой прямой, параллельной оси x.

А теперь посмотрите: график функции $y = kx^2$ расположен выше прямой $y = -1$ (или $y = -2$, это неважно) — она проведена на рис. 38. Значит, $y = kx^2$ $(k > 0)$ — ограниченная снизу функция.

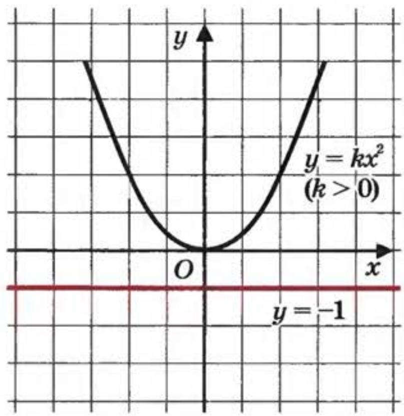


Рис. 38

ограниченность функции снизу

ограниченность функции сверху

Наряду с функциями, ограниченными снизу, рассматривают и функции, ограниченные сверху. Функцию $y = f(x)$ называют *ограниченной сверху*, если все значения функции меньше некоторого числа. Геометрически это означает, что график функции расположен *ниже* некоторой прямой, параллельной оси x.

Имеется ли такая прямая для параболы $y = kx^2$, где $k > 0$? Нет. Это значит, что функция не является ограниченной сверху.

Итак, мы получили еще одно свойство, добавим его к тем пяти, что указаны выше.

Свойство 6. Функция $y = kx^2$ $(k > 0)$ ограничена снизу и не ограничена сверху.

В главе 2 мы ввели в обиход еще два свойства функций — область значений и выпуклость. Отметим их в качестве седьмого и восьмого свойств рассматриваемой функции.

Свойство 7. Область значений функции $y = kx^2$ $(k > 0)$ — луч $[0; +\infty)$.

Свойство 8. Функция выпукла вниз.

Свойства функции $y = kx^2$ при $k < 0$

При описании свойств этой функции мы опираемся на ее геометрическую модель — параболу (рис. 39).

Свойство 1. Область определения функции — $(-\infty; +\infty)$.

Свойство 2. $y = 0$ при $x = 0$; $y < 0$ при $x \neq 0$.

Свойство 3. $y = kx^2$ — непрерывная функция.

Свойство 4. $y_{наиб} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{наим}$ не существует.

Свойство 5. Функция возрастает при $x \leqslant 0$, убывает при $x \geqslant 0$.

Свойство 6. Функция ограничена сверху и не ограничена снизу.

Дадим пояснения последнему свойству: имеется прямая, параллельная оси x (например, $y = 1$, она проведена на рис. 39), такая, что вся парабола лежит ниже этой прямой; это значит, что функция ограничена сверху. С другой стороны, нельзя провести такую прямую, параллельную оси x, чтобы вся парабола была расположена выше этой прямой; это значит, что функция не ограничена снизу.

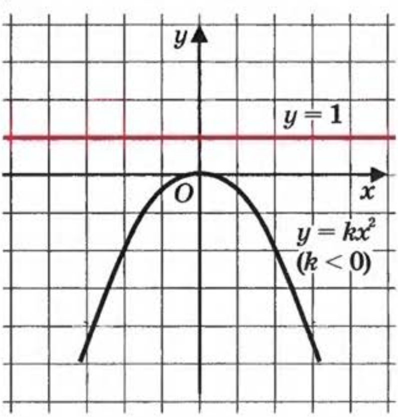


Рис. 39

Свойство 7. Область значений функции — луч $(-\infty; 0]$.

Свойство 8. Функция выпукла вверх.

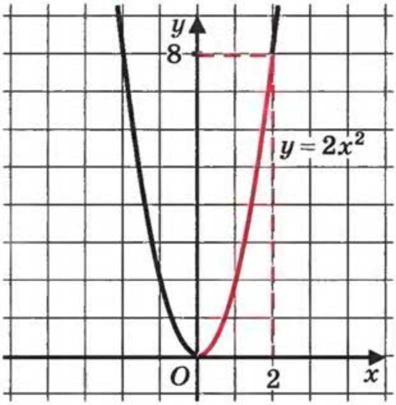


Рис. 40

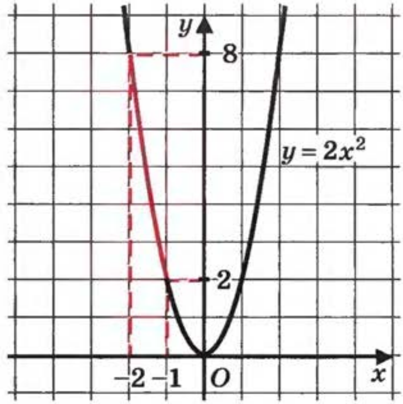


Рис. 41

Использованный выше порядок ходов при перечислении свойств функции не является законом, пока он сложился именно таким образом. Более-менее определенный порядок ходов мы выработаем постепенно и унифицируем в курсе алгебры 9-го класса.

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2x^2$ на отрезке: а) $[0; 2]$; б) $[-2; -1]$; в) $[-1; 1{,}5]$.

Решение.

а) Построим график функции $y = 2x^2$ и выделим его часть на отрезке $[0; 2]$ (рис. 40). Замечаем, что $y_{\text{наим}} = 0$ (достигается при $x = 0$), а $y_{\text{наиб}} = 8$ (достигается при $x = 2$).

б) Построим график функции $y = 2x^2$ и выделим его часть на отрезке $[-2; -1]$ (рис. 41). Замечаем, что $y_{\text{наим}} = 2$ (достигается при $x = -1$), а $y_{\text{наиб}} = 8$ (достигается при $x = -2$).

в) Построим график функции $y = 2x^2$ и выделим его часть на отрезке $[-1; 1{,}5]$ (рис. 42). Замечаем, что $y_{\text{наим}} = 0$ (достигается при $x = 0$), а $y_{\text{наиб}}$ достигается в точке $x = 1{,}5$; подсчитаем это значение: $y_{\text{наиб}} = 2 \cdot 1{,}5^2 = 2 \cdot 2{,}25 = 4{,}5$.

Пример 2. Решить уравнение $-x^2 = 2x - 3$.

Решение.

1) Рассмотрим две функции: $y = -x^2$ и $y = 2x - 3$.

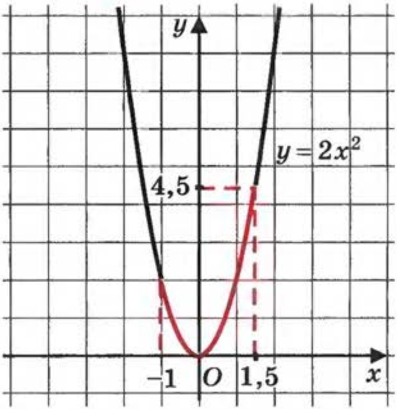


Рис. 42

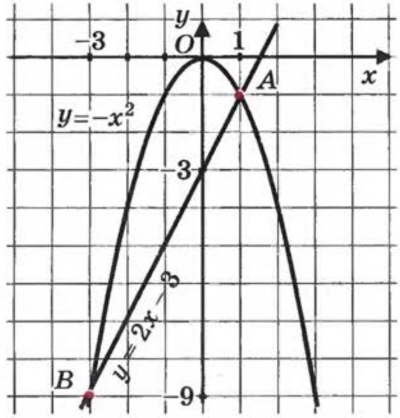


Рис. 43

2) Построим параболу — график функции $y = -x^2$ (рис. 43).

3) Построим график функции $y = 2x - 3$. Это — прямая, для ее построения достаточно найти любые две точки графика. Если $x = 0$, то $y = -3$; если $x = 1$, то $y = -1$. Итак, нашли две точки $(0; -3)$ и $(1; -1)$. Прямая, проходящая через эти две точки (график функции $y = 2x - 3$), изображена на том же чертеже (рис. 43).

4) По чертежу находим, что прямая и парабола пересекаются в двух точках $A(1; -1)$ и $B(-3; -9)$. Значит, данное уравнение имеет два корня: 1 и -3 — это абсциссы точек A и B.

О т в е т: 1, −3.

обратите внимание

Замечание. Разумеется, нельзя слепо доверять графическим иллюстрациям (об этом говорили в замечании 2 на с. 63—64). Может быть, нам только кажется, что точка A имеет координаты $(1; -1)$, а на самом деле они другие, например $(0{,}98; -1{,}01)$? Поэтому всегда полезно проверить себя. Так, в рассмотренном примере надо убедиться, что точка $A(1; -1)$ принадлежит параболе $y = -x^2$ (это легко — достаточно подставить в формулу $y = -x^2$ координаты точки A; получим: $-1 = -1^2$ — верное числовое равенство) и прямой $y = 2x - 3$ (и это легко — достаточно подставить в формулу $y = 2x - 3$ координаты точки A; получим: $-1 = 2 - 3$ — верное числовое равенство).

То же самое надо сделать и для точки B. Эта проверка показывает, что в рассмотренном уравнении графические наблюдения привели к верному результату.

Есть и еще одна неприятность: на самом ли деле имеются только две точки пересечения, как показано на графике? Да, только две, но обоснование этого факта мы получим только в главе 4, когда узнаем, что уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ (квадратное уравнение) может иметь не более двух корней.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y + x^2 = 0, \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы к виду $y = -x^2$. Графиком этой функции является парабола, изображенная на рис. 43.

Преобразуем второе уравнение системы к виду $y = 2x - 3$. Графиком этой функции является прямая, изображенная на рис. 43.

Парабола и прямая пересекаются в точках $A(1; -1)$ и $B(-3; -9)$. Координаты этих точек и служат решениями заданной системы уравнений.

Ответ: $(1; -1)$, $(-3; -9)$.

Пример 4. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}5x^2, & \text{если } -4 \leqslant x \leqslant 0; \\ x + 1, & \text{если } 0 < x \leqslant 1; \\ 2x^2, & \text{если } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Требуется:

а) вычислить $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$, $f(2)$, $f(3)$;

б) построить график функции;

в) с помощью графика перечислить свойства функции.

Решение. а) Значение $x = -4$ удовлетворяет условию $-4 \leqslant x \leqslant 0$, следовательно, $f(-4)$ надо вычислять по первой строке задания функции: $f(x) = -0{,}5x^2$; значит,

$$f(-4) = -0{,}5 \cdot (-4)^2 = -8.$$

Аналогично находим:

$$f(-2) = -0,5 \cdot (-2)^2 = -2;$$
$$f(0) = -0,5 \cdot 0^2 = 0.$$

Значение $x = \frac{1}{2}$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 1$, поэтому $f\left(\frac{1}{2}\right)$ надо вычислять по второй строке задания функции: $f(x) = x + 1$; значит,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = 1,5.$$

Значение $x = \sqrt{2}$ удовлетворяет условию $1 < x \leqslant 2$, т. е. $f\left(\sqrt{2}\right)$ надо вычислять по третьей строке задания функции: $f(x) = 2x^2$; значит,

$$f\left(\sqrt{2}\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 4.$$

Аналогично получим:

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 = 8.$$

Значение $x = 3$ не удовлетворяет ни одному из трех условий задания функции, а потому $f(3)$ в данном случае вычислить нельзя, точка $x = 3$ не принадлежит области определения функции. Задание, состоящее в том, чтобы вычислить $f(3)$, некорректно.

б) Построение графика осуществим «по кусочкам». Сначала построим параболу $y = -0,5x^2$ и выделим ее часть на отрезке $[-4; 0]$ (рис. 44). Затем построим прямую $y = x + 1$ и выделим ее часть на полуинтервале $(0; 1]$ (рис. 45). Далее построим параболу $y = 2x^2$ и выделим ее часть на полуинтервале $(1; 2]$ (рис. 46). Наконец, все три «кусочка» изобразим в одной системе координат; получим график функции $y = f(x)$ (рис. 47).

в) Перечислим свойства функции или, как мы условились говорить, прочитаем график.

1. Область определения функции — отрезок $[-4; 2]$.

2. $y = 0$ при $x = 0$; $y > 0$ при $0 < x \leqslant 2$; $y < 0$ при $-4 \leqslant x < 0$.

3. Функция претерпевает разрыв при $x = 0$.

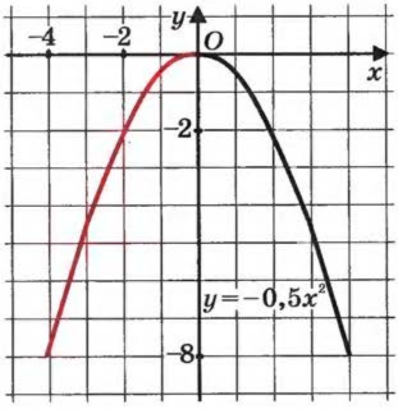


Рис. 44

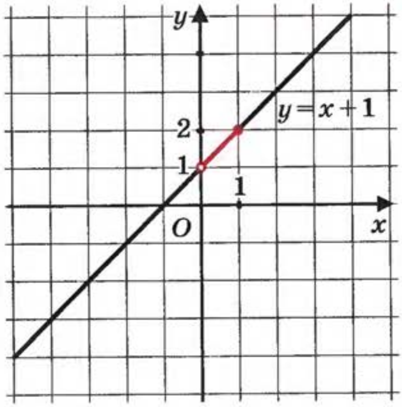


Рис. 45

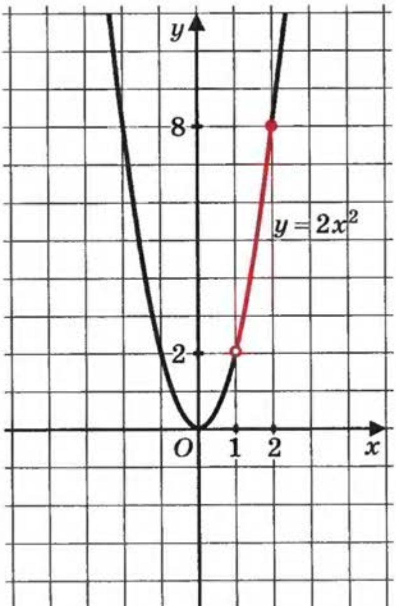


Рис. 46

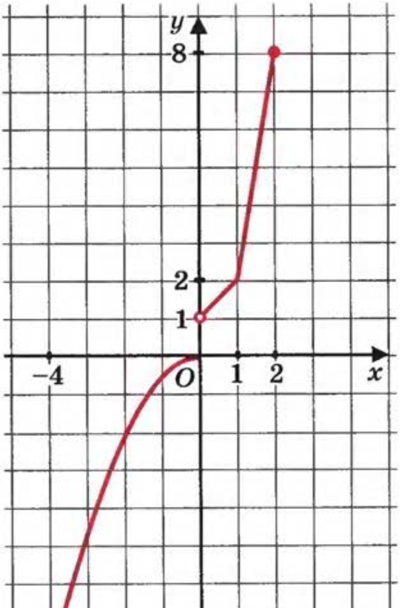


Рис. 47

4. Функция возрастает на отрезке $[-4; 2]$.

5. Функция ограничена и снизу и сверху.

6. $y_{наим} = -8$ (достигается при $x = -4$), $y_{наиб} = 8$ (достигается при $x = 2$).

7. Область значений функции состоит из отрезка $[-8; 0]$ и полуинтервала $(1; 8]$. В подобных случаях можно использовать символ $\cup$ – *знак объединения*. Тогда можно сказать так: область значений функции — объединение двух числовых промежутков: $[-8; 0] \cup (1; 8]$. ◼

Замечание. График функции, изображенный на рис. 47, состоит из двух сплошных «кусков»: один — на отрезке $[-4; 0]$, другой — на полуинтервале $(0; 2]$. Значит, функция непрерывна на отрезке $[-4; 0]$ и на полуинтервале $(0; 2]$. Но (обратите внимание!) функция претерпевает разрыв в концевой точке $x = 0$.

§ 18. ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

В этом параграфе мы познакомимся с функцией $y = \frac{k}{x}$. Коэффициент k может принимать любые значения, кроме $k = 0$. Рассмотрим сначала случай, когда $k = 1$; таким образом, сначала речь пойдет о функции $y = \frac{1}{x}$.

Чтобы построить график функции $y = \frac{1}{x}$, поступим так же, как и в предыдущем параграфе: дадим независимой переменной x несколько конкретных значений и вычислим (по формуле $y = \frac{1}{x}$) соответствующие значения зависимой переменной y. Правда, на этот раз удобнее проводить вычисления и построения постепенно, сначала придавая аргументу только положительные значения, а затем — только отрицательные.

<u>Первый этап.</u> Если $x = 1$, то $y = 1$ (напомним, что мы пользуемся формулой $y = \frac{1}{x}$);

если $x = 2$, то $y = \frac{1}{2}$; если $x = \frac{1}{2}$, то $y = 2$;

если $x = 4$, то $y = \frac{1}{4}$; если $x = \frac{1}{4}$, то $y = 4$;

если $x = 8$, то $y = \frac{1}{8}$; если $x = \frac{1}{8}$, то $y = 8$.

Короче говоря, мы составили следующую таблицу:

x	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	2	4	8

Построим найденные точки (1; 1), $\left(2; \frac{1}{2}\right)$, $\left(4; \frac{1}{4}\right)$, $\left(8; \frac{1}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$, $\left(\frac{1}{8}; 8\right)$ на координатной плоскости xOy (рис. 48). Эти точки намечают некоторую линию, начертим ее (рис. 49).

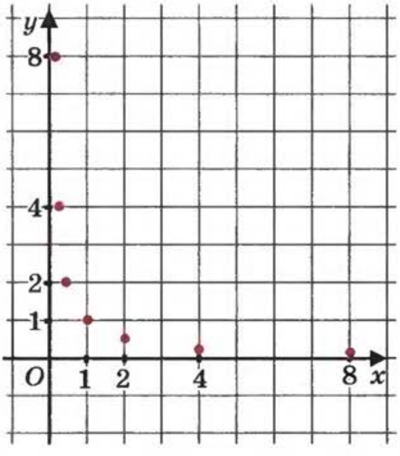


Рис. 48

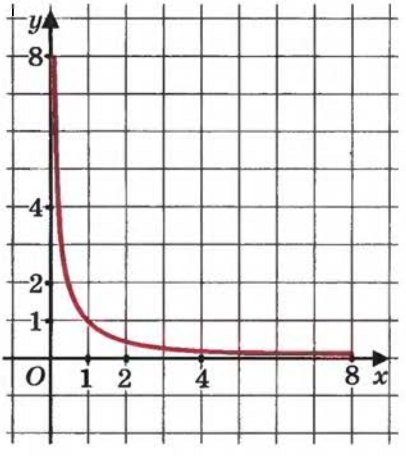


Рис. 49

Второй этап.

Если $x = -1$, то $y = -1$;

если $x = -2$, то $y = -\frac{1}{2}$;

если $x = -4$, то $y = -\frac{1}{4}$;

если $x = -8$, то $y = -\frac{1}{8}$;

если $x = -\frac{1}{2}$, то $y = -2$;

если $x = -\frac{1}{4}$, то $y = -4$;

если $x = -\frac{1}{8}$, то $y = -8$.

Короче говоря, мы составили следующую таблицу:

x	-1	-2	-4	-8	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$
y	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	-2	-4	-8

Построим найденные точки $(-1; -1)$, $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-4; -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-8; -\frac{1}{8}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$, $\left(-\frac{1}{4}; -4\right)$, $\left(-\frac{1}{8}; -8\right)$ на координатной плоскости xOy (рис. 50). Эти точки намечают некоторую линию, начертим ее (рис. 51).

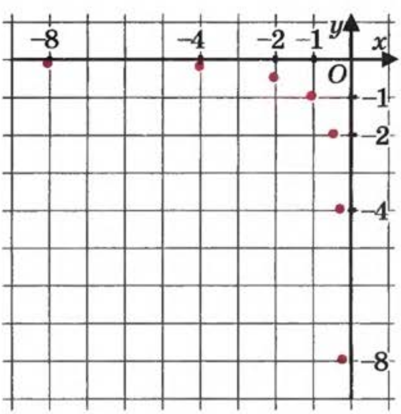


Рис. 50

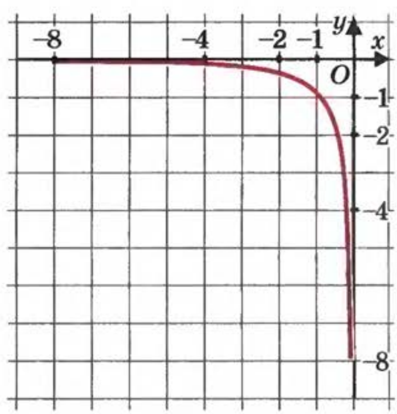


Рис. 51

гипербола

ветвь гиперболы

А теперь объединим два этапа в один, т. е. из двух рис. 49 и 51 сделаем один (рис. 52). Это и есть график функции $y = \frac{1}{x}$, его называют **гиперболой.**

Попробуем по чертежу описать геометрические свойства гиперболы.

Во-первых, замечаем, что эта линия выглядит так же красиво, как парабола, поскольку обладает симметрией. Любая прямая, проходящая через начало координат O и расположенная в первом и третьем координатных углах, пересекает гиперболу в двух точках, которые лежат на этой прямой по разные стороны от точки O, но на равных расстояниях от нее (рис. 53). Это присуще, в частности, точкам $(1; 1)$ и $(-1; -1)$, $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$ и т. д. Значит, O — центр симметрии гиперболы. Говорят также, что *гипербола симметрична относительно начала координат.*

Во-вторых, видим, что гипербола состоит из двух симметричных относительно начала координат частей; их обычно называют **ветвями гиперболы.**

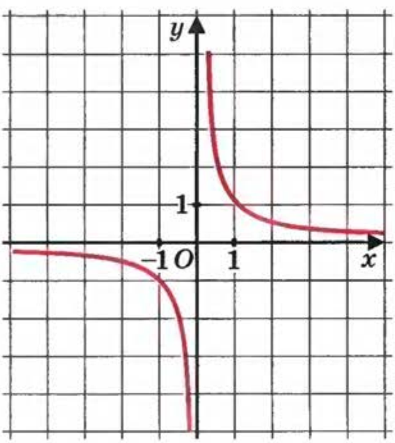


Рис. 52

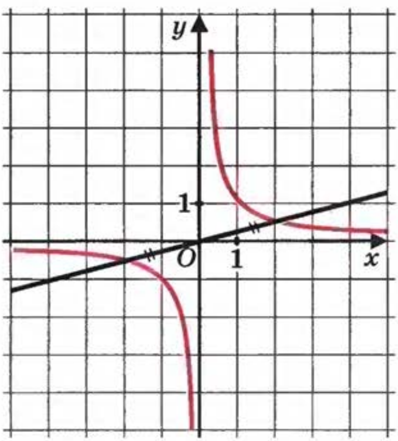


Рис. 53

Рабочий словарь

асимптота

В-третьих, замечаем, что каждая ветвь гиперболы в одном направлении подходит все ближе и ближе к оси абсцисс, а в другом направлении — к оси ординат. В подобных случаях соответствующие прямые называют **асимптотами** (ударение — на букве «и» во втором слоге). Значит, *график функции* $y = \frac{1}{x}$ *имеет две асимптоты: ось* x *и ось* y.

Если внимательно проанализировать построенный график, то можно обнаружить еще одно геометрическое свойство, не такое очевидное, как три предыдущих (математики обычно говорят так: «более тонкое свойство»). *У гиперболы имеется не только центр симметрии, но и оси симметрии.*

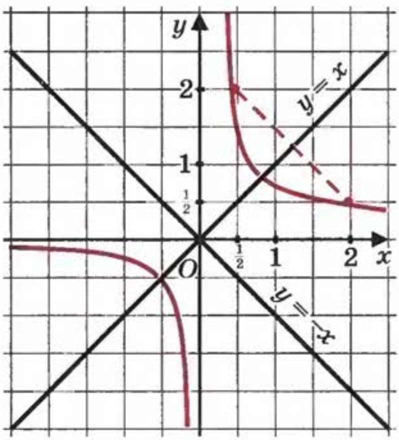


Рис. 54

В самом деле, построим прямую $y = x$ (рис. 54). А теперь смотрите: точки $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ расположены по разные стороны от проведенной прямой, но на равных расстояниях от нее, они симметричны относительно этой прямой. То же можно сказать о точках $\left(4; \frac{1}{4}\right)$ и $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$, $\left(8; \frac{1}{8}\right)$ и $\left(\frac{1}{8}; 8\right)$ и вообще о точках $\left(a; \frac{1}{a}\right)$ и $\left(\frac{1}{a}; a\right)$, где, конечно, $a \neq 0$. Значит, прямая $y = x$ — ось симметрии гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Впрочем, есть и еще одна ось симметрии — прямая $y = -x$.

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \frac{1}{x}$: а) на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 4\right]$; б) на полуинтервале $[-8; -1)$.

Решение. а) Построим график функции $y = \frac{1}{x}$ и выделим ту его часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $\left[\frac{1}{2};\ 4\right]$ (рис. 55). Для выделенной части графика находим:

$$y_{\text{наим}} = \frac{1}{4} \text{ (при } x = 4\text{)},\quad y_{\text{наиб}} = 2\left(\text{при } x = \frac{1}{2}\right).$$

б) Построим график функции $y = \frac{1}{x}$ и выделим ту его часть, которая соответствует значениям переменной x из полуинтервала $[-8; -1)$ (рис. 56). Для выделенной части графика находим:

$$y_{\text{наим}} \text{ не существует},\quad y_{\text{наиб}} = -\frac{1}{8} \text{ (при } x = -8\text{)}.$$

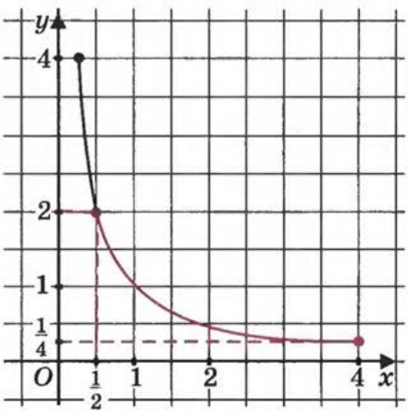


Рис. 55

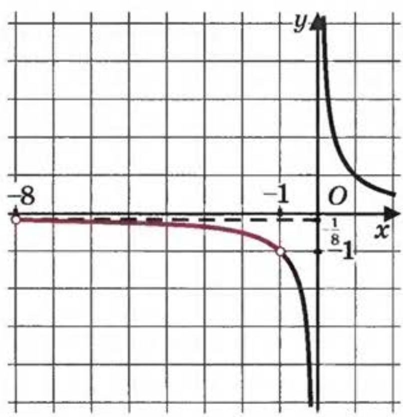


Рис. 56

Итак, мы рассмотрели функцию $y = \frac{k}{x}$ для случая, когда $k = 1$. Пусть теперь k — положительное число, отличное от 1, например $k = 2$. Рассмотрим функцию $y = \frac{2}{x}$ и составим таблицу значений этой функции:

x	1	2	-1	-2	4	$\frac{1}{2}$	-4	$-\frac{1}{2}$
y	2	1	-2	-1	$\frac{1}{2}$	4	$-\frac{1}{2}$	-4

Построим точки (1; 2), (2; 1), (−1; −2), (−2; −1), $\left(4; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, $\left(-4; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -4\right)$ на координатной плоскости (рис. 57). Они намечают некоторую линию, состоящую из двух ветвей; проведем ее (рис. 58). Как и график функции $y = \frac{1}{x}$, эту линию называют *гиперболой*.

Рассмотрим теперь случай, когда $k < 0$; пусть, например, $k = -1$. Построим график функции $y = -\frac{1}{x}$ (здесь $k = -1$).

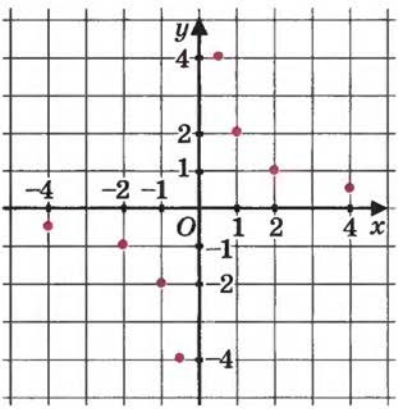


Рис. 57

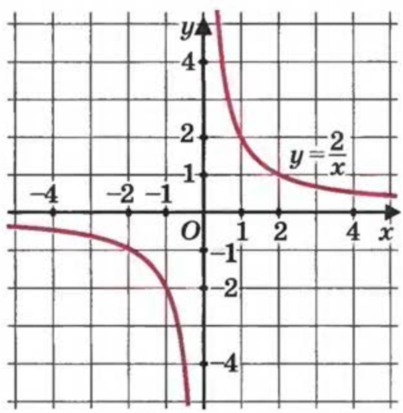


Рис. 58

В предыдущем параграфе мы отметили, что график функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси x. В частности, это значит, что график функции $y = -\frac{1}{x}$ симметричен графику функции $y = \frac{1}{x}$ относительно оси абсцисс (рис. 59). Таким образом, мы получим гиперболу, ветви которой расположены во втором и четвертом координатных углах.

Вообще, ***графиком функции*** $y = \frac{k}{x}$ ***($k \neq 0$) является гипербола, ветви которой расположены в первом и третьем координатных углах, если*** $k > 0$ (рис. 58), ***и во втором и четвертом координатных углах, если*** $k < 0$ (рис. 59). ***Точка (0; 0) — центр симметрии гиперболы, оси координат — асимптоты гиперболы.***

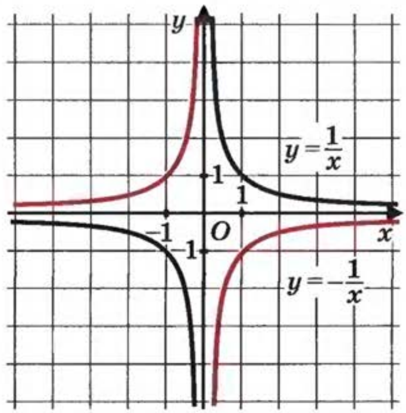


Рис. 59

обратная пропорциональность

коэффициент обратной пропорциональности

Обычно говорят, что две величины x и y **обратно пропорциональны**, если они связаны соотношением $xy = k$ (где k — число, отличное от 0), или, что то же самое, $y = \frac{k}{x}$. По этой причине число k называют **коэффициент обратной пропорциональности.**

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$

Описывая свойства этой функции, мы будем опираться на ее геометрическую модель — гиперболу (см. рис. 58).

Свойство 1. Область определения функции состоит из всех чисел, кроме $x = 0$.

Свойство 2. $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$.

Свойство 3. Функция убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Доказательство этого утверждения будет дано в § 32.

Свойство 4. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху.

<u>*Свойство 5*</u>. Ни наименьшего, ни наибольшего значений у функции нет.

<u>*Свойство 6*</u>. Функция непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ и претерпевает разрыв в точке $x = 0$.

<u>*Свойство 7*</u>. Область значений функции — объединение двух открытых лучей: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$

Описывая свойства этой функции, мы будем опираться на ее геометрическую модель — гиперболу (см. рис. 59).

<u>*Свойство 1*</u>. Область определения функции состоит из всех чисел, кроме $x = 0$.

<u>*Свойство 2*</u>. $y > 0$ при $x < 0$; $y < 0$ при $x > 0$.

<u>*Свойство 3*</u>. Функция возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Доказательство этого утверждения будет дано в § 32.

<u>*Свойство 4.*</u> Функция не ограничена ни снизу, ни сверху.

<u>*Свойство 5*</u>. Ни наименьшего, ни наибольшего значений у функции нет.

<u>*Свойство 6*</u>. Функция непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ и претерпевает разрыв в точке $x = 0$.

<u>*Свойство 7*</u>. Область значений функции — объединение двух открытых лучей: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{4}{x} = 5 - x$.

Решение. 1) Рассмотрим две функции: $y = \frac{4}{x}$ и $y = 5 - x$.

2) Построим график функции $y = \frac{4}{x}$ — гиперболу (рис. 60).

3) Построим график линейной функции $y = 5 - x$. Это — прямая, ее можно построить по двум точкам $(0; 5)$ и $(5; 0)$.

Она изображена на том же чертеже (рис. 60).

4) По чертежу устанавливаем, что гипербола и прямая пересекаются в точках $A(1; 4)$ и $B(4; 1)$. Проверка показывает, что это на самом деле так. Значит, данное уравнение имеет два корня: 1 и 4 — это абсциссы точек A и B.

О т в е т: 1, 4.

В связи с решением примера 2 советуем еще раз прочитать замечание из предыдущего параграфа.

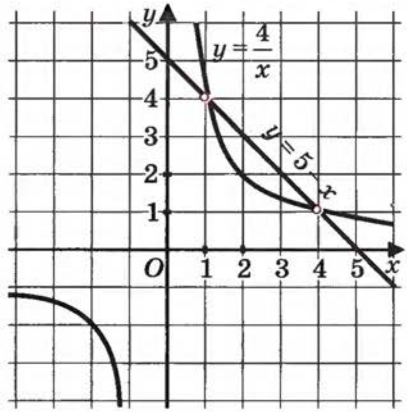


Рис. 60

П р и м е р 3. Построить и прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 1; \\ -\dfrac{1}{x}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Сначала построим параболу $y = -x^2$ и выделим ее часть на отрезке $[-2; 1]$ (рис. 61). Затем построим гиперболу $y = -\frac{1}{x}$ и выделим ее часть на открытом луче $(1; +\infty)$ (рис. 62). Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — получим график функции $y = f(x)$ (рис. 63).

Перечислим свойства функции $y = f(x)$, т. е. прочитаем график.

1. Область определения функции — луч $[-2; +\infty)$.

2. $y = 0$ при $x = 0$; $y < 0$ при $-2 \leqslant x < 0$ и при $x > 0$.

3. Функция возрастает на отрезке $[-2; 0]$ и на луче $[1; +\infty)$, убывает на отрезке $[0; 1]$.

4. Функция ограничена и снизу и сверху.

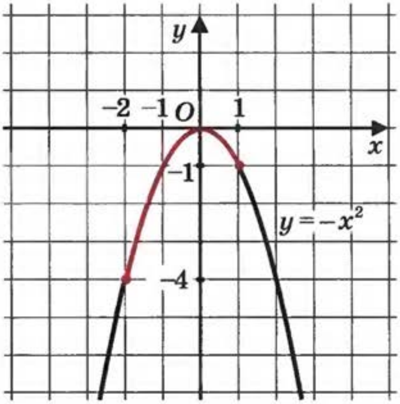


Рис. 61

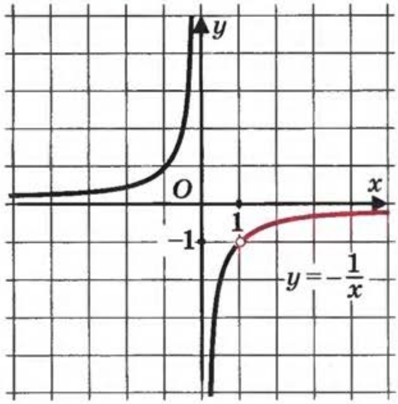


Рис. 62

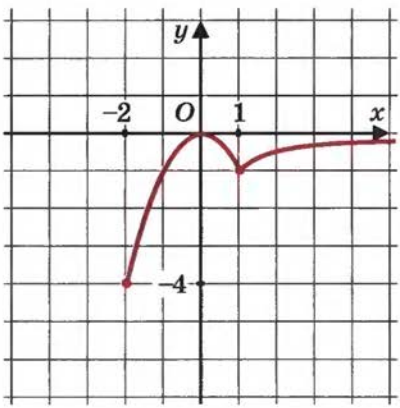


Рис. 63

5. $y_{наим} = -4$ (достигается при $x = -2$), $y_{наиб} = 0$ (достигается при $x = 0$).

6. Функция непрерывна в заданной области определения.

7. Область значений функции — отрезок $[-4; 0]$.

8. Функция выпукла вверх на отрезке $[-2; 1]$ и на луче $[1; +\infty)$.

Пример 4. Доказать, что функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{2}{x}$, удовлетворяет соотношению

$$f(x-3) - f(x+2) = 2{,}5f(x-3) \cdot f(x+2).$$

Решение. Имеем: $f(x-3) = \frac{2}{x-3}$, $f(x+2) = \frac{2}{x+2}$.

Следовательно,

$$f(x-3) - f(x+2) = \frac{2}{x-3} - \frac{2}{x+2} =$$
$$= \frac{2(x+2) - 2(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{10}{(x-3)(x+2)}.$$

С другой стороны,

$$2{,}5f(x-3) \cdot f(x+2) = 2{,}5 \cdot \frac{2}{x-3} \cdot \frac{2}{x+2} = \frac{10}{(x-3)(x+2)}.$$

Итак,

$$f(x-3) - f(x+2) = \frac{10}{(x-3)(x+2)}$$

и

$$2{,}5f(x-3) \cdot f(x+2) = \frac{10}{(x-3)(x+2)}.$$

Значит, $f(x-3) - f(x+2) = 2{,}5f(x-3) \cdot f(x+2)$, что и требовалось доказать.

§ 19. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x + l)$, ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$

Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = (x + 3)^2$. Графиком первой функции является парабола (пунктирная линия на рис. 64). Для функции $y = (x + 3)^2$ составим таблицу значений:

x	−3	−2	−4	−5	−1	−6	0
y	0	1	1	4	4	9	9

обратите внимание

Построив точки (−3; 0), (−2; 1), (−4; 1), (−5; 4), (−1; 4), (−6; 9), (0; 9) на координатной плоскости и соединив их плавной кривой, получим параболу (цветная линия на рис. 64). Обратите внимание — это точно такая же парабола,

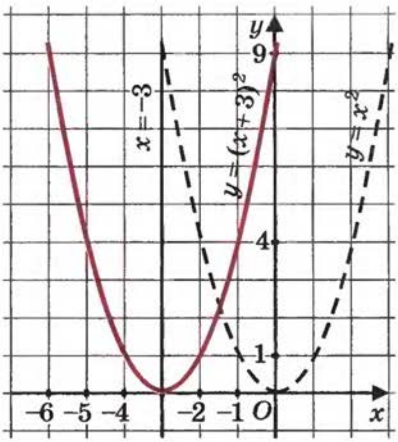


Рис. 64

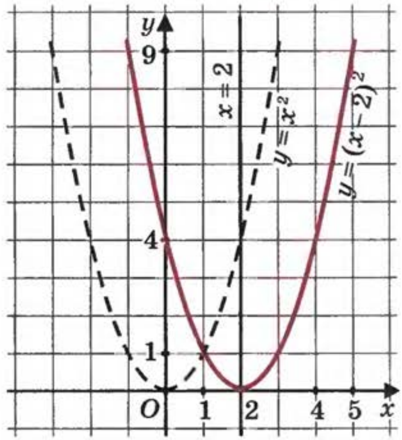


Рис. 65

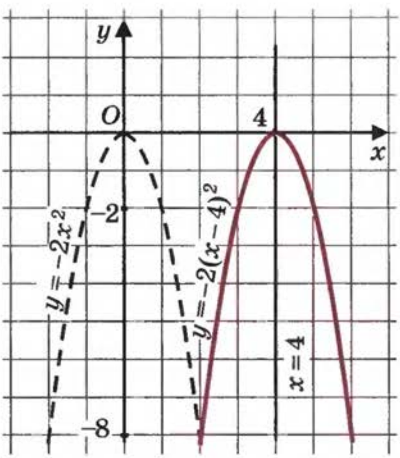


Рис. 66

как и $y = x^2$, но только сдвинутая вдоль оси x на 3 единицы масштаба *влево*. Вершина параболы теперь находится в точке $(-3; 0)$, а не в точке $(0; 0)$, как для параболы $y = x^2$. Осью симметрии служит прямая $x = -3$, а не $x = 0$, как это было в случае параболы $y = x^2$.

Если же построить в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = (x - 2)^2$, то заметим (рис. 65), что второй график получается из первого сдвигом (или, как еще говорят, *параллельным переносом*) вдоль оси x на 2 единицы масштаба *вправо*.

Точно так же обстоит дело и с графиками других функций. Например, график функции $y = -2(x - 4)^2$ — парабола, которая получается из параболы $y = -2x^2$ сдвигом (параллельным переносом) вдоль оси x на 4 единицы масштаба *вправо* (рис. 66).

запомните

Вообще, справедливо следующее утверждение: ***чтобы построить график функции $y = f(x + l)$, где l — заданное положительное число, нужно сдвинуть график функции $y = f(x)$ вдоль оси x на l единиц масштаба влево;***

чтобы построить график функции $y = f(x - l)$, где l — заданное положительное число, нужно сдвинуть график функции $y = f(x)$ вдоль оси x на l единиц масштаба вправо.

Пример 1. Построить график функции $y = -\dfrac{3}{x+5}$.

Решение. Построив гиперболу $y = -\dfrac{3}{x}$ и сдвинув ее вдоль оси x влево на 5 единиц, получим требуемый график (рис. 67). Это — гипербола с асимптотами $x = -5$ и $y = 0$.

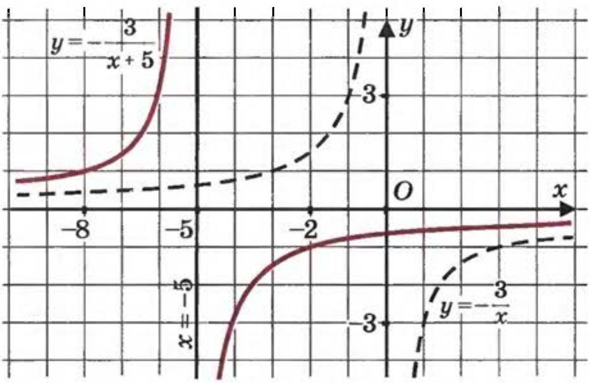


Рис. 67

Пример 2. Построить график функции $y = |x + 2|$.

Решение. График этой функции получается из графика функции $y = |x|$ (см. рис. 28 на с. 80) сдвигом последнего на две единицы масштаба влево (рис. 68).

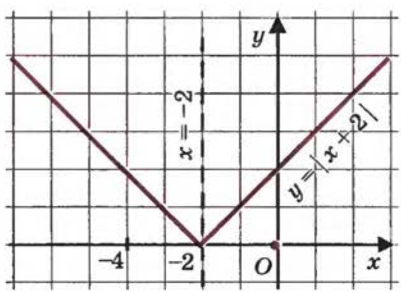


Рис. 68

Замечание. По сути дела, в этом параграфе речь шла о построении графика функции $y = f(x + l)$, где l — любое число, как положительное, так и отрицательное. Вы, наверное, заметили, что, думая, на сколько единиц масштаба надо сдвинуть вдоль оси x график функции $y = f(x)$, мы не обращали внимания на знак числа l; график сдвигался в действительности вправо или влево на $|l|$ единиц. А направление сдвига определялось знаком числа l: при $l > 0$ график сдвигался влево, при $l < 0$ — вправо.

§ 20. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x) + m$, ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$

Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ (пунктирная линия на рис. 69) и $y = x^2 + 4$. Составим таблицу значений функции $y = x^2 + 4$:

x	0	1	−1	2	−2
y	4	5	5	8	8

Построив точки (0; 4), (1; 5), (−1; 5), (2; 8), (−2; 8) на координатной плоскости и соединив их плавной кривой, получим параболу (цветная линия на рис. 69). Обратите внимание — это точно такая же парабола, как и $y = x^2$, но только сдвинутая вдоль оси y на 4 единицы масштаба *вверх*. Вершина параболы теперь находится в точке (0; 4), а не в точке (0; 0), как для параболы $y = x^2$. Осью симметрии по-прежнему служит прямая $x = 0$, как это было и в случае параболы $y = x^2$.

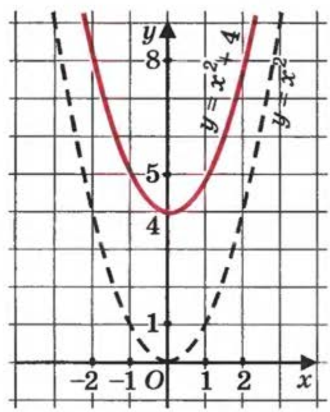


Рис. 69

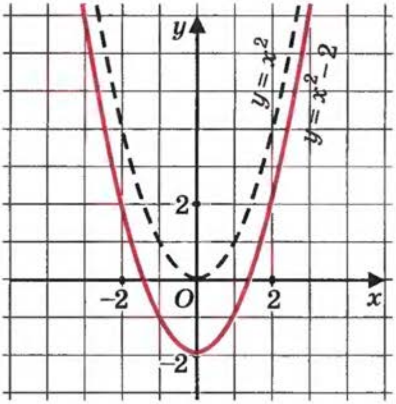


Рис. 70

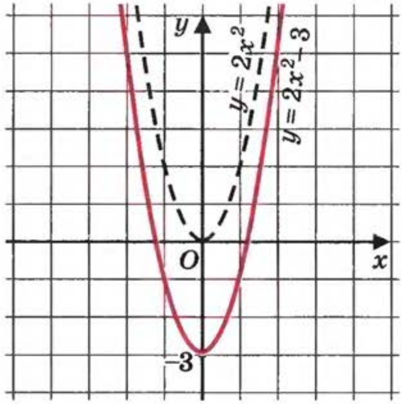


Рис. 71

Если же построить в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = x^2 - 2$ (рис. 70), то заметим, что второй график получается из первого сдвигом (параллельным переносом) вдоль оси y на 2 единицы масштаба *вниз*.

Точно так же обстоит дело и с графиками других функций. Например, график функции $y = 2x^2 - 3$ — парабола, которая получается из параболы $y = 2x^2$ сдвигом (параллельным переносом) вдоль оси y на 3 единицы масштаба *вниз* (рис. 71).

Вообще, справедливо следующее утверждение:

чтобы построить график функции $y = f(x) + m$, где m — заданное положительное число, надо сдвинуть график функции $y = f(x)$ вдоль оси y на m единиц масштаба вверх;

чтобы построить график функции $y = f(x) - m$, где m — заданное положительное число, надо сдвинуть график функции $y = f(x)$ вдоль оси y на m единиц масштаба вниз.

Между прочим, этот результат не является для вас абсолютно новым. Вспомните, как обстояло дело с графиками функций $y = kx$ и $y = kx + m$: это — две параллельные прямые, одна из которых ($y = kx$) проходит через начало координат, а другая ($y = kx + m$) проходит через точку $(0; m)$, т. е. фактически получена из первой прямой сдвигом вдоль оси y на m единиц (рис. 72).

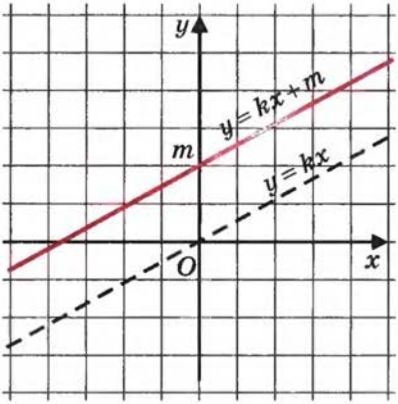


Рис. 72

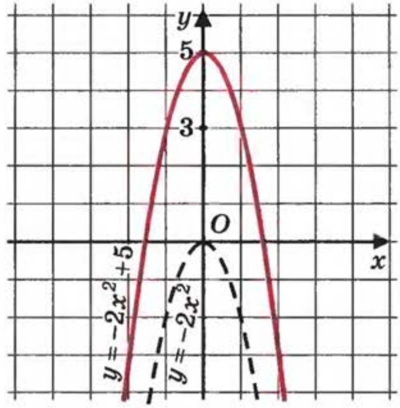


Рис. 73

Пример 1. Построить график функции $y = -2x^2 + 5$.

Решение. Построив параболу $y = -2x^2$ и сдвинув ее вдоль оси y вверх на 5 единиц, получим график функции $y = -2x^2 + 5$ (рис. 73).

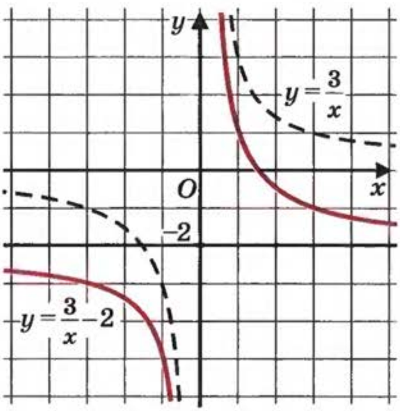


Рис. 74

Пример 2. Построить график функции $y = \frac{3}{x} - 2$.

Решение. Построив гиперболу $y = \frac{3}{x}$ и сдвинув ее вдоль оси y вниз на 2 единицы, получим график функции $y = \frac{3}{x} - 2$ (рис. 74). Обратите внимание, что и горизонтальная асимптота гиперболы сдвинулась на 2 единицы вниз: для гиперболы $y = \frac{3}{x}$ асимптотой служила ось x (прямая $y = 0$), а для гиперболы $y = \frac{3}{x} - 2$ асимптотой служит прямая $y = -2$. Вертикальная асимптота осталась прежней: $x = 0$.

Пример 3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = -2x^2 + 3$ на отрезке $[-2; 1]$.

Решение. Построим график функции $y = -2x^2 + 3$ и выделим его часть на отрезке $[-2; 1]$ (рис. 75). Получаем: $y_{наим} = -5$ (достигается при $x = -2$), а $y_{наиб} = 3$ (достигается при $x = 0$).

Ответ: $y_{наим} = -5$, $y_{наиб} = 3$.

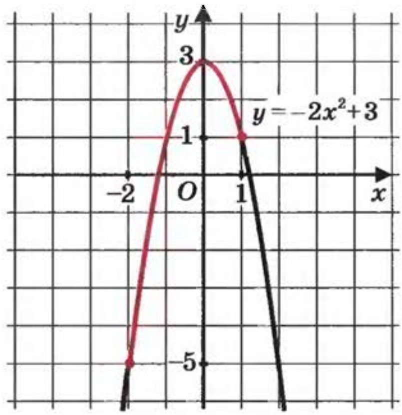


Рис. 75

Пример 4. Решить уравнение $\frac{2}{x} = x^2 + 1$.

Решение.

1) Рассмотрим две функции: $y = \frac{2}{x}$ и $y = x^2 + 1$.

2) Построим график функции $y = \frac{2}{x}$ — гиперболу (рис. 76).

3) Построим график функции $y = x^2 + 1$. Это парабола, которая изображена на том же чертеже (рис. 76).

4) По чертежу устанавливаем, что гипербола и парабола пересекаются в точке $A(1; 2)$. Проверка показывает, что на самом деле точка $A(1; 2)$ принадлежит и тому и другому графику. Уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 5. Построить и прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & \text{если } -4 \leqslant x \leqslant 0; \\ 4 - x^2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Решение. Сначала построим параболу $y = (x + 2)^2$ и выделим ее часть на отрезке $[-4; 0]$ (рис. 77). Затем построим параболу $y = 4 - x^2$ и выделим ее часть на открытом луче $(0; +\infty)$ (рис. 78). Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — получим график функции $y = f(x)$ (рис. 79).

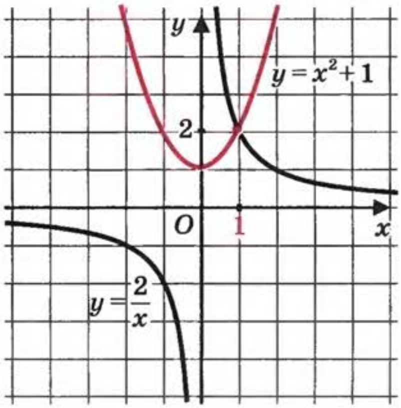


Рис. 76

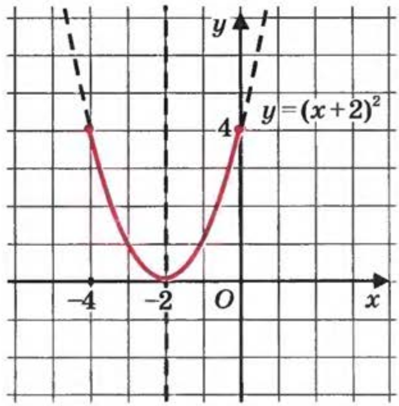


Рис. 77

Перечислим свойства функции $y = f(x)$, т. е. прочитаем график.

1. Область определения функции — луч $[-4; +\infty)$.

2. $y = 0$ при $x = -2$ и при $x = 2$; $y > 0$ при $-4 \leqslant x < -2$ и при $-2 < x < 2$; $y < 0$ при $x > 2$.

3. Функция убывает на промежутках $[-4; -2]$ и $[0; +\infty)$, возрастает на отрезке $[-2; 0]$.

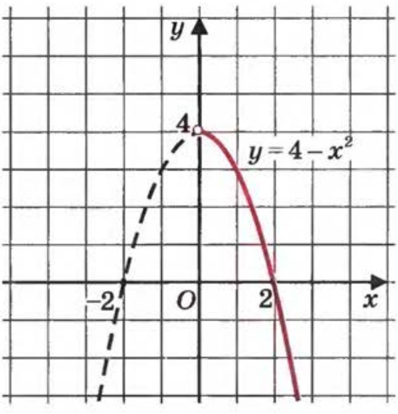


Рис. 78

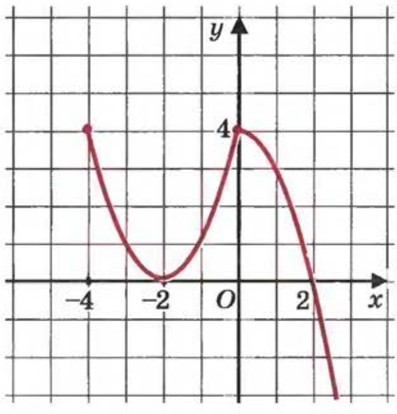


Рис. 79

4. Функция ограничена сверху, но не ограничена снизу.

5. $y_{наим}$ не существует, $y_{наиб} = 4$ (достигается при $x = -4$ и при $x = 0$).

6. Функция непрерывна в заданной области определения.

7. Область значений функции — луч $(-\infty; 4]$.

Замечание. По сути дела, в этом параграфе речь шла о построении графика функции $y = f(x) + m$, где m — любое число, как положительное, так и отрицательное. Вы, наверное, заметили, что, думая, на сколько единиц масштаба надо сдвинуть вдоль оси y график функции $y = f(x)$, мы не обращали внимания на знак числа m; график сдвигался в действительности вверх или вниз на $|m|$ единиц. А вот направление сдвига как раз и определялось знаком числа m: при $m > 0$ график сдвигался вверх, а при $m < 0$ — вниз.

§ 21. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x + l) + m$, ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$

График функции $y = f(x + l) + m$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ последовательным применением тех преобразований, о которых мы говорили в § 19 и 20.

Пример 1. Построить график функции $y = (x - 2)^2 - 3$.

Решение. Осуществим построение по этапам.

Первый этап. Построим график функции $y = x^2$ (пунктирная линия на рис. 80).

Второй этап. Сдвинув параболу $y = x^2$ на 2 единицы вправо, получим график функции $y = (x - 2)^2$ (сплошная черная линия на рис. 80).

Третий этап. Сдвинув параболу $y = (x - 2)^2$ на 3 единицы вниз, получим график функции $y = (x - 2)^2 - 3$ (цветная линия на рис. 80).

вопрос ответ

Замечание. Математику, который привык быть экономным в своих действиях, такое решение не очень понравится, хотя оно абсолютно правильное. Он спросит: зачем мне строить три графика, когда

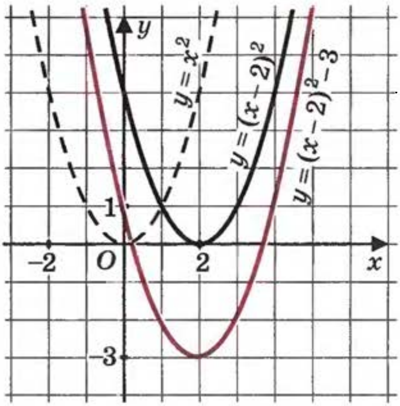


Рис. 80

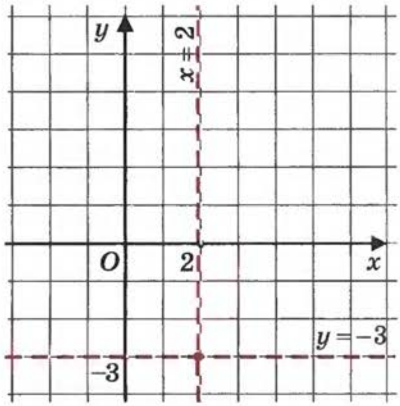


Рис. 81

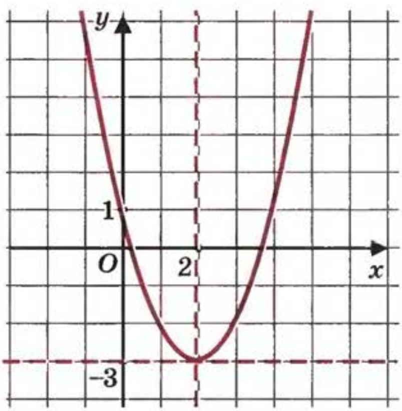


Рис. 82

я могу обойтись построением только одного графика? Ведь фактически графиком функции $y = (x - 2)^2 - 3$ является та же парабола, что служила графиком функции $y = x^2$, только вершина параболы переместилась из начала координат в точку $(2; -3)$. Поэтому, продолжит математик, я сделаю так: перейду к вспомогательной системе координат с началом в точке $(2; -3)$. Для этого построю (пунктиром) прямые $x = 2$ и $y = -3$ (рис. 81). В этой вспомогательной системе координат воспользуюсь шаблоном параболы $y = x^2$ (математики обычно в таких случаях используют жаргон, они говорят: «привяжем функцию $y = x^2$ к новой системе координат») и получу в итоге требуемый график (рис. 82).

Попробуем воспользоваться советом математика при решении следующего примера.

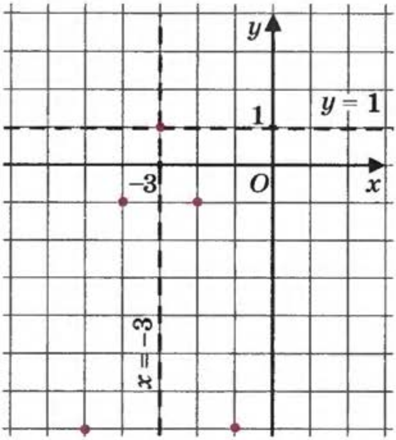


Рис. 83

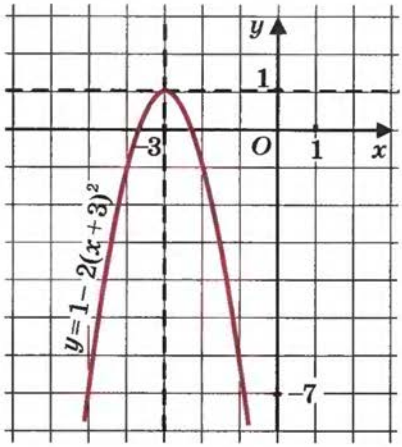


Рис. 84

П р и м е р 2. Построить график функции $y = -2(x + 3)^2 + 1$.

Р е ш е н и е. 1) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке (−3; 1) (пунктирные прямые $x = -3$, $y = 1$ на рис. 83).

2) Привяжем функцию $y = -2x^2$ к новой системе координат. Как это сделать? Например, так. Выберем контрольные точки для графика функции $y = -2x^2$, например (0; 0), (1; −2), (−1; −2), (2; −8), (−2; −8), но строить их будем *не в старой, а в новой системе координат* (эти точки отмечены на рис. 83). Затем через полученные точки проведем параболу; это и есть требуемый график (рис. 84).

Итак, мы получили два алгоритма построения графика функции $y = f(x + l) + m$.

Алгоритм 1 (построение графика функции $y = f(x + l) + m$)

1. Построить график функции $y = f(x)$.
2. Осуществить параллельный перенос графика $y = f(x)$ вдоль оси x на $|l|$ единиц масштаба влево, если $l > 0$, и вправо, если $l < 0$.
3. Осуществить параллельный перенос полученного на втором шаге графика вдоль оси y на $|m|$ единиц масштаба вверх, если $m > 0$, и вниз, если $m < 0$.

Алгоритм 2 (построение графика функции $y = f(x + l) + m$)

1. Перейти к вспомогательной системе координат, проведя (пунктиром) вспомогательные прямые $x = -l$, $y = m$, т. е. выбрав в качестве начала новой системы координат точку $(-l; m)$.
2. К новой системе координат привязать график функции $y = f(x)$.

Пользуйтесь на практике тем алгоритмом, который вам больше нравится (или более понятен).

Пример 3. Построить график функции $y = \sqrt{x-1} - 2$.

Решение. 1) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $(1; -2)$ (пунктирные прямые $x = 1$ и $y = -2$ на рис. 85).

2) Привяжем функцию $y = \sqrt{x}$ к новой системе координат. Для этого выберем контрольные точки для функции $y = \sqrt{x}$, например $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(4; 2)$, $(9; 3)$, но строить их будем не в старой, а в новой системе координат (эти точки отмечены на рис. 85). Построим ветвь параболы, проходящую через выбранные точки, — это и есть требуемый график (рис. 85).

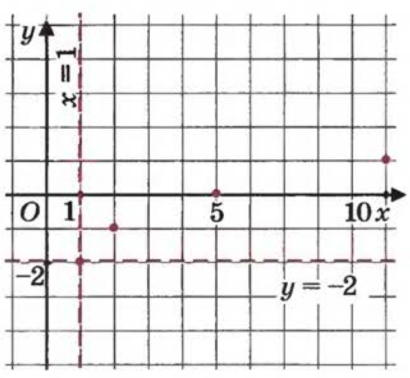


Рис. 85

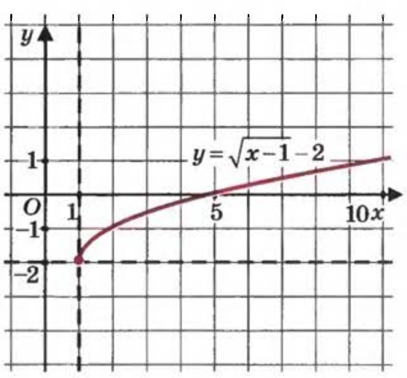


Рис. 86

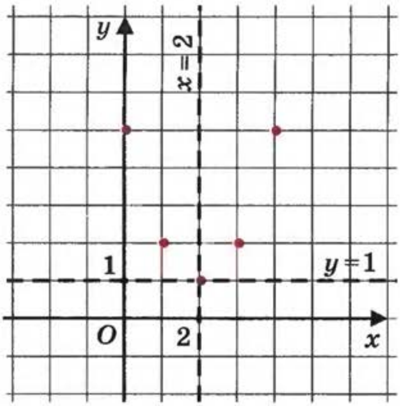


Рис. 87

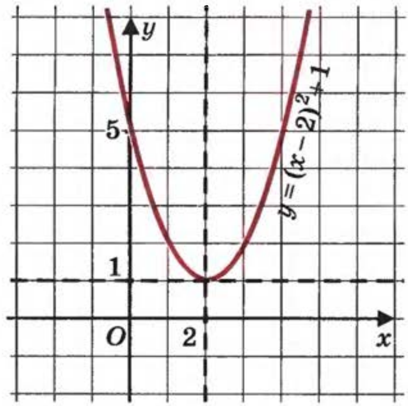


Рис. 88

Пример 4. Построить график функции $y = x^2 - 4x + 5$.

Решение. Вы, наверное, подумали: какое отношение имеет этот пример к тем преобразованиям графиков, которые мы обсуждаем? Оказывается, самое прямое. Чтобы убедиться в этом, применим к трехчлену $x^2 - 4x + 5$ *метод выделения полного квадрата* (он знаком вам из курса алгебры 7-го класса). Имеем:

$$x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 4x + 4) + 1 = (x - 2)^2 + 1.$$

Для построения графика функции $y = (x - 2)^2 + 1$ перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке (2; 1) (пунктирные прямые $x = 2$ и $y = 1$ на рис. 87). Привяжем функцию $y = x^2$ к новой системе координат. Для этого выберем контрольные точки для функции $y = x^2$, например (0; 0), (1; 1), (−1; 1), (2; 4), (−2; 4), но строить их будем *не в старой, а в новой системе координат* (эти точки отмечены на рис. 87). По этим точкам построим параболу; это и есть требуемый график (рис. 88).

§ 22. ФУНКЦИЯ $y = ax^2 + bx + c$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Рассмотрим многочлен $ax^2 + bx + c$, где a, b, c — числа (коэффициенты), причем $a \neq 0$. Его обычно называют **квадратным трехчленом;** при этом одночлен ax^2 называют **старшим членом квадратного трехчлена**, а коэффициент a — **старшим коэффициентом.**

Заметим, что квадратный трехчлен не обязательно состоит из трех слагаемых, например, $3x^2 + 2x$ тоже считают квадратным трехчленом: здесь $a = 3$, $b = 2$, $c = 0$.

Рабочий словарь

квадратный трехчлен

квадратичная функция

Функцию $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — произвольные числа, причем $a \neq 0$, называют **квадратичной функцией.** Это название можно объяснить тем, что старший член трехчлена $ax^2 + bx + c$ содержит x в квадрате.

Опираясь на результаты, полученные выше, мы с вами сможем построить график любой квадратичной функции. Один такой график мы построили в конце предыдущего параграфа, воспользовавшись методом выделения полного квадрата. Рассмотрим еще один пример.

Пример 1. Построить график функции $y = -3x^2 - 6x + 1$.

Решение. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене $-3x^2 - 6x + 1$. Имеем:

$$-3x^2 - 6x + 1 = -3(x^2 + 2x) + 1 = -3((x^2 + 2x + 1) - 1) + 1 =$$
$$= -3((x + 1)^2 - 1) + 1 = -3(x + 1)^2 + 3 + 1 = -3(x + 1)^2 + 4.$$

Для построения графика функции $y = -3(x + 1)^2 + 4$ перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-1; 4)$ (пунктирные прямые $x = -1$ и $y = 4$ на рис. 89). Привяжем функцию $y = -3x^2$ к новой системе координат. С этой целью выберем контрольные точки для функции $y = -3x^2$, например $(0; 0)$, $(1; -3)$, $(-1; -3)$, $(2; -12)$, $(-2; -12)$, но строить их будем *не в старой, а в новой системе координат* (эти точки отмечены на рис. 89). По этим точкам построим параболу — получим требуемый график (рис. 90).

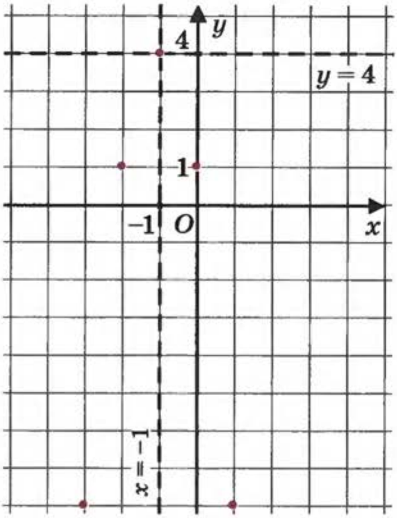


Рис. 89

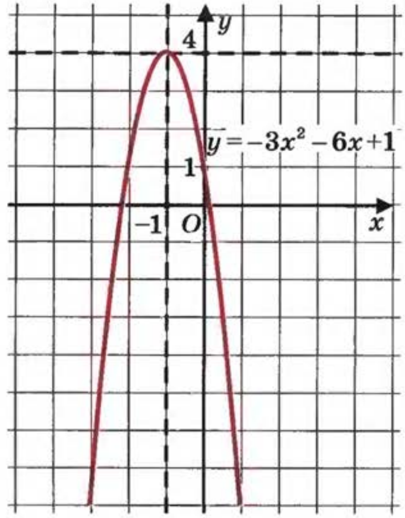


Рис. 90

Итак, применив метод выделения полного квадрата, мы преобразовали квадратный трехчлен к виду $a(x + l)^2 + m$ и использовали алгоритм 2 из § 21 (заметим еще раз, что с равным успехом мы могли бы использовать и алгоритм 1 — кому что нравится). Оказалось, что графиком функции $y = -3x^2 - 6x + 1$ является парабола, которая получается из параболы $y = -3x^2$ параллельным переносом. А в конце предыдущего параграфа мы установили, что графиком функции $y = x^2 - 4x + 5$ также является парабола; она получается из параболы $y = x^2$ параллельным переносом. Оказывается, *график любой квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить из параболы $y = ax^2$ параллельным переносом*, причем для доказательства этого факта используется та же идея — *выделение полного квадрата*.

Теорема

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, которая получается из параболы $y = ax^2$ параллельным перенсом.

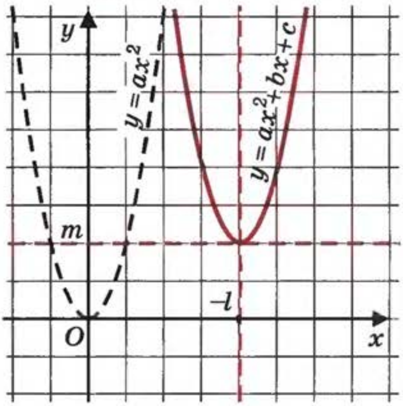


Рис. 91

Доказательство. Воспользуемся методом выделения полного квадрата. Имеем:

$$ax^2 + bx + c = (ax^2 + bx) + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c =$$

$$= a\left(\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Итак, нам удалось преобразовать квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ к виду $a(x + l)^2 + m$, где $l = \frac{b}{2a}$, $m = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Чтобы построить график функции $y = a(x + l)^2 + m$, нужно выполнить параллельный перенос параболы $y = ax^2$ так, чтобы вершина параболы оказалась в точке $(-l;\ m)$ (рис. 91). Теорема доказана.

Обратите внимание на следующее важное обстоятельство: из проведенного доказательства следует, что вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c$ служит точка $(-l;\ m)$. Осью параболы является прямая $x = -l$, т. е. $x = -\frac{b}{2a}$.

Итак, ***осью параболы** $y = ax^2 + bx + c$ **служит прямая** $x = -\frac{b}{2a}$; **абсцисса** x_0 **вершины параболы** $y = ax^2 + bx + c$ **вычисляется по формуле***

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}.}$$

Формулу для ординаты вершины параболы запоминать не нужно (речь идет о формуле $y_0 = m$, т. е. $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$). Во-первых, она довольно громоздкая, а во-вторых, если известна абсцисса x_0, то ординату y_0 всегда можно вычислить по формуле $y_0 = f(x_0)$, где $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Пример 2. Не выполняя построения графика функции $y = -3x^2 - 6x + 1$, ответить на следующие вопросы:

а) какая прямая служит осью параболы?

б) Каковы координаты вершины параболы?

в) Куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы?

Решение.

а) Здесь $a = -3$, $b = -6$. Составим уравнение оси параболы: $x = -\frac{b}{2a}$, т. е. $x = -1$.

б) Абсцисса x_0 вершины параболы нам уже известна: $x_0 = -1$. Ординату y_0 найдем по формуле $y_0 = f(x_0)$, где $f(x) = -3x^2 - 6x + 1$. Имеем:

$$y_0 = f(x_0) = f(-1) = -3(-1)^2 - 6(-1) + 1 = 4.$$

Итак, вершиной параболы служит точка $(-1; 4)$.

в) Парабола $y = -3x^2 - 6x + 1$ получается параллельным переносом параболы $y = -3x^2$. Ветви параболы $y = -3x^2$ направлены вниз (поскольку коэффициент при x^2 отрицателен), значит, и у параболы $y = -3x^2 - 6x + 1$ ветви направлены вниз.

Замечание. **Сравните примеры 1 и 2. Речь в них идет об одной и той же параболе, но в примере 1 мы ее построили, а в примере 2 строить параболу было не нужно. Проверьте по рис. 90 правильность ответов на вопросы примера 2.**

вопрос ответ

Для любой функции вида $y = ax^2 + bx + c$ можно ответить на поставленные в примере 2 вопросы, не строя параболу — график функции. Легче всего ответить на вопрос, куда направлены ветви параболы:

ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$.

Несколько сложнее найти уравнение оси параболы: $x = -\frac{b}{2a}$ (поскольку приходится немного посчитать). И еще сложнее (требуется больше вычислений) находятся координаты вершины параболы:

абсциссой является число $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а ордината y_0 вычисляется по формуле $y_0 = f(x_0)$, где $f(x) = ax^2 + bx + c$, или по формуле

$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Пример 3. Построить график функции $y = 2x^2 - 6x + 1$.

Решение. Графиком функции является парабола с ветвями, направленными вверх, поскольку старший коэффициент 2 — положительное число. Найдем координаты вершины параболы. Имеем:

$$a = 2,\ b = -6;\ x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 2} = 1{,}5;\ y_0 = f(x_0) = f(1{,}5),$$

где $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$. Значит,

$$y_0 = f(1{,}5) = 2 \cdot 1{,}5^2 - 6 \cdot 1{,}5 + 1 = -3{,}5.$$

На рис. 92 отмечена точка (1,5; −3,5) — вершина искомой параболы, проведена ось параболы. Чтобы построить саму параболу, поступим так: возьмем на оси x две точки, симметричные относительно оси параболы, например точки $x = 0$ и $x = 3$; вычислим значения функции в этих точках, учтя, что $f(0) = f(3)$. Имеем: $f(0) = 1$, значит, и $f(3) = 1$. Точки (0; 1) и (3; 1) отмечены на рис. 92. А теперь, зная три точки, построим искомую параболу (рис. 93).

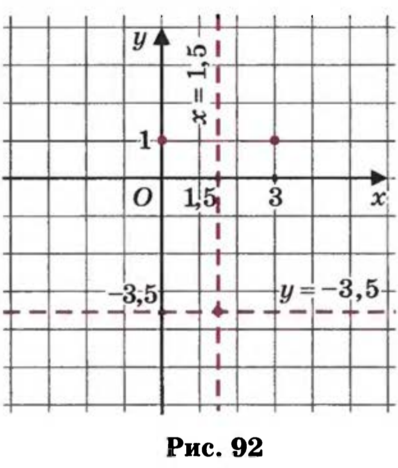


Рис. 92

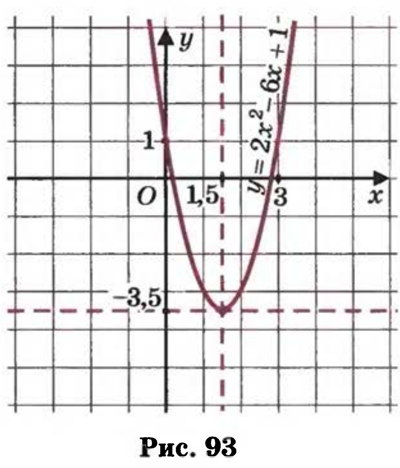


Рис. 93

Фактически мы получили алгоритм построения графика квадратичной функции.

Алгоритм построения параболы
$$y = ax^2 + bx + c$$

1. Найти координаты вершины параболы, построить на координатной плоскости соответствующую точку, провести ось параболы.
2. Отметить на оси x две точки, симметричные относительно оси параболы (чаще всего в качестве одной из таких точек берут точку $x = 0$), найти значения функции в этих точках; построить на координатной плоскости соответствующие точки.
3. Через полученные три точки провести параболу (в случае необходимости берут еще пару точек, симметричных относительно оси параболы, и строят параболу по пяти точкам).

Пример 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = -2x^2 + 8x - 5$ на отрезке $[0; 3]$.

Решение.

Первый этап. Построим параболу, служащую графиком заданной функции. Воспользуемся алгоритмом.

1) Имеем:

$$a = -2,\ b = 8,\ x_0 = -\frac{b}{2a} = 2;$$

$$y_0 = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 5 = 3.$$

Значит, вершиной параболы служит точка $(2; 3)$, а осью параболы — прямая $x = 2$ (рис. 94).

2) Возьмем на оси x две точки, симметричные относительно оси параболы, например точки $x = 0$ и $x = 4$. Имеем: $f(0) = f(4) = -5$; построим на координатной плоскости точки $(0; -5)$ и $(4; -5)$ (рис. 94).

3) Через точки $(2; 3)$, $(0; -5)$, $(4; -5)$ проводим параболу (рис. 95).

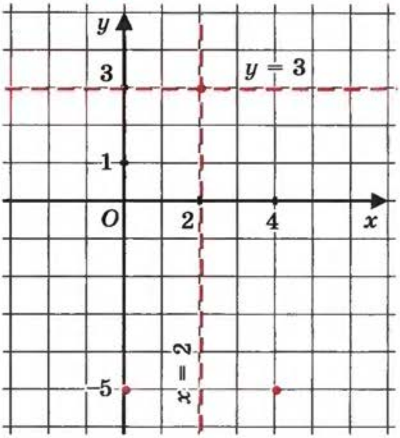


Рис. 94

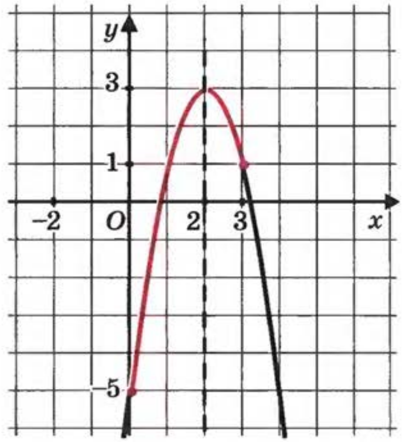


Рис. 95

Второй этап. Выделим часть построенного графика на отрезке [0; 3]. Замечаем (см. выделенную часть параболы на рис. 95), что $y_{\text{наим}} = -5$ (достигается при $x = 0$), а $y_{\text{наиб}} = 3$ (достигается при $x = 2$).

О т в е т: $y_{\text{наим}} = -5$, $y_{\text{наиб}} = 3$.

П р и м е р 5. Дана функция

$$y = f(x), \text{ где } f(x) = 3x^2 + x - 1.$$

Найти: $f(-x)$, $f(2x)$, $f(x^2)$, $f(x^3)$, $f(x^2 - 2x)$.

Р е ш е н и е.

$$f(-x) = 3(-x)^2 + (-x) - 1 = 3x^2 - x - 1;$$
$$f(2x) = 3(2x)^2 + (2x) - 1 = 12x^2 + 2x - 1;$$
$$f(x^2) = 3(x^2)^2 + (x^2) - 1 = 3x^4 + x^2 - 1;$$
$$f(x^3) = 3(x^3)^2 + (x^3) - 1 = 3x^6 + x^3 - 1;$$
$$f(x^2 - 2x) = 3(x^2 - 2x)^2 + (x^2 - 2x) - 1 =$$
$$= 3(x^4 - 4x^3 + 4x^2) + (x^2 - 2x) - 1 =$$
$$= 3x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 2x - 1.$$

§ 23. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

С квадратными уравнениями вы уже встречались в курсе алгебры 7-го класса, упоминали мы их и выше, в § 10. Напомним, что *квадратным уравнением* называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — любые числа (коэффициенты), причем $a \neq 0$. Используя наши знания о некоторых функциях и их графиках, мы в состоянии уже теперь, не дожидаясь систематического изучения темы «Квадратные уравнения» (это будет позднее, в главе 4), решать некоторые квадратные уравнения, причем различными способами; мы рассмотрим эти способы на примере одного квадратного уравнения.

Пример. Решить уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Решение.

I способ. Построим график функции $y = x^2 - 2x - 3$, воспользовавшись алгоритмом из § 22.

1) Имеем: $a = 1$, $b = -2$, $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_0 = f(1) = 1^2 - 2 - 3 = -4$. Значит, вершиной параболы служит точка $(1; -4)$, а осью параболы — прямая $x = 1$.

2) Возьмем на оси x две точки, симметричные относительно оси параболы, например точки $x = -1$ и $x = 3$. Имеем: $f(-1) = f(3) = 0$. Построим на координатной плоскости точки $(-1; 0)$ и $(3; 0)$.

3) Через точки $(-1; 0)$, $(1; -4)$, $(3; 0)$ проводим параболу (рис. 96).

Корнями уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$ являются абсциссы точек пересечения параболы с осью x; значит, корни уравнения таковы: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

II способ. Преобразуем уравнение к виду $x^2 = 2x + 3$. Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = 2x + 3$ (рис. 97). Они пересекаются в двух точках $A(-1; 1)$ и $B(3; 9)$. Корнями уравнения служат абсциссы точек A и B, значит, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

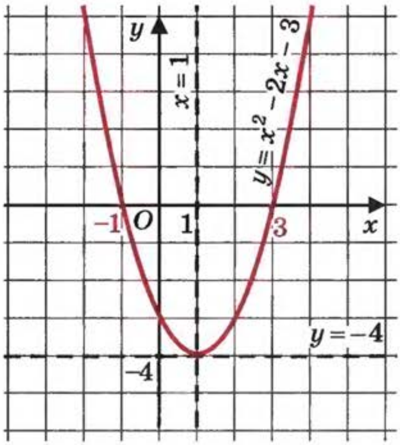


Рис. 96

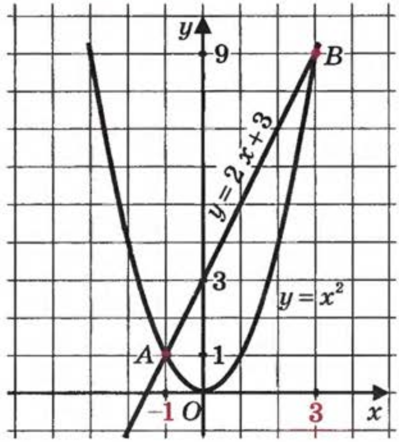


Рис. 97

III способ. Преобразуем уравнение к виду $x^2 - 3 = 2x$. Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2 - 3$ и $y = 2x$ (рис. 98). Они пересекаются в двух точках $A(-1; -2)$ и $B(3; 6)$. Корнями уравнения являются абсциссы точек A и B, поэтому $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

IV способ. Преобразуем уравнение к виду

$$x^2 - 2x + 1 - 4 = 0$$

и далее

$$x^2 - 2x + 1 = 4, \text{ т. е. } (x - 1)^2 = 4.$$

Построим в одной системе координат параболу $y = (x - 1)^2$ и прямую $y = 4$ (рис. 99). Они пересекаются в двух точках $A(-1; 4)$ и $B(3; 4)$. Корнями уравнения служат абсциссы точек A и B, поэтому $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

V способ. Разделив почленно обе части уравнения на x, получим:

$$x - 2 - \frac{3}{x} = 0;$$

$$x - 2 = \frac{3}{x}.$$

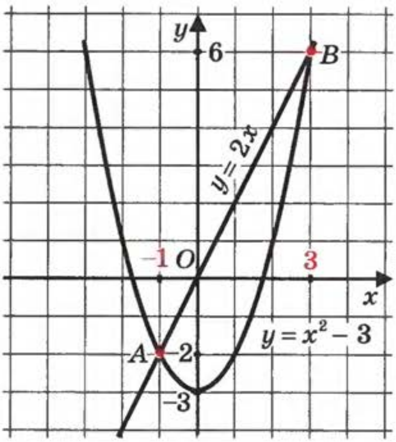


Рис. 98

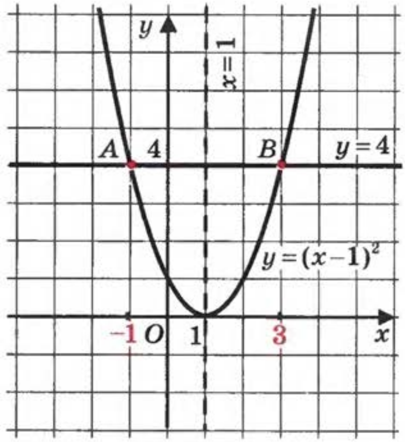


Рис. 99

Построим в одной системе координат гиперболу $y = \frac{3}{x}$ и прямую $y = x - 2$ (рис. 100). Они пересекаются в двух точках $A(-1; -3)$ и $B(3; 1)$. Корнями уравнения являются абсциссы точек A и B, следовательно, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. ◼

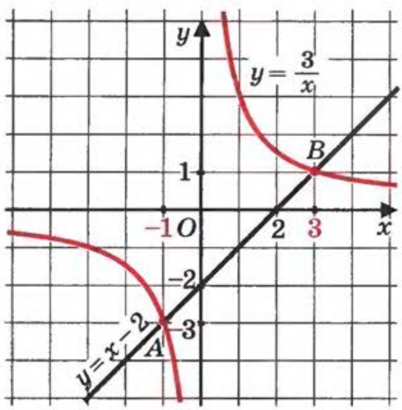


Рис. 100

Итак, квадратное уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$ мы решили графически пятью способами. Давайте проанализируем, в чем суть этих способов.

I способ. Строят график функции $y = ax^2 + bx + c$ и находят точки его пересечения с осью x.

II способ. Преобразуют уравнение к виду $ax^2 = -bx - c$, строят параболу $y = ax^2$ и прямую $y = -bx - c$, находят точки их пересечения (корнями уравнения служат абсциссы точек пересечения, если, разумеется, таковые имеются).

III способ. Преобразуют уравнение к виду $ax^2 + c = -bx$, строят параболу $y = ax^2 + c$ и прямую $y = -bx$ (она проходит через начало координат); находят точки их пересечения.

IV способ. Применяя метод выделения полного квадрата, преобразуют уравнение к виду

$$a(x + l)^2 + m = 0$$

и далее

$$a(x + l)^2 = -m.$$

Строят параболу $y = a(x + l)^2$ и прямую $y = -m$, параллельную оси x; находят точки пересечения параболы и прямой.

V способ. Преобразуют уравнение к виду

$$\frac{ax^2}{x} + \frac{bx}{x} + \frac{c}{x} = \frac{0}{x},$$

т. е.

$$ax + b + \frac{c}{x} = 0$$

и далее

$$\frac{c}{x} = -ax - b.$$

Строят гиперболу $y = \frac{c}{x}$ (это гипербола при условии, что $c \neq 0$) и прямую $y = -ax - b$; находят точки их пересечения.

Заметим, что первые четыре способа применимы к любым уравнениям вида $ax^2 + bx + c = 0$, а пятый — только к тем, у которых $c \neq 0$. На практике можно выбирать тот способ, который вам кажется наиболее приспособленным к данному уравнению или который вам больше нравится (или более понятен).

Замечание. Несмотря на обилие способов графического решения квадратных уравнений, уверенности в том, что любое квадратное уравнение мы сможем решить графически, нет. Пусть, например, нужно решить уравнение $x^2 - x - 3 = 0$ (специально возьмем уравнение, похожее на то, что было в рассмотренном примере). Попробуем его решить, например, вторым способом: преобразуем уравнение к виду $x^2 = x + 3$, построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = x + 3$, они пересекаются в точках A и B (рис. 101), значит, уравнение имеет два корня. Но чему равны эти корни, мы с

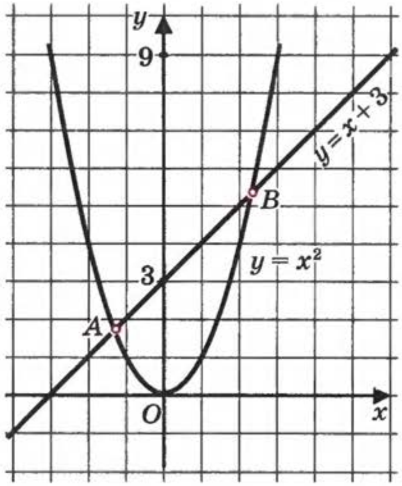


Рис. 101

помощью чертежа сказать не можем — точки A и B имеют не такие «хорошие» координаты, как в приведенном выше примере. А теперь рассмотрим уравнение $x^2 - 16x - 95 = 0$. Попробуем его решить, скажем, третьим способом. Преобразуем уравнение к виду $x^2 - 95 = 16x$. Здесь надо построить параболу $y = x^2 - 95$ и прямую $y = 16x$. Но ограниченные размеры листа тетради не позволяют этого сделать, ведь параболу $y = x^2$ надо опустить на 95 клеток вниз.

Итак, графические способы решения квадратного уравнения красивы и приятны, но не дают стопроцентной гарантии решения любого квадратного уравнения. Стопроцентную гарантию дает алгоритм решения квадратных уравнений, выработанный математиками, о котором мы поговорим в следующей главе.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этой главе мы существенно пополнили запас функций, графики которых умеем строить. Теперь мы знаем, как обстоит дело с функциями $y = kx^2$, $y = \frac{k}{x}$ для любого коэффициента $k \neq 0$:

графиком функции $y = kx^2$ является парабола (с ветвями, направленными вверх при $k > 0$ или вниз при $k < 0$, и с вершиной в начале координат);

графиком функции $y = \frac{k}{x}$ является гипербола: при $k > 0$ — с ветвями в первом и третьем координатных углах координатной плоскости; при $k < 0$ — с ветвями во втором и четвертом координатных углах координатной плоскости.

Мы научились строить параболу $y = ax^2 + bx + c$ для любых a, b, c (где $a \neq 0$), знаем уравнение ее оси симметрии: $x = -\frac{b}{2a}$.

Мы научились, зная график функции $y = f(x)$, строить графики следующих функций:

$y = f(x + l)$, $y = f(x) + m$, $y = f(x + l) + m$.

Мы пополнили список свойств функции, которые обычно включают в процедуру чтения графика, двумя новыми свойствами:
ограниченность функции снизу;
ограниченность функции сверху.

ГЛАВА 4

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 24. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

С квадратными уравнениями мы встречались не раз, теперь настало время изучить их более детально, что мы и сделаем в этой главе.

Рабочий словарь

квадратное уравнение

приведенное квадратное уравнение

неприведенное квадратное уравнение

квадратный трехчлен

Определение 1. **Квадратным уравнением** называют уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где коэффициенты a, b, c — любые действительные числа, причем $a \neq 0$. Многочлен $ax^2 + bx + c$ называют **квадратным трехчленом.**

Коэффициенты a, b, c различают по названиям: a — *первый*, или *старший, коэффициент*; b — *второй коэффициент*, или *коэффициент* при x; c — *свободный член.*

Определение 2. Квадратное уравнение называют **приведенным**, если его старший коэффициент равен 1; квадратное уравнение называют **неприведенным**, если старший коэффициент отличен от 1.

Рабочий словарь

полное квадратное уравнение

неполное квадратное уравнение

корень квадратного уравнения

Так, уравнение

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

— неприведенное квадратное уравнение (старший коэффициент равен 2), а уравнение

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

— приведенное квадратное уравнение.

Кроме приведенных и неприведенных квадратных уравнений, различают также полные и неполные уравнения.

<u>*Определение 3*</u>. **Полное квадратное уравнение** — это квадратное уравнение, в котором присутствуют все три слагаемых; иными словами, это уравнение, у которого коэффициенты b и c отличны от нуля. **Неполное квадратное уравнение** — это уравнение, в котором присутствуют не все три слагаемых; иными словами, это уравнение, у которого хотя бы один из коэффициентов b, c равен нулю.

Обратите внимание: об ax^2 речи нет, этот член всегда присутствует в квадратном уравнении.

<u>*Определение 4*</u>. **Корнем квадратного уравнения** $ax^2 + bx + c = 0$ называют всякое значение переменной x, при котором квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ обращается в нуль; такое значение переменной x называют также **корнем квадратного трехчлена**.

Можно сказать и так: корень квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ — это такое значение x, подстановка которого в уравнение обращает уравнение в верное числовое равенство $0 = 0$.

Решить квадратное уравнение — значит найти все его корни или установить, что корней нет.

Сначала научимся решать неполные квадратные уравнения, поскольку для этого, как говорится, не придется ничего изобретать. Рассмотрим несколько таких уравнений.

Пример 1. Решить неполное квадратное уравнение:

а) $2x^2 - 7x = 0$; в) $x^2 - 16 = 0$; д) $3x^2 + 10 = 0$;
б) $-x^2 + 5x = 0$; г) $-2x^2 + 7 = 0$; е) $5x^2 = 0$.

Решение. а) Имеем:

$$2x^2 - 7x = 0; \quad x(2x - 7) = 0.$$

Поэтому либо $x = 0$, либо $2x - 7 = 0$, откуда находим: $x = 3{,}5$. Итак, уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 3{,}5$.

б) Имеем:

$$-x^2 + 5x = 0; \quad -x(x - 5) = 0.$$

Уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$.

в) Имеем:

$$x^2 - 16 = 0; \quad x^2 = 16.$$

Ранее, в § 10, мы уже говорили о том, что уравнение вида $x^2 = a$, где $a > 0$, имеет два корня: $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$. Значит, для уравнения $x^2 = 16$ получаем: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$ (мы учли, что $\sqrt{16} = 4$).

Допускается более экономная запись: $x_{1,2} = \pm 4$.

г) $-2x^2 + 7 = 0$; $2x^2 = 7$; $x^2 = 3{,}5$.

Уравнение имеет два корня: $x_1 = \sqrt{3{,}5}$, $x_2 = -\sqrt{3{,}5}$. И в этом случае можно записать короче: $x_{1,2} = \pm\sqrt{3{,}5}$.

д) $3x^2 + 10 = 0$; $3x^2 = -10$.

Так как выражение $3x^2$ неотрицательно при любых значениях x, то уравнение $3x^2 = -10$ не имеет корней. Иными словами, нет ни одного числа, подстановка которого вместо переменной x обратила бы это уравнение в верное числовое равенство.

Иногда в таких случаях уточняют: нет *действительных* корней. Дело в том, что в математике, кроме действительных чисел, рассматриваются так называемые *мнимые числа*; мнимые корни у этого уравнения есть.

е) Если $5x^2 = 0$, то $x^2 = 0$, откуда находим: $x = 0$ — единственный корень уравнения.

Этот пример показывает, как решаются неполные квадратные уравнения:

1. Если уравнение имеет вид $ax^2 = 0$, то оно имеет один корень: $x = 0$.

2. Если уравнение имеет вид $ax^2 + bx = 0$, то используется метод разложения на множители: $x(ax + b) = 0$; значит, либо $x = 0$, либо $ax + b = 0$. В итоге получаем два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

3. Если уравнение имеет вид $ax^2 + c = 0$, то его преобразуют к виду $ax^2 = -c$ и далее $x^2 = -\frac{c}{a}$. В случае, когда $-\frac{c}{a}$ — отрицательное число, уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$ не имеет корней (значит, не имеет корней и исходное уравнение $ax^2 + c = 0$). В случае, когда $-\frac{c}{a}$ — положительное число, т. е. $-\frac{c}{a} = m$, где $m > 0$, уравнение $x^2 = m$ имеет два корня: $x_1 = \sqrt{m}$, $x_2 = -\sqrt{m}$ (в этом случае, как мы условились выше, допускается более короткая запись: $x_{1,2} = \pm\sqrt{m}$).

Неполное квадратное уравнение, как мы только что видели, может иметь два корня, один корень, ни одного корня. То же можно сказать и о полном квадратном уравнении. Почему?

Мы с вами знаем, что графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. Корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ служат абсциссы точек пересечения параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью x. Парабола может пересекать ось x в двух точках, может касаться оси x, т. е. иметь с ней лишь одну общую точку, может вообще не пересекаться с осью x (рис. 102, а, б, в). Это значит, что ***квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ может иметь либо два корня, либо один корень, либо вообще не иметь корней.***

В следующем параграфе мы приведем доказательство этого утверждения, не опирающееся на геометрическую иллюстрацию.

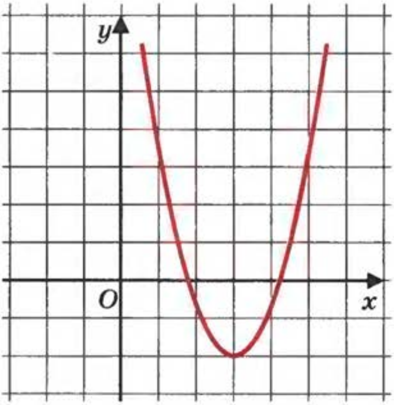


Рис. 102, а

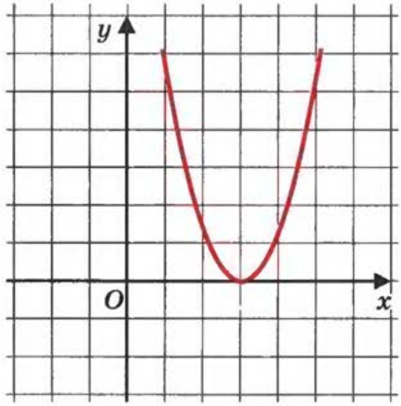


Рис. 102, б

Конечно, неплохо знать, сколько корней имеет квадратное уравнение, но еще лучше уметь находить эти корни. Если уравнение неполное, то, как мы видели выше, особых проблем не возникает. А если мы имеем полное квадратное уравнение? Ниже на примере одного такого уравнения напомним, какими способами мы пользовались до сих пор, когда приходилось встречаться с квадратным уравнением.

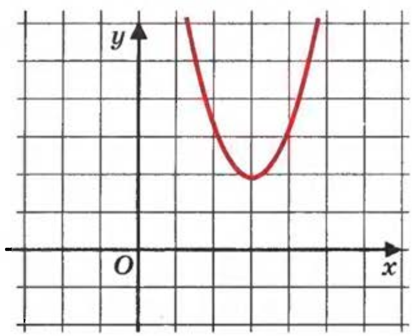


Рис. 102, в

Пример 2. Решить уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Решение. В предыдущем параграфе мы решили это уравнение графически пятью способами. Приведем еще два способа решения этого уравнения — с помощью разложения на множители.

VI способ. Разложим квадратный трехчлен $x^2 - 2x - 3$ на множители способом группировки: $x^2 - 2x - 3 = x^2 + x - 3x - 3 = x(x + 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(x - 3)$. Теперь заданное уравнение можно переписать в виде $(x + 1)(x - 3) = 0$, откуда без труда находятся два корня уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

VII способ. Разложим квадратный трехчлен $x^2 - 2x - 3$ на множители методом выделения полного квадрата:

$$x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4 = (x - 1)^2 - 4 =$$
$$= (x - 1 + 2)(x - 1 - 2) = (x + 1)(x - 3).$$

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде $(x + 1)(x - 3) = 0$, откуда находим: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Итак, мы решили уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$ семью способами. Тем не менее знание этих способов не есть, как говорится, панацея от всех бед. Ведь наши успехи в решении квадратных уравнений зависели до сих пор от наличия одного из двух благоприятных обстоятельств: 1) квадратный трехчлен удалось разложить на множители; 2) графики, которые мы использовали для графического решения уравнения, пересекались в «хороших» точках.

Надеяться на такие подарки судьбы математики, естественно, не могли. Они искали универсальный способ, пригодный для решения любых квадратных уравнений, и нашли его; о нем и пойдет речь в следующем параграфе (заметим, что этот способ мы уже упоминали в конце § 10).

§ 25. ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Применим к квадратному трехчлену $ax^2 + bx + c$ те же преобразования, которые мы выполняли в § 22, когда доказывали теорему о том, что графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола.

Имеем:

$$ax^2+bx+c=(ax^2+bx)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=$$

$$=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

дискриминант

Обычно выражение b^2-4ac обозначают буквой D и называют **дискриминантом квадратного уравнения** $ax^2+bx+c=0$ **(или дискриминантом квадратного трехчлена** ax^2+bx+c**).**

Таким образом,

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}.$$

Значит, квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ можно переписать в виде

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a}$$

и далее

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}. \tag{1}$$

Любое квадратное уравнение можно преобразовать к виду (1), удобному, как мы сейчас убедимся, для того, чтобы определять число корней квадратного уравнения и находить эти корни.

Теорема 1

Если $D<0$, то квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней.

Доказательство. Если $D<0$, то правая часть уравнения (1) — отрицательное число; в то же время левая часть уравнения (1) при любых значениях x принимает неотрицательные значения. Значит, нет ни одного значения x, которое удовлетворяло бы уравнению (1), а потому уравнение (1) не имеет корней.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2 + 4x + 7 = 0$.

Решение. Здесь $a = 2$, $b = 4$, $c = 7$,

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 16 - 56 = -40.$$

Так как $D < 0$, то по теореме 1 данное квадратное уравнение не имеет корней.

Теорема 2 *Если $D = 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень, который находится по формуле $x = -\frac{b}{2a}$.*

Доказательство. Если $D = 0$, то уравнение (1) принимает вид $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Значит, $x + \frac{b}{2a} = 0$, т. е. $x = -\frac{b}{2a}$ — единственный корень уравнения.

Замечание 1. Помните ли вы, что $x = -\frac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы, которая служит графиком функции $y = ax^2 + bx + c$? Почему именно это значение оказалось единственным корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$? Ларчик открывается просто: если $D = 0$, то, как мы установили ранее,

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Графиком же функции $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ является парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}; 0\right)$ (см., например, рис. 103). Значит, абсцисса вершины параболы и единственный корень квадратного уравнения при $D = 0$ — одно и то же число.

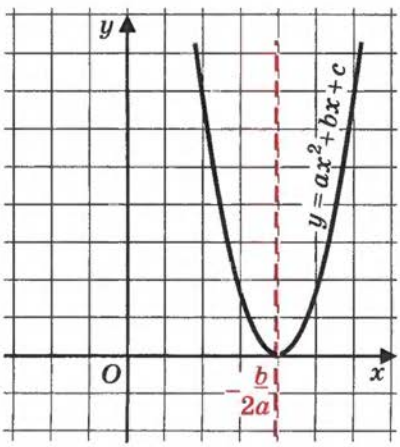


Рис. 103

Пример 2. Решить уравнение $4x^2 - 20x + 25 = 0$.

Решение. Здесь $a = 4$, $b = -20$, $c = 25$, $D = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 400 - 400 = 0$.

Так как $D = 0$, то по теореме 2 данное квадратное уравнение имеет один корень. Этот корень находится по формуле $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Значит, $x = \dfrac{20}{2 \cdot 4} = 2{,}5$.

Ответ: 2,5.

Замечание 2. Обратите внимание: $4x^2 - 20x + 25$ — полный квадрат: $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$. Если бы мы это заметили сразу, то решили бы уравнение так: $(2x - 5)^2 = 0$, значит, $2x - 5 = 0$, откуда получаем: $x = 2{,}5$. Вообще, если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ — это мы отметили ранее в замечании 1.

Теорема 3

Если $D > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, которые находятся по формулам:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Доказательство. Перепишем квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ в виде (1)

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

Положим $x + \dfrac{b}{2a} = t$, тогда уравнение (1) примет вид

$$t^2 = \frac{D}{4a^2}. \qquad (2)$$

По условию $D > 0$, значит, правая часть уравнения — положительное число. Тогда из уравнения (2) получаем, что

$$t = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}.$$

Но $t = x + \frac{b}{2a}$, таким образом, задача свелась к решению двух уравнений:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}; \qquad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a}.$$

Из первого уравнения находим:

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Из второго уравнения находим:

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Итак, заданное квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \tag{3}$$

Замечание 3. **В математике довольно редко бывает так, чтобы введенный термин не имел, образно выражаясь, житейской подоплеки. Возьмем новое понятие — дискриминант. Вспомните слово «дискриминация». Что оно означает? Оно означает унижение одних и возвышение других, т. е. различное отношение к различным людям. Оба слова (и дискриминант, и дискриминация) происходят от латинского *discriminans* — различающий. Дискриминант *различает* квадратные уравнения по числу корней.**

Пример 3. Решить уравнение $3x^2 + 8x - 11 = 0$.

Решение. Здесь $a = 3$, $b = 8$, $c = -11$,

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-11) = 64 + 132 = 196.$$

Так как $D > 0$, то по теореме 3 данное квадратное уравнение имеет два корня. Эти корни находят по формулам (3):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 + 14}{6} = 1;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 - 14}{6} = -\frac{11}{3} = -3\frac{2}{3}.$$

Ответ: $1; -3\frac{2}{3}$.

Фактически мы выработали следующий алгоритм:

Алгоритм решения уравнения
$$ax^2 + bx + c = 0$$

1. Вычислить дискриминант D по формуле $D = b^2 - 4ac$.
2. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет корней.
3. Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень:
$$x = -\frac{b}{2a}.$$
4. Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня:
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Этот алгоритм универсален, он применим как к полным, так и к неполным квадратным уравнениям. Однако неполные квадратные уравнения удобнее решать так, как мы это делали в предыдущем параграфе.

П р и м е р 4. Решить уравнение:

а) $x^2 + 3x - 5 = 0$; б) $-9x^2 + 6x - 1 = 0$; в) $2x^2 - x + 3{,}5 = 0$.

Р е ш е н и е. а) Здесь $a = 1$, $b = 3$, $c = -5$,
$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 9 + 20 = 29.$$

Так как $D > 0$, то данное квадратное уравнение имеет два корня. Эти корни находим по формулам (3):
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}.$$

б) Как показывает опыт, удобнее иметь дело с квадратными уравнениями, у которых старший коэффициент положителен. Поэтому сначала умножим обе части уравнения на -1, получим: $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Здесь $a = 9$, $b = -6$, $c = 1$, $D = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$. Так как $D = 0$, то данное квадратное уравнение имеет один корень. Этот корень находится по формуле $x = -\frac{b}{2a}$. Значит, $x = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}$.

Это уравнение можно было решить по-другому: так как $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$, то получаем уравнение $(3x - 1)^2 = 0$, откуда находим: $3x - 1 = 0$; $x = \frac{1}{3}$.

в) Здесь $a = 2$, $b = -1$, $c = 3{,}5$, $D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 3{,}5 = 1 - 28 = -27$. Так как $D < 0$, то данное квадратное уравнение не имеет корней.

Математики — люди практичные, экономные. Зачем, говорят они, пользоваться таким длинным правилом решения квадратного уравнения, лучше сразу написать общую формулу:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.} \qquad (4)$$

Если окажется, что дискриминант $D = b^2 - 4ac$ — отрицательное число, то записанная формула не имеет смысла (под знаком квадратного корня находится отрицательное число), значит, корней нет. Если же окажется, что дискриминант равен нулю, то получаем: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$, т. е. один корень (говорят также, что квадратное уравнение в этом случае имеет *два одинаковых корня*: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$). Наконец, если окажется, что $b^2 - 4ac > 0$, то получаются два корня x_1 и x_2, которые вычисляются по тем же формулам (3), что указаны выше.

Само число $\sqrt{b^2 - 4ac}$ в этом случае положительно (как всякий квадратный корень из положительного числа), а двойной знак перед ним означает, что в одном случае (при отыскании x_1) это положительное число прибавляется к числу $-b$, а в другом случае (при отыскании x_2) это положительное число вычитается из числа $-b$.

У вас есть свобода выбора. Хотите — решайте квадратное уравнение подробно, используя сформулированный выше алгоритм; хотите — запишите сразу формулу (4) и с ее помощью делайте необходимые выводы.

Пример 5. Решить уравнение:

а) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{7}{12} = 0$; б) $3x^2 - 0{,}2x + 2{,}77 = 0$.

Решение. а) Конечно, можно использовать формулы (4) или (3), учитывая, что в данном случае $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{5}{6}$, $c = -\frac{7}{12}$. Но зачем выполнять действия с дробями, когда проще и, главное, приятнее иметь дело с целыми числами? Давайте освободимся от знаменателей. Для этого нужно умножить обе части уравнения на 12, т. е. на наименьший общий знаменатель дробей, служащих коэффициентами уравнения. Получим:

$$12\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{7}{12}\right) = 12 \cdot 0;$$

$$8x^2 + 10x - 7 = 0.$$

А теперь воспользуемся формулой (4):

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-7)}}{2 \cdot 8};$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 224}}{16} = \frac{-10 \pm \sqrt{324}}{16} = \frac{-10 \pm 18}{16}.$$

Значит, $x_1 = \frac{-10 + 18}{16} = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{-10 - 18}{16} = -\frac{7}{4}$.

б) Мы снова имеем уравнение с дробными коэффициентами: $a = 3$, $b = -0{,}2$, $c = 2{,}77$. Умножим обе части уравнения на 100, тогда получим уравнение с целыми коэффициентами:

$$300x^2 - 20x + 277 = 0.$$

Далее воспользуемся формулой (4):

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 300 \cdot 277}}{2 \cdot 300}.$$

Простая прикидка показывает, что дискриминант (подкоренное выражение) — отрицательное число. Значит, уравнение не имеет корней.

Пример 6. Решить уравнение $5x^2 - 2\sqrt{15}\,x + 1 = 0$.

Решение. Здесь, в отличие от предыдущего примера, предпочтительнее действовать по алгоритму, а не по сокращенной формуле (4). Имеем: $a = 5$, $b = -2\sqrt{15}$, $c = 1$, $D = b^2 - 4ac = \left(-2\sqrt{15}\right)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 60 - 20 = 40$. Так как $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня, которые будем искать по формулам (3):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2\sqrt{15} + \sqrt{40}}{2 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{15} + 2\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{5}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{10} = \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{5};$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2\sqrt{15} - \sqrt{40}}{10} = \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{5}.$$

Пример 7. Решить уравнение

$$x^2 - (2p + 1)x + (p^2 + p - 2) = 0.$$

параметр

уравнение с параметром

Решение. Это квадратное уравнение отличается от всех рассмотренных до сих пор квадратных уравнений тем, что в роли коэффициентов выступают не конкретные числа, а буквенные выражения. Такие уравнения называют уравнениями с буквенными коэффициентами или *уравнениями с параметрами*. В данном случае параметр (буква) p входит в состав второго коэффициента и свободного члена уравнения.

Найдем дискриминант:

$$D = (2p + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p^2 + p - 2) = (4p^2 + 4p + 1) - (4p^2 + 4p - 8) = 9.$$

Далее,

$$x_1 = \frac{(2p + 1) + \sqrt{9}}{2} = \frac{2p + 1 + 3}{2} = \frac{2(p + 2)}{2} = p + 2;$$

$$x_2 = \frac{(2p + 1) - \sqrt{9}}{2} = \frac{2p + 1 - 3}{2} = \frac{2(p - 1)}{2} = p - 1.$$

Пример 8. Решить уравнение

$$px^2 + (1 - p)x - 1 = 0.$$

Решение. Это также уравнение с параметром p, но, в отличие от предыдущего примера, его нельзя сразу решать по формулам (4) или (3). Дело в том, что указанные формулы применимы к *квадратным уравнениям*, а про заданное уравнение мы этого пока сказать не можем. В самом деле, а вдруг $p = 0$? Тогда уравнение примет вид

$$0 \cdot x^2 + (1 - 0)x - 1 = 0,$$

т. е. $x - 1 = 0$, откуда получаем: $x = 1$. Вот если точно известно, что $p \neq 0$, то можно применять формулы корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-(1-p) \pm \sqrt{(1-p)^2 - 4 \cdot p \cdot (-1)}}{2p} = \frac{p - 1 \pm \sqrt{1 - 2p + p^2 + 4p}}{2p} =$$

$$= \frac{p - 1 \pm \sqrt{(p+1)^2}}{2p} = \frac{p - 1 \pm (p+1)}{2p};$$

Заметим, что, если $p = -1$, дискриминант равен нулю и $x_1 = x_2 = 1$. Если $p \neq -1$, то

$$x_1 = \frac{p - 1 + (p+1)}{2p} = \frac{2p}{2p} = 1, \quad x_2 = \frac{p - 1 - (p+1)}{2p} = \frac{-2}{2p} = -\frac{1}{p}.$$

Ответ: если $p = 0$ или $p = -1$, то $x = 1$; если $p \neq 0$ и $p \neq -1$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{p}$.

§ 26. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Алгоритм решения рационального уравнения

рациональное выражение

рациональное уравнение

Термин «рациональное уравнение» мы ввели выше, в § 7. Сначала напомним, что такое *рациональное выражение с одной переменной*. Это — алгебраическое выражение, составленное из чисел и переменной x с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень. Если $r(x)$ — рациональное выражение, то уравнение $r(x) = 0$ называют **рациональным уравнением**.

Впрочем, на практике удобнее пользоваться несколько более широким толкованием термина «рациональное уравнение»: это уравнение вида $h(x) = q(x)$, где $h(x)$ и $q(x)$ — рациональные выражения.

До сих пор мы могли решить не любое рациональное уравнение, а только такое, которое в результате различных преобразований и рассуждений сводилось к линейному уравнению. Теперь наши возможности значительно шире: мы сумеем решить рациональное уравнение, которое сводится не только к линейному, но и к квадратному уравнению.

Напомним, как мы решали рациональные уравнения раньше, и попробуем сформулировать алгоритм решения.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{11}{2} = \frac{3}{x}.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{11}{2} - \frac{3}{x} = 0.$$

При этом, как обычно, мы пользуемся тем, что равенства $A = B$ и $A - B = 0$ выражают одну и ту же зависимость между A и B. Это и позволило нам перенести член $\frac{3}{x}$ в левую часть уравнения с противоположным знаком.

Выполним преобразования левой части уравнения:

$$\frac{2x^{\lfloor 2x}}{x-3} + \frac{11^{\lfloor x(x-3)}}{2} - \frac{3^{\lfloor 2(x-3)}}{x} = \frac{2x \cdot 2x + 11x(x-3) - 3 \cdot 2 \cdot (x-3)}{2x(x-3)} =$$

$$= \frac{4x^2 + 11x^2 - 33x - 6x + 18}{2x(x-3)} = \frac{15x^2 - 39x + 18}{2x(x-3)} = \frac{3(5x^2 - 13x + 6)}{2x(x-3)}.$$

Таким образом, мы преобразовали заданное уравнение к виду

$$\frac{3(5x^2 - 13x + 6)}{2x(x-3)} = 0. \qquad (1)$$

Вспомним условия равенства дроби нулю: $\frac{a}{b} = 0$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два соотношения: 1) числитель дроби равен нулю ($a = 0$); 2) знаменатель дроби отличен от нуля ($b \neq 0$).

Приравняв нулю числитель дроби в левой части уравнения (1), получим:

$$3(5x^2-13x+6)=0;$$

$$5x^2-13x+6=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4\cdot5\cdot6}}{2\cdot5}=\frac{13\pm\sqrt{169-120}}{10}=\frac{13\pm7}{10};$$

$$x_1=\frac{13+7}{10}=2,\qquad x_2=\frac{13-7}{10}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

Осталось проверить выполнение второго указанного выше условия. Соотношение $b \neq 0$ означает для уравнения (1), что $2x(x-3)\neq 0$, т. е. $x\neq 0$, $x\neq 3$. Значения $x_1=2$ и $x_2=0{,}6$ указанным соотношениям удовлетворяют и потому служат корнями уравнения (1), а вместе с тем и корнями заданного уравнения.

О т в е т: 2; 0,6.

Рабочий словарь

посторонний корень

Если среди корней числителя окажется такое число, при котором знаменатель дроби обращается в нуль, то такое число корнем уравнения быть не может, его называют *посторонним корнем* и в ответ не включают.

Опираясь на решенный пример, сформулируем следующий алгоритм.

Алгоритм решения рационального уравнения

1. Перенести все члены уравнения в одну часть.
2. Преобразовать эту часть уравнения к виду алгебраической дроби $\frac{p(x)}{q(x)}$.
3. Решить уравнение $p(x)=0$.
4. Для каждого корня уравнения $p(x)=0$ сделать проверку: удовлетворяет ли он условию $q(x)\neq 0$ или нет. Если да, то это корень заданного уравнения; если нет, то это посторонний корень и в ответ его включать не следует.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2x-x^2}.$$

Решение. Будем действовать в соответствии с алгоритмом.

1) Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}-\frac{4}{x(2-x)}=0.$$

2) Выполним преобразования левой части этого уравнения:

$$\frac{2^{|2x}}{2-x}+\frac{1^{|x(2-x)}}{2}-\frac{4^{|2}}{x(2-x)}=\frac{4x+x(2-x)-8}{2x(2-x)}=\frac{-x^2+6x-8}{2x(2-x)}=\frac{x^2-6x+8}{2x(x-2)}$$

(одновременно изменили знаки в числителе и знаменателе дроби).

Таким образом, заданное уравнение принимает вид

$$\frac{x^2-6x+8}{2x(x-2)}=0.$$

3) Решим уравнение $x^2-6x+8=0$:

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm2}{2};$$

$$x_1=\frac{6+2}{2}=4,\qquad x_2=\frac{6-2}{2}=2.$$

4) Для найденных значений проверим выполнение условия $2x(x-2)\neq0$. Число 4 этому условию удовлетворяет, а число 2 — нет. Значит, 4 — корень заданного уравнения, а 2 — посторонний корень.

Ответ: 4.

2. Решение рациональных уравнений методом введения новой переменной

Метод введения новой переменной вам знаком, мы не раз им пользовались. Покажем на примерах, как он применяется при решении рациональных уравнений.

Пример 3. Решить уравнение $x^4 + x^2 - 20 = 0$.

Решение. Введем новую переменную $y = x^2$. Так как $x^4 = (x^2)^2 = y^2$, то заданное уравнение можно переписать в виде

$$y^2 + y - 20 = 0.$$

Это — квадратное уравнение, корни которого найдем, используя известные формулы: $y_1 = 4$, $y_2 = -5$.

Но $y = x^2$, значит, задача свелась к решению двух уравнений:

$$x^2 = 4; \qquad x^2 = -5.$$

Из первого уравнения находим: $x_{1,2} = \pm 2$; второе уравнение не имеет корней.

Ответ: ± 2.

биквадратное уравнение

Уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

называют **биквадратным уравнением** («би» — два, т. е. как бы дважды квадратное уравнение). Только что решенное уравнение было именно биквадратным. Любое биквадратное уравнение решается так же, как уравнение из примера 3: вводят новую переменную $y = x^2$, решают полученное квадратное уравнение относительно переменной y, а затем возвращаются к переменной x.

Пример 4. Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2 + 3x - 3} + \frac{2}{x^2 + 3x + 1} = \frac{7}{5}.$$

Решение. Заметим, что здесь дважды встречается одно и то же выражение $x^2 + 3x$. Значит, имеет смысл ввести новую переменную $y = x^2 + 3x$. Это позволит переписать уравнение в более простом и приятном виде (что, собственно говоря, и составляет цель введения новой переменной — и запись упрощается, и структура уравнения становится более ясной):

$$\frac{1}{y - 3} + \frac{2}{y + 1} = \frac{7}{5}.$$

А теперь воспользуемся алгоритмом решения рационального уравнения.

1) Перенесем все члены уравнения в одну часть:

$$\frac{1}{y-3} + \frac{2}{y+1} - \frac{7}{5} = 0.$$

2) Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{1^{\backslash 5(y+1)}}{y-3} + \frac{2^{\backslash 5(y-3)}}{y+1} - \frac{7^{\backslash (y-3)(y+1)}}{5} =$$

$$= \frac{5(y+1) + 10(y-3) - 7(y-3)(y+1)}{5(y-3)(y+1)} = \frac{-7y^2 + 29y - 4}{5(y-3)(y+1)}.$$

Итак, мы преобразовали заданное уравнение к виду

$$\frac{-7y^2 + 29y - 4}{5(y-3)(y+1)} = 0.$$

3) Из уравнения $-7y^2 + 29y - 4 = 0$ находим: $y_1 = 4$, $y_2 = \frac{1}{7}$ (мы с вами уже решили довольно много квадратных уравнений, так что всегда приводить в учебнике подробные выкладки, наверное, не стоит).

4) Выполним проверку найденных корней с помощью условия $5(y-3)(y+1) \neq 0$. Оба корня этому условию удовлетворяют.

Итак, квадратное уравнение относительно новой переменной y решено: $y_1 = 4$, $y_2 = \frac{1}{7}$.

Поскольку $y = x^2 + 3x$, а y, как мы установили, принимает два значения: 4 и $\frac{1}{7}$, — нам еще предстоит решить два уравнения: $x^2 + 3x = 4$; $x^2 + 3x = \frac{1}{7}$. Корнями первого уравнения являются числа 1 и -4, корнями второго уравнения — числа $\frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}$.

О т в е т: 1, -4, $\frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}$.

В рассмотренных примерах метод введения новой переменной был, если можно так сказать, адекватен ситуации, т. е. хорошо ей соответствовал. Почему? Да потому, что одно и то же выражение явно встречалось в записи уравнения несколько раз и был резон обозначить это выражение новой буквой. Но так бывает не всегда, иногда новая переменная «проявляется» только в процессе преобразований. Именно так будет обстоять дело в следующем примере.

Пример 5. Решить уравнение

$$x(x-1)(x-2)(x-3)=24.$$

Решение. Имеем:

$$x(x-3)=x^2-3x;$$
$$(x-1)(x-2)=x^2-3x+2.$$

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде

$$(x^2-3x)(x^2-3x+2)=24.$$

Вот теперь новая переменная «проявилась»: $y = x^2 - 3x$. С ее помощью уравнение можно переписать в виде $y(y + 2) = 24$ и далее $y^2 + 2y - 24 = 0$. Корнями этого уравнения служат числа 4 и -6.

Возвращаясь к исходной переменной x, получаем два квадратных уравнения: $x^2 - 3x = 4$ и $x^2 - 3x = -6$. Из первого уравнения находим: $x_1 = 4$, $x_2 = -1$; второе уравнение не имеет корней.

Ответ: 4; -1.

§ 27. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ СИТУАЦИЙ

То, что рациональные уравнения могут служить математическими моделями реальных ситуаций, вам известно, целый ряд соответствующих примеров мы рассмотрели выше, в § 7, и ранее, в учебнике «Алгебра–7». Сейчас поговорим об этом более подробно.

Пример 1. Перегон в 60 км поезд должен был проехать с постоянной скоростью за определенное расписанием время. Простояв у семафора перед перегоном 5 мин, машинист вынужден был увеличить скорость прохождения перегона на 10 км/ч, чтобы наверстать к окончанию прохождения перегона потерянные 5 мин. С какой скоростью поезд должен был пройти перегон по расписанию?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — скорость поезда по расписанию. Так как протяженность перегона равна 60 км, то время, отведенное расписанием на прохождение перегона, составляет $\frac{60}{x}$ ч.

Фактически поезд прошел перегон в 60 км со скоростью $(x + 10)$ км/ч, значит, время, затраченное на прохождение перегона, равно $\frac{60}{x+10}$ ч.

Из двух величин $\frac{60}{x}$ ч и $\frac{60}{x+10}$ ч первая больше второй на 5 мин, т. е. на $\frac{1}{12}$ ч. Значит, мы приходим к уравнению

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = \frac{1}{12}.$$

Математическая модель задачи составлена. Это рациональное уравнение.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Имеем:

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} - \frac{1}{12} = 0.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{60^{\underline{|12(x+10)}}}{x} - \frac{60^{\underline{|12x}}}{x+10} - \frac{1^{\underline{|x(x+10)}}}{12} =$$

$$= \frac{720(x+10) - 720x - x(x+10)}{12x(x+10)} = \frac{-x^2 - 10x + 7200}{12x(x+10)}.$$

Приравняв числитель этой дроби нулю, получим квадратное уравнение $-x^2 - 10x + 7200 = 0$ или, переходя к более удобной записи, $x^2 + 10x - 7200 = 0$.

Применяя известную формулу, находим:

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7200)}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{28\,900}}{2} = \frac{-10 \pm 170}{2};$$

$$x_1 = \frac{-10 + 170}{2} = 80, \qquad x_2 = \frac{-10 - 170}{2} = -90.$$

Оба значения удовлетворяют условию $12x(x + 10) \neq 0$, следовательно, эти значения — корни составленного рационального уравнения.

<u>Третий этап.</u> *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивается, с какой скоростью поезд должен был пройти перегон по расписанию? Именно эту величину мы обозначили буквой x. Получилось, что либо $x = 80$, либо $x = -90$. Второе значение нас явно не устраивает, поскольку скорость движения поезда не может выражаться отрицательным числом. Значит, выбираем значение $x = 80$, это и есть ответ на вопрос задачи.

О т в е т: 80 км/ч.

Дадим некоторые комментарии к выполненному решению.

1. Конечно, рассмотренная ситуация несколько идеализирована: вряд ли в реальной жизни поезд пройдет весь перегон с постоянной скоростью, ведь всегда есть и ускорения, и замедления. Но на такую идеализацию математикам приходится идти сознательно.

2. В очередной раз обращаем ваше внимание на то, что мы воспользовались привычной схемой рассуждений: составление математической модели, работа с составленной моделью, ответ на вопрос задачи.

3. Подчеркнем, что первый этап, т. е. составление математической модели, — ключевой в решении задачи. На этом этапе осуществляется перевод условия задачи с обыденного языка на

математический язык, т. е. выполняется серьезная творческая работа. Серьезная работа проводится и на втором этапе, но эта работа скорее не творческая, а техническая, поскольку, действуя по алгоритму, особенно думать не приходится.

Вернемся к рассмотренной задаче и проанализируем, как осуществляется перевод с обыденного языка на математический.

Искомую величину мы обозначили буквой x. Это дало нам возможность оперировать с искомой скоростью, ведь с точки зрения алгебры не важно, имеем ли мы дело с числами или с буквами.

Зная путь (60 км) и скорость (x км/ч) и использовав физический закон равномерного движения $s = vt$ (s — путь, v — скорость, t — время), мы нашли время, предусмотренное расписанием, — оно выражается дробью $\frac{60}{x}$ ч.

По условию перегон был пройден со скоростью на 10 км/ч большей, чем предполагалось расписанием. Перевод этого условия на математический язык дал следующее: $(x + 10)$ км/ч — фактическая скорость прохождения перегона, а $\frac{60}{x+10}$ ч — фактическое время движения поезда по перегону в 60 км.

Далее согласно условию на рассматриваемом перегоне поезд выиграл по сравнению с расписанием 5 мин, т. е. $\frac{1}{12}$ ч. Иными словами, время, предусмотренное расписанием $\left(\frac{60}{x}\text{ ч}\right)$, больше фактического времени $\left(\frac{60}{x+10}\text{ ч}\right)$ на $\frac{1}{12}$ ч. На математическом языке это означает, что $\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = \frac{1}{12}$ (из большей величины вычли меньшую и получили указанную в условии разность).

Обратите внимание на то, что сравнивать надо величины *одного и того же наименования* (в данном уравнении это часы).

Пример 2. Пристани A и B расположены на реке, причем B — на 80 км ниже по течению, чем A. Катер прошел путь из A в B и обратно за 8 ч 20 мин. За какое время катер прошел расстояние от A до B и расстояние от B до A, если известно, что его собственная скорость (скорость в стоячей воде) равна 20 км/ч?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — скорость течения реки. Тогда:

$(20 + x)$ км/ч — скорость движения катера по течению;

$(20 - x)$ км/ч — скорость движения катера против течения;

$\frac{80}{20 + x}$ ч — время движения катера по течению;

$\frac{80}{20 - x}$ ч — время движения катера против течения.

По условию на путь туда и обратно катер затратил 8 ч 20 мин, т. е. $8\frac{1}{3}$ ч или $\frac{25}{3}$ ч. Но, с другой стороны, время (в часах), затраченное катером на путь из A в B и обратно, выражается суммой дробей $\frac{80}{20 + x}$ и $\frac{80}{20 - x}$. Значит, мы приходим к уравнению

$$\frac{80}{20 + x} + \frac{80}{20 - x} = \frac{25}{3}.$$

Перевод условий задачи с обыденного языка на математический состоялся, математическая модель составлена. Это — рациональное уравнение.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Имеем:

$$80 \cdot \left(\frac{1}{20 + x} + \frac{1}{20 - x} \right) = \frac{25}{3}.$$

Есть смысл разделить обе части уравнения на 5, хотя бы для того, чтобы облегчить последующие вычисления:

$$16 \cdot \left(\frac{1}{20 + x} + \frac{1}{20 - x} \right) = \frac{5}{3}.$$

Выполним дальнейшие преобразования:

$$16 \cdot \frac{(20 - x) + (20 + x)}{(20 + x)(20 - x)} = \frac{5}{3};$$

$$\frac{640}{(20 + x)(20 - x)} - \frac{5}{3} = 0;$$

$$\frac{640 \cdot 3 - 5(20 + x)(20 - x)}{3(20 + x)(20 - x)} = 0;$$

$$\frac{1920 - 5(400 - x^2)}{3(20 + x)(20 - x)} = 0;$$

$$\frac{5x^2 - 80}{3(20 + x)(20 - x)} = 0.$$

Из уравнения $5x^2 - 80 = 0$ находим: $x^2 = 16$; $x_{1,2} = \pm 4$.

Оба этих значения удовлетворяют условию $3(20 + x)(20 - x) \neq 0$, значит, являются корнями составленного рационального уравнения.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Во-первых, за x мы приняли скорость течения реки, а отрицательным числом скорость выражаться не может. Поэтому из двух значений 4 и -4 выбираем первое и отбрасываем второе.

Во-вторых, нас не спрашивают, чему равна скорость течения реки, а спрашивают, какое *время* затратил катер на путь от A до B и на путь от B до A. Время движения из A в B выражается дробью $\frac{80}{20 + x}$ ч. Подставив вместо x число 4, получим $\frac{80}{24}$, т. е. $\frac{10}{3}$ или $3\frac{1}{3}$. Учтем, что $3\frac{1}{3}$ ч = 3 ч 20 мин.

Время движения катера из B в A выражается дробью $\frac{80}{20 - x}$ ч. Подставив вместо x число 4, получим $\frac{80}{16}$, т. е. 5 ч.

О т в е т: 3 ч 20 мин; 5 ч.

Разумеется, не следует думать, что мы с вами можем решать задачи только на равномерное движение, как в примерах 1 и 2.

С помощью рациональных уравнений моделируются самые разные ситуации, и общая схема решения таких задач, по сути дела, одна и та же. В этом мы сейчас и убедимся.

Пример 3. Периметр прямоугольного треугольника равен 48 см, один его катет на 4 см больше другого. Чему равны стороны этого треугольника?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x см — меньший катет треугольника, тогда больший катет равен $(x + 4)$ см. Так как периметр треугольника равен 48 см, то гипотенуза равна $48 - x - (x + 4)$, т. е. $(44 - 2x)$ см.

На рис. 104 представлена геометрическая модель задачи: прямоугольный треугольник с обозначенными длинами сторон. Применив к этому треугольнику теорему Пифагора, получим:

$$x^2 + (x + 4)^2 = (44 - 2x)^2.$$

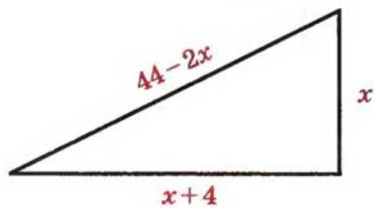


Рис. 104

Математическая модель задачи составлена.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Последовательно находим:

$$x^2 + (x^2 + 8x + 16) = 1936 - 176x + 4x^2;$$

$$2x^2 + 8x + 16 - 1936 + 176x - 4x^2 = 0;$$

$$-2x^2 + 184x - 1920 = 0;$$

$$x^2 - 92x + 960 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{92 \pm \sqrt{92^2 - 4 \cdot 1 \cdot 960}}{2} = \frac{92 \pm \sqrt{8464 - 3840}}{2} = \frac{92 \pm \sqrt{4624}}{2} = \frac{92 \pm 68}{2};$$

$$x_1 = \frac{92 + 68}{2} = 80, \quad x_2 = \frac{92 - 68}{2} = 12.$$

<u>Третий этап.</u> *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивается, чему равны стороны треугольника? Меньший катет мы обозначили буквой x. Для x существуют две возможности: либо $x = 80$ см, либо $x = 12$ см. Первое значение нас не устраивает. Почему? Дело в том, что одна сторона треугольника не может быть больше его периметра, а по условию периметр треугольника равен 48 см. Остается одна возможность: $x = 12$ см. Тогда второй катет, который на 4 см больше, равен 16 см, а гипотенуза равна $48 - 12 - 16 = 20$ см.

О т в е т: 12 см, 16 см, 20 см.

Замечание. Математическую модель только что решенной задачи можно было составить и по-другому. Пусть, как и раньше, x см — меньший катет, $(x + 4)$ см — больший катет треугольника. Гипотенузу выразим по теореме Пифагора:

$$\sqrt{x^2+(x+4)^2} \text{ см.}$$

Так как по условию периметр треугольника (т. е. сумма трех его сторон) равен 48 см, то получаем уравнение

$$x + (x + 4) + \sqrt{x^2+(x+4)^2} = 48$$

и далее $\sqrt{2x^2+8x+16} = 44 - 2x$.

В этом уравнении переменная содержится под знаком квадратного корня, такие уравнения называют *иррациональными*. Но как их решать, мы с вами пока не обсуждали. Вернемся к этому уравнению позднее, в § 30.

П р и м е р 4. Для вывоза со склада 80 т груза автокомбинату было заказано некоторое количество машин одинаковой грузоподъемности. Руководство комбината решило, что на каждую машину можно грузить на 1 т груза больше, чем планировали на складе, и прислало на 4 машины меньше, чем было заказано. Весь груз в итоге был вывезен. Сколько машин было заказано и сколько прислал автокомбинат?

Р е ш е н и е.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Обозначим через x число машин, заказанных автокомбинату. Тогда:

$(x-4)$ — число машин, которое прислал комбинат на самом деле;

$\frac{80}{x}$ т — количество груза, которое предполагалось вывозить на каждой машине;

$\frac{80}{x-4}$ т — количество груза, которое помещали на каждую машину в действительности.

По условию на каждую машину поместили на 1 т груза больше, чем намечалось, т. е. величина, выражаемая дробью $\frac{80}{x-4}$, больше величины, выражаемой дробью $\frac{80}{x}$, на 1. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\frac{80}{x-4}-\frac{80}{x}=1.$$

Математическая модель задачи составлена.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Последовательно получаем:

$$\frac{80^{|x}}{x-4}-\frac{80^{|x-4}}{x}-1^{|x(x-4)}=0;$$

$$\frac{80x-80(x-4)-x(x-4)}{x(x-4)}=0;$$

$$\frac{-x^2+4x+320}{x(x-4)}=0.$$

Приравняем нулю числитель полученной алгебраической дроби:

$$-x^2+4x+320=0.$$

Далее последовательно находим:

$$x^2-4x-320=0;$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 320}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{1296}}{2} = \frac{4 \pm 36}{2};$$

$$x_1 = \frac{4+36}{2} = 20, \quad x_2 = \frac{4-36}{2} = -16.$$

Оба найденных значения удовлетворяют условию $x(x-4) \neq 0$, значит, они — корни уравнения, составленного на первом этапе.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Мы обозначили через x число машин, заказанных складом у автокомбината. Отрицательным это число быть не может, поэтому из двух корней уравнения выбираем только один: $x = 20$.

Таким образом, заказывали 20 машин, а прислано было на 4 машины меньше, т. е. 16 машин.

Ответ: 20 машин, 16 машин.

Пример 5. В райцентре два кинотеатра — «Факел» и «Слава», первый — на 400, а второй — на 600 мест. В зрительном зале кинотеатра «Слава» на 4 ряда больше, чем в зрительном зале кинотеатра «Факел», и, кроме того, в каждом ряду на 5 мест больше, чем в кинотеатре «Факел». Сколько рядов в зрительном зале кинотеатра «Факел», если известно, что в каждом ряду кинотеатра «Слава» более 25 мест?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x — число рядов в кинотеатре «Факел». Тогда:

$x + 4$ — число рядов в кинотеатре «Слава»;

$\frac{400}{x}$ — число мест в каждом ряду кинотеатра «Факел»;

$\frac{600}{x+4}$ — число мест в каждом ряду кинотеатра «Слава».

По условию в каждом ряду кинотеатра «Слава» на 5 мест больше, чем в каждом ряду кинотеатра «Факел». Следовательно,

$$\frac{600}{x+4} - \frac{400}{x} = 5.$$

Математическая модель составлена. Это рациональное уравнение.

<u>Второй этап.</u> *Работа с составленной моделью.*

Решив составленное рациональное уравнение (выкладки мы не приводим, поскольку аналогичное уравнение было только что решено в предыдущем примере), получим: $x_1 = 20$, $x_2 = 16$.

<u>Третий этап.</u> *Ответ на вопрос задачи.*

За x мы приняли число рядов в кинотеатре «Факел». Мы знаем, что либо $x = 20$, либо $x = 16$, т. е. мы должны проанализировать две возможности: либо в кинотеатре «Факел» 20 рядов и, значит, 20 мест в каждом ряду (поскольку в кинотеатре «Факел» всего 400 мест в зрительном зале), либо в этом кинотеатре 16 рядов по 25 мест в каждом ряду. Если выбрать первую возможность, то в кинотеатре «Слава» будет 24 ряда (согласно условию в кинотеатре «Слава» на 4 ряда больше) по 25 мест в каждом ряду (согласно условию в каждом ряду кинотеатра «Слава» на 5 мест больше, чем в кинотеатре «Факел»). Это нас не устраивает, так как по условию в каждом ряду кинотеатра «Слава» более 25 мест. Рассмотрим вторую возможность: в кинотеатре «Факел» 16 рядов по 25 мест в каждом. Тогда в кинотеатре «Слава» будет 20 рядов по 30 мест в каждом. Это нас устраивает.

Итак, из двух указанных возможностей выбираем вторую, а это означает, что в кинотеатре «Факел» 16 рядов.

Ответ: 16 рядов.

Пример 6. Задумано двузначное число. Известно, что:

1) сумма квадратов цифр задуманного числа равна 58;

2) если цифры задуманного числа поменять местами, то получится двузначное число, которое больше задуманного на 36.

Какое число задумано?

Решение.

<u>Первый этап.</u> *Составление математической модели.*

Для перевода ситуации с обыденного языка на математический придется ввести не одну, а две переменные: x — цифра десятков, y — цифра единиц задуманного числа. Само задуманное число имеет вид $10x + y$. Если же цифры поменять местами, то получится число $10y + x$.

Согласно первому условию сумма квадратов цифр задуманного числа равна 58; это значит, что

$$x^2 + y^2 = 58.$$

Далее, согласно второму условию, если цифры задуманного числа поменять местами, то получится число (оно, как мы отметили выше, имеет вид $10y + x$), которое больше задуманного (т. е. числа $10x + y$) на 36. Это значит, что

$$(10y + x) - (10x + y) = 36,$$

откуда после упрощений получим:

$$y - x = 4.$$

Таким образом, математическая модель задачи представляет собой систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ y - x = 4. \end{cases}$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Вообще говоря, такие системы уравнений мы с вами пока не решали. Более того, изучение систем уравнений — тема 9-го класса. Так что же нам делать: отложить эту задачу до следующего года или, опережая события, попытаться ее решить уже сейчас, тем более что некоторое знакомство с системами уравнений у нас состоялось в курсе алгебры 7-го класса? Не будем откладывать. Воспользуемся методом подстановки: выразим y через x из второго уравнения и подставим полученное выражение вместо y в первое уравнение.

1) Из второго уравнения системы выразим y: $y = x + 4$.

2) Подставим полученное выражение вместо y в первое уравнение системы:

$$x^2 + (x + 4)^2 = 58.$$

3) Решим полученное уравнение:

$$x^2 + (x^2 + 8x + 16) = 58;$$

$$2x^2 + 8x + 16 - 58 = 0;$$

$$2x^2 + 8x - 42 = 0;$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0;$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = -7.$$

4) Подставим поочередно каждое из найденных значений x в формулу $y = x + 4$. Если $x = 3$, то $y = 3 + 4 = 7$; если $x = -7$, то $y = -7 + 4 = -3$.

5) Пары $(3;\ 7)$ и $(-7;\ -3)$ — решения заданной системы уравнений.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

По условию x и y — цифры двузначного числа. Отрицательными цифры быть не могут, значит, пара $(-7;\ -3)$ не подходит как не соответствующая условию задачи. Остается пара $(3;\ 7)$, т. е. $x = 3$, $y = 7$. Здесь переменные x и y имеют следующий смысл: x — цифра десятков, а y — цифра единиц задуманного двузначного числа. Значит, было задумано число 37.

Ответ: 37.

§ 28. ЕЩЕ ОДНА ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Мы с вами уже привыкли к тому, что корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

(если, конечно, дискриминант $D = b^2 - 4ac$ — неотрицательное число; если же $D < 0$, то приведенная формула не имеет смысла, а квадратное уравнение не имеет корней).

Но математики никогда не пройдут мимо возможности облегчить себе вычисления. Они обнаружили, что формулу (1) можно упростить в случае, когда коэффициент b есть четное число.

В самом деле, пусть у квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициент b — четное число, т. е. $b = 2k$. Подставив в формулу (1) число $2k$ вместо b, получим:

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{(2k)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} =$$

$$= \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{2\left(-k \pm \sqrt{k^2 - ac}\right)}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

обратите внимание

Итак, *корни квадратного уравнения* $ax^2 + 2kx + c = 0$ *можно вычислять по формуле*

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \qquad (2)$$

Сравните эту формулу с формулой (1). В чем ее преимущества? Во-первых, в квадрат возводится не число b, а его половина $\left(k = \frac{b}{2}\right)$. Во-вторых, вычитается из этого квадрата не $4ac$, а просто ac. В-третьих, в знаменателе содержится не $2a$, а просто a. Как видите, по крайней мере в трех моментах мы облегчаем себе выкладки. Особенно приятно выглядит формула (2) для приведенного квадратного уравнения, т. е. для случая, когда $a = 1$. Тогда получаем:

$$x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - c}. \qquad (3)$$

Это — *формула корней уравнения* $x^2 + 2kx + c = 0$.

Вернемся к предыдущему параграфу и еще раз решим некоторые из имеющихся там квадратных уравнений — для сравнения трудоемкости вычислений по старой формуле (формуле (1)) и по новой формуле (формуле (2) или (3)).

В примере 1 из § 27 получилось квадратное уравнение

$$x^2 + 10x - 7200 = 0.$$

Мы решали его так:

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7200)}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{28\,900}}{2} = \frac{-10 \pm 170}{2};$$

$$x_1 = \frac{-10 + 170}{2} = 80, \quad x_2 = \frac{-10 - 170}{2} = -90.$$

А теперь решим то же квадратное уравнение по формуле (3), учитывая, что в данном случае $b = 10$, т. е. $2k = 10$, $k = 5$:

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{5^2 - (-7200)} = -5 \pm \sqrt{7225} = -5 \pm 85;$$

$$x_1 = -5 + 85 = 80, \quad x_2 = -5 - 85 = -90.$$

В примере 3 из § 25 было получено квадратное уравнение

$$x^2 - 92x + 960 = 0.$$

Мы решали его так:

$$x_{1,2} = \frac{92 \pm \sqrt{92^2 - 4 \cdot 1 \cdot 960}}{2} = \frac{92 \pm \sqrt{8464 - 3840}}{2} =$$

$$= \frac{92 \pm \sqrt{4624}}{2} = \frac{92 \pm 68}{2};$$

$$x_1 = \frac{92 + 68}{2} = 80, \quad x_2 = \frac{92 - 68}{2} = 12.$$

А теперь решим это квадратное уравнение по формуле (3), учитывая, что в данном случае $b = -92$, т. е. $2k = -92$, $k = -46$:

$$x_{1,2} = 46 \pm \sqrt{46^2 - 960} = 46 \pm \sqrt{2116 - 960} =$$

$$= 46 \pm \sqrt{1156} = 46 \pm 34;$$

$$x_1 = 46 + 34 = 80, \quad x_2 = 46 - 34 = 12.$$

Думается, что преимущества новой формулы вы оценили.

В заключение параграфа рассмотрим еще одно квадратное уравнение, которое мы решали по старой формуле (см. пример 6 из § 25), а теперь решим по-новому. Речь идет об уравнении

$$5x^2 - 2\sqrt{15}\,x + 1 = 0.$$

Используя формулу (2), находим:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{15} \pm \sqrt{\left(\sqrt{15}\right)^2 - 5}}{5} = \frac{\sqrt{15} \pm \sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\right)}{5}.$$

Сравните этот вариант решения с тем, который был предложен в § 25. Согласитесь, что так работать проще.

Итак, если вам встретилось квадратное уравнение вида $ax^2 + 2kx + c = 0$, то советуем пользоваться формулой (2) (или (3) в случае, когда $a = 1$), поскольку вычисления будут проще. Но если вы опасаетесь запутаться в обилии формул, то пользуйтесь привычной общей формулой корней квадратного уравнения.

§ 29. ТЕОРЕМА ВИЕТА

В этом параграфе мы познакомимся с любопытными соотношениями между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами. Эти соотношения впервые обнаружил французский математик Франсуа Виет (1540—1603).

Теорема 1 (теорема Виета)

Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Тогда сумма корней равна $-\frac{b}{a}$, а произведение корней равно $\frac{c}{a}$:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned}}$$

Например, для уравнения $3x^2 - 8x - 6 = 0$, не находя его корней, можно, воспользовавшись теоремой Виета, сразу сказать, что сумма корней равна $\frac{8}{3}$, а произведение корней равно $-\frac{6}{3}$, т. е. -2. А для уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$ заключаем: сумма корней равна 6, произведение корней равно 8; между прочим, здесь нетрудно догадаться, чему равны корни: 4 и 2.

Доказательство теоремы Виета. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находятся по формулам

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант уравнения. Сложив эти корни, получим:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Первое соотношение доказано: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Теперь вычислим произведение корней x_1 и x_2:

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Второе соотношение доказано: $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Замечание 1. **Теорема Виета справедлива и в том случае, когда квадратное уравнение имеет один корень (т. е. когда $D = 0$), просто в этом случае считают, что уравнение имеет *два одинаковых корня*, к которым и применяют указанные выше соотношения.**

Особенно простой вид принимают доказанные соотношения для приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. В этом случае получаем:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q,$$

т. е. ***сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.***

С помощью теоремы Виета можно получить и другие соотношения между корнями и коэффициентами квадратного уравнения. Пусть, например, x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 =$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q.$$

Итак,

$$x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q.$$

Однако основное назначение теоремы Виета не в том, что она выражает некоторые соотношения между корнями и коэффициентами квадратного уравнения. Гораздо важнее то, что с помощью теоремы Виета выводится формула разложения квадратного трехчлена на множители, без которой мы в дальнейшем не обойдемся.

Теорема 2 ***Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то справедливо тождество***

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).}$$

Доказательство. Имеем:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

По теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Значит,

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)=$$

$$=a(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2)=$$

$$=a(x(x-x_1)-x_2(x-x_1))=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Замечание 2. Если дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c равен нулю, т. е. $x_1=x_2$ (кратный корень), то доказанная формула принимает вид

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2.$$

Теорема 3 ***Если квадратный трехчлен раскладывается на линейные множители, то он имеет корни.***

Доказательство. Пусть $ax^2+bx+c=(kx+l)(mx+n)$. Полученное произведение можно переписать так: $k\left(x+\frac{l}{k}\right)m\left(x+\frac{n}{m}\right)$.

Значит,

$$ax^2+bx+c=km\left(x+\frac{l}{k}\right)\left(x+\frac{n}{m}\right).$$

Числа $-\frac{l}{k}$ и $-\frac{n}{m}$ — корни квадратного трехчлена.

Теорема 4 ***Если квадратный трехчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на линейные множители.***

Доказательство. Предположим противное, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно представить в виде $(kx + l)(mx + n)$. Тогда по теореме 3 он имеет корни, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно, т. е. квадратный трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Пример 1. Разложить на множители квадратный трехчлен:

а) $3x^2 - 10x + 3$; б) $16x^2 - 24x + 9$.

Решение. а) Решив уравнение $3x^2 - 10x + 3 = 0$, найдем корни квадратного трехчлена $3x^2 - 10x + 3$: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Воспользовавшись теоремой 2, получим:

$$3x^2 - 10x + 3 = 3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Есть смысл вместо $3\left(x - \frac{1}{3}\right)$ написать $3x - 1$. Тогда окончательно получим: $3x^2 - 10x + 3 = (x - 3)(3x - 1)$.

Заметим, что заданный квадратный трехчлен можно разложить на множители и без применения теоремы 2, использовав способ группировки:

$$3x^2 - 10x + 3 = 3x^2 - 9x - x + 3 =$$
$$= 3x(x - 3) - (x - 3) = (x - 3)(3x - 1).$$

Но, как видите, при этом способе успех зависит от того, сумеем ли мы найти удачную группировку или нет, тогда как при первом способе успех гарантирован.

б) Заданное выражение — полный квадрат:

$$16x^2 - 24x + 9 = (4x)^2 + 3^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3.$$

Значит, $16x^2 - 24x + 9 = (4x - 3)^2$.

Можно ли было использовать теорему 2? Можно. Смотрите:

$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 16 \cdot 9}}{16} = \frac{12 \pm 0}{16}$. Значит, $x_1 = x_2 = \frac{3}{4}$, а потому

$16x^2 - 24x + 9 = 16\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) = (4x - 3)(4x - 3) = (4x - 3)^2$. ◼

П р и м е р 2. Сократить дробь $\frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 - 4x - 12}$.

Р е ш е н и е. Из уравнения $2x^2 + 5x + 2 = 0$ находим: $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Значит,

$$2x^2 + 5x + 2 = 2(x - (-2))\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= 2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x + 2)(2x + 1).$$

Из уравнения $x^2 - 4x - 12 = 0$ находим: $x_1 = 6$, $x_2 = -2$. Поэтому

$$x^2 - 4x - 12 = (x - 6)(x - (-2)) = (x - 6)(x + 2).$$

А теперь сократим заданную дробь:

$$\frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 - 4x - 12} = \frac{(x + 2)(2x + 1)}{(x - 6)(x + 2)} = \frac{2x + 1}{x - 6}.$$ ◼

П р и м е р 3. Разложить на множители выражение:

а) $x^4 + 5x^2 + 6$; б) $2x + \sqrt{x} - 3$.

Р е ш е н и е. а) Введем новую переменную $y = x^2$. Это позволит переписать заданное выражение в виде квадратного трехчлена относительно переменной y, а именно в виде $y^2 + 5y + 6$. Решив уравнение $y^2 + 5y + 6 = 0$, найдем корни квадратного трехчлена $y^2 + 5y + 6$: $y_1 = -2$, $y_2 = -3$. Теперь воспользуемся теоремой 2; получим: $y^2 + 5y + 6 = (y + 2)(y + 3)$.

Осталось вспомнить, что $y = x^2$, т. е. вернуться к заданному выражению. Итак,

$$x^4 + 5x^2 + 6 = (x^2 + 2)(x^2 + 3).$$

б) Введем новую переменную $y = \sqrt{x}$. Это позволит переписать заданное выражение в виде квадратного трехчлена относительно переменной y, а именно в виде $2y^2 + y - 3$. Решив уравнение $2y^2 + y - 3 = 0$, найдем корни квадратного трехчлена $2y^2 + y - 3$: $y_1 = 1,\ y_2 = -\frac{3}{2}$. Значит,

$$2y^2 + y - 3 = 2(y-1)\left(y + \frac{3}{2}\right) = (y-1)(2y+3).$$

Осталось вспомнить, что $y = \sqrt{x}$, т. е. вернуться к заданному выражению. Итак,

$$2x + \sqrt{x} - 3 = \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(2\sqrt{x} + 3\right).$$

Теорема 5 ***Если числа x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, то эти числа — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.***

Доказательство. Так как $p = -(x_1 + x_2)$, а $q = x_1 x_2$, то $x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2)$. Значит, уравнение $x^2 + px + q = 0$ мы преобразовали к виду $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, откуда сразу следует, что x_1, x_2 — корни уравнения.

С помощью этого утверждения можно решать многие квадратные уравнения устно, не пользуясь громоздкими формулами корней, а также составлять квадратные уравнения с заданными корнями. Приведем примеры.

1) $x^2 - 11x + 24 = 0$. Здесь $x_1 + x_2 = 11$, $x_1 x_2 = 24$. Можно догадаться, что $x_1 = 8$, $x_2 = 3$.

2) $x^2 + 11x + 30 = 0$. Здесь $x_1 + x_2 = -11$, $x_1 x_2 = 30$. Можно догадаться, что $x_1 = -5$, $x_2 = -6$.

Обратите внимание: если свободный член уравнения — положительное число, то оба корня либо положительны, либо отрицательны; это важно учитывать при подборе корней.

3) $x^2 + x - 12 = 0$. Здесь $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 x_2 = -12$. Можно догадаться, что $x_1 = 3$, $x_2 = -4$.

Обратите внимание: если свободный член уравнения — отрицательное число, то корни различны по знаку; это важно учитывать при подборе корней.

4) $5x^2 + 17x - 22 = 0$. Нетрудно заметить, что $x = 1$ удовлетворяет уравнению, т. е. $x_1 = 1$ — корень уравнения. Так как $x_1x_2 = -\frac{22}{5}$, а $x_1 = 1$, то получаем, что $x_2 = -\frac{22}{5}$.

5) $x^2 - 293x + 2830 = 0$. Здесь $x_1 + x_2 = 293$, $x_1x_2 = 2830$. Если обратить внимание на то, что $2830 = 283 \cdot 10$, а $293 = 283 + 10$, то становится ясно, что $x_1 = 283$, $x_2 = 10$ (а теперь представьте, какие вычисления пришлось бы выполнить для решения этого квадратного уравнения с помощью стандартных формул).

6) Составим квадратное уравнение так, чтобы его корнями служили числа $x_1 = 8$, $x_2 = -4$. Обычно в таких случаях составляют приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$. Имеем: $x_1 + x_2 = -p$, поэтому $8 - 4 = -p$, т. е. $p = -4$. Далее, $x_1x_2 = q$, т. е. $8 \cdot (-4) = q$, откуда получаем: $q = -32$. Итак, $p = -4$, $q = -32$, значит, искомое квадратное уравнение имеет вид $x^2 - 4x - 32 = 0$.

§ 30. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Если в уравнении переменная содержится под знаком квадратного корня, то уравнение называют **иррациональным**. Иногда математическая модель реальной ситуации представляет собой иррациональное уравнение, мы с этим уже встречались (см. замечание к примеру 3 из § 27). Поэтому нам следует научиться решать хотя бы простейшие иррациональные уравнения (более сложные иррациональные уравнения мы будем решать в старших классах).

Рассмотрим иррациональное уравнение

$$\sqrt{2x+1} = 3.$$

иррациональное уравнение

метод возведения в квадрат

Это равенство по определению квадратного корня означает, что $2x + 1 = 3^2$. Фактически от заданного иррационального уравнения мы перешли к рациональному уравнению $2x + 1 = 9$, возведя в квадрат обе части иррационального уравнения. **Метод возведения в квадрат** обеих частей уравнения — основной метод решения иррациональных уравнений. Впрочем, это понятно: как же иначе освободиться от знака квадратного корня? Из уравнения $2x + 1 = 9$ находим: $x = 4$. Это — корень как уравнения $2x + 1 = 9$, так и заданного иррационального уравнения.

Метод возведения в квадрат технически несложен, но иногда приводит к неприятностям. Рассмотрим, например, иррациональное уравнение

$$\sqrt{2x-5} = \sqrt{4x-7}.$$

Возведя обе его части в квадрат, получим:

$$\left(\sqrt{2x-5}\right)^2 = \left(\sqrt{4x-7}\right)^2;$$
$$2x-5 = 4x-7;$$
$$x = 1.$$

Но значение $x = 1$, будучи корнем рационального уравнения $2x - 5 = 4x - 7$, не является корнем заданного иррационального уравнения. Почему? Подставив 1 вместо x в заданное иррациональное уравнение, получим: $\sqrt{-3} = \sqrt{-3}$. Как же можно говорить о выполнении числового равенства, если и в левой, и в правой его части содержатся выражения, не имеющие смысла? В подобных случаях говорят: $x = 1$ — *посторонний корень* для заданного иррационального уравнения. Получается, что заданное иррациональное уравнение не имеет корней.

Решим иррациональное уравнение

$$\sqrt{2x^2+5x-2} = x-6.$$

Воспользуемся методом возведения в квадрат:

$$\left(\sqrt{2x^2+5x-2}\right)^2 = (x-6)^2;$$
$$2x^2+5x-2 = x^2-12x+36;$$
$$2x^2+5x-2-x^2+12x-36 = 0;$$
$$x^2+17x-38 = 0.$$

Корни этого уравнения можно найти устно, как мы это делали в конце предыдущего параграфа: их произведение равно -38, а сумма равна -17; нетрудно догадаться, что это — числа 2 и -19. Итак, $x_1 = 2$, $x_2 = -19$.

Подставив значение 2 вместо x в заданное иррациональное уравнение, получим:

$$\sqrt{2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 2} = 2 - 6, \text{ т. е. } \sqrt{16} = -4.$$

Это неверно.

Подставив значение -19 вместо x в заданное иррациональное уравнение, получим:

$$\sqrt{2 \cdot (-19)^2 + 5 \cdot (-19) - 2} = -19 - 6, \text{ т. е. } \sqrt{625} = -25.$$

Это также неверно.

Каков же вывод? Оба найденных значения — посторонние корни. Иными словами, заданное иррациональное уравнение, как и предыдущее, не имеет корней.

Посторонний корень — не новое для вас понятие, посторонние корни уже встречались при решении рациональных уравнений, обнаружить их помогает проверка. Для иррациональных уравнений проверка — обязательный этап решения уравнения, который поможет обнаружить посторонние корни, если они есть, и отбросить их (обычно говорят «отсеять»).

обратите внимание

Итак, *иррациональное уравнение решают методом возведения обеих его частей в квадрат; решив полученное в итоге рациональное уравнение, надо обязательно сделать проверку, отсеяв возможные посторонние корни.*

Используя этот вывод, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{5x - 16} = x - 2. \tag{1}$$

Решение. Возведем обе части уравнения (1) в квадрат:

$$\left(\sqrt{5x - 16}\right)^2 = (x - 2)^2.$$

Далее последовательно получаем:

$$5x - 16 = x^2 - 4x + 4;$$
$$x^2 - 4x + 4 - 5x + 16 = 0;$$
$$x^2 - 9x + 20 = 0;$$
$$x_1 = 5, \quad x_2 = 4.$$

Проверка. Подставив $x = 5$ в уравнение (1), получим: $\sqrt{9} = 3$ — верное равенство. Подставив $x = 4$ в уравнение (1), получим: $\sqrt{4} = 2$ — верное равенство. Значит, оба найденных значения — корни уравнения (1).

О т в е т: 4; 5.

П р и м е р 2. Решить уравнение $\sqrt{2x^2 + 8x + 16} = 44 - 2x$ (это уравнение встретилось нам в § 27 и было отложено до лучших времен).

Р е ш е н и е. Возведя в квадрат обе части заданного иррационального уравнения, получим:

$$2x^2 + 8x + 16 = (44 - 2x)^2;$$

$$2x^2 + 8x + 16 = 1936 - 176x + 4x^2;$$

$$-2x^2 + 184x - 1920 = 0;$$

$$x^2 - 92x + 960 = 0;$$

$$x_1 = 80, \quad x_2 = 12.$$

Проверка. Подставив $x = 80$ в заданное иррациональное уравнение, получим:

$$\sqrt{2 \cdot 80^2 + 8 \cdot 80 + 16} = 44 - 2 \cdot 80;$$

это, очевидно, неверное равенство, поскольку в его правой части содержится отрицательное число, а в левой — положительное число. Значит, $x = 80$ — посторонний корень для данного уравнения.

Подставив $x = 12$ в заданное иррациональное уравнение, получим:

$$\sqrt{2 \cdot 12^2 + 8 \cdot 12 + 16} = 44 - 2 \cdot 12,$$

т. е. $\sqrt{400} = 20$, — верное равенство. Следовательно, $x = 12$ — корень данного уравнения.

О т в е т: 12.

П р и м е р 3. Решить уравнение

$$\sqrt{3x + 7} + \sqrt{x + 2} = 3. \qquad (2)$$

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение к виду

$$\sqrt{3x + 7} = 3 - \sqrt{x + 2}$$

и применим метод возведения в квадрат:

$$\left(\sqrt{3x+7}\right)^2 = \left(3 - \sqrt{x+2}\right)^2;$$

$$3x + 7 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x+2} + \left(\sqrt{x+2}\right)^2;$$

$$3x + 7 = 9 - 6\sqrt{x+2} + x + 2;$$

$$6\sqrt{x+2} = 9 + x + 2 - 3x - 7;$$

$$6\sqrt{x+2} = 4 - 2x;$$

$$3\sqrt{x+2} = 2 - x.$$

Еще раз применим метод возведения в квадрат:

$$3\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = (2 - x)^2;$$

$$9(x + 2) = 4 - 4x + x^2;$$

$$9x + 18 - 4 + 4x - x^2 = 0;$$

$$-x^2 + 13x + 14 = 0;$$

$$x^2 - 13x - 14 = 0;$$

$$x_1 = 14, \quad x_2 = -1.$$

Проверка. Подставив значение $x = 14$ в уравнение (2), получим: $\sqrt{49} + \sqrt{16} = 3$ — неверное равенство; значит, $x = 14$ — посторонний корень.

Подставив значение $x = -1$ в уравнение (2), получим: $\sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$ — верное равенство; значит, $x = -1$ — корень уравнения (2).

Ответ: -1.

Пример 4. Решить уравнение

$$2x + \sqrt{x} - 3 = 0.$$

Решение. Конечно, можно решить это уравнение по той же схеме, которую мы применяли в предыдущих примерах: переписать уравнение в виде $\sqrt{x} = 3 - 2x$, возвести обе части этого уравнения в квадрат, решить полученное рациональное уравнение и проверить найденные корни подстановкой их в исходное иррациональное уравнение.

Но мы применим более изящный способ: введем новую переменную $y = \sqrt{x}$. Тогда получим: $2y^2 + y - 3 = 0$ — квадратное уравнение относительно переменной y. Найдем его корни: $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{3}{2}$. Таким образом, задача свелась к решению двух уравнений:

$$\sqrt{x} = 1; \ \sqrt{x} = -\frac{3}{2}.$$

Из первого уравнения находим $x = 1$, второе уравнение не имеет корней (вы же помните, что $\sqrt{x}$ принимает только неотрицательные значения).

О т в е т: 1.

Завершим этот параграф достаточно серьезным теоретическим разговором. Дело в следующем. Вы уже накопили некоторый опыт в решении различных уравнений: линейных, квадратных, рациональных, иррациональных. Вы знаете, что при решении уравнений выполняют различные преобразования, например:

член уравнения переносят из одной части уравнения в другую с противоположным знаком;

обе части уравнения умножают или делят на одно и то же отличное от нуля число;

освобождаются от знаменателя, т. е. заменяют уравнение $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ уравнением $p(x) = 0$;

обе части уравнения возводят в квадрат.

Конечно, вы обратили внимание на то, что в результате некоторых преобразований могли появиться посторонние корни, а потому приходилось быть бдительными: проверять все найденные корни. Вот мы и попытаемся сейчас осмыслить все это с теоретической точки зрения.

__Определение.__ Два уравнения $f(x) = g(x)$ и $r(x) = s(x)$ называют **равносильными,** если они имеют одинаковые корни (или, в частности, если оба уравнения не имеют корней).

равносильные уравнения

равносильное преобразование уравнения

Обычно при решении уравнения стараются заменить данное уравнение более простым, но равносильным ему. Такую замену называют **равносильным преобразованием уравнения.**

Равносильными преобразованиями уравнения являются следующие преобразования:

1. *Перенос членов уравнения из одной части уравнения в другую с противоположными знаками.*

Например, замена уравнения $2x + 5 = 7x - 8$ уравнением $2x - 7x = -8 - 5$ есть равносильное преобразование уравнения. Это значит, что уравнения $2x + 5 = 7x - 8$ и $2x - 7x = -8 - 5$ равносильны.

2. *Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число.*

Например, замена уравнения $0{,}5x^2 - 0{,}3x = 2$ уравнением $5x^2 - 3x = 20$ (обе части уравнения умножили почленно на 10) есть равносильное преобразование уравнения.

Неравносильными преобразованиями уравнения могут быть следующие преобразования:

1. *Освобождение от знаменателей, содержащих переменные.*

Например, замена уравнения $\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2}$ уравнением $x^2 = 4$ есть неравносильное преобразование уравнения. Дело в том, что уравнение $x^2 = 4$ имеет два корня: 2 и -2, а заданному уравнению значение $x = 2$ удовлетворять не может (знаменатель обращается в нуль). В подобных случаях мы говорили так: $x = 2$ — посторонний корень.

2. *Возведение обеих частей уравнения в квадрат.*

Примеры приводить не будем, так как их было достаточно много в этом параграфе.

Если в процессе решения уравнения применялось одно из указанных преобразований, которое может быть неравносильным, то все найденные корни надо проверить подстановкой в исходное уравнение, поскольку среди них могут оказаться посторонние корни.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этой главе вы познакомились с новыми терминами математического языка:
квадратное уравнение, квадратный трехчлен;
старший коэффициент, второй коэффициент, свободный член (для квадратного уравнения);
полное квадратное уравнение, неполное квадратное уравнение;
неприведенное квадратное уравнение, приведенное квадратное уравнение;
корень квадратного уравнения (квадратного трехчлена);
дискриминант квадратного уравнения (квадратного трехчлена);
рациональное уравнение;
биквадратное уравнение;
иррациональное уравнение;
параметр, уравнение с параметром;
посторонний корень (для рационального или иррационального уравнения);
равносильные уравнения;
равносильные и неравносильные преобразования уравнения.

Мы вывели формулы:
корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

корней квадратного уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a};$$

разложения на множители квадратного трехчлена:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена.

Мы сформулировали и доказали теоремы о связи числа корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с его дискриминантом $D = b^2 - 4ac$ и о связи корней уравнения с его коэффициентами:
если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней;
если $D = 0$, то уравнение имеет один корень (или, что то же самое, два одинаковых корня);
если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня;
если x_1 и x_2 — корни уравнения, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \text{ (теорема Виета).}$$

Для приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$ эти соотношения имеют вид

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

Мы выработали алгоритмы:
решения квадратного уравнения;
решения рационального уравнения.

ГЛАВА

5 НЕРАВЕНСТВА

§ 31. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

В § 12 мы ввели понятие *числового неравенства*: $a > b$ — это значит, что $a - b$ — положительное число; $a < b$ — это значит, что $a - b$ — отрицательное число. Числовые неравенства обладают рядом свойств, знание которых поможет нам в дальнейшем работать с неравенствами.

Впрочем, в § 11 мы пользовались оценками для числа $\sqrt{5}$ ($2 < \sqrt{5} < 3$; $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ и т. д.), где фактически опирались (хотя и интуитивно) на свойства числовых неравенств. Активно использовали мы знаки (да и свойства) неравенств в § 12. Изучением свойств числовых неравенств мы займемся в настоящем параграфе.

Свойство 1. ***Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.***

Доказательство. По условию $a > b$, т. е. $a - b$ — положительное число. Аналогично, так как $b > c$, делаем вывод, что $b - c$ — положительное число.

Сложив положительные числа $a - b$ и $b - c$, получим положительное число. Имеем: $(a - b) + (b - c) = a - c$. Значит, $a - c$ — положительное число, т. е. $a > c$, что и требовалось доказать.

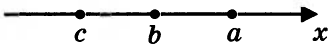


Рис. 105

Свойство 1 можно обосновать, используя геометрическую модель множества действительных чисел — числовую прямую. Неравенство $a > b$ означает, что на числовой прямой точка a расположена правее точки b, а неравенство $b > c$ — что точка b расположена правее точки c (рис. 105). Но тогда точка a расположена на прямой правее точки c, т. е. $a > c$.

Свойство 1 обычно называют *свойством транзитивности* (образно говоря, от пункта a мы добираемся до пункта c как бы транзитом, с промежуточной остановкой в пункте b).

Свойство 2. ***Если $a > b$, то $a + c > b + c$.***

Свойство 3. ***Если $a > b$ и $m > 0$, то $am > bm$;***
если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$.

Смысл свойства 3 заключается в следующем:
если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства следует сохранить;
если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства следует изменить ($<$ на $>$, $>$ на $<$).

То же относится к делению обеих частей неравенства на одно и то же положительное или отрицательное число m, поскольку деление на m всегда можно заменить умножением на $\frac{1}{m}$.

Из свойства 3, в частности, следует, что, умножив обе части неравенства $a > b$ на -1, получим: $-a < -b$. Это значит, что ***если изменить знаки у обеих частей неравенства, то надо изменить и знак неравенства: если $a > b$, то $-a < -b$.***

Свойство 4. ***Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.***

Доказательство.

I способ. По условию $a > b$ и $c > d$, значит, $a - b$ и $c - d$ — положительные числа. Тогда и их сумма, т. е. $(a - b) + (c - d)$, — положительное число. Так как

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d),$$

то $(a + c) - (b + d)$ — положительное число. Поэтому

$$a + c > b + d.$$

II способ. Так как $a > b$, то согласно свойству 2 $a + c > b + c$. Аналогично, так как $c > d$, то $c + b > d + b$.

Итак, $a + c > b + c$, $b + c > b + d$. Тогда, в силу свойства транзитивности, получаем, что $a + c > b + d$.

Замечание. **Мы привели два способа доказательства для того, чтобы вы сами выбрали тот из них, который вам больше понравился или более понятен. Кроме того, вообще полезно знакомиться с различными обоснованиями одного и того же факта.**

Свойство 5. ***Если a, b, c, d — положительные числа и $a > b$, $c > d$, то $ac > bd$.***

Доказательство. Так как $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$ (по свойству 3). Аналогично, так как $c > d$ и $b > 0$, то $cb > db$.

Итак, $ac > bc$, $bc > bd$. Тогда согласно свойству транзитивности получаем, что $ac > bd$.

Рабочий словарь

неравенства одинакового смысла

неравенства противоположного смысла

Обычно неравенства вида $a > b$, $c > d$ (или $a < c$, $c < d$) называют **неравенствами одинакового смысла**, а неравенства $a > b$ и $c < d$ — **неравенствами противоположного смысла.** Свойство 5 означает, что ***при умножении неравенств одинакового смысла, у которых левые и правые части — положительные числа, получится неравенство того же смысла.***

Свойство 6. ***Если a и b — неотрицательные числа и $a > b$, то $a^n > b^n$, где n — любое натуральное число.***

Смысл свойства 6 заключается в следующем: ***если обе части неравенства — неотрицательные числа, то их можно возвести в одну и ту же натуральную степень, сохранив знак неравенства.***

Дополнение к свойству 6. ***Если n — нечетное число, то для любых чисел a и b из неравенства $a > b$ следует неравенство того же смысла $a^n > b^n$.***

обратите внимание

Вы обратили внимание на то, что в приведенных доказательствах мы пользовались, по сути дела, всего двумя идеями? Первая идея — составить разность левой и правой частей неравенства и выяснить, какое число получится: положительное или отрицательное. Вторая идея — для доказательства нового свойства использовать уже известные свойства. Так поступают и в других случаях доказательств числовых неравенств: например, так можно доказать те из перечисленных выше свойств, которые мы здесь привели без доказательства (советуем вам в качестве упражнения попробовать восполнить этот пробел). Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть a и b — положительные числа и $a > b$. Доказать, что

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

Решение. Рассмотрим разность $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. Имеем:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}.$$

По условию a, b, $a - b$ — положительные числа. Значит, $\frac{b-a}{ab}$ — отрицательное число, т. е. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0$, откуда следует, что $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Пример 2. Пусть a — положительное число. Доказать, что

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2.$$

Решение. Рассмотрим разность $\left(a + \frac{1}{a}\right) - 2$. Имеем:

$$\frac{a^2+1}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a}.$$

Получили неотрицательное число, значит, $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$.

Заметим, что $a + \frac{1}{a} = 2$, если $a = 1$; если же $a \neq 1$, то

$$a + \frac{1}{a} > 2.$$

П р и м е р 3. Известно, что $2{,}1 < a < 2{,}2$; $3{,}7 < b < 3{,}8$. Найти оценки для числа:

а) $2a$; б) $-3b$; в) $a + b$; г) $a - b$; д) a^2; е) b^3; ж) $\frac{1}{a}$.

Р е ш е н и е. а) Умножив все части двойного неравенства $2{,}1 < a < 2{,}2$ на одно и то же положительное число 2, получим:

$$2 \cdot 2{,}1 < 2a < 2 \cdot 2{,}2, \text{ т. е. } 4{,}2 < 2a < 4{,}4.$$

б) Умножив все части двойного неравенства $3{,}7 < b < 3{,}8$ на одно и то же отрицательное число -3, получим неравенство противоположного смысла:

$$-3 \cdot 3{,}7 > -3b > -3 \cdot 3{,}8, \text{ т.е. } -11{,}4 < -3b < -11{,}1$$

(вместо записи вида $a > b > c$ мы перешли к более употребительной записи $c < b < a$).

в) Сложив почленно заданные двойные неравенства одинакового смысла, получим:

$$+\begin{array}{r} 2{,}1 < \quad a \quad < 2{,}2 \\ 3{,}7 < \quad b \quad < 3{,}8 \\ \hline 5{,}8 < a + b < 6{,}0. \end{array}$$

г) Сначала умножим все части двойного неравенства $3{,}7 < b < 3{,}8$ на одно и то же отрицательное число -1; получим неравенство противоположного смысла:

$$-3{,}7 > -b > -3{,}8, \text{ т.е. } -3{,}8 < -b < -3{,}7.$$

Далее имеем:

$$+\begin{array}{r} 2{,}1 < \quad a \quad < 2{,}2 \\ -3{,}8 < \quad -b \quad < -3{,}7 \\ \hline -1{,}7 < a - b < -1{,}5. \end{array}$$

д) Поскольку все части двойного неравенства $2{,}1 < a < 2{,}2$ положительны, возведя их в квадрат, получим:

$$2{,}1^2 < a^2 < 2{,}2^2,$$

т. е.

$$4{,}41 < a^2 < 4{,}84.$$

е) Возведя в куб все части двойного неравенства $3{,}7 < b < 3{,}8$, получим:

$$3{,}7^3 < b^3 < 3{,}8^3,$$

т. е.

$$50{,}653 < b^3 < 54{,}872.$$

ж) В примере 1 мы установили, что если a и b — положительные числа, то из неравенства $a < b$ следует неравенство противоположного смысла $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Значит, из двойного неравенства $2{,}1 < a < 2{,}2$ следует, что

$$\frac{1}{2{,}1} > \frac{1}{a} > \frac{1}{2{,}2},$$

т. е.

$$\frac{5}{11} < \frac{1}{a} < \frac{10}{21}.$$

П р и м е р 4. Пусть a и b — неотрицательные числа. Доказать, что

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Р е ш е н и е. Составим разность левой и правой частей неравенства:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Получили неотрицательное число, значит, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Заметим, что $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$, если $a = b$ (тогда $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ и, следовательно, $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} = 0$); если же $a \neq b$, то $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

среднее арифметическое

среднее геометрическое

неравенство Коши

Число $\frac{a+b}{2}$ называют **средним арифметическим** чисел a и b; число $\sqrt{ab}$ называют **средним геометрическим** чисел a и b. Таким образом, неравенство, доказанное в примере 3, означает, что ***среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.*** Доказанное неравенство иногда называют **неравенством Коши** в честь французского математика Огюста Коши (1789—1857).

Замечание. Неравенство Коши имеет любопытное геометрическое истолкование. Пусть дан прямоугольный треугольник и пусть высота h, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки a и b (рис. 106). В геометрии доказано, что $h = \sqrt{ab}$ (так что не случайно для этого выражения ввели термин «среднее геометрическое»). А что такое $\frac{a+b}{2}$? Это длина половины гипотенузы. Но из геометрии известно, что медиана m прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, как раз и равна половине гипотенузы. Таким образом, неравенство Коши означает, что медиана, проведенная к гипотенузе (т. е. $\frac{a+b}{2}$), не меньше высоты, проведенной к гипотенузе (т. е. $\sqrt{ab}$), — очевидный геометрический факт (рис. 106).

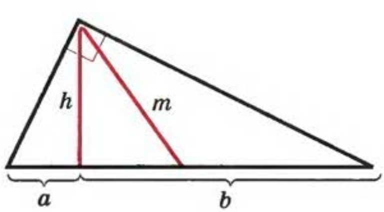


Рис. 106

Свойства числовых неравенств позволяют сравнивать действительные числа по величине, оценивать результат.

Пример 5. Сравнить числа:

а) $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ и $2+\sqrt{5}$; б) $\pi+\sqrt{10}$ и $4+\sqrt{11}$.

Решение. а) Пусть $a=\sqrt{3}+\sqrt{6}$, $b=2+\sqrt{5}$. Тогда $a^2 = (\sqrt{3}+\sqrt{6})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} + (\sqrt{6})^2 = 3 + 2\sqrt{18} + 6 = 9 + \sqrt{72}$; $b^2 = (2+\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + \sqrt{80}$. Имеем: $\sqrt{72} < \sqrt{80}$, $9 + \sqrt{72} < 9 + \sqrt{80}$, т. е. $a^2 < b^2$. Значит, $a < b$.

б) Имеем: $\pi < 4$, $\sqrt{10} < \sqrt{11}$. Применив к этим двум неравенствам одинакового смысла свойство 4 (о почленном сложении), получим: $\pi + \sqrt{10} < 4 + \sqrt{11}$.

§ 32. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НА МОНОТОННОСТЬ

С понятиями возрастающей и убывающей функций мы впервые познакомились в курсе алгебры 7-го класса. Глядя на график функции, мы получали соответствующую информацию: если, двигаясь по графику слева направо, в то же время двигались снизу вверх (как бы поднимаемся в горку), то мы объявляли функцию возрастающей (рис. 107); если же двигались сверху вниз (спускаемся с горки), то мы объявляли функцию убывающей (рис. 108).

Но мы уже не раз говорили о том, что математики не очень жалуют такой способ исследования свойств функции. Они считают, что определения понятий не должны опираться на рисунок, — чертеж должен лишь иллюстрировать то или иное свойство функции на ее графике. Дадим строгие определения понятий возрастания и убывания функции.

Рис. 107

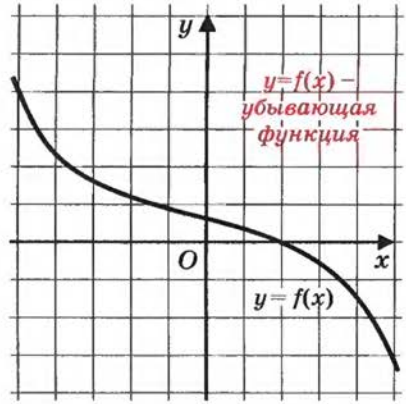


Рис. 108

возрастающая функция

убывающая функция

<u>*Определение 1*</u>. Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей на промежутке** X, если из неравенства $x_1 < x_2$, где x_1 и x_2 — любые две точки промежутка X, следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

<u>*Определение 2*</u>. Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей на промежутке** X, если из неравенства $x_1 < x_2$, где x_1 и x_2 — любые две точки промежутка X, следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

На практике удобнее пользоваться следующими формулировками:

функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует <u>большее</u> значение функции;

функция убывает, если большему значению аргумента соответствует <u>меньшее</u> значение функции.

Используя эти определения и установленные в § 31 свойства числовых неравенств, мы сможем обосновать выводы о возрастании или убывании ранее изученных функций.

1. Линейная функция $y = kx + m$

Если $k > 0$, то функция возрастает на всей числовой прямой (рис. 109); ***если $k < 0$, то функция убывает на всей числовой прямой*** (рис. 110).

Доказательство. Положим $f(x) = kx + m$. Если $x_1 < x_2$ и $k > 0$, то согласно свойству 3 числовых неравенств (см. § 31) $kx_1 < kx_2$. Далее, согласно свойству 2 из $kx_1 < kx_2$ следует, что $kx_1 + m < kx_2 + m$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. Это и означает возрастание функции $y = f(x)$, т. е. линейной функции $y = kx + m$.

Если же $x_1 < x_2$ и $k < 0$, то согласно свойству 3 числовых неравенств $kx_1 > kx_2$, а согласно свойству 2 из $kx_1 > kx_2$ следует, что $kx_1 + m > kx_2 + m$. Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$. Это и означает убывание функции $y = f(x)$, т. е. линейной функции $y = kx + m$.

Если функция возрастает (убывает) во всей своей области определения, то ее можно называть возрастающей (убывающей), не указывая промежутка. Например, про функцию $y = 2x - 3$ можно сказать, что она возрастает на всей числовой прямой, но можно сказать и короче: $y = 2x - 3$ — возрастающая функция.

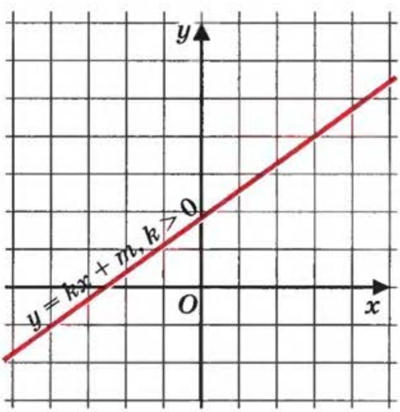


Рис. 109

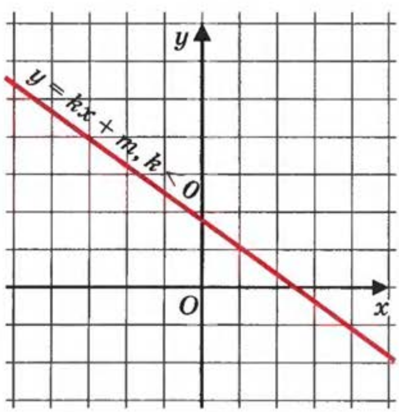


Рис. 110

2. Функция $y = kx^2$

1. Рассмотрим функцию $y = x^2$ на луче $[0; +\infty)$; положим $f(x) = x^2$. Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$. Тогда согласно свойству 6 числовых неравенств $x_1^2 < x_2^2$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$. Итак, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Таким образом, функция $y = x^2$ возрастает на луче $[0; +\infty)$ (рис. 111).

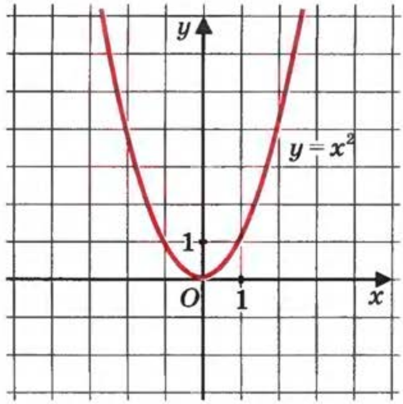


Рис. 111

2. Рассмотрим функцию $y = x^2$ на луче $(-\infty; 0]$; положим $f(x) = x^2$. Возьмем два неположительных числа x_1 и x_2 таких, что $x_1 < x_2$. Тогда согласно свойству 3 числовых неравенств выполняется неравенство $-x_1 > -x_2$. Так как числа $-x_1$ и $-x_2$ неотрицательны, то, возведя в квадрат обе части неравенства $-x_1 > -x_2$, получим неравенство того же смысла: $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, т. е. $x_1^2 > x_2^2$. Это значит, что $f(x_1) > f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$. Поэтому функция $y = x^2$ убывает на луче $(-\infty; 0]$ (рис. 111).

Мы видели, что на луче $[0; +\infty)$ из $x_1 < x_2$ следует $x_1^2 < x_2^2$. Если $k > 0$, то $kx_1^2 < kx_2^2$; если $k < 0$, то $kx_1^2 > kx_2^2$. Это значит, что функция $y = kx^2$ на луче $[0; +\infty)$ возрастает, если $k > 0$, и убывает, если $k < 0$. Аналогично получаем, что функция $y = kx^2$ на луче $(-\infty, 0]$ убывает, если $k > 0$, и возрастает, если $k < 0$.

3. Функция $y = \dfrac{k}{x}$

1. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{1}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$; положим $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Пусть $x_1 < x_2$. Так как x_1 и x_2 — положительные числа, то из $x_1 < x_2$ следует $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$ (см. пример 1 из § 31), т. е. $f(x_1) > f(x_2)$.

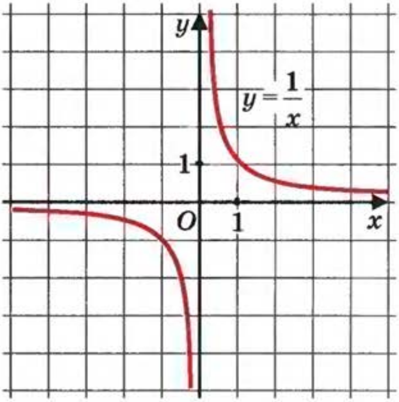


Рис. 112

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$. Это значит, что функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на открытом луче $(0; +\infty)$ (рис. 112).

2. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$; положим $f(x) = \frac{1}{x}$. Пусть $x_1 < x_2$, x_1 и x_2 — отрицательные числа. Тогда $-x_1 > -x_2$, причем обе части последнего неравенства — положительные числа, а потому $\frac{1}{-x_1} < \frac{1}{-x_2}$ (мы снова воспользовались неравенством, доказанным в примере 1 из § 31). Далее имеем $\frac{-1}{x_1} < \frac{-1}{x_2}$, откуда получаем: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на открытом луче $(-\infty; 0)$ (рис. 112).

Мы видели, что на открытом луче $(0; +\infty)$ из $x_1 < x_2$ следует $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$. Если $k > 0$, то $\frac{k}{x_1} > \frac{k}{x_2}$; если $k < 0$, то $\frac{k}{x_1} < \frac{k}{x_2}$. Это значит, что функция $y = \frac{k}{x}$ на открытом луче $(0; +\infty)$ убывает, если $k > 0$, и возрастает, если $k < 0$. Аналогичное утверждение справедливо и на открытом луче $(-\infty; 0)$.

4. Функция $y = \sqrt{x}$

Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$. Докажем, что $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Предположим противное, что $\sqrt{x_1} \geqslant \sqrt{x_2}$. Тогда $\left(\sqrt{x_1}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{x_2}\right)^2$, т. е. $x_1 \geqslant x_2$, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно, а верно неравенство $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$.

Итак, из $0 \leqslant x_1 < x_2$ следует, что $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Это значит, что $y = \sqrt{x}$ — возрастающая функция.

монотонная функция

Обычно термины «возрастающая функция», «убывающая функция» объединяют общим названием **монотонная функция**, а исследование функции на возрастание и убывание называют *исследованием функции на монотонность*.

Пример. Построить и прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{если } x < 0; \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 4; \\ \dfrac{8}{x}, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Решение. 1) Построим график функции $y = 2x^2$ и возьмем ветвь этой параболы при $x < 0$ (рис. 113).

2) Построим график функции $y = \sqrt{x}$ и выделим его часть на отрезке $[0; 4]$ (рис. 114).

3) Построим гиперболу $y = \dfrac{8}{x}$ и выделим ее часть на открытом луче $(4; +\infty)$ (рис. 115).

4) Все три «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и есть график функции $y = f(x)$ (рис. 116).

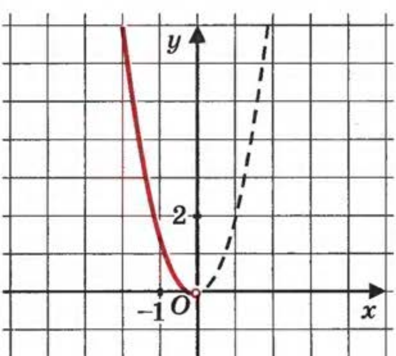


Рис. 113

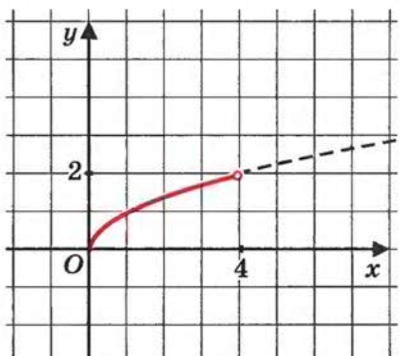


Рис. 114

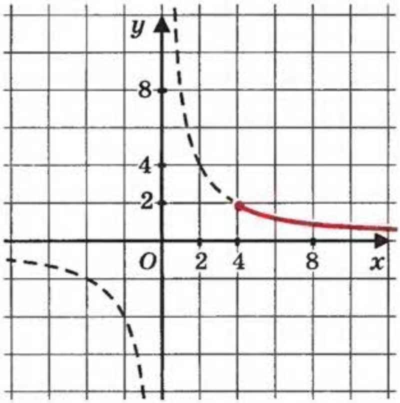


Рис. 115

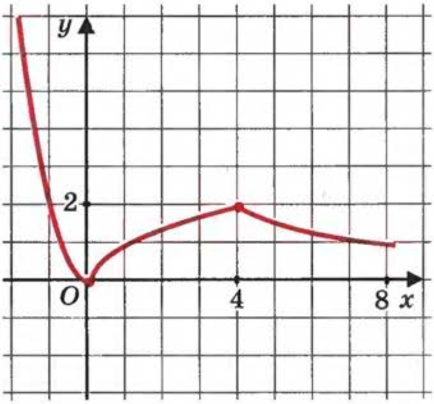


Рис. 116

Прочитаем график функции $y = f(x)$.

1. Область определения функции — вся числовая прямая.
2. $y = 0$ при $x = 0$; $y > 0$ при $x > 0$.
3. Функция убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на отрезке $[0; 4]$, убывает на луче $[4; +\infty)$.
4. Функция ограничена снизу, но не ограничена сверху.
5. $y_{\text{наим}} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{\text{наиб}}$ не существует.
6. Функция непрерывна.
7. Область значений функции — луч $[0; +\infty)$.

§ 33. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

неравенство с переменной

решение неравенства с переменной

Свойства числовых равенств помогали нам решать уравнения, т. е. находить те значения переменной, при которых уравнение обращается в верное числовое равенство. Точно так же свойства числовых неравенств помогут нам решать *неравенства с переменной*, т. е. находить те значения переменной, при которых неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство. Каждое такое значение переменной называют обычно **решением неравенства с переменной.**

Рассмотрим, например, неравенство

$$2x + 5 < 7.$$

Подставив вместо x значение 0, получим: $5 < 7$ — верное неравенство; значит, $x = 0$ — решение данного неравенства. Подставив вместо x значение 1, получим: $7 < 7$ — неверное неравенство; поэтому $x = 1$ не является решением данного неравенства. Подставив вместо x значение -3, получим: $-6 + 5 < 7$, т. е. $-1 < 7$ — верное неравенство; следовательно, $x = -3$ — решение данного неравенства. Подставив вместо x значение 2,5, получим: $2 \cdot 2{,}5 + 5 < 7$, т.е. $10 < 7$ — неверное неравенство. Значит, $x = 2{,}5$ не является решением неравенства.

Но вы же понимаете, что это — тупиковый путь: ни один математик не станет так решать неравенство, ведь *все числа* невозможно перебрать! Вот тут-то и нужно использовать свойства числовых неравенств, рассуждая следующим образом.

Нас интересуют такие числа x, при которых $2x + 5 < 7$ — верное числовое неравенство. Но тогда и $2x + 5 - 5 < 7 - 5$ — верное неравенство (согласно свойству 2 к обеим частям неравенства прибавили одно и то же число -5). Получили более простое неравенство $2x < 2$. Разделив обе его части на положительное число 2, получим (на основании свойства 3) верное неравенство $x < 1$.

Что это значит? Это значит, что решением неравенства является любое число x, которое меньше 1. Эти числа заполняют открытый луч $(-\infty; 1)$. Обычно говорят, что этот луч — *решение неравенства* $2x + 5 < 7$ (точнее было бы говорить о *множестве решений*, но математики, как всегда, экономны в словах). Таким образом, можно использовать два варианта записи решений данного неравенства: $x < 1$, или $(-\infty; 1)$.

Свойства числовых неравенств позволяют руководствоваться при решении неравенств следующими правилами:

Правило 1. *Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не изменив при этом знак неравенства.*

Правило 2. *Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, не изменив при этом знак неравенства.*

Правило 3. *Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.*

Применим эти правила для решения **линейных неравенств**, т. е. неравенств, сводящихся к виду

$$ax + b > 0 \quad (\text{или } ax + b < 0),$$

где a и b — любые числа, за одним исключением: $a \neq 0$.

Пример 1. Решить неравенство $3x - 5 \geqslant 7x - 15$.

Решение. Перенесем член $7x$ в левую часть неравенства, а член -5 — в правую часть неравенства, не забыв при этом изменить знаки и у члена $7x$, и у члена -5 (руководствуемся правилом 1). Тогда получим:

$$3x - 7x \geqslant -15 + 5, \text{ т.е. } -4x \geqslant -10.$$

Разделим обе части последнего неравенства на одно и то же отрицательное число -4, не забыв при этом перейти к неравенству противоположного смысла (руководствуясь правилом 3). Получим: $x \leqslant 2{,}5$. Это и есть решение заданного неравенства.

Как мы условились, для записи решения можно использовать обозначение соответствующего промежутка числовой прямой: $(-\infty; 2{,}5]$.

Ответ: $x \leqslant 2{,}5$, или $(-\infty; 2{,}5]$.

линейное неравенство

равносильные неравенства

равносильное преобразование неравенства

Для неравенств, как и для уравнений, вводится понятие равносильности. Неравенства $f(x) < g(x)$ и $r(x) < s(x)$ называют **равносильными**, если они имеют одинаковые решения (или, в частности, если оба неравенства не имеют решений).

Обычно при решении неравенства стараются заменить данное неравенство более простым, но равносильным ему. Такую замену называют **равносильным преобразованием неравенства.** Эти преобразования как раз и указаны в сформулированных выше правилах 1—3.

П р и м е р 2. Решить неравенство

$$\frac{x}{3}+\frac{2x-1}{5}>2x-\frac{1}{15}.$$

Р е ш е н и е. Умножим обе части неравенства на положительное число 15, оставив знак неравенства без изменения (правило 2). Это позволит нам освободиться от знаменателей, т. е. перейти к более простому неравенству, равносильному данному:

$$15\left(\frac{x}{3}+\frac{2x-1}{5}\right)>15\left(2x-\frac{1}{15}\right);$$

$$5x+3(2x-1)>30x-1;$$

$$5x+6x-3>30x-1;$$

$$11x-3>30x-1.$$

Воспользовавшись для последнего неравенства правилом 1, получим равносильное ему более простое неравенство:

$$11x-30x>-1+3;$$

$$-17x>2.$$

Наконец, применив правило 3, получим: $x<-\frac{2}{17}$.

О т в е т: $x<-\frac{2}{17}$, или $\left(-\infty;-\frac{2}{17}\right)$.

В заключение заметим, что, используя свойства числовых неравенств, мы в этом параграфе учились решать не любое неравенство с переменной, а только такое, которое после ряда простейших преобразований (типа тех, что были выполнены в примерах из этого параграфа) принимает вид $ax>b$ (вместо знака $>$ может быть, разумеется, любой другой знак неравенства, строгого или нестрогого). В следующем параграфе мы научимся решать квадратные неравенства.

§ 34. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

квадратное неравенство

Квадратным неравенством называют неравенство вида

$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ где } a \neq 0$$

(вместо знака $>$ может быть, разумеется, любой другой знак неравенства). Всеми необходимыми для решения таких неравенств фактами теории мы с вами располагаем, в чем сейчас и убедимся.

Пример 1. Решить неравенство:

а) $x^2 - 2x - 3 > 0$; в) $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$;

б) $x^2 - 2x - 3 < 0$; г) $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$.

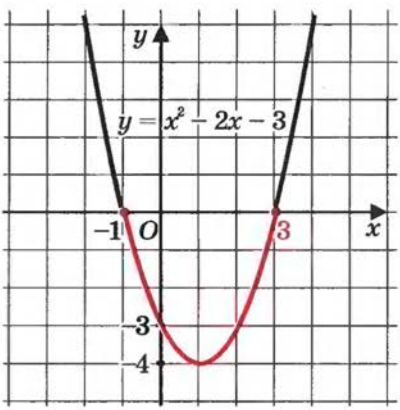


Рис. 117

Решение. а) Рассмотрим параболу $y = x^2 - 2x - 3$, изображенную на рис. 117. Решить неравенство $x^2 - 2x - 3 > 0$ — это значит ответить на вопрос, при каких значениях x ординаты точек параболы положительны. Замечаем, что $y > 0$, т. е. график функции расположен выше оси x, при $x < -1$ или при $x > 3$. Значит, решениями неравенства служат все точки открытого луча $(-\infty; -1)$, а также все точки открытого луча $(3; +\infty)$. Используя знак $\cup$ (знак объединения множеств), ответ можно записать так: $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. Впрочем, ответ можно записать и так: $x < -1$; $x > 3$.

б) Неравенство $x^2 - 2x - 3 < 0$, или $y < 0$, где $y = x^2 - 2x - 3$, также можно решить с помощью рис. 117: график расположен ниже оси x, если $-1 < x < 3$. Поэтому решениями данного неравенства служат все точки интервала $(-1; 3)$.

в) Неравенство $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$ отличается от неравенства $x^2 - 2x - 3 > 0$ тем, что в ответ надо включить и корни уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$, т. е. точки $x = -1$ и $x = 3$. Таким образом, решениями данного нестрогого неравенства являются все точки луча $(-\infty; -1]$, а также все точки луча $[3; +\infty)$.

г) Неравенство $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$ отличается от неравенства $x^2 - 2x - 3 < 0$ тем, что в ответ надо включить и корни уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$, т. е. $x = -1$ и $x = 3$. Следовательно, решениями данного нестрогого неравенства служат все точки отрезка $[-1; 3]$.

Практичные математики обычно говорят так: зачем нам, решая неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, аккуратно строить параболу — график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (как это было сделано в примере 1)? Достаточно сделать схематический набросок графика, для чего следует лишь найти корни квадратного трехчлена (точки пересечения параболы с осью x) и определить, куда направлены ветви параболы — вверх или вниз. Этот схематический набросок даст наглядное истолкование решению неравенства (при этом даже можно на чертеже обойтись без изображения оси y).

Пример 2. Решить неравенство $-2x^2 + 3x + 9 < 0$.

Решение. 1) Найдем корни квадратного трехчлена $-2x^2 + 3x + 9$: $x_1 = 3$, $x_2 = -1{,}5$.

2) Парабола, служащая графиком функции $y = -2x^2 + 3x + 9$, пересекает ось x в точках 3 и $-1{,}5$, а ветви параболы направлены вниз, поскольку старший коэффициент — отрицательное число -2. На рис. 118 представлен набросок графика.

3) Используя рис. 118, делаем вывод: $y < 0$ на тех промежутках оси x, где график расположен ниже оси x, т. е. на открытом луче $(-\infty; -1{,}5)$ или на открытом луче $(3; +\infty)$.

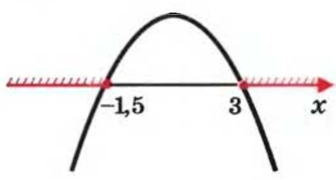


Рис. 118

Ответ: $x < -1{,}5$; $x > 3$.

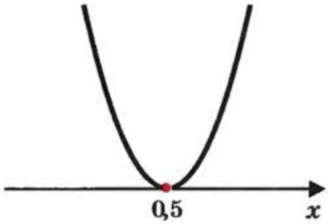


Рис. 119

Пример 3. Решить неравенство $4x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$.

Решение. 1) Из уравнения $4x^2 - 4x + 1 = 0$ находим: $x_{1,2} = \frac{1}{2}$.

2) Квадратный трехчлен имеет один корень $x = \frac{1}{2}$; это значит, что парабола, служащая графиком квадратного трехчлена, не пересекает ось x, а *касается* ее в точке $x = \frac{1}{2}$. Ветви параболы направлены вверх (рис. 119).

3) С помощью геометрической модели, представленной на рис. 118, устанавливаем, что заданное неравенство выполняется только в точке $x = \frac{1}{2}$, поскольку при всех других значениях x ординаты графика положительны.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Вы, наверное, заметили, что фактически в примерах 1, 2, 3 использовался вполне определенный алгоритм решения квадратных неравенств, оформим его.

Алгоритм решения квадратного неравенства
$ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$)

1. Найти корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.
2. Отметить найденные корни на оси x и определить, куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы, служащей графиком функции $y = ax^2 + bx + c$; сделать набросок графика.
3. С помощью полученной геометрической модели определить, на каких промежутках оси x ординаты графика положительны (отрицательны); включить эти промежутки в ответ.

На первом шаге этого алгоритма требуется найти корни квадратного трехчлена. Но ведь корни могут и не существовать, что же делать? Тогда алгоритм неприменим, значит, надо рассуждать как-то по-другому. Ключ к этим рассуждениям дают следующие теоремы.

Теорема 1 ***Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней (т.е. его дискриминант D — отрицательное число) и если при этом $a > 0$, то при всех значениях x выполняется неравенство***

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Иными словами, если $D < 0$, $a > 0$, то неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ выполняется при всех x; напротив, неравенство $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ не имеет решений.

Доказательство. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, ветви которой направлены вверх (поскольку $a > 0$) и которая не пересекает ось x, так как корней у квадратного трехчлена по условию нет. График представлен на рис. 120. Видим, что при всех x график расположен выше оси x, а это значит, что при всех x выполняется неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 ***Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней (т. е. его дискриминант D — отрицательное число) и если при этом $a < 0$, то при всех значениях x выполняется неравенство***

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

Иными словами, если $D < 0$, $a < 0$, то неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ выполняется при всех x; напротив, неравенство $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ не имеет решений.

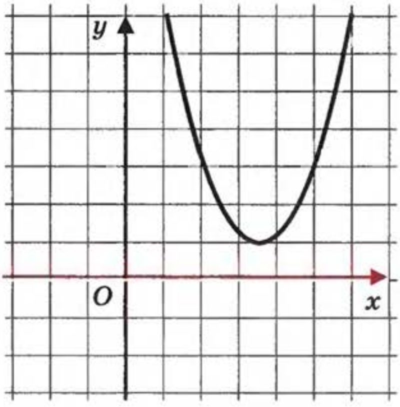


Рис. 120

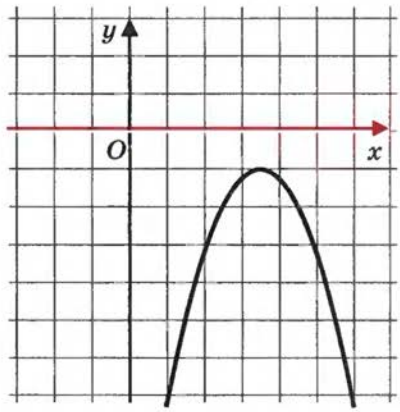


Рис. 121

Доказательство. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, ветви которой направлены вниз (поскольку $a < 0$) и которая не пересекает ось x, так как корней у квадратного трехчлена по условию нет. График представлен на рис. 121. Видим, что при всех x график расположен ниже оси x, а это значит, что при всех x выполняется неравенство $ax^2 + bx + c < 0$, что и требовалось доказать.

Пример 4. Решить неравенство:

а) $2x^2 - x + 4 > 0$; б) $-x^2 + 3x - 8 \geqslant 0$.

Решение. а) Найдем дискриминант квадратного трехчлена $2x^2 - x + 4$. Имеем: $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -31 < 0$. Старший коэффициент трехчлена (число 2) положителен. Значит, по теореме 1 при всех x выполняется неравенство $2x^2 - x + 4 > 0$, т. е. решением заданного неравенства служит вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$.

б) Найдем дискриминант квадратного трехчлена $-x^2 + 3x - 8$. Имеем: $D = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8) = -23 < 0$. Старший коэффициент трехчлена (число -1) отрицателен. Следовательно, по теореме 2 при всех x выполняется неравенство $-x^2 + 3x - 8 < 0$. Это значит, что неравенство $-x^2 + 3x - 8 \geqslant 0$ не выполняется ни при каком значении x, т. е. заданное неравенство не имеет решений.

Ответ: а) $(-\infty; +\infty)$; б) нет решений.

В следующем примере мы познакомимся еще с одним способом рассуждений, который применяется при решении квадратных неравенств.

Пример 5. Решить неравенство $3x^2 - 10x + 3 < 0$.

Решение. Разложим квадратный трехчлен $3x^2 - 10x + 3$ на множители. Корнями трехчлена являются числа 3 и $\frac{1}{3}$, поэтому, воспользовавшись формулой

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

получим:

$$3x^2 - 10x + 3 = 3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Отметим на числовой прямой корни трехчлена: 3 и $\frac{1}{3}$ (рис. 122). Пусть $x > 3$; тогда $x - 3 > 0$ и $x - \frac{1}{3} > 0$, а значит, и произведение $3(x-3)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ положительно. Далее, пусть $\frac{1}{3} < x < 3$; тогда $x - 3 < 0$, а $x - \frac{1}{3} > 0$. Следовательно, произведение $3(x-3)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ отрицательно. Пусть, наконец, $x < \frac{1}{3}$; тогда $x - 3 < 0$ и $x - \frac{1}{3} < 0$. Но в таком случае произведение $3(x-3)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ положительно.

Рис. 122

Подводя итог рассуждениям, приходим к выводу: знаки квадратного трехчлена $3x^2 - 10x + 3$ изменяются так, как показано на рис. 122. Нас же интересует, при каких x квадратный трехчлен принимает отрицательные значения. С помощью рис. 122 делаем вывод: квадратный трехчлен $3x^2 - 10x + 3$ принимает отрицательные значения для любого значения x из интервала $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$, или $\frac{1}{3} < x < 3$.

узнаете далее

Замечание. **Метод рассуждений, который мы применили в примере 5, обычно называют методом *интервалов* (или *методом промежутков*). Он активно используется в математике для решения рациональных неравенств. В 9-м классе мы изучим метод интервалов более детально.**

Пример 6. При каких значениях параметра p квадратное уравнение $x^2 - 5x + p^2 = 0$:

а) имеет два различных корня; б) имеет один корень; в) не имеет корней?

Решение. Число корней квадратного уравнения зависит от знака его дискриминанта D. В данном случае $D = 25 - 4p^2$.

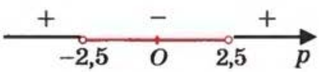


Рис. 123

а) Квадратное уравнение имеет два различных корня, если $D > 0$, значит, задача сводится к решению неравенства $25 - 4p^2 > 0$. Умножим обе части этого неравенства на -1 (не забыв изменить при этом знак неравенства). Получим равносильное неравенство $4p^2 - 25 < 0$. Далее имеем $4(p - 2,5)(p + 2,5) < 0$. Знаки выражения $4(p - 2,5)(p + 2,5)$ указаны на рис. 123. Делаем вывод, что неравенство $4(p - 2,5)(p + 2,5) < 0$ выполняется для всех значений p из интервала $(-2,5; 2,5)$. Именно при этих значениях параметра p данное квадратное уравнение имеет два различных корня.

б) Квадратное уравнение имеет один корень, если $D = 0$. Как мы установили выше, $D = 0$ при $p = 2,5$ или $p = -2,5$. Именно при этих значениях параметра p данное квадратное уравнение имеет только один корень.

в) Квадратное уравнение не имеет корней, если $D < 0$. Решим неравенство $25 - 4p^2 < 0$:

$$4p^2 - 25 > 0;$$
$$4(p - 2,5)(p + 2,5) > 0,$$

откуда (см. рис. 123) $p < -2,5$, $p > 2,5$. При этих значениях параметра p данное квадратное уравнение не имеет корней.

Ответ: а) при $-2,5 < p < 2,5$;
б) при $p = 2,5$ или $p = -2,5$;
в) при $p < -2,5$ или $p > 2,5$.

§ 35. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

И в 7-м и в 8-м классах мы часто решали уравнения графически. Заметили ли вы, что практически во всех таких примерах уравнения имели «хорошие» корни? Это были целые числа, которые без труда отыскивались с помощью графиков, особенно на клетчатой бумаге. Но так бывает далеко не всегда, просто мы до сих пор составляли «хорошие» примеры.

Рассмотрим два уравнения: $\sqrt{x} = 2 - x$ и $\sqrt{x} = 4 - x$. Первое уравнение имеет единственный корень $x = 1$, поскольку графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 2 - x$ пересекаются в одной точке $A(1;\ 1)$ (рис. 124). Во втором случае графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 4 - x$ также пересекаются в одной точке B (рис. 125), но с «плохими» координатами. Пользуясь чертежом, можно сделать вывод, что абсцисса точки B примерно равна 2,5. В подобных случаях говорят не о точном, а о приближенном решении уравнения и пишут так: $x \approx 2{,}5$.

приближенное значение числа по недостатку

приближенное значение числа по избытку

Это одна из причин, по которым математики решили ввести понятие приближенного значения действительного числа. Есть и вторая причина, причем, может быть, даже более важная. Что такое действительное число? Это бесконечная десятичная дробь. Но производить вычисления с бесконечными десятичными дробями неудобно, поэтому на практике пользуются приближенными значениями действительных чисел. Например, для числа $\pi = 3{,}141592...$ пользуются приближенным равенством $\pi \approx 3{,}141$ или $\pi \approx 3{,}142$. Первое называют *приближенным значением* (или приближением) числа π *по недостатку с точностью до* 0,001; второе называют *приближенным значением* (приближением) числа π *по избытку с точностью до* 0,001. Можно взять более точные приближения: например, $\pi \approx 3{,}1415$ — приближение по недостатку с точностью до 0,0001; $\pi \approx 3{,}1416$ — приближение по избытку с точностью до

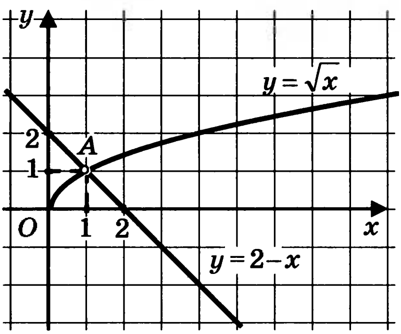


Рис. 124

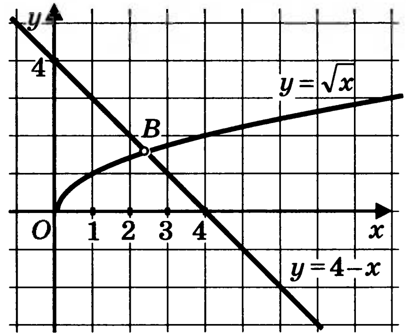


Рис. 125

0,0001. Можно взять менее точные приближения, скажем с точностью до 0,01: по недостатку $\pi \approx 3{,}14$, по избытку $\pi \approx 3{,}15$.

Знак приближенного равенства $\approx$ вы использовали и в курсе математики 5—6-го классов и, вероятно, в курсе физики, да и мы пользовались им раньше, например в § 11.

Пример. Найти приближенные значения по недостатку и по избытку с точностью до 0,01 для чисел:

а) $\sqrt{5}$; б) $2+\sqrt{5}$; в) $\frac{7}{22}$.

Решение. а) Мы знаем, что $\sqrt{5} = 2{,}236...$ (см. § 11), следовательно, $\sqrt{5} \approx 2{,}23$ — это приближение по недостатку с точностью до 0,01; $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ — это приближение по избытку с точностью до 0,01.

б) $2+\sqrt{5} = 2{,}000... + 2{,}236... = 4{,}236...$. Значит, $2+\sqrt{5} \approx 4{,}23$ — это приближение по недостатку с точностью до 0,01; $2+\sqrt{5} \approx 4{,}24$ — это приближение по избытку с точностью до 0,01.

в) Имеем $\frac{7}{22} = 0{,}31818...$ (см. § 9). Таким образом, $\frac{7}{22} \approx 0{,}31$ — это приближение по недостатку с точностью до 0,01; $\frac{7}{22} \approx 0{,}32$ — это приближение по избытку с точностью до 0,01.

Приближение по недостатку и приближение по избытку называют иногда *округлением* числа.

абсолютная погрешность

Определение. **Погрешностью приближения (абсолютной погрешностью)** называют модуль разности между точным значением величины x и ее приближенным значением a: погрешность приближения — это $|x - a|$.

Например, погрешность приближенного равенства $\pi \approx 3{,}141$ или $\pi \approx 3{,}142$ выражается как $|\pi - 3{,}141|$ или соответственно как $|\pi - 3{,}142|$.

Возникает чисто практический вопрос: какое приближение лучше, по недостатку или по избытку, т. е. в каком случае погрешность меньше? Это, конечно, зависит от конкретного числа, для которого составляются приближения. Обычно при округлении положительных чисел, записанных в виде бесконечной десятичной дроби, пользуются следующим правилом:

Правило округления. *Если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то нужно брать приближение по недостатку; если первая отбрасываемая цифра больше или равна 5, то нужно брать приближение по избытку.*

Применим это правило ко всем рассмотренным в этом параграфе числам; выберем для рассмотренных чисел те приближения, для которых погрешность окажется наименьшей.

1) $\pi = 3{,}141592...$. С точностью до 0,001 имеем $\pi \approx 3{,}142$; здесь первая отбрасываемая цифра равна 5 (на четвертом месте после запятой), поэтому взяли приближение по избытку. С точностью до 0,0001 имеем $\pi \approx 3{,}1416$ — и здесь взяли приближение по избытку, поскольку первая отбрасываемая цифра (на пятом месте после запятой) равна 9. А вот с точностью до 0,01 надо взять приближение по недостатку: $\pi \approx 3{,}14$.

2) $\sqrt{5} = 2{,}236...$. С точностью до 0,01 имеем $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ (приближение по избытку).

3) $2 + \sqrt{5} = 4{,}236\ldots$. С точностью до 0,01 имеем $2 + \sqrt{5} \approx$ $\approx 4{,}24$ (приближение по избытку).

4) $\frac{7}{22} = 0{,}31818\ldots$. С точностью до 0,001 имеем $\frac{7}{22} \approx 0{,}318$ (приближение по недостатку).

Рассмотрим последний пример подробнее. Возьмем укрупненный фрагмент координатной прямой (рис. 126). Точка $\frac{7}{22}$ принадлежит отрезку [0,318; 0,319], значит, ее расстояния от концов отрезка не превосходят длины отрезка. Расстояния точки $\frac{7}{22}$ от концов отрезка равны соответственно $\left|\frac{7}{22} - 0{,}318\right|$; $\left|\frac{7}{22} - 0{,}319\right|$, а длина отрезка [0,318; 0,319] равна 0,001. Значит, $\left|\frac{7}{22} - 0{,}318\right| \leqslant 0{,}001$ и $\left|\frac{7}{22} - 0{,}319\right| \leqslant 0{,}001$.

Рис. 126

Итак, в обоих случаях (и для приближения числа $\frac{7}{22}$ по недостатку, и для приближения его по избытку) погрешность не превосходит 0,001.

До сих пор мы говорили: приближения с точностью до 0,01, до 0,001 и т. д. Теперь мы можем навести порядок в использовании терминологии.

Если a — приближенное значение числа x и $|x - a| \leqslant h$, то говорят, что абсолютная погрешность приближения не превосходит h или что число x равно числу a с точностью до h.

Почему же важно уметь находить приближенные значения чисел? Дело в том, что практически невозможно оперировать с бесконечными десятичными дробями и использовать их для измерения величин. На практике во многих случаях вместо точных значений берут приближения с заранее заданной точностью (погрешностью). Эта идея заложена и в калькуляторах, на дисплеях которых высвечивается конечная десятичная дробь, т. е. приближение выводимого на экран числа (за редким исключением, когда выводимое число представляет собой конечную десятичную дробь, умещающуюся на экране).

§ 36. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Выше мы отмечали, что на практике для вычислений используют конечные десятичные дроби, которые служат либо точными, либо приближенными значениями величин. При этом для удобства вычислений положительную конечную десятичную дробь иногда представляют в *стандартном виде*. Что это такое? Рассмотрим несколько примеров.

1. Число $a_1 = 274{,}35$ можно записать так: $2{,}7435 \cdot 10^2$.
2. Число $a_2 = 5434$ можно записать так: $5{,}434 \cdot 10^3$.
3. Число $a_3 = 0{,}273$ можно записать так: $2{,}73 \cdot 0{,}1 = 2{,}73 \cdot 10^{-1}$.
4. Число $a_4 = 0{,}0013$ можно записать так: $1{,}3 \cdot 0{,}001 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$.
5. Число $a_5 = 3{,}62$ можно записать так: $3{,}62 \cdot 10^0$.

Во всех случаях мы представили заданное положительное число a_k в виде произведения двух множителей. В качестве первого множителя мы брали число с одной значащей цифрой до запятой, т. е. число, целая часть которого — однозначное число (от 1 до 9). В качестве второго множителя брали число 10 в целой степени.

Определение. **Стандартным видом положительного числа a** называют его представление в виде $a_0 \cdot 10^m$, где $1 \leqslant a_0 < 10$, а m — целое число; число m называют **порядком числа a**.

стандартный вид числа

порядок числа

Так, в рассмотренных выше примерах имеем:
1) порядок числа 274,35 равен 2;
2) порядок числа 5434 равен 3;

3) порядок числа 0,273 равен −1;
4) порядок числа 0,0013 равен −3;
5) порядок числа 3,62 равен 0.

Переход к стандартному виду числа иногда используют для вычислений.

Пример. Вычислить:

а) $2734 \cdot 0{,}007$; б) $24{,}377 : 0{,}22$; в) $(0{,}0043)^2$.

Решение. а) $2734 \cdot 0{,}007 = (2{,}734 \cdot 10^3) \cdot (7 \cdot 10^{-3}) =$
$= (2{,}734 \cdot 7) \cdot (10^3 \cdot 10^{-3}) = 19{,}138 \cdot 10^0 = 19{,}138 \cdot 1 = 19{,}138$;

б) $24{,}377 : 0{,}22 = (2{,}4377 \cdot 10) : (2{,}2 \cdot 10^{-1}) =$
$= (2{,}4377 : 2{,}2) \cdot (10 : 10^{-1}) = 1{,}10805 \cdot 10^{1-(-1)} =$
$= 1{,}10805 \cdot 100 = 110{,}805$;

в) $(0{,}0043)^2 = (4{,}3 \cdot 10^{-3})^2 = 4{,}3^2 \cdot (10^{-3})^2 = 18{,}49 \cdot 10^{-6} =$
$= 1{,}849 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 1{,}849 \cdot 10^{-5} = 0{,}00001849$.

Однако основная польза от стандартной записи числа заключается в следующем. Представьте себе, что вы производите вычисления или с очень большими, или с очень маленькими положительными числами. Вам нужно вывести, скажем, на дисплей калькулятора числа $a = 217\,000\,000\,000$ и $b = 0{,}0000045412$ и перемножить их. А на экране умещается только 8 знаков. Вот тут-то и пригодятся стандартные записи чисел. Имеем: $a = 2{,}17 \cdot 10^{11}$; $b = 4{,}5412 \cdot 10^{-6}$; тогда

$$a \cdot b = 2{,}17 \cdot 10^{11} \cdot 4{,}5412 \cdot 10^{-6} = 9{,}854404 \cdot 10^5 = 985\,440{,}4.$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этой главе вы познакомились с новыми терминами математического языка:
линейное неравенство, квадратное неравенство;
решение неравенства;
равносильные неравенства, равносильные преобразования неравенств;

среднее арифметическое, среднее геометрическое двух чисел;
неравенства одинакового смысла, неравенства противоположного смысла;
приближенное значение числа по недостатку, по избытку; округление числа;
погрешность (точность) приближения;
стандартный вид положительного числа;
порядок числа.

Вы познакомились со <u>свойствами числовых неравенств:</u>
если $a > b$, $b > c$, то $a > c$;
если $a > b$, то $a + c > b + c$;
если $a > b$, $m > 0$, то $am > bm$;
если $a > b$, $m < 0$, то $am < bm$;
если $a > b$, то $-a < -b$;
если $a > b$, $c > d$, то $a + c > b + d$;
если $a > b > 0$, $c > d > 0$, то $ac > bd$;
если $a > b \geqslant 0$, $n \in N$, то $a^n > b^n$;
если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Мы изучили несколько <u>правил</u> решения неравенств с одной переменной (равносильных преобразований неравенств).

Мы, наконец, получили <u>алгоритм</u> решения квадратного неравенства.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич

АЛГЕБРА

8 класс

В двух частях

Часть 1

УЧЕБНИК
для учащихся общеобразовательных учреждений

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление
и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректоры *Л. С. Щербакова, Л. А. Ключникова*
Компьютерная верстка: *Е. Н. Подчепаева*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003577.04.09 от 06.04.2009.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,5. Тираж 150 000 экз. Заказ № 25298 (К-Гз).

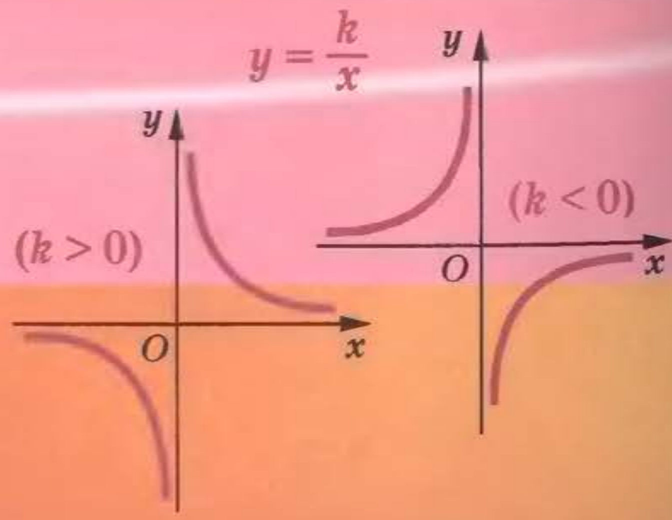
Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

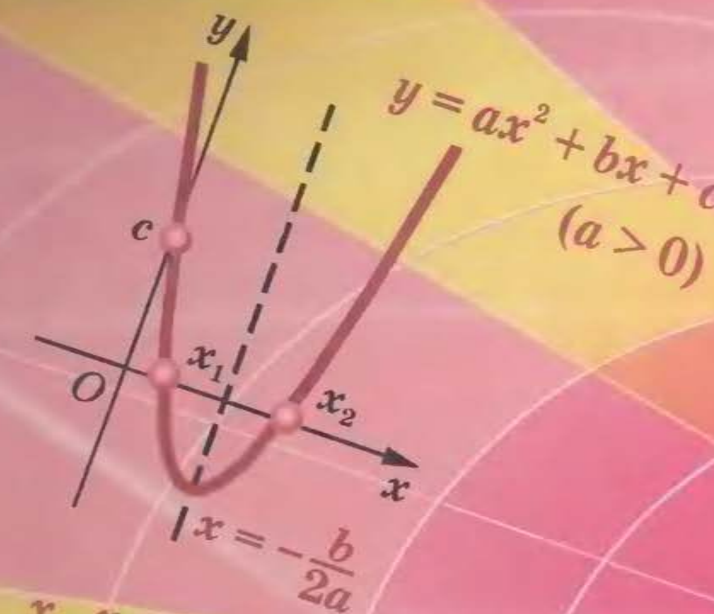
Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА—ПОЧТОЙ»).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285. E-mail: magazin@mnemozina.ru
Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

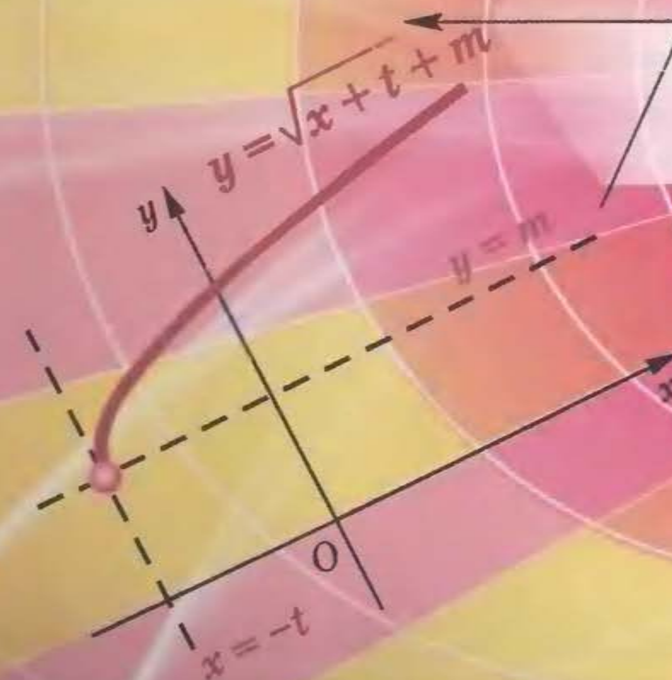
ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801





x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$



Алгебра

Часть 1

УЧЕБНИК

8

ISBN 978-5-346-01427-0

9 785346 014270