А. А. Гусак

Пособие к решению задач по высшей математике

Издание 3-е, стереотипное

Издательство БГУ им. В. И. Ленина
Минск 1973

Гусак А. А.

Г 96 Пособие к решению задач по высшей математике. Изд. 3-е, стереотип. Мн., Изд. БГУ, 1973.

532 стр. с илл.

Пособие включает следующие разделы: аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, векторная алгебра, определители и матрицы, введение в анализ, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, дифференциальные уравнения.

Пособие содержит определения основных понятий, соответствующие формулы, около 700 примеров и задач с подробными решениями. В конце каждого параграфа помещены задачи для самостоятельного решения, приведены ответы, к некоторым задачам даны указания.

$Г \frac{0223-010}{М317-73} 8-73$

I. Аналитическая геометрия, векторная алгебра, определители, матрицы

Глава 1. Аналитическая геометрия на плоскости

§ 1. 1. Система прямоугольных декартовых координат на плоскости. Простейшие задачи

Прямоугольными декартовыми координатами точки M на плоскости называются расстояния от этой точки $x = ML$, $y = MN$ (рис. 1.1) до координатных осей Oy и Ox, измеренные одной и той же единицей длины и взятые с соответствующими знаками. Если точка расположена справа от оси Oy, то абсцисса x данной точки положительна, если слева — отрицательна; если точка лежит выше оси Ox, ее ордината y положительна, если ниже оси Ox — отрицательна (при указанном на рис. 1.1 выборе

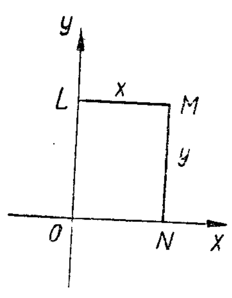

Рис. 1.1

положительных направлений осей, обозначенных стрелками). Для точек, лежащих на оси Oy, $x = 0$; для точек, лежащих на оси Ox, $y = 0$. Запись $M(x, y)$ означает, что точка M имеет координаты x и y.

1. Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.1}$$

2. Координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок M_1M_2, где $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, в данном отношении $M_1M:MM_2 = l$ (при $l \neq -1$), определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}; \quad y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}. \tag{1.2}$$

3. Координаты середины отрезка M_1M_2 вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{1.3}$$

4. Площадь треугольника с вершинами $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ равна

$$S = \pm\frac{1}{2}\left[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right], \tag{1.4}$$

где знак минус следует брать, когда выражение в квадратных скобках отрицательно, знак плюс — когда оно положительно.

Замечание. Формула (1.4) может быть написана в виде

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|, \tag{1.4'}$$

где двумя вертикальными чертами обозначена абсолютная величина (арифметическое значение) выражения, стоящего в квадратных скобках. Абсолютная величина числа x определяется так:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например, $|4| = 4$, $|-6| = 6$.

Примеры

1. Построить точку M (2, 3). Найти точки, симметричные точке M относительно координатных осей, биссектрис координатных углов и начала координат.

Замечание. Выражение «найти точки» означает найти координаты этих точек.

Построим сначала точку M (2, 3). Отложив на оси Ox вправо от начала координат отрезок $OM_1 = 2$ (рис. 1.2), восставим в точке M_1 перпендикуляр к оси Ox. Отложив на оси Oy кверху от начала координат отрезок $OM_2 = 3$, восставим в точке M_2 перпендикуляр к оси Oy. Точка M пересечения указанных перпендикуляров является искомой. (Эту точку можно построить и другим способом: на перпендикуляре к оси Ox, проходящем через точку M_1, отложить отрезок $M_1M = 3$ кверху от оси Ox.)

Проводя последующие построения, пользуемся определением точек, симметричных относительно данной прямой (это точки, лежащие на одном перпендикуляре к прямой, на одинаковых расстояниях и по разные стороны от нее).

Построим точку N, симметричную точке M, относительно оси Ox. Координаты этой точки $x_N = OM_1$, $y_N = -M_1N$ (точка N справа от оси Oy, поэтому $x > 0$ и ниже оси Ox, поэтому $y < 0$). Но $OM_1 = x_M$, $M_1N = M_1M = y_M$, следовательно, $x_N = x_M$, $y_N = -y_M$. Так как из условия $x_M = 2$, $y_M = 3$, то $N(2, -3)$.

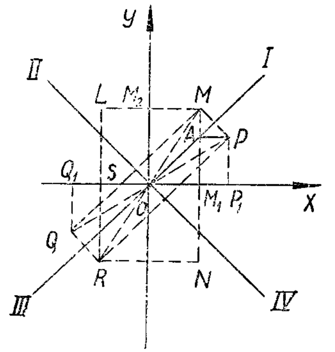

Рис. 1.2

Для точки L, симметричной точке M относительно оси Oy, находим: $x_L = -LM_2 = -M_2M = -x_M$, $y_L = LS = M_1M = y_M$, поэтому $L(-2, 3)$.

Построим теперь точку P, симметричную точке M относительно биссектрисы I и III координатных углов.

Координаты ее $x_P = OP_1$ и $y_P = PP_1$ выразим через координаты точки M. С этой целью рассмотрим равнобедренные треугольники MAP и OAM_1 (A — точка пересечения M_1M и биссектрисы). Так как $OM_1 = M_1A$ и $M_1A = P_1P$, то $P_1P = OM_1$, т. е. $y_P = x_M$. Далее, поскольку $AM = AP = M_1P_1$, $M_1M = M_1A + AM$, $OP_1 = OM_1 + M_1P_1$, то $M_1M = OP_1$, т. е. $x_P = y_M$. Таким образом, получим $P(3, 2)$.

Построим точку Q, симметричную точке M относительно биссектрисы II и IV координатных углов. Из равных прямоугольных треугольников OQQ_1 и OPP_1 ($OQ = OP$, $\angle QOQ_1 = \angle POP_1$) находим, что $OQ_1 = OP_1$, $QQ_1 = PP_1$. Так как $OP_1 = M_1M$ и $PP_1 = OM_1$, то $OQ_1 = M_1M$, $QQ_1 = OM_1$. Следовательно, $x_Q = -y_M$, $y_Q = -x_M$ и $Q(-3, -2)$ (координаты точки Q отрицательны, так как она лежит ниже оси Ox и слева от оси Oy).

Построив точку R, симметричную точке M относительно начала координат, и рассмотрев равные прямоугольные треугольники ORS и OM_1M ($OR = OM$, $\angle SOR = \angle M_1OM$), получим $OS = OM_1$, $SR = M_1M$, поэтому $x_R = -x_M$, $y_R = -y_M$ и $R(-2, -3)$.

Ответ: N (2,—3), L (—2, 3), P (3, 2), Q (—3,—2), R (—2,—3).

Замечание. Координаты точек N, L, P, Q, R, симметричных точке M (2, 3) относительно соответственно оси Ox, оси Oy, биссектрисы I и III координатных углов, биссектрисы II и IV координатных углов начала координат, можно получить с помощью следующих формальных действий:

1) для точки N — изменить знак y, оставив x прежним;
2) для точки L — изменить знак x, оставив прежним y;
3) для точки P — поменять местами x и y;
4) для точки Q — поменять местами x и y, изменив их знаки;
5) для точки R — изменить знаки x и y.

2. Доказать, что треугольник с вершинами $P(-2, -1)$, $Q(6, 1)$, $R(3, 4)$ — прямоугольный.

Зная стороны a, b, c треугольника, с помощью теоремы Пифагора можно установить, является ли данный треугольник прямоугольным ($a^2 + b^2 = c^2$), остроугольным ($c^2 < a^2 + b^2$) или тупоугольным ($c^2 > a^2 + b^2$).

Найдем длины сторон данного треугольника, пользуясь формулой (1.1). Вычислим вначале длину PQ, подставляя в формулу (1.1) координаты точек P и Q $x_1 = -2$, $y_1 = -1$, $x_2 = 6$, $y_2 = 1$:

$$PQ = \sqrt{[6-(-2)]^2 + [1-(-1)]^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}.$$

Для вычисления PR подставим в формулу (1.1) значения $x_1 = -2$, $y_1 = -1$, $x_2 = 3$, $y_2 = 4$:

$$PR = \sqrt{[3-(-2)]^2 + [4-(-1)]^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}.$$

Аналогично для 3-й стороны $x_1 = 6$, $y_1 = 1$, $x_2 = 3$, $y_2 = 4$:

$$QR = \sqrt{(3-6)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18}.$$

Квадраты длин сторон будут соответственно равны:

$$PQ^2 = 68;\ PR^2 = 50;\ QR^2 = 18,$$

откуда

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2.$$

Последнее равенство означает, что треугольник прямоугольный.

Замечание. Формула (1.1) не изменится, если в ней поменять местами x_1 и x_2, y_1 и y_2 (так как $(x_1-x_2)^2 = (x_2-x_1)^2$, $(y_1-y_2)^2 = (y_2-y_1)^2$). При использовании этой формулы первой точкой (т. е. имеющей координаты x_1, y_1) можно считать любую из двух данных точек, оставшаяся точка будет второй (т. е. имеющей координаты x_2, y_2).

3. Вычислить длины медиан треугольника с вершинами $P(-3, 2)$, $Q(5, 4)$, $R(7, -2)$.

Найдем вначале основания медиан, являющиеся серединами сторон треугольника. Пусть L, M, N — соответственно середины

сторон PQ, QR, PR. Координаты точки L определяем по формулам (1.3). В данном случае $x_1 = -3$, $y_1 = 2$, $x_2 = 5$, $y_2 = 4$. Обозначая координаты точки L через x_L и y_L, получим:

$$x_L = \frac{-3+5}{2} = 1;\ y_L = \frac{2+4}{2} = 3;\ L(1, 3).$$

Аналогичным образом находим:

$$x_M = \frac{5+7}{2} = 6;\quad y_M = \frac{4+(-2)}{2} = 1;\ M(6, 1);$$

$$x_N = \frac{(-3)+7}{2} = 2;\quad y_N = \frac{2+(-2)}{2} = 0;\ N(2, 0).$$

Вычислим длину медианы LR. Подставляя в формулу (1.1) координаты точек L и R, т. е. значения $x_1 = 1$, $y_1 = 3$, $x_2 = 7$, $y_2 = -2$, получим

$$LR = \sqrt{(7-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{61}.$$

По формуле (1.1) находим длины медиан MP и NQ:

$$MP = \sqrt{[6-(-3)]^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9^2 + (-1)^2} = \sqrt{82};$$

$$NQ = \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Замечание. Формулы (1.3) не изменятся, если в них поменять местами x_1 и x_2, y_1 и y_2. При использовании этих формул первой точкой (т. е. имеющей координаты x_1, y_1) можно считать любую из двух данных точек.

4. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(1, -2)$, $B(3, 2)$ и точка N (5, -1) пересечения его диагоналей. Найти две другие вершины параллелограмма.

Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, то N — середина BD и середина AC, где D и C — две другие вершины. Формулы (1.3) для данного случая примут вид:

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2},\ y_N = \frac{y_A + y_C}{2};\quad x_N = \frac{x_B + x_D}{2},\quad y_N = \frac{y_B + y_D}{2},$$

откуда

$$x_C = 2x_N - x_A,\ y_C = 2y_N - y_A;\ x_D = 2x_N - x_B,\ y_D = 2y_N - y_B.$$

Подставляя в эти формулы координаты точек A, B и N найдем вершины $C(9, 0)$, $D(7, -4)$.

5. В треугольнике с вершинами $P(2, 3)$, $Q(6, 3)$, $R(6, -5)$ найти длину биссектрисы QL.

Из элементарной геометрии известно, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Найдем длины этих сторон. По формуле (1.1) имеем:

$$PQ = \sqrt{(6-2)^2 + (3-3)^2} = 4,$$
$$QR = \sqrt{(6-6)^2 + (-5-3)^2} = 8.$$

Следовательно,

$$PQ:QR = 4:8 = 1:2 \ \text{ и } \ PL:LR = 1:2,$$

где $L(x,\ y)$ — точка пересечения биссектрисы угла Q со стороной PR. Координаты точки L определим по формулам (1.2). В данном случае:

$$x_1 = 2;\ y_1 = 3;\ x_2 = 6;\ y_2 = -5;\ l = \frac{1}{2},$$

поэтому:

$$x = \frac{2 + \frac{1}{2}\cdot 6}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{10}{3};\qquad y = \frac{3 + \frac{1}{2}(-5)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3};\ L\left(\frac{10}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

По формуле (1.1) вычисляем длину биссектрисы QL:

$$QL = \sqrt{\left(6 - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Замечание. В формулах (1.2) нумерация точек имеет существенное значение. При использовании этих формул нужно различать начало и конец отрезка. В данном примере можно было бы рассматривать отношение $RL:LP = 2:1$, тогда точку R нужно считать первой (т. е. $x_1 = 6$, $y_1 = -5$), точку P — второй ($x_2 = 2$, $y_2 = 3$), число l в этом случае уже будет другим, а именно $l = 2$. (Убедитесь в том, что подстановка этих значений в формулы (1.2) дает прежний результат. Сделайте чертеж.)

6. Отрезок, определяемый точками $M_1(-6,\ 7)$, $M_2(-2,\ 3)$, разделен на 4 равные части. Найти точки деления L, M, N.

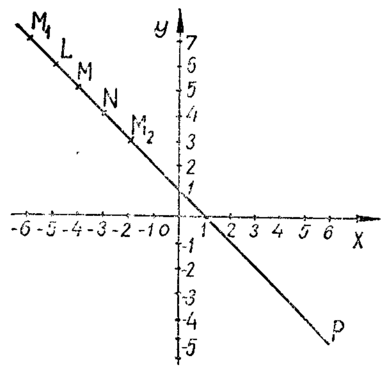

Рис. 1.3

До какой точки P нужно продолжить отрезок M_1M_2, чтобы его длина увеличилась в 3 раза?

По условию отношения, в которых точки L, M, N и P (рис. 1.3) делят отрезок M_1M_2, соответственно равны:

$$l_1 = \frac{M_1L}{LM_2} = \frac{1}{3};\quad l_2 = \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{2}{2} = 1;\ l_3 = \frac{M_1N}{NM_2} = \frac{3}{1} = 3;\ l_4 = \frac{M_1P}{PM_2} = -\frac{3}{2}$$

(в последнем случае нужно взять знак минус, так как отрезки M_1P и PM_2 имеют противоположные направления). Координаты точек L, N и P определим по формулам (1.2), координаты точки M — по формулам (1.3).

Определяем координаты точки L. Подставив в формулы (1.2) значения $x_1 = -6$, $y_1 = 7$, $x_2 = -2$, $y_2 = 3$, $l = \frac{1}{3}$, получим:

$$x_L = \frac{-6 + \frac{1}{3}(-2)}{1 + \frac{1}{3}} = -5;\ y_L = \frac{7 + \frac{1}{3}\cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = 6;\ L(-5,\ 6).$$

Так как M — середина отрезка M_1M_2, то по формуле (1.3) имеем:

$$x_M = \frac{-6 + (-2)}{2} = -4;\ y_M = \frac{7 + 3}{2} = 5;\ M(-4{,}5).$$

Подставляя в формулы (1.2) координаты точек M_1 и M_2 и $l_3 = 3$, находим точку N:

$$x_N = \frac{-6 + 3(-2)}{1 + 3} = -3;\ y_N = \frac{7 + 3\cdot 3}{1 + 3} = 4;\ N(-3,\ 4).$$

Аналогично находим точку P $\left(\text{принимая во внимание, что } l = -\frac{3}{2}\right)$:

$$x_P = \frac{-6 + \left(-\frac{3}{2}\right)(-2)}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)} = 6;\ y_P = \frac{7 + \left(-\frac{3}{2}\right)3}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)} = -5;$$

$$P(6,\ -5).$$

7. Даны две точки $L(3,\ 5)$ и $M(6,\ -2)$. На оси Oy найти такую точку N, чтобы площадь треугольника LMN равнялась 15 квадратным единицам.

Пусть $N(0,\ y)$ — искомая точка ($x = 0$, так как точка лежит на оси Oy). В формулу (1.4) подставим значения

$$S = 15,\ x_1 = 3,\ y_1 = 5,\ x_2 = 6,\ y_2 = -2,\ x_3 = 0,\ y_3 = y.$$

Получаем

$$15 = \pm\frac{1}{2}[(6 - 3)(y - 5) - (0 - 3)(-2 - 5)] =$$

$$= \pm\frac{1}{2}(3y - 36),$$

отсюда

$$15 = \frac{1}{2}(3y - 36), \quad 15 = -\frac{1}{2}(3y - 36).$$

Решая полученные уравнения относительно y, находим

$$y_1 = 22, \quad y_2 = 2.$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяют две точки: $N_1(0, 22)$, $N_2(0, 2)$.

8. Найти точку, одинаково удаленную от осей координат и от точки $M(1, 8)$.

Пусть $N(x, y)$ — искомая точка, ее координаты пока неизвестны. Так как по условию точка равноудалена от осей координат, то $y = x$ или $y = -x$ (см. определение прямоугольных декартовых координат, стр. 3).

Рассмотрим первый случай ($y = x$). Выразим расстояние между точками $M(1, 8)$ и $N(x, x)$ через их координаты. По формуле (1.1) получаем

$$MN = \sqrt{(x-1)^2 + (x-8)^2}.$$

По условию это расстояние равно $|x|$, следовательно,

$$\sqrt{(x-1)^2 + (x-8)^2} = |x|.$$

Освобождаясь от радикала, получим квадратное уравнение

$$x^2 - 18x + 65 = 0,$$

корни которого $x_1 = 5$, $x_2 = 13$. Поскольку $y = x$, то $y_1 = 5$, $y_2 = 13$.

Следовательно, получены две точки, удовлетворяющие условию задачи: $N_1(5, 5)$, $N_2(13, 13)$.

Примечание. Второй случай ($y = -x$) условию задачи не удовлетворяет.

9. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки $L(0, 0)$, $M(3, -1)$, $N(8, 4)$.

Пусть $C(a, b)$ — центр окружности и R — ее радиус. Найдем неизвестные числа a, b и R. Согласно условию, $CL = R$, $CM = R$, $CN = R$. Определим длины CL, CM, CN по формуле (1.1) и подставим их выражения в последние три равенства. Получим:

$$\sqrt{(0-a)^2 + (0-b)^2} = R \text{ или } a^2 + b^2 = R^2; \qquad (A)$$

$$\sqrt{(3-a)^2 + (-1-b)^2} = R \text{ или } (3-a)^2 + (1+b)^2 = R^2; \qquad (B)$$

$$\sqrt{(8-a)^2 + (4-b)^2} = R \text{ или } (8-a)^2 + (4-b)^2 = R^2. \qquad (C)$$

Раскрывая скобки в левых частях уравнений (B) и (C), используя уравнение (A), приводя подобные члены и сокращая соответственно на 2 и 8, находим:

$$\left.\begin{aligned} 5 - 3a + b = 0; \\ 10 - 2a - b = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, получаем: $a = 3$, $b = 4$, $C(3, 4)$. Из уравнения (A) находим, что $R = 5$.

Задачи

1. Построить точки: $M_1(1, 4)$, $M_2(-2, 3)$, $M_3(-4, -5)$, $M_4(2, -7)$, $M_5(0, 1)$, $M_6(4, 0)$, $M_7(0, -6)$, $M_8(-8, 0)$, $M_9(0, 0)$.

2. Найти точки, симметричные точке $M(-1, 5)$ относительно оси Ox, оси Oy, начала координат, биссектрис координатных углов.

3. Найти точки, симметричные точке $M(a, b)$ относительно координатных осей, начала координат, биссектрисс координатных углов.

4. Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $AD = 6$. Определить координаты вершин прямоугольника, приняв:

1) за оси координат две непараллельные стороны его и точку их пересечения за начало координат;

2) точку пересечения диагоналей за начало координат, за оси координат две прямые, параллельные сторонам прямоугольника.

5. Вычислить периметр треугольника с вершинами $A(3, 4)$, $B(3, 8)$, $C(6, 4)$.

6. Доказать, что треугольник с вершинами $P(3, 4)$, $Q(7, 7)$, $R(4, 3)$ — равнобедренный.

7. Установить, будет ли треугольник PQR с вершинами $P(2, 2)$, $Q(1, 6)$, $R(7, -1)$ остроугольным, тупоугольным или прямоугольным.

8. Дана середина отрезка $L(5, 2)$ и один из его концов $M(2, -1)$. Найти второй конец.

9. Даны середины сторон треугольника $L(-1, 5)$, $M(1, 1)$, $N(4, 3)$. Найти его вершины.

10. Отрезок, определяемый точками $M_1(-8, -9)$, $M_2(-3, -4)$ разделен на пять равных частей. Найти точки деления. До какой точки нужно продолжить отрезок M_1M_2, чтобы его длина увеличилась в 4 раза?

11. Дан треугольник с вершинами $A(-7, 7)$, $B(3, 2)$, $C(-1, -1)$. Найти точки, в которых сторона AB делится биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине C.

12. Найти точку пересечения медиан треугольника, вершины которого $A(-2, 1)$, $B(2, -1)$, $C(4, 3)$.

13. Вычислить площадь треугольника с вершинами $P(0, -2)$, $Q(4, 5)$, $R(6, -4)$.

14. Даны вершины $A(2, 1)$, $B(-2, -2)$, $C(-8, 6)$ треугольника ABC. Найти длину высоты, опущенной из вершины B.

15. Доказать, что точки $A(-3, -4)$, $B(1, 4)$, $C(0,2)$ лежат на одной прямой.

16. Даны две точки $L(4,\ 2)$ и $M(6,\ -2)$. На оси Ox найти такую точку N, чтобы площадь треугольника LMN была равна 8 квадратным единицам.

17. Вычислить площадь четырехугольника с вершинами $A(-3,\ 2)$, $B(3,\ 4)$, $C(6,\ 1)$, $D(5,\ -2)$.

18. Найти центр тяжести треугольника с вершинами $A(1,\ -2)$, $B(4,\ 1)$, $C(7,\ -2)$.

19. На оси Oy найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $M(4,\ 5)$.

20. На координатных осях найти точки, удаленные от точки $M(4,\ 3)$ на 5 единиц.

Ответы

2. $N(-1,\ -5)$, $L(1,\ 5)$, $R(1,\ -5)$, $P(5,\ -1)$, $Q(-5,\ 1)$. Указание. См. пример 1. **3.** $N(a,\ -b)$, $L(-a,\ b)$, $R(-a,\ -b)$, $P(b,\ a)$, $Q(-b, -a)$. **4.** 1) $A(0,\ 0)$, $B(0,\ 2)$, $C(6,\ 2)$, $D(6,\ 0)$. В качестве положительного направления оси Ox взято направление от A к D, 2) $A(-3,\ -1)$, $B(-3,\ 1)$, $C(3,1)$, $D(3,\ -1)$. **5.** 12. **7.** Тупой угол при вершине P. **8.** $N(8,\ 5)$. **9.** $A(-4,\ 3)$, $B(2,\ 7)$, $C(6,\ -1)$. **10.** $L_1(-7, -8)$, $L_2(-6,\ -7)$, $L_3(-5,\ -6)$, $L_4(-4, -5)$, $P(12,\ 11)$.

Указание. $l_1 = \frac{1}{4}$, $l_2 = \frac{2}{3}$, $l_3 = \frac{3}{2}$, $l_4 = 4$, $l_5 = -\frac{4}{3}$.

11. $K_1\left(-\frac{1}{3},\ \frac{11}{3}\right)$, $K_2(13,\ -3)$. Указание. $AC = 10$, $BC = 5$, $l_1 = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$, $l_2 = -\frac{1}{2}$. **12.** $N\left(\frac{4}{3},\ 1\right)$. **13.** 25 кв. ед. **14.** $h = 2\sqrt{5}$. Указание. Вычислить площадь S и длину AC. **15.** Указание. Убедиться в том, что $S_{\triangle ABC} = 0$. **16.** $N_1(1,\ 0)$, $N_2(9,\ 0)$. **17.** 26 кв. ед. **18.** $N(4,\ -1)$. Указание. Центр тяжести треугольника совпадает с точкой пересечения медиан. **19.** $N(0;\ 4{,}1)$. **20.** $M_1(0,\ 0)$, $M_2(0,\ 6)$, $M_3(8,\ 0)$.

§ 1. 2. Уравнение линии в прямоугольных декартовых координатах

Линия на плоскости задается как некоторое геометрическое место точек, т. е. совокупность точек, обладающих некоторым свойством, исключительно им присущим.

Уравнением линии на плоскости называется уравнение относительно переменных x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки данной линии и только они.

В общем виде *уравнение линии на плоскости в прямоугольных декартовых координатах* записывается так:

$$F(x,\ y) = 0. \tag{1.5}$$

Из определения уравнения линии вытекает, что если при подстановке координат точки в данное уравнение получаем тождество, то точка лежит на соответствующей линии; если тождество не получается, то точка не лежит на этой линии.

Чтобы составить уравнение линии, как некоторого геометрического места точек, необходимо:

1) взять произвольную точку линии с текущими координатами x, y;

2) записать общее свойство точек данного геометрического места в виде равенства;

3) выразить входящие в это равенство величины с помощью координат.

Точки пересечения двух линий $F_1(x,\ y) = 0$ и $F_2(x,\ y) = 0$ находят из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,\ y) &= 0; \\ F_2(x,\ y) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Если система (1.6) имеет действительное решение, то линии пересекаются. Число точек пересечения равно числу решений системы. Если действительных решений нет, то линии общих точек не имеют.

Примеры

1. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух данных точек $M_1(-2,\ 4)$, $M_2(6,\ 8)$.

Пусть $M(x,\ y)$ — произвольная точка данного геометрического места. По условию

$$M_1M = M_2M. \tag{A}$$

С другой стороны, по формуле расстояния между двумя точками получаем:

$$M_1M = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2};\quad M_2M = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (А), находим уравнение данного геометрического места:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}.$$

Упростим полученное уравнение. Возводя в квадрат обе части уравнения и раскрывая скобки в подкоренных выражениях, находим

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 16y + 64.$$

Перенося все члены в левую часть, приводя подобные и сокращая на 8, получим уравнение

$$2x + y - 10 = 0. \tag{B}$$

Таким образом, координаты любой точки данного геометрического места удовлетворяют уравнению (В).

Покажем теперь, что если точка не принадлежит нашему геометрическому месту, то ее координаты не будут удовлетворять уравнению (В). В самом деле, пусть N (x, y) — такая точка. Тогда выполняется одно из двух неравенств:

$$M_1N < M_2N; \; M_1N > M_2N$$

или в координатах:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2} < \sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2};$$
$$\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2} > \sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2}.$$

Первое из этих неравенств приводится к виду

$$2x + y - 10 < 0,$$

а второе к виду

$$2x + y - 10 > 0.$$

Следовательно, координаты точки N уравнению (В) не удовлетворяют.

Итак, уравнение данного геометрического места точек есть

$$2x + y - 10 = 0.$$

Это уравнение является уравнением прямой линии (из элементарной геометрии известно, что геометрическим местом точек, указанных в условии задачи, будет прямая, перпендикулярная к отрезку M_1M_2 и проходящая через его середину).

Замечание. Если точка $N(x', y')$ не лежит на прямой $2x + y - 10 = 0$, то при подстановке ее координат в данное уравнение получаем либо $2x' + y' - 10 < 0$, либо $2x' + y' - 10 > 0$.

2. Написать уравнение окружности радиуса $R = 4$ с центром в начале координат. Лежат ли на этой окружности точки $A(4, 0)$, $B(2, 3)$, $C(4, 3)$, $D(3, -\sqrt{7})$, $E(1, 2)$, $F(0, 5)$?

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка данной окружности (геометрического места точек, удаленных от начала координат на 4 единицы). По определению окружности имеем $OM = 4$.

Длина отрезка OM по формуле (1.1) равна

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следовательно, уравнение окружности имеет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4.$$

Возводя в квадрат обе части этого уравнения, получим

$$x^2 + y^2 = 16.$$

Выясним, лежат ли на данной окружности указанные точки. Подставляя координаты точки A в уравнение окружности, получаем тождество

$$4^2 + 0^2 = 16.$$

Таким образом, точка A лежит на окружности.

Для точки B получается неравенство

$$2^2 + 3^2 < 16,$$

поэтому точка B окружности не принадлежит. (Заметим, что

точка B лежит внутри круга радиуса $R = 4$, ибо ее расстояние до начала координат $OB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} < 4$.)

Подстановка в уравнение координат точки $C(4, 3)$ приводит к неравенству

$$4^2 + 3^2 > 16,$$

следовательно, точка C также не лежит на окружности. (Заметим, что точка C лежит вне круга радиуса $R = 4$, так как ее расстояние до начала координат $OC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 > 4$.)

Аналогичным образом убеждаемся, что точка D лежит на окружности, а точки E и F ей не принадлежат.

Замечание 1. Если $R = a$, где a — положительное число, то уравнение окружности радиуса $R = a$ с центром в начале координат запишется так:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Замечание 2. Координаты любой точки, лежащей внутри круга радиуса $R = a$, удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 < a^2,$$

для координат любой точки, лежащей вне этого круга, выполняется неравенство

$$x^2 + y^2 > a^2.$$

3. Точка M движется так, что в любой момент времени ее расстояние до точки $A(6, 0)$ втрое больше расстояния до точки $B\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Найти уравнение траектории движения точки M.

Текущие координаты точки M обозначим через x, y, т. е. $M(x, y)$. По условию задачи $MA = 3MB$.

Выразим расстояния MA и MB через координаты точек:

$$MA = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}; \quad MB = \sqrt{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y-0)^2}.$$

Подставляя эти выражения в предыдущее равенство, получим уравнение траектории движения точки M:

$$\sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 3\sqrt{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2}.$$

Упрощая это уравнение, находим

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Получено уравнение окружности радиуса $R = 2$ с центром в начале координат (см. замечание 1 к примеру 2).

4. Найти геометрическое место точек, для которых разность квадратов расстояний до двух данных точек есть величина постоянная.

Пусть F_1 и F_2 — две данные точки (рис. 1.4). Расстояние между ними обозначим через $2a$, где a — некоторое число. Начало координат поместим в середине отрезка F_1F_2, в качестве положительного направления оси Ox возьмем направление от точки F_1 к точке F_2, за ось Oy примем прямую, перпендикулярную к отрезку F_1F_2 и проходящую через его середину. При таком выборе системы координат точки F_1 и F_2 будут иметь координаты

$$x_1 = -a, \; y_1 = 0, \quad x_2 = a, \; y_2 = 0, \text{ т. е. } F_1(-a, \; 0), \; F_2(a, \; 0).$$

Согласно условию, получаем

$$MF_1^2 - MF_2^2 = 4c,$$

где через $4c$ обозначена данная постоянная величина.

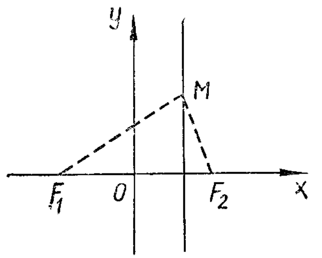

Рис. 1.4

Подставляя в это равенство выражения

$$MF_1^2 = (x + a)^2 + (y - 0)^2; \; MF_2^2 = (x - a)^2 + (y - 0)^2,$$

получим

$$(x + a)^2 + y^2 - [(x - a)^2 + y^2] = 4c, \; 4ax = 4c,$$

т. е. $x = \frac{c}{a}$ или $x = b$, где $b = \frac{c}{a}$ — постоянная.

Замечание. Уравнение $x = b$, где b — постоянная, является уравнением прямой, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Ox отрезок, равный b. В самом деле, если точка M лежит на этой прямой, то ее координата $x = b$. С другой стороны, если $x = b$, то точка лежит на указанной прямой.

5. Составить уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная a^2, где a — половина расстояния между точками F_1 и F_2. (Эта линия называется *лемнискатой Бернулли.*)

Начало координат выберем в середине отрезка F_1F_2, длина которого обозначена через $2a$. Ось Ox направим вдоль F_1F_2. Координаты точек F_1 и F_2 при указанном выборе координатной системы будут соответственно равны: $x_1 = -a$, $y_1 = 0$, $x_2 = a$, $y_2 = 0$, т. е. $F_1(-a, 0)$, $F_2(a, 0)$. Если $M(x, y)$ — произвольная точка геометрического места, то по условию

$$F_1M \cdot F_2M = a^2.$$

Подставляя в это равенство выражения

$$F_1M = \sqrt{(x + a)^2 + (y - 0)^2}; \; F_2M = \sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2},$$

получим искомое уравнение данного геометрического места

$$\sqrt{(x + a)^2 + y^2} \; \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = a^2.$$

Дальнейшие выкладки имеют целью получить уравнение лемнискаты Бернулли в более простом виде. Возводя в квадрат обе части уравнения и группируя члены, находим

$$[(x^2 + y^2 + a^2) + 2ax]\,[(x^2 + y^2 + a^2) - 2ax] = a^4,$$

отсюда

$$[(x^2 + y^2) + a^2]^2 - 4a^2x^2 = a^4.$$

Преобразуя последнее уравнение, получаем

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 - 4a^2x^2 = a^4,$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0$$

или в окончательном виде

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

6. Найти точки пересечения линий:

$$x^2 + y^2 = 25; \; x + 7y - 25 = 0.$$

Решим систему уравнений данных линий. Определим x из последнего уравнения

$$x = -7y + 25 \tag{A}$$

и подставим его в первое уравнение:

$$49y^2 - 350y + 625 + y^2 = 25.$$

После упрощений получим

$$y^2 - 7y + 12 = 0,$$

откуда $y_1 = 4$, $y_2 = 3$. Подставляя эти значения в уравнение (A), найдем $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Следовательно, линии пересекаются в двух точках: $M_1(-3, 4)$, $M_2(4, 3)$.

7. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 36$ с координатными осями.

Для любой точки, лежащей на оси Ox, ордината y равна нулю (по определению прямоугольных декартовых координат точки на плоскости). Обратно, если $y = 0$, то точка лежит на оси Ox. Следовательно, ось Ox имеет уравнение $y = 0$. Аналогично можно показать, что уравнение оси Oy есть $x = 0$.

Чтобы получить точки пересечения данной окружности с осью Ox, необходимо решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 36; \\ y &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя значение y в первое уравнение, получим $x^2 = 36$, откуда $x_1 = 6$, $x_2 = -6$. Таким образом, данная окружность пересекает ось Ox в двух точках: $M_1(6, 0)$, $M_2(-6, 0)$.

Решим систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=36; \\ x=0, \end{array}\right\}$$

получим $y_1=6$, $y_2=-6$. Следовательно, точки $N_1(0, 6)$, $N_2(0, -6)$ являются точками пересечения окружности с осью Oy.

8. На окружности $x^2+y^2=25$ найти точки с ординатой $y=4$ и точки с абсциссой $x=x_0$.

Подставляя значение $y=4$ в уравнение окружности, получим

$$x^2+4^2=25 \text{ или } x^2=9,$$

откуда $x_1=3$, $x_2=-3$. Таким образом, первому условию задачи удовлетворяют две точки $M_1(3, 4)$, $M_2(-3, 4)$.

Найдем точки данной окружности, для которых $x=x_0$. Подставляя это значение x в уравнение окружности, получим $x_0^2+y^2=25$, откуда

$$y^2=25-x_0^2, \quad y=\pm\sqrt{25-x_0^2}.$$

Из последнего равенства видно, что y принимает действительные значения лишь в случае, когда подкоренное выражение неотрицательно, т. е. когда $25-x_0^2 \geqslant 0$ или $x_0^2 \leqslant 25$. Это соотношение выполняется при x_0, для которых $-5 \leqslant x_0 \leqslant 5$. Следовательно, при условии $-5 \leqslant x_0 \leqslant 5$ существуют две точки:

$$N_1(x_0, \sqrt{25-x_0^2}), \quad N_2(x_0, -\sqrt{25-x_0^2}).$$

Задачи

1. Найти уравнение геометрического места точек, равноудаленных от начала координат и от точки $M(2, 6)$. Принадлежат ли этому геометрическому месту точки $A(7, 1)$, $B(2, 5)$, $C(1, 3)$, $D(-2, 4)$?

2. Определить траекторию движения точки M в каждом из следующих случаев:
1) расстояние до оси Oy равно a единицам;
2) расстояние до оси Ox равно b единицам;
3) расстояния до координатных осей равны между собой.

3. Написать уравнение линии, по которой движется точка M, оставаясь втрое дальше от оси Oy, чем от оси Ox.

4. Составить уравнение геометрического места точек, удаленных от начала координат на 6 единиц. Лежат ли на данной линии точки $A(6, 0)$, $B(3, 4)$, $C(7, 2)$, $D(5, -\sqrt{11})$?

5. Точка M движется так, что ее расстояние от точки $A(4, 0)$ вдвое меньше расстояния от точки $B(16, 0)$. Найти уравнение траектории движения точки M.

6. Определить траекторию точки M, которая движется так, что ее расстояние от точки $A(8, 0)$ в четыре раза больше расстояния от точки $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

7. Найти точки пересечения линии $3x+4y-12=0$ с координатными осями.

8. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек пересечения линий:

$$x^2+y^2=25; \quad 4x-3y=0.$$

9. Найти уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от оси Ox и от точки $F(0, 2)$. В каких точках эта линия пересекает координатные оси?

10. Дана окружность диаметра $OA=2a$ и касательная к ней в точке A. Через точку O проведен луч OC и на нем отложен отрезок OM, равный отрезку BC, заключенному между окружностью и касательной. Если луч OC будет вращаться около точки O, то точка M опишет кривую, называемую *циссоидой Диоклеса*. Составить уравнение этой кривой и построить ее.

Ответы

1. $x+3y-10=0$. Точки A, C и D принадлежат линии. 2. 1) $x=a$, $x=-a$ (прямые, параллельные оси Oy); 2) $y=b$, $y=-b$ (прямые, парал-

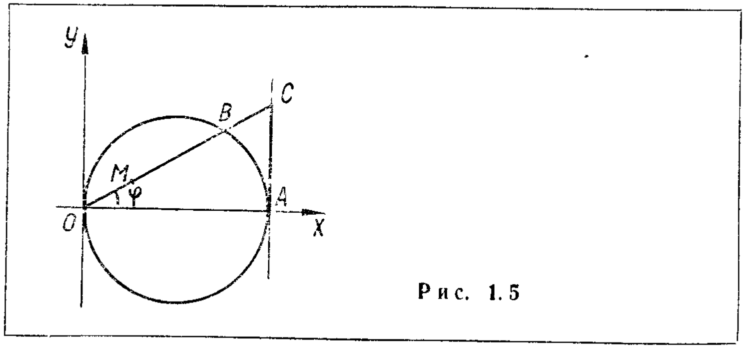

Рис. 1.5

лельные оси Ox); 3) $y=x$ (биссектриса первого и третьего координатных углов), $y=-x$ (биссектриса второго и четвертого координатных углов). 3 $y=\pm\frac{1}{3}x$. 4. Окружность $x^2+y^2=36$. На окружности лежат точки A и D, точка B — внутри окружности, точка C — вне ее. 5. $x^2+y^2=64$. 6. Окружность $x^2+y^2=4$. 7. $M(4, 0)$, $N(0, 3)$. 8. $3x+4y=0$. 9. $y=\frac{x^2}{4}+1$. $M(0, 1)$ — точка пересечения с осью Oy. Ось Ox линию не пересекает. 10. $x^3 = y^2(2a - x)$. Указание. Начало координат поместить в точку O, ось Ox направить вдоль OA (рис. 1.5), тогда $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, $AC^2 = OC \cdot BC$, откуда: $BC = \frac{AC^2}{OC}$; $AC = 2a \operatorname{tg} \varphi = 2a \frac{y}{x}$; $OC = \frac{2a}{\cos \varphi} = \frac{2a\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$. Подставить выражения OM и BC в равенство $OM = BC$.

§ 1.3. Прямая линия на плоскости

Положение прямой линии на плоскости относительно системы координат можно задать различными способами. Например, прямая однозначно определяется двумя точками, точкой и направлением, отрезками, отсекаемыми на осях координат, и т. д. В зависимости от способа задания прямой рассматривают различные виды ее уравнения.

1. 3. 1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой в отрезках

Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла, образованного ею с положительным направлением оси Ox прямоугольной декартовой системы координат. (Положительные углы отсчитываются в направлении «против часовой стрелки» от оси Ox до прямой.)

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид

$$y = kx + b, \qquad (1.7)$$

где k — угловой коэффициент; b — отрезок, отсекаемый ею на оси Oy.

Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1.8)$$

где A и B одновременно в нуль не обращаются (т. е. $A^2 + B^2 \neq 0$) называется *общим уравнением прямой*. Частные случаи этого уравнения:

1) $Ax + By = 0$ $(C = 0)$ — прямая, проходящая через начало координат;

2) $Ax + C = 0$ или $x = a$, где $a = -\frac{C}{A}$ $(B = 0,\ A \neq 0)$ — прямая, параллельная оси Oy;

3) $Ax = 0$ или $x = 0$ $(B = 0,\ C = 0)$ — ось Oy;

4) $By + C = 0$ или $y = b$, где $b = -\frac{C}{B}$ $(A = 0,\ B \neq 0)$ — прямая, параллельная оси Ox;

5) $By = 0$ или $y = 0$ $(A = 0,\ C = 0)$ — ось Ox.

Уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a, b — длины отрезков, отсекаемых на осях координат, взятые с соответствующими знаками. Если a или b отрицательно, то это значит, что прямая пересекает соответствующую отрицательную полуось.

Если прямая не параллельна оси Oy (т. е. $B \neq 0$), то ее общее уравнение, разрешая относительно y, можно привести к уравнению с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b,$$

где $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Если прямая не проходит через начало координат (т. е. $C \neq 0$) и не параллельна ни одной из координатных осей, то ее общее уравнение путем деления на $-C$ можно привести к уравнению в отрезках

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1,\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Примеры

1. Написать уравнение прямой, параллельной биссектрисе первого координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный четырем единицам.

Искомая прямая, как и биссектриса первого координатного угла, образует с осью Ox угол $\alpha = 45°$, поэтому $k = \operatorname{tg} 45° = 1$. Подставляя в уравнение $y = kx + b$ значения $k = 1$ и $b = 4$, получим искомое уравнение $y = x + 4$.

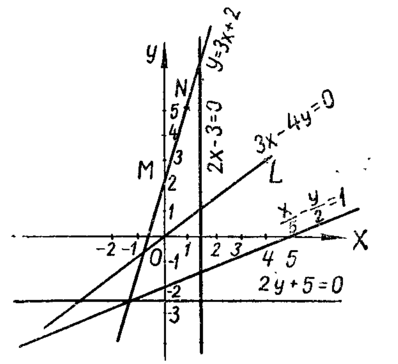

Рис. 1.6

2. Построить прямые:

1) $y = 3x + 2$; 2) $3x - 4y = 0$; 3) $\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1$; 4) $2x - 3 = 0$; 5) $2y + 5 = 0$.

Для построения прямой достаточно выбрать две ее произвольные точки. Координаты этих точек находят из уравнения прямой. Одной из координат приписывают любое значение, тогда другая однозначно определяется уравнением прямой.

Построим прямую $y = 3x + 2$. В уравнении прямой положим $x = 0$, тогда $y = 3\cdot 0 + 2$, $y = 2$. Получили точку $M(0, 2)$. Полагая $x = 1$, получим $y = 5$. Вторая точка $N(1, 5)$. Строим точки M, N и через них проводим прямую (рис. 1.6).

Построим прямую $3x - 4y = 0$. Так как коэффициент $C = 0$, то прямая проходит через начало координат. Это можно получить и непосредственно: полагая $x = 0$, получаем $y = 0$. Положим $x = 4$, тогда $3\cdot 4 - 4y = 0$, откуда $y = 3$; вторая точка $L(4, 3)$. Прямая, проходящая через точку L и начало координат, является искомой.

Уравнение $\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1$ можно переписать в виде $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$. Это уравнение прямой в отрезках, причем $a = 5$, $b = -2$. Откладывая эти отрезки, получим точки $P(5, 0)$, $Q(0, -2)$. Через точки P и Q проводим прямую.

Уравнение $2x - 3 = 0$ перепишем так: $x = \frac{3}{2}$. Эта прямая параллельна оси Oy и отсекает на оси Ox отрезок, равный $\frac{3}{2}$, справа от оси Oy.

Прямая $2y + 5 = 0$ или $y = -\frac{5}{2}$ параллельна оси Ox, отсекает на оси Oy отрезок, равный $\frac{5}{2}$, книзу от оси Ox.

Замечание. Для нахождения координат точек из уравнения прямой можно придавать любые значения x или y, а потом из уравнения определить y или x. (Например, если $x = -2$, то для прямой $y = 3x + 2$ $y = -4$, если $y = -1$, то $x = -1$.) Геометрически это означает, что прямую можно построить по любым двум ее точкам.

3. Построить прямую $3x - 4y - 12 = 0$. Где лежат точки, для которых: 1) $3x - 4y - 12 > 0$; 2) $3x - 4y - 12 < 0$?

Чтобы построить прямую, достаточно фиксировать две ее произвольные точки. Пусть, например, $x_1 = 0$, тогда

$$3\cdot 0 - 4y - 12 = 0,\quad -4y_1 - 12 = 0,\quad y_1 = -3.$$

Получили точку $M_1(0, -3)$. Положим $y_2 = 0$, тогда

$$3x_2 - 4\cdot 0 - 12 = 0,\quad x_2 = 4.$$

Вторая точка $M_2(4, 0)$. Построим точки M_1 и M_2 и проведем через них прямую. Прямая M_1M_2 и будет искомой (рис. 1.7).

Возьмем три точки плоскости $N_1(x_0, y_1)$, $N_2(x_0, y_2)$, $M_0(x_0, y_0)$, из которых точка M_0 лежит на прямой $3x - 4y - 12 = 0$, а точки N_1 и N_2 по разные стороны от нее. Так как все три точки имеют одну и ту же абсциссу, то они лежат на прямой,

перпендикулярной оси Ox. Пусть для определенности $y_1 < y_0 < y_2$, т. е. N_1 лежит «ниже» прямой, а N_2 — «выше». Подставляя координаты этих точек в уравнение прямой найдем:

$$3x_0 - 4y_0 - 12 = 0;$$
$$3x_0 - 4y_1 - 12 > 0;$$
$$3x_0 - 4y_2 - 12 < 0.$$

Таким образом, если точка N_2 лежит выше прямой $3x - 4y - 12 = 0$, то при подстановке ее координат в это уравнение получаем отрицательное число; для точки N_1, лежащей

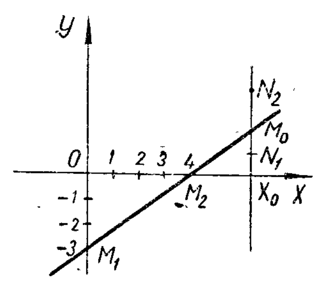

Рис. 1.7

ниже этой прямой, — положительное число. Обратное также верно.

Следовательно, для точек одной полуплоскости, определяемой прямой $3x - 4y - 12 = 0$, имеем $3x - 4y - 12 > 0$, для точек второй полуплоскости $3x - 4y - 12 < 0$.

Замечание. Последнее утверждение верно для любой прямой. Прямая $Ax + By + C = 0$ делит плоскость на две полуплоскости, для точек одной из них $Ax + By + C > 0$, для точек другой $Ax + By + C < 0$. Причем, если в уравнении прямой $C < 0$ и $Ax_1 + By_1 + C < 0$, то точка $M_1(x_1, y_1)$ и начало координат лежат по одну сторону от прямой; если $C < 0$ и $Ax_2 + By_2 + C > 0$, то точка $M_2(x_2, y_2)$ и начало координат расположены по разные стороны от прямой $Ax + By + C = 0$.

4. Определить параметры k и b прямых: $2x + 5y - 10 = 0$; $3y + 7 = 0$; $4x - 9y = 0$.

Разрешив первое уравнение относительно y, получим

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{10}{5} \quad \text{или} \quad y = -\frac{2}{5}x + 2.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $y = kx + b$, находим $k_1 = -\frac{2}{5}$, $b_1 = 2$.

Разрешив два других уравнения относительно y, получим:

$$y = -\frac{7}{3},\ \text{откуда}\quad k_2 = 0,\quad b_2 = -\frac{7}{3};$$

$$y = \frac{4}{9}x,\ \text{откуда}\quad k_3 = \frac{4}{9},\quad b_3 = 0.$$

5. Найти отрезки, отсекаемые на осях координат прямыми:
$7x+2y-14=0$; $2x-3y-6=0$; $4x+5y+8=0$.

Разделим первое уравнение на 14, второе на 6, третье на -8 и перенесем свободные члены в правые части. Сравнивая полученные уравнения с уравнением (1.9), находим соответственно:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{7}=1,\ a_1=2,\ b_1=7;\ \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1,\ a_2=3,\ b_2=-2;$$

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-\frac{8}{5}}=1,\ a_3=-2,\ b_3=-\frac{8}{5}.$$

Замечание. В последнем случае после деления на -8 получим

$$\frac{x}{-2}+\frac{5y}{-8}-1=0.$$

Чтобы определить a и b, данное уравнение нужно привести к виду уравнения (1.9), т. е. написать его так, чтобы в правой части была единица, первое слагаемое левой части в числителе содержало только x, второе — в числителе только y.

6. Даны точки $L(-6, 0)$ и $N(0, 8)$. Через середину отрезка LN провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок втрое больший, чем на оси Oy.

Определяя координаты середины отрезка по формулам (1.3), получим точку $M(-3, 4)$. Уравнение прямой ищем в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

По условию $a=3b$. Следовательно, уравнение примет вид

$$\frac{x}{3b}+\frac{y}{b}=1.$$

Для определения b используем условие прохождения искомой прямой через точку $M(-3, 4)$. Так как точка M лежит на искомой прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т. е.

$$-\frac{3}{3b}+\frac{4}{b}=1,$$

откуда $b=3$. Подставляя это значение в равенство $a=3b$, получим $a=9$. Таким образом, уравнение искомой прямой запишется так:

$$\frac{x}{9}+\frac{y}{3}=1 \text{ или } x+3y-9=0.$$

Задачи

1. Написать уравнения прямых, параллельных биссектрисе второго координатного угла и отсекающих на оси Oy отрезки $b_1=3$; $b_2=-4$, $b_3=\frac{5}{2}$.

2. Составить уравнения прямых, отсекающих на оси Oy отрезок $b=2$ и наклоненных к оси Ox соответственно под углами $\alpha_1=30°$, $\alpha_2=45°$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=135°$.

3. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат и образующих с осью Ox соответственно углы $\alpha_1=30°$, $\alpha_2=45°$, $\alpha_3=60°$, $\alpha_4=135°$.

4. Уравнения прямых:

$$3x-y+2=0;\ 4x+2y-5=0;\ 2x+7y=0;\ 3y-8=0$$

привести к виду уравнений с угловыми коэффициентами.

5. Найти углы, образуемые прямыми:

$$x+y-2=0;\ x-y+5=0;\ 2y-3=0;\ 4x+7=0;\ 3x-2y=0$$

с осью Ox.

6. Найти отрезки, отсекаемые на осях координат прямыми:

1) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$; 2) $\frac{y}{5}-\frac{x}{2}=1$;
3) $2x+3y-6=0$; 4) $3x-2y+12=0$;
5) $y=4x-2$; 6) $y=6-3x$.

7. Построить прямые, заданные уравнениями:

$$y=-2x+5;\ \frac{y}{3}-\frac{x}{4}=1;\ 2x-3y+6=0;$$

$$4x+5y-20=0;\ 3x-7y=0;\ 4x+5y=0;\ 5x+9=0;\ 3y+5=0.$$

8. Вычислить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $2x+7y-14=0$.

9. Диагонали ромба, равные 10 и 12 единицам, приняты за оси координат. Найти уравнения сторон ромба.

10. Какая должна быть зависимость между коэффициентами a и b, чтобы прямая $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ была наклонена к оси Ox под углом $\varphi=45°$?

11. При каких значениях C прямая $2x+3y+C=0$ отсекает на оси Oy отрезки $b_1=4$, $b_2=-6$?

12. Найти значения B, при которых прямая $2x+By-6=0$ образует с осью Ox углы $\varphi_1=45°$, $\varphi_2=135°$.

13. При каких значениях A прямая $Ax+5y-40=0$ отсекает на координатных осях равные отрезки?

14. Определить параметр b, при котором прямая $y=2x+b$ отсекает на оси Ox отрезок $a=3$.

Ответы

1. $y=-x+3$, $y=-x-4$, $y=-x+\frac{5}{2}$. **2.** $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$, $y=$

$= x+2$, $y=2$, $y=-x+2$. 3. $3y-\sqrt{3x}=0$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$, $y=-x$. 4. $y=3x+2$, $y=-2x+\frac{5}{2}$, $y=-\frac{2}{7}x$, $y=\frac{8}{3}$, $x=-\frac{9}{5}$. 5. $\alpha_1 = 135°$, $\alpha_2=45°$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=90°$, $\alpha_5=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. 6. 1) $a=4$, $b=3$; 2) $a=-2$, $b=5$; 3) $a=3$, $b=2$; 4) $a=-4$, $b=6$; 5) $a=\frac{1}{2}$, $b=-2$; 6) $a=2$, $b=6$. 8. $S=7$ кв. ед. 9. $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$, $-\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$, $-\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$, $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$. 10. $a=-b$. 11. $C_1=-12$, $C_2=18$. 12. $B_1=-2$, $B_2=2$. 13. $A=5$. 14. $b=-6$.

1.3.2. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Пересечение двух прямых

Тангенс угла между двумя прямыми:

$$y=k_1x+b_1; \tag{A}$$
$$y=k_2x+b_2 \tag{B}$$

определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \tag{1.10}$$

Условие параллельности прямых (А) и (В) имеет вид

$$k_1=k_2, \tag{1.11}$$

а условие их перпендикулярности

$$k_1=-\frac{1}{k_2}. \tag{1.12}$$

Если прямые заданы общими уравнениями:

$$A_1x+B_1y+C_1=0; \tag{C}$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0, \tag{D}$$

то тангенс угла между ними вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}. \tag{1.13}$$

Условие параллельности прямых (С) и (D)

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}. \tag{1.14}$$

Условие их перпендикулярности

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \tag{1.15}$$

Для нахождения общих точек прямых (С) и (D) необходимо решить систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}A_1x+B_1y+C_1=0;\\ A_2x+B_2y+C_2=0,\end{array}\right\} \tag{1.16}$$

причем при

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2} \tag{1.17}$$

имеется единственная точка пересечения, при

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2} \tag{1.18}$$

прямые не имеют общей точки (они параллельны), при

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \tag{1.19}$$

прямые имеют бесконечное множество общих точек (они совпадают).

Примеры

7. Найти угол между прямыми:

$$y=-\frac{2}{5}x+3;\quad y=\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}.$$

Подставляя в формулу (1.10) значения $k_1=-\frac{2}{5}$, $k_2=\frac{3}{7}$, получим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{3}{7}-\left(-\frac{2}{5}\right)}{1+\left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{7}\right)}=\frac{\frac{29}{35}}{\frac{29}{35}}=1,\quad \varphi=45°.$$

8. Найти угол между прямыми:

$$6x+8y+5=0;\quad 2x-4y-3=0.$$

Пользуемся формулой (1.13). Подставляя в нее значения $A_1=6$, $B_1=8$, $A_2=2$, $B_2=-4$, находим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{6(-4)-2\cdot 8}{6\cdot 2+8(-4)}=\frac{-24-16}{12-32}=\frac{-40}{-20}=2,\quad \varphi=\operatorname{arctg}2.$$

Замечание к примерам 7 и 8. Формулы (1.10) и (1.13) определяют тангенс одного из двух углов между прямыми, сумма которых равна 180°. Меняя нумерацию прямых, получим второе значение для тангенса угла, отличающееся от первого только знаком. Если в примере 7 считать второй прямую $y=-\frac{2}{5}x+3$, тогда $k_1=\frac{3}{7}$, $k_2=-\frac{2}{5}$. По формуле (1.10) находим, что $\operatorname{tg}\varphi=-1$, откуда $\varphi=135°$. (Сделайте чертеж.)

9. Указать, какие из следующих прямых:

1) $3x-15y+16=0$; 2) $3x+15y-8=0$;
3) $6x-30y+13=0$; 4) $30x+6y+7=0$

параллельны и перпендикулярны.

Первая и третья прямые параллельны, так как выполняется условие (1.14). В самом деле: $A_1 = 3$; $B_1 = -15$; $A_2 = 6$; $B_2 = -30$; $\frac{A_1}{A_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{B_1}{B_2} = \frac{-15}{-30} = \frac{1}{2}$; $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Третья и четвертая прямые перпендикулярны, ибо выполняется условие (1.15). Действительно,

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 6\cdot 30 + (-30)\,6 = 0.$$

Первая и четвертая прямые также перпендикулярны.

Замечание 1. Условие (1.14) означает, что если прямые параллельны, то коэффициенты при текущих координатах одной прямой можно получить из соответствующих коэффициентов другой путем умножения их на одно и то же число. Например, коэффициенты первой прямой получены умножением на $\frac{1}{2}$ коэффициентов третьей прямой, с другой стороны, коэффициенты третьей прямой получены из коэффициентов первой прямой умножением на 2.

Замечание 2. Из условия (1.15) вытекает, что если прямые перпендикулярны, то коэффициенты при x и y одной из них получаются из соответствующих коэффициентов другой переменой их мест и изменением знака одного из коэффициентов. Например, прямые $Ax + By + C = 0$, $Bx - Ay + C_1 = 0$ перпендикулярны.

10. Вычислить площадь треугольника, стороны которого лежат на прямых, заданных уравнениями:

$$x - 3y + 11 = 0;\ 5x + 2y - 13 = 0;\ 9x + 7y - 3 = 0.$$

Искомую площадь вычислим по формуле (1.4), для чего вначале найдем координаты вершин треугольника.

Решая систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + 11 &= 0; \\ 5x + 2y - 13 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

находим вершину $P(1, 4)$.

Решая систему

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2y - 13 &= 0; \\ 9x + 7y - 3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

получим вторую вершину $Q(5, -6)$.

Наконец, из системы

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + 11 &= 0; \\ 9x + 7y - 3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

получим третью вершину $R(-2, 3)$.

С помощью формулы (1.4) находим, что $S = 17$ кв. ед.

11. Через точку $M(1, -2)$ провести прямую, параллельную прямой $4x + 7y - 3 = 0$, и прямую, перпендикулярную данной прямой.

Уравнение прямой, параллельной данной, ищем в виде

$$4x + 7y + C = 0,$$

где C — пока неизвестный коэффициент (см. замечание 1 к примеру 9). Так как искомая прямая проходит через точку $M(1, -2)$, то координаты последней должны удовлетворять уравнению прямой. Подставляя координаты точки в искомое уравнение, получим

$$4\cdot 1 + 7(-2) + C = 0,$$

откуда $C = 10$.

Следовательно, уравнение искомой прямой имеет вид

$$4x + 7y + 10 = 0.$$

Уравнение прямой, перпендикулярной данной, будем искать в виде

$$7x - 4y + C = 0$$

(см. замечание 2 к примеру 9).

Определим C из условия, что прямая проходит через точку $M(1, -2)$. Подставляя ее координаты в уравнение, получим

$$7\cdot 1 - 4(-2) + C = 0,$$

откуда $C = -15$.

Таким образом, прямая, перпендикулярная данной, имеет уравнение

$$7x - 4y - 15 = 0.$$

12. Найти длины сторон треугольника и его внутренние углы, если известно, что стороны лежат на прямых:

$$x - 6y + 5 = 0;\ 5x - 2y - 3 = 0;\ x + y - 9 = 0.$$

Чтобы вычислить длины сторон треугольника, необходимо знать его вершины. Найдем их. Решая систему уравнений первых двух прямых

$$\left.\begin{aligned} x - 6y + 5 &= 0; \\ 5x - 2y - 3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

получим вершину $A(1, 1)$.

Система уравнений первой и третьей прямой

$$\left.\begin{aligned} x - 6y + 5 &= 0; \\ x + y - 9 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

определит вторую вершину $B(7, 2)$.

Из системы уравнений второй и третьей прямой

$$\left.\begin{aligned} 5x - 2y - 3 = 0; \\ x + y - 9 = 0 \end{aligned}\right\}$$

находим вершину $C(3, 6)$.

По формуле (1.1) вычисляем длины сторон:

$$AB = \sqrt{(7-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{37};$$
$$BC = \sqrt{(3-7)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{32};$$
$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{29}.$$

Так как

$$AB^2 < BC^2 + AC^2,$$

где AB — наибольшая сторона, то треугольник ABC остроугольный (см. пример 2 § 1.1).

Таким образом, ни один из внутренних углов треугольника не является тупым, а поэтому ни один из тангенсов этих углов не может быть отрицательным $\left(\operatorname{tg}\varphi < 0, \text{ если } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right)$.

Переходя к нахождению углов треугольника, заметим, что рассматривая прямые, на которых лежат его стороны, и пользуясь формулами (1.10) или (1.13), мы получаем тангенс внутреннего или внешнего угла при данной вершине (см. замечание к примерам 7 и 8 настоящего параграфа). Чтобы различить эти углы, будем руководствоваться следующими соображениями. Формулы (1.10) и (1.13) должны давать для тангенсов внутренних углов не более одного отрицательного числа (так как треугольник не может содержать более одного тупого внутреннего угла). Если тангенс одного из углов оказался отрицательным, нужно проверить является ли треугольник тупоугольным (аналитически, с помощью неравенства $c^2 > a^2 + b^2$).

По формуле (1.13) определяем тангенсы углов треугольника (внутренних или внешних пока неизвестно):

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1(-2) - 5(-6)}{1\cdot 5 + (-6)(-2)} = \frac{-2+30}{5+12} = \frac{28}{17};$$
$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{1\cdot 1 - 1(-6)}{1\cdot 1 + 1(-6)} = \frac{1+6}{1-6} = -\frac{7}{5};$$
$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{5\cdot 1 - 1(-2)}{1\cdot 5 + 1(-2)} = \frac{5+2}{5-2} = \frac{7}{3}.$$

Буквами φ_1, φ_2 и φ_3 обозначены внутренние или внешние углы соответственно при вершинах A, B и C. Таким образом, тангенс одного из углов оказался отрицательным. Это означает, что или треугольник тупоугольный, или угол φ_2 является внешним углом при вершине B. Поскольку выше было показано, что треугольник ABC остроугольный, то верно второе предположение. Меняя нумерацию прямых, пересекающихся в точке B (первой будем считать прямую $x + y - 9 = 0$, второй — $x - 6y + 5 = 0$), по формуле (1.13) получаем

$$\operatorname{tg} B = \frac{1(-6) - 1\cdot 1}{1\cdot 1 + 1(-6)} = \frac{-6-1}{1-6} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}.$$

Так как $\operatorname{tg}\varphi_1 > 0$ и $\operatorname{tg}\varphi_3 > 0$, то $\varphi_1 = \angle A$, $\varphi_3 = \angle C$. Тангенсы внутренних углов определены, величины углов можно найти по таблицам.

Ответ: $AB = \sqrt{37}$, $BC = \sqrt{32}$, $AC = \sqrt{29}$, $\operatorname{tg} A = \frac{28}{17}$, $\operatorname{tg} B = \frac{7}{5}$, $\operatorname{tg} C = \frac{7}{3}$.

Замечание 1. При нумерации прямых, противоположной принятой здесь, мы получили бы

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{28}{17}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{7}{5}, \quad \operatorname{tg}\varphi_3 = -\frac{7}{3}.$$

Этот результат не удовлетворяет условиям задачи (двух тупых внутренних углов в треугольнике быть не может).

Замечание 2. В некоторых аналогичных задачах может оказаться

$$\operatorname{tg}\varphi_1 < 0, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 < 0, \quad \operatorname{tg}\varphi_3 < 0.$$

Этот случай надо отбросить (трех тупых внутренних углов в треугольнике быть не может). Нужно изменить нумерацию на противоположную в каждой паре прямых.

Замечание 3. Если окажется

$$\operatorname{tg}\varphi_1 > 0, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 > 0, \quad \operatorname{tg}\varphi_3 > 0,$$

то нужно проверить еще, нет ли тупого угла среди внутренних углов треугольника. Если такой угол имеется, нужно изменить нумерацию в соответствующей паре прямых (определяющих данную вершину).

Задачи

15. Найти углы между прямыми:

1) $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 7; \\ y = 5x + 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x - 3; \\ x - 4y + 7 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = \frac{3}{7}x - 2; \\ 7x + 3y + 5 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 4y + 9 = 0; \\ 6x - 2y - 3 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x - 5y + 2 = 0; \\ 5x + 4y - 3 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6x - 3y + 5 = 0; \\ 2x - 6y - 3 = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1; \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{18} = 1. \end{cases}$

16. Составить уравнения прямых, проходящих через начало координат, если известно:

1) прямая параллельна прямой $2x - 3y + 5 = 0$;
2) перпендикулярна прямой $y = 3x + 5$;
3) образует угол $45°$ с прямой $y = 2x - 3$.

17. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого лежат на прямых:

$$4x - 3y + 3 = 0;\ 3x + 4y + 4 = 0;\ x - 7y + 18 = 0.$$

18. Через точку пересечения прямых $3x + 5y - 8 = 0$; $4x - 7y + 3 = 0$ провести прямую, перпендикулярную первой из них, и прямую, параллельную прямой $2x + 6y - 2 = 0$.

19. Даны две стороны параллелограмма: $x - y + 1 = 0$, $3x + 2y - 12 = 0$ и точка E (6, 4) пересечения его диагоналей. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

20. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника, стороны которого лежат на прямых:

$$4x - 3y + 7 = 0;\ 3x + 2y - 16 = 0;\ x - 5y + 6 = 0.$$

Ответы

15. $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_4 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_5 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_6 = \frac{3}{4}\pi$, $\varphi_7 = \frac{\pi}{4}$. 16. 1) $2x - 3y = 0$; 2) $y = -\frac{1}{3}x$; 3) $y = -3x$, $y = \frac{1}{3}x$. 17. $90°$, $45°$, $45°$. 18. $5x - 3y - 2 = 0$, $2x + 6y - 8 = 0$. 19. $x - y - 5 = 0$, $3x + 2y - 40 = 0$. Указание. Определить точку пересечения двух данных сторон, являющуюся одной из вершин параллелограмма. Вторая вершина находится из условия, что точка E — середина отрезка. Через эту вершину провести прямые, параллельные данным. 20. $AB = 5$, $BC = \sqrt{13}$, $AC = \sqrt{26}$, $\operatorname{tg} A = \frac{17}{19}$, $\operatorname{tg} B = \frac{17}{6}$, $\operatorname{tg} C = \frac{17}{7}$.

1.3.3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Пучок прямых. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ в данном направлении,

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{1.20}$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ (α — угол, образуемый этой прямой с осью Ox).

Если в уравнении (1.20) считать, что k принимает все действительные значения, то это уравнение будет уравнением пучка прямых, т. е. совокупности прямых, проходящих через данную точку (центр пучка).

Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух прямых

$$Ax + By + C = 0;$$
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

имеет вид

$$\alpha(Ax + By + C) + \beta(A_1x + B_1y + C_1) = 0, \tag{1.21}$$

где α и β принимают всевозможные действительные значения.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1,\ y_2 \neq y_1). \tag{1.22}$$

Угловой коэффициент этой прямой определяется формулой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1). \tag{1.23}$$

Замечание. Уравнение (1.20) не может выражать прямую пучка, параллельную оси Oy.

Примеры

13. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2, 3)$ и параллельной биссектрисе второго координатного угла.

Искомая прямая, как и биссектриса второго координатного угла, образует с положительным направлением оси Ox угол $\varphi = 135°$, поэтому $k = \operatorname{tg} 135° = -1$. Так как точка M дана, то $x_1 = -2$, $y_1 = 3$.

Уравнение (1.20) при $k = -1$, $x_1 = -2$, $y_1 = 3$ принимает вид

$$y - 3 = -1[x - (-2)],\quad y - 3 = -x - 2$$

или

$$x + y - 1 = 0.$$

14. Составить уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M(4, -5)$. Среди пучка прямых выбрать прямую, параллельную прямой $2x - 3y + 6 = 0$, и прямую, перпендикулярную ей.

Так как координаты точки M известны, т. е. $x_1 = 4$, $y_1 = -5$, то уравнение

$$y + 5 = k(x - 4),$$

где k может принимать любые действительные значения, является уравнением пучка прямых, проходящих через точку M.

При каждом фиксированном значении k получаем вполне определенную прямую. Среди этого множества прямых выберем ту, которая параллельна прямой $2x - 3y + 6 = 0$. Разрешив последнее уравнение относительно y, получим

$$y = \frac{2}{3}x + 2,$$

откуда $k = \frac{2}{3}$, где k — угловой коэффициент данной прямой. Искомая прямая будет также иметь угловой коэффициент $k = \frac{2}{3}$.

Подставляя это значение k в уравнение пучка, находим уравнение искомой прямой:

$$y + 5 = \frac{2}{3}(x - 4); \quad 3y + 15 = 2x - 8$$

или окончательно

$$2x - 3y - 23 = 0.$$

Прямая, перпендикулярная прямой $2x - 3y + 6 = 0$, получается из уравнения пучка при $k = -\frac{3}{2}$ $\left(\text{это значение } k \text{ найдено из условия перпендикулярности } k_1 = -\frac{1}{k_2}\right)$. Следовательно, вторая искомая прямая определяется уравнением

$$y + 5 = -\frac{3}{2}(x - 4)$$

или

$$3x + 2y - 2 = 0.$$

(Решение задачи по отысканию прямых, параллельных или перпендикулярных данной прямой, сравните с решением примера 11.)

15. Составить уравнения прямых, проходящих через середины сторон треугольника с вершинами $A(3, 4)$, $B(3, 2)$, $C(-1, 2)$.

Середины сторон AB, BC, CA обозначим соответственно через D, E, F. По формулам (1.3) находим, что $D(3, 3)$, $E(1, 2)$, $F(1, 3)$.

Подставляя в уравнение (1.22) координаты точек D и E, т. е. значения $x_1 = 3$, $y_1 = 3$, $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, получим уравнение прямой DE:

$$\frac{y-3}{2-3} = \frac{x-3}{1-3}, \quad \frac{y-3}{-1} = \frac{x-3}{-2}$$

или

$$x - 2y + 3 = 0.$$

Подстановка координат точек E и F в уравнение (1.22) приводит к соотношению

$$\frac{y-2}{3-2} = \frac{x-1}{1-1},$$

лишенному смысла, так как знаменатель правой части обратился в нуль. Но в данном случае уравнение прямой, проходящей через точки E и F можно получить и непосредственно. Так как абсциссы точек E и F равны единице, то отрезок EF будет параллелен оси Oy и расположен справа от оси Oy на расстоянии $d = 1$ от нее. Уравнение прямой EF как прямой, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Ox отрезок $d = 1$, имеет вид

$$x = 1 \text{ или } x - 1 = 0.$$

Это уравнение формально можно получить и с помощью формулы (1.22), если считать, что соответствующий числитель также равен нулю, т. е. $x - 1 = 0$.

Поскольку ординаты точек D и F равны трем, то отрезок DF будет параллелен оси Ox и отстоять от нее на расстоянии $d = 3$. Следовательно, уравнение прямой DF, как параллельной оси Ox и отсекающей на оси Oy отрезок $b = 3$, таково:

$$y = 3 \text{ или } y - 3 = 0.$$

Пользуясь уравнением (1.22) получаем тот же результат. В самом деле, подставляя в него координаты точек D и F, находим

$$\frac{x-3}{1-3} = \frac{y-3}{3-3},$$

откуда

$$y - 3 = 0.$$

Замечание. Если при подстановке координат точек в уравнение (1.22) один из знаменателей обращается в нуль, то искомое уравнение получается приравниванием нулю соответствующего числителя. (Оба знаменателя одновременно в нуль обратиться не могут, так как это означало бы, что $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, т. е. что точки M_1 и M_2 совпадают, а их, естественно, считают различными.)

16. Написать уравнения сторон и высот треугольника с вершинами $P(-4, 3)$, $Q(2, 5)$, $R(6, -2)$.

Напишем уравнение стороны PQ. Для этого подставим в уравнение (1.22) следующие значения: $x_1 = -4$, $y_1 = 3$, $x_2 = 2$, $y_2 = 5$. Получаем

$$\frac{y-3}{5-3} = \frac{x+4}{2+4}$$

или

$$y = \frac{x}{3} + \frac{13}{3}.$$

Из этого уравнения вытекает, что $k_{PQ} = \frac{1}{3}$, где через k_{PQ} обозначен угловой коэффициент прямой PQ.

2*

Чтобы получить уравнение прямой QR, необходимо подставить в уравнение (1.22) значения: $x_1 = 2$, $y_1 = 5$, $x_2 = 6$, $y_2 = -2$. Тогда получим

$$\frac{y-5}{-2-5} = \frac{x-2}{6-2}$$

или

$$y = -\frac{7}{4}x + \frac{17}{2},$$

откуда угловой коэффициент прямой $k_{QR} = -\frac{7}{4}$.

Аналогичным образом найдем уравнение прямой PR. Имеем

$$\frac{y-3}{-2-3} = \frac{x+4}{6+4}, \quad y = -\frac{1}{2}x + 1,$$

откуда

$$k_{PR} = -\frac{1}{2}.$$

Высота, опущенная из точки $R(6, -2)$ на сторону PQ, определяется уравнением (1.20). В данном случае: $x_1 = 6$, $y_1 = -2$, $k = -3$ $\left(\text{значение } k \text{ получено из условия перпендикулярности двух прямых: } k_1 = -\frac{1}{k_2},\ k_2 = k_{PQ} = \frac{1}{3}\right)$. Подставляя эти значения в уравнение (1.20), получим

$$y + 2 = -3(x - 6) \text{ или } 3x + y - 16 = 0.$$

Уравнение высоты, опущенной из вершины Q (2, 5), определяется следующими данными: $x_1 = 2$, $y_1 = 5$, $k = 2$ $\left(\text{так как } k_{PR} = -\frac{1}{2}\right)$. Подставим полученные значения в уравнение (1.20), тогда

$$y - 5 = 2(x - 2), \quad 2x - y + 1 = 0.$$

Аналогично найдем уравнение третьей высоты:

$$y - 3 = \frac{4}{7}(x + 4), \quad 4x - 7y + 37 = 0.$$

Замечание. При составлении уравнения прямой, проходящей через две данные точки, любую из них можно считать первой (т. е. имеющей координаты x_1, y_1). Убедитесь в том, что уравнения прямых PQ, QR, PR останутся прежними и для иной нумерации точек. Например, при составлении уравнения прямой PQ считайте, что $x_1 = 2$, $y_1 = 5$, $x_2 = -4$, $y_2 = 3$.

17. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$, $8x + 4y + 9 = 0$, и параллельной прямой $x + 3y = 0$ (не находя точки M).

Уравнение пучка прямых, проходящих через точку M, в соответствии с уравнением (1.21), имеет вид

$$\alpha(5x - y + 10) + \beta(8x + 4y + 9) = 0$$

или

$$(5\alpha + 8\beta)x + (4\beta - \alpha)y + (10\alpha + 9\beta) = 0. \qquad \text{(A)}$$

Записывая условие параллельности (формула (1.14)) для данного случая, получим

$$\frac{5\alpha + 8\beta}{1} = \frac{4\beta - \alpha}{3},$$

отсюда

$$16\alpha = -20\beta.$$

Можно взять $\alpha = -5$, $\beta = 4$. Уравнение (А) при этих значениях примет вид

$$7x + 21y - 14 = 0 \text{ или } x + 3y - 2 = 0.$$

Задачи

21. Стороны треугольника заданы уравнениями: $7x - 6y + 9 = 0$; $5x + 2y - 25 = 0$; $3x + 10y + 29 = 0$. Найти координаты вершин и уравнения высот треугольника.

22. Дан треугольник с вершинами $P(-4, 0)$, $Q(0, 4)$, $R(2, 2)$. Написать уравнения его медиан.

23. Даны вершины треугольника: $P(6, 0)$, $Q(0, 6)$, $R(-4, 4)$. Составить уравнения сторон треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

24. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами $P(2, 1)$, $Q(0, 7)$, $R(-4, -1)$.

25. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения медиан треугольника, стороны которого лежат на прямых, заданных уравнениями: $y = 4x + 4$; $y = -x + 4$; $4y = x + 1$.

26. Найти точку, равноудаленную от трех данных точек: $L(4, -1)$, $M(8, 1)$, $N(9, 4)$.

27. На прямой $x - 2y + 2 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек $M_1(-2, 3)$, $M_2(2, -1)$.

28. Найти точку, симметричную точке $M(5, 5)$ относительно прямой $x + y - 3 = 0$.

29. Найти проекцию точки $M(-5, 4)$ на прямую $x - y - 5 = 0$.

Ответы

21. $P(-3, -2)$, $Q(3, 5)$, $R(7, -5)$, $6x + 7y - 7 = 0$, $2x - 5y - 4 = 0$, $10x - 3y - 15 = 0$. **22.** $3x - 5y + 12 = 0$, $3x - y + 4 = 0$, $y = 2$. **23.** $x -$

$-2y+3=0$, $x+y-3=0$, $2x+5y-21=0$. 24. $N\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$. 25. $5x-$ $-2y=0$. 26. $N(4, 4)$. 27. $N(0, 1)$. 28. $N(-2, -2)$. 29. $N(2, -3)$.

1.3.4. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой

Нормальное уравнение прямой имеет вид

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{1.24}$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую; α — угол, образуемый этим перпендикуляром с осью Ox.

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую.

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой (1.24) вычисляется по формуле

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p|. \tag{1.25}$$

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0 \tag{1.26}$$

умножением на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{1.27}$$

знак которого противоположен знаку C, приводится к нормальному виду

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0. \tag{1.28}$$

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой (1.26) определяется формулой

$$d = \left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|. \tag{1.29}$$

Примеры

18. Написать уравнение прямой, если известно, что расстояние ее от начала координат равно $\sqrt{2}$ и что перпендикуляр, опущенный на нее из начала координат, составляет с осью Ox угол $\varphi = 45°$.

По условию задачи $p = \sqrt{2}$, $\alpha = 45°$, поэтому $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Подставляя эти значения в уравнение (1.24), получим

$$x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + y\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = 0,$$

откуда

$$x + y - 2 = 0.$$

19. Определить длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $x - y + 3 = 0$, и угол, образуемый этим перпендикуляром с осью Ox.

Уравнение прямой приведем к нормальному виду, для чего найдем нормирующий множитель. Из уравнения прямой следует, что $A = 1$, $B = -1$. По формуле (1.27) найдем

$$\mu = \frac{1}{-\sqrt{1^2+(-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Умножая уравнение прямой на нормирующий множитель $\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, получим

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{3}{\sqrt{2}} = 0,$$

откуда $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $p = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $\alpha = 135°$, $p = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

20. Дан треугольник с вершинами $P(0, 5)$, $Q(-3, 1)$, $R(-1, -2)$. Найти длину высоты, опущенной из точки R.

Задача сводится к определению расстояния от точки R до прямой PQ. Напишем уравнение этой прямой. На основании уравнения (1.22) имеем

$$\frac{y-5}{1-5} = \frac{x-0}{-3-0}, \quad \frac{x}{-3} = \frac{y-5}{-4}$$

или

$$4x - 3y + 15 = 0.$$

Расстояние точки $R(1, -2)$ до этой прямой вычислим по формуле (1.29)

$$d = \left|\frac{4\cdot 1 - 3(-2) + 15}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right| = 5.$$

Следовательно, длина высоты равна 5.

Замечание. Эту задачу можно было бы решить и другими способами. Например, длину искомой высоты можно вычислить, зная площадь треугольника PQR и длину основания PQ. Эта же длина определяется как расстояние между двумя точками R и M, где M—основание высоты, опущенной из точки R на основание PQ. В свою очередь координаты точки M можно найти, решая систему уравнений стороны PQ и высоты RM. (Решите задачу указанными способами и сравните с данным решением.)

21. Написать уравнения биссектрис углов, образуемых двумя пересекающимися прямыми:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0;\ \ A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — фиксированная точка биссектрисы. Расстояние d_1 этой точки до первой прямой определится формулой

$$d_1 = \left| \frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right|,$$

расстояние d_2 до второй прямой — формулой

$$d_2 = \left| \frac{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right|.$$

Так как точка M_0 одинаково удалена от сторон угла, то

$$\left| \frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right| = \left| \frac{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right|.$$

Это равенство имеет место для любой точки $M(x, y)$ биссектрисы, поэтому

$$\left| \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right| = \left| \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right|.$$

Последнее равенство можно записать так:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (1.30)$$

Полученные уравнения являются искомыми.

22. Найти точку M пересечения биссектрис внутренних углов треугольника PQR, стороны которого заданы уравнениями:

$$3x + 4y + 12 = 0 \ (PQ);$$
$$4x + 3y - 12 = 0 \ (QR);$$
$$3x - 4y - 12 = 0 \ (PR).$$

На основании формулы (1.30) уравнения биссектрис углов, образуемых сторонами PQ и QR, запишутся так

$$\frac{4x + 3y - 12}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \pm \frac{3x + 4y + 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

или

$$4x + 3y - 12 = \pm (3x + 4y + 12),$$

отсюда:

$$4x + 3y - 12 - (3x + 4y + 12) = 0;$$
$$4x + 3y - 12 + (3x + 4y + 12) = 0.$$

Таким образом, уравнения биссектрис следующие:

$$x - y - 24 = 0;$$
$$x + y = 0.$$

Одно из этих уравнений будет уравнением биссектрисы внутреннего угла Q треугольника PQR, второе — уравнением биссектрисы внешнего угла. Так как вершины P и R лежат по одну сторону от биссектрисы внешнего угла Q, то при подстановке их координат в уравнение этой биссектрисы получим числа одного знака (см. пример 3). Вершины P и R расположены по разные стороны от биссектрисы внутреннего угла Q, поэтому подстановка координат точек P и R в уравнение этой биссектрисы дает числа разных знаков. Два последних утверждения дают способ отличить биссектрису внутреннего угла от биссектрисы внешнего угла треугольника.

Найдем вершины треугольника PQR. Из уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y + 12 = 0; \\ 3x - 4y - 12 = 0 \end{aligned}\right\}$$

получаем $P(0, -3)$.

Решая систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y + 12 = 0; \\ 4x + 3y - 12 = 0, \end{aligned}\right\}$$

находим $Q(12, -12)$.

Аналогичным образом определим точку $R(3{,}36; -0{,}48)$.

Подставляя координаты точек $P(0, -3)$ и $R(3{,}36; -0{,}48)$ в уравнение $x - y - 24 = 0$, находим:

$$0 + 3 - 24 < 0;$$
$$3{,}36 + 0{,}48 - 24 < 0.$$

Получены числа одного знака, следовательно, уравнение $x - y - 24 = 0$ является уравнением биссектрисы внешнего угла Q. Подставляя координаты этих же точек в уравнение $x + y = 0$, получим:

$$0 + (-3) < 0;$$
$$3{,}36 + (-0{,}48) > 0.$$

Следовательно, уравнение биссектрисы внутреннего угла Q треугольника PQR имеет вид

$$x + y = 0.$$

Аналогичным образом найдем уравнение биссектрисы внутреннего угла R. На основании формулы (1.30) уравнения биссектрис углов, образованных прямыми PR и QR, будут

$$\frac{4x + 3y - 12}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \pm \frac{3x - 4y - 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}},$$

отсюда

$$4x + 3y - 12 = \pm (3x - 4y - 12)$$

или

$$7x - y - 24 = 0,\ \ x - 7y = 0.$$

Подставляя в первое из этих уравнений координаты двух вершин $P(0,\ -3)$, $Q(12,\ -12)$, получим:

$$7\cdot 0-(-3)-24<0;$$
$$7\cdot 12-(-12)-24>0.$$

Таким образом, уравнение

$$7x-y-24=0$$

будет уравнением биссектрисы внутреннего угла R.

Прямые PR и PQ, пересекающиеся в точке P, образуют два угла, биссектрисы которых имеют уравнения

$$\frac{3x+4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{3x-4y-12}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

или

$$y+3=0,\ x=0.$$

Подставляя в первое из этих уравнений координаты точек $Q(12,\ -12)$, $R(3{,}36;\ -0{,}48)$, получим:

$$-12+3<0;$$
$$-0{,}48+3>0.$$

Следовательно,

$$y+3=0$$

является уравнением биссектрисы внутреннего угла P.

Чтобы определить точку M пересечения биссектрис внутренних углов треугольника PQR, достаточно найти точку пересечения двух из найденных биссектрис. Возьмем, например, биссектрисы QM и RM, уравнения которых

$$x+y=0;\ 7x-y-24=0.$$

Решая систему из двух последних уравнений, найдем, что точка M пересечения биссектрис имеет координаты: $x=3$, $y=-3$. Задача решена. (Сделайте чертеж.)

Задачи

30. Даны уравнения прямых:

1) $5x+7y-9=0$; 2) $\frac{1}{4}x+y-3=0$;

3) $\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y-6=0$; 4) $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-7=0$;

5) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-2=0$; 6) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-4=0$.

Какие из этих уравнений являются уравнениями в нормальном виде?

31. Привести к нормальному виду уравнения следующих прямых:

1) $5x+12y-26=0$; 2) $3x-4y+10=0$;

3) $2x+2y+7=0$; 4) $y=3x+5$;

5) $y=kx+b^2$; 6) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

32. Написать уравнение прямой, параллельной данной прямой $4x+3y-15=0$ и отстоящей от нее на расстоянии $d=2$.

33. Найти расстояние между параллельными прямыми:

$$5x-12y-26=0;\ 5x-12y-65=0.$$

34. Даны уравнения оснований трапеции:

$$3x-4y-15=0;\ 3x-4y-35=0.$$

Вычислить длину ее высоты.

35. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(1,\ 5)$ на расстоянии пяти единиц от начала координат.

36. Написать уравнения биссектрис углов, образованных прямыми:

$$4x-3y-10=0;\ 9x-12y-7=0.$$

37. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла B треугольника с вершинами: $A(3,\ 2)$, $B(-1,\ -1)$, $C(\ -7,7)$.

38. Найти точку, равноудаленную от точек $M(-3,\ 1)$, $N(5,\ 7)$ и отстоящую от прямой $3x-4y+38=0$ на расстоянии $d=5$.

39. Даны центр квадрата $N(4,\ 3)$ и уравнение стороны $x-y-5=0$. Написать уравнения остальных трех сторон.

40. Дано уравнение одной из сторон угла $4x-3y+9=0$ и уравнение его биссектрисы $x-7y+21=0$. Написать уравнение другой стороны угла.

Ответы

30. Уравнения 4), 5). **31.** 1) $\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$; 2) $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0$; 3) $-\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{7}{2\sqrt{2}}=0$; 4) $-\frac{3}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}y-\frac{5}{\sqrt{10}}=0$; 5) $-\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}x+\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}y-\frac{b^2}{\sqrt{k^2+1}}=0$; 6) $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$. **32.** $4x+3y-25=0$, $4x+3y-5=0$. Указание. Уравнение искать в виде $4x+3y+C=0$. Воспользоваться формулой (1.29). **33.** $d=3$. Указание. Определить p_1 и p_2, взять их разность. Второй способ. Взять произвольную точку на одной прямой и определить ее расстояние до второй прямой. **34.** $h=4$. **35.** $5x+12y-65=0$, $y-5=0$. Указание. Уравнение прямой искать в виде $y-y_1=k(x-x_1)$. Определить k из условии, что прямая отстоит от начала координат на $d=5$. **36.** $3x+3y-23=0$; $21x-21y-37=0$. **37.** $7x-y+6=0$. **38.** $N(1{,}4)$,

$M(-5,\ 12)$. **39.** $x-y+3=0$; $x+y-3=0$; $x+y-11=0$. **40.** $3x+4y-12=0$.

§ 1.4. Линии второго порядка

Линия называется *линией (кривой) второго порядка*, если она определяется уравнением второй степени относительно текущих координат x и y, т. е. уравнением вида

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0. \tag{1.31}$$

При соответствующем выборе системы координат уравнение линии второго порядка можно привести к простейшему виду.

1.4.1. Окружность

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $N(a,\ b)$ имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{1.32}$$

Уравнение

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0 \tag{1.33}$$

путем дополнения до полных квадратов можно привести к виду

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c. \tag{1.34}$$

При $c>0$ уравнение (1.34) определяет окружность радиуса $R=\sqrt{c}$; при $c=0$ уравнению удовлетворяют координаты единственной точки $N(a,\ b)$; при $c<0$ уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости.

Примеры

1. Написать уравнение окружности радиуса $R=6$ с центром в точке $N(2,\ -3)$.

После подстановки значений $a=2$, $b=-3$, $R=6$ в уравнение (1.32) получаем

$$(x-2)^2+(y+3)^2=36.$$

2. Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2+y^2-6x+10y-15=0.$$

В данном уравнении выделим полные квадраты, прибавляя и вычитая соответствующие числа. Получаем

$$(x^2-6x+9)+(y^2+10y+25)-9-25-15=0,$$

$$(x-3)^2+(y+5)^2=49.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1.32), находим

$$a=3,\ b=-5,\ R=7.$$

3. Найти координаты центра и радиус окружности

$$3x^2+3y^2-4x+9y+4=0.$$

Разделим обе части уравнения на 3:

$$x^2+y^2-\frac{4}{3}x+3y+\frac{4}{3}=0.$$

Дополняя до полных квадратов, находим

$$\left(x^2-2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}\right)+\left(y^2+2\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}\right)-\frac{4}{9}-\frac{9}{4}+\frac{4}{3}=0$$

или

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{36}.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (1.32), заключаем, что

$$a=\frac{2}{3},\ b=-\frac{3}{2},\ R=\frac{7}{6}.$$

4. Какое геометрическое место точек определяется уравнением

$$4x^2+4y^2+8x-12y+13=0?$$

Разделив обе части уравнения на 4, находим

$$x^2+y^2+2x-3y+\frac{13}{4}=0.$$

Дополняя до полных квадратов, получим

$$(x^2+2x+1)+\left(y^2-2\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}\right)-1-\frac{9}{4}+\frac{13}{4}=0$$

или

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты лишь одной точки, а именно:

$$x=-1,\ y=\frac{3}{2}.$$

5. Написать уравнения касательных к окружности

$$x^2+y^2+4x-8y+2=0,$$

проходящих через начало координат.

Уравнение касательной ищем в виде $y=kx$ ($b=0$, так как прямая проходит через начало координат).

Касательная к окружности имеет с ней одну общую точку (две точки пересечения сливаются в одну). Чтобы найти точки пересечения прямой и окружности, необходимо решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &x^2+y^2+4x-8y+2=0;\\ &y=kx. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получаем

$$(1+k^2)x^2+(4-8k)x+2=0.$$

Это уравнение имеет два равных корня, когда дискриминант его равен нулю, т. е.

$$(4-8k)^2-8(1+k^2)=0$$

или

$$7k^2-8k+1=0,$$

откуда $k_1=1$, $k_2=\frac{1}{7}$. Следовательно, уравнения искомых касательных запишутся в виде: $y=x$, $y=\frac{1}{7}x$.

Задачи

1. Написать уравнение окружности, проходящей через точку $N(7,\ -2)$, центр которой находится в точке $S(3,\ -5)$.

2. Даны две точки $M(4,\ 2)$ и $N(12,\ 8)$. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок MN.

3. Найти координаты центра и радиус окружности:

1) $x^2+y^2-4x+8y-16=0$;

2) $3x^2+3y^2-6x+8y-\frac{29}{3}=0$;

3) $x^2+y^2+7x=0$;

4) $5x^2+5y^2+9y=0$.

4. Написать уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $N(8,\ 9)$.

5. Найти уравнение окружности, центр которой находится в точке $N(2,\ -3)$ и которая касается прямой $4x+3y-19=0$.

6. Написать уравнение окружности, проходящей через три точки $L(2,\ 1)$, $M(6,\ 3)$, $N(9,\ 2)$.

7. Определить угол между радиусами окружности $x^2+y^2-10x-6y+16=0$, проведенными в точки пересечения ее с осью Ox.

8. Написать уравнение прямой, проходящей через центры двух окружностей:

$$x^2+y^2-4x+8y-16=0,\ x^2+y^2+8x+12y-14=0.$$

9. Найти уравнение общей хорды окружностей:

$$x^2+y^2-2x-6y+6=0,\ x^2+y^2-6x-10y+30=0.$$

10. Составить уравнение окружности, касающейся оси Ox и проходящей через точки $L(0,\ 8)$, $M(7,\ 1)$.

Ответы

1. $(x-3)^2+(y+5)^2=25$. 2. $(x-8)^2+(y-5)^2=25$. 3. 1) $C(2,\ -4)$, $R=6$; 2) $C\left(1,\ -\frac{4}{3}\right)$, $R=\sqrt{6}$; 3) $C\left(-\frac{7}{2},\ 0\right)$, $R=\frac{7}{2}$; 4) $C(0;\ -0{,}9)$, $R=0{,}9$. 4. $(x-5)^2+(y-5)^2=25$, $(x-29)^2+(y-29)^2=841$. Указание. Уравнение искать в виде $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$. 5. $(x-2)^2+(y+3)^2=16$. Указание. Радиус искомой окружности равен расстоянию данной точки до прямой. 6. $(x-6)^2+(y+2)^2=25$. 7. $\varphi=90°$. 8. $x-3y-14=0$. 9. $x+y-6=0$ 10. $(x-4)^2+(y-5)^2=25$; $(x-12)^2+(y-13)^2=169$.

1.4.2. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек (*фокусов*) есть величина постоянная (эта постоянная больше расстояния между фокусами).

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1.35}$$

где $a=OA$ — большая; $b=OB$ — малая полуось (рис. 1.8). Координаты фокусов: $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$, где

$$c=\sqrt{a^2-b^2}. \tag{1.36}$$

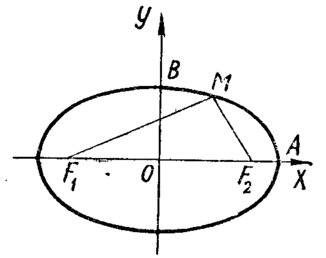

Рис. 1.8

Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния $2c$ к большой оси $2a$:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}\quad(\varepsilon<1,\ \text{так как}\ c<a). \tag{1.37}$$

Расстояния точки $M(x,\ y)$ эллипса до фокусов *(фокальные радиусы)* определяются формулами:

$$r_1=a+\varepsilon x;\ r_2=a-\varepsilon x. \tag{1.38}$$

Директрисами эллипса называются прямые, уравнения которых $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, где ε — эксцентриситет.

Примеры

6. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса

$$4x^2+9y^2=16.$$

Разделив на 16 обе части уравнения, получим

$$\frac{x^2}{4}+\frac{9y^2}{16}=1$$

или

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{16}{9}}=1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1.35), находим:

$$a^2=4,\ b^2=\frac{16}{9},\ a=2,\ b=\frac{4}{3},\ c^2=a^2-b^2=4-\frac{16}{9}=\frac{20}{9},$$

$$c=\frac{2\sqrt{5}}{3},\ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Таким образом, имеем:

$$a=2,\ b=\frac{4}{3},\ F_1\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3},\ 0\right),\ F_2\left(\frac{2\sqrt{5}}{3},\ 0\right),\ \varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

7. Написать простейшее уравнение эллипса, симметричного относительно координатных осей и проходящего через точки $L(3\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$, $N(6,\ 0)$.

Простейшее уравнение указанного эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Определим a^2 и b^2 из условия принадлежности эллипсу точек L и N. Подставляя координаты этих точек в данное уравнение, получим:

$$\frac{18}{a^2}+\frac{8}{b^2}=1,\quad \frac{36}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1.$$

Из второго уравнения находим, что $a^2=36$. Подставляя найденное значение a^2 в первое уравнение, получаем

$$\frac{18}{36}+\frac{8}{b^2}=1,$$

откуда $b^2=16$.

Таким образом, искомое уравнение будет

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

8. На эллипсе $16x^2+25y^2=400$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза меньше расстояния от левого фокуса.

Разделив обе части уравнения на 400, находим

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,$$

откуда

$$a^2=25,\ b^2=16,\ a=5,\ b=4,\ c^2=25-16=9,$$

$$c=3,\ \varepsilon=\frac{3}{5}.$$

В силу формул (1.38) расстояния до фокусов выразятся так:

$$r_1=5+\frac{3}{5}x;\quad r_2=5-\frac{3}{5}x.$$

По условию $r_1=4r_2$; следовательно,

$$5+\frac{3}{5}x=4\left(5-\frac{3}{5}x\right),$$

откуда $x=5$. Подставляя это значение в уравнение эллипса, получим $y=0$. Искомая точка $M(5,\ 0)$.

9. Доказать, что отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

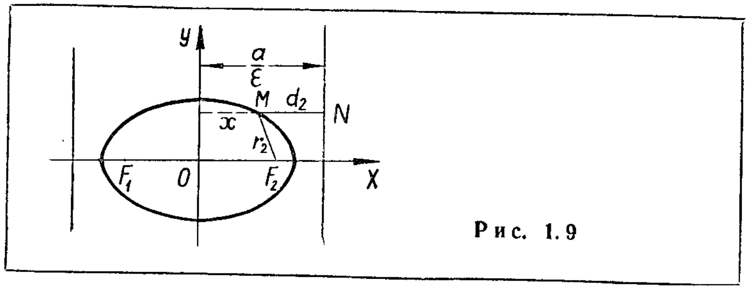

Рис. 1.9

Пусть $M(x,\ y)$ — произвольная точка эллипса (рис. 1.9). Расстояние $d_2=MN$ точки M до директрисы $x=\frac{a}{\varepsilon}$ выразится формулой

$$d_2=\frac{a}{\varepsilon}-x.$$

По второй из формул (1.38) $r_2=a-\varepsilon x$, поэтому

$$\frac{r_2}{d_2}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

10. Найти эксцентриситет и директрисы эллипса

$$x^2+3y^2=6.$$

Напишем уравнение эллипса в виде

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с каноническим уравнением (1.35), заключаем, что $a^2=6$, $b^2=2$. Следовательно,

$$c^2=a^2-b^2=6-2=4,$$

откуда $c=2$, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{6}}$.

Уравнения директрис в общем виде:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}.$$

Подставим сюда значения a^2 и c, получим $x = \pm\frac{6}{2} = \pm 3$. Уравнения директрис: $x = 3$, $x = -3$.

Задачи

11. Составить простейшие уравнения эллипсов, зная, что:
1) полуоси эллипса соответственно равны 7 и 6;
2) расстояние между фокусами равно 24 и большая ось 26;
3) большая полуось равна 5 и расстояние между фокусами 8.

12. Найти канонические уравнения эллипсов по следующим данным:
1) большая полуось равна 10 и эксцентриситет равен 0,8;
2) малая полуось равна 12 и эксцентриситет равен $\frac{5}{13}$;
3) эксцентриситет равен 0,6, расстояние между фокусами 6;
4) сумма полуосей равна 18 и расстояние между фокусами 12.

13. Определить длины осей, координаты фокусов и эксцентриситеты эллипсов, заданных уравнениями:
1) $9x^2 + 25y^2 = 225$; 2) $9x^2 + y^2 = 36$.

14. Дан эксцентриситет эллипса ε. Найти отношение его полуосей. Как величина эксцентриситета характеризует форму эллипса?

15. Известно, что прямая $x - 3y - 12 = 0$ касается эллипса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$. Найти точку касания.

16. Сколько касательных можно провести к эллипсу $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ из точек $L(1,\ 2)$, $M(0,\ 4)$, $N(5,\ 3)$?

17. Написать уравнения директрис эллипса $\frac{x^2}{125} + \frac{y^2}{100} = 1$.

18. Найти длину диаметра эллипса $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$, направленного по биссектрисе второго координатного угла. (Диаметром эллипса называется хорда, проходящая через центр — точку пересечения его осей.)

19. Найти уравнение эллипса, расстояние между фокусами которого равняется 8 и расстояние между директрисами — 24.

20. Дан эллипс $x^2 + 2y^2 = 8$. Через точку $M(1,\ 1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

21. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Определить кривую, описываемую любой точкой M, лежащей на этом отрезке.

Ответы

11. 1) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$; 2) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; 3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. **12.** 1) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$; 2) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$; 3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 4) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$. **13.** 1) $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, $\varepsilon = 0{,}8$, $F_1(-4,\ 0)$, $F_2(4,\ 0)$; 2) $a = 2$, $b = 6$, $c = 4\sqrt{2}$, $F_1(0,\ -4\sqrt{2})$, $F_2(0,\ 4\sqrt{2})$. Указание. Если $a < b$, то фокусы находятся на оси Oy, при этом $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$. **14.** $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Если $\varepsilon = 0$, то $\frac{b}{a} = 1$, $b = a$ (эллипс превращается в окружность). Если ε близко к нулю, то b незначительно отличается от a (эллипс вытянут). Если ε близко к единице, то b мало по сравнению с a (эллипс сжат). **15.** $M(3,\ -3)$. **16.** Из точки M можно провести одну касательную из точки N — две, из точки L — ни одной. Указание. Выяснить, где лежат точки L, M, N по отношению к эллипсу. **17.** $x = 25$, $x = -25$. **18.** $d = 4\sqrt{2}$. **19.** $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{32} = 1$. **20.** $x + 2y - 3 = 0$. Указание. Уравнение прямой искать в виде $y - 1 = k(x - 1)$. Коэффициент k определить из условия, что точка $M(1,\ 1)$ является серединой отрезка LN, где L и N — точки пересечения этой прямой с эллипсом. **21.** Эллипс. Указание. За оси координат принять стороны прямого угла. Ввести в рассмотрение угол φ, образуемый данным отрезком с осью Oy. Исключить параметр φ из полученных выражений для x и y.

1.4.3. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная (указанная разность берется по абсолютному значению; требуется также, чтобы она была меньше расстояния между фокусами и отлична от нуля).

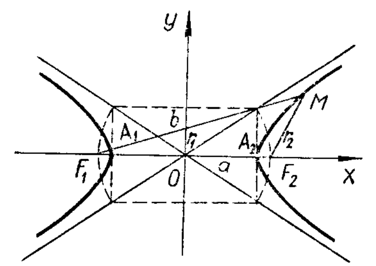

Рис. 1.10

Каноническое (простейшее) уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1.39)$$

где $a = OA_1 = OA_2$ — действительная; b — мнимая полуось.

Фокусы гиперболы:

$$F_1(-c,\ 0),\ F_2(c,\ 0),$$

где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (1.40)$$

Эксцентриситетом гиперболы (1.39) называется отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (\varepsilon > 1, \text{ так как } c > a). \qquad (1.41)$$

Асимптоты гиперболы (1.39):

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \qquad (1.42)$$

Расстояния точки $M(x,\ y)$ гиперболы (рис. 1.10) до ее фокусов определяются формулами:

$$r_1 = |\varepsilon x + a|;\ r_2 = |\varepsilon x - a|. \qquad (1.43)$$

Прямые

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \qquad (1.44)$$

называются *директрисами* гиперболы.

Гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

называются *сопряженными*.

Гипербола с равными полуосями ($a = b$) называется *равносторонней*, ее уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (1.39')$$

Примеры

11. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы

$$9x^2 - 16y^2 = 144.$$

Приведем данное уравнение к каноническому виду, для чего необходимо разделить обе части его на 144. Выполняя деление, получим

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1.39), заключаем, что $a^2 = 16$, $b^2 = 9$. Таким образом, $a = 4$ есть действительная полуось, $b = 3$ — мнимая полуось. Далее, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$, фокусы: $F_1(-5,\ 0)$, $F_2(5,\ 0)$. Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$. Подставляя значения a и b в формулу (1.42), получим уравнения асимптот:

$$y = \pm \frac{3}{4} x.$$

В соответствии с формулой (1.44) находим уравнения директрис:

$$x = \pm \frac{16}{5}.$$

12. Составить простейшее уравнение гиперболы, симметричной относительно координатных осей, пересекающей ось Oy и проходящей через две точки: $M(24,\ 5\sqrt{5})$, $N(0,\ 5)$. Найти фокусы этой гиперболы.

Уравнение гиперболы ищем в виде

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Так как точки M и N лежат на гиперболе, то их координаты удовлетворяют уравнению гиперболы.

Подставляя координаты данных точек в это уравнение, получим

$$\frac{125}{b^2} - \frac{24^2}{a^2} = 1,\ \frac{25}{b^2} = 1.$$

Решая полученную систему, найдем:

$$b^2 = 25,\ a^2 = 144.$$

Таким образом,

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$$

есть искомое уравнение.

Определим c по формуле (1.40). Имеем $c = \sqrt{144 + 25} = 13$. Фокусы данной гиперболы лежат на оси Oy: $F_1(0,\ -13)$, $F_2(0,\ 13)$.

13. Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы до асимптот есть величина постоянная.

Уравнения асимптот гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или } b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

имеют вид

$$y = \pm \frac{b}{a} x \text{ или } bx \pm ay = 0. \qquad (A)$$

Пусть $M(x,\ y)$ — произвольная точка гиперболы. Ее расстояния до асимптот (A) по формуле (1.29) выразятся так:

$$d_1 = \left| \frac{bx - ay}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|;\ d_2 = \left| \frac{bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|,$$

откуда

$$d_1 d_2 = \left| \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{a^2 + b^2} \right| = \frac{a^2b^2}{c^2},$$

что и требовалось доказать.

Задачи

22. Составить простейшие уравнения гиперболы, зная, что:
1) расстояние между фокусами равно 10, а расстояние между вершинами 8;
2) действительная полуось равна 5 и эксцентриситет 2,6.

23. Написать канонические уравнения гипербол, если известно, что:
1) расстояние между фокусами равно 10 и эксцентриситет $\frac{5}{3}$;
2) действительная полуось равна $\sqrt{20}$ и гипербола проходит через точку $N(-10,\ 4)$.

24. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситеты гипербол, заданных уравнениями:
1) $144x^2 - 25y^2 = 3600$; 2) $9y^2 - 16x^2 = 144$.

25. На гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ взята точка, абсцисса которой равна 3. Вычислить фокальные радиусы этой точки.

26. Дан эллипс $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы — в вершинах данного эллипса.

27. Найти зависимость между эксцентриситетом гиперболы и углом между ее асимптотами. Как величина эксцентриситета влияет на форму гиперболы?

28. Составить уравнение гиперболы, зная, что расстояние между ее директрисами равно 4, а расстояние между фокусами 16.

29. Найти эксцентриситет гиперболы, если известно, что расстояние между ее директрисами в четыре раза меньше расстояния между фокусами.

30. Доказать, что отношение расстояния любой точки гиперболы до фокуса к расстоянию ее до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Ответы

22. 1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$. 23. 1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$. 24. 1) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$, $F_1(-13,\ 0)$, $F_2(13,\ 0)$, $\varepsilon = \frac{13}{5}$. 25. $r_1 = 2$, $r_2 = 8$. 26. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$. 27. $\varepsilon \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 1$. 28. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$. 29. $\varepsilon = 2$. 30. Указание. См. 1.4.2, пример 9.

1.4.4. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через начало координат (рис. 1.11), имеет вид

$$y^2 = 2px. \tag{1.45}$$

Уравнение *директрисы*

$$x = -\frac{p}{2}. \tag{1.46}$$

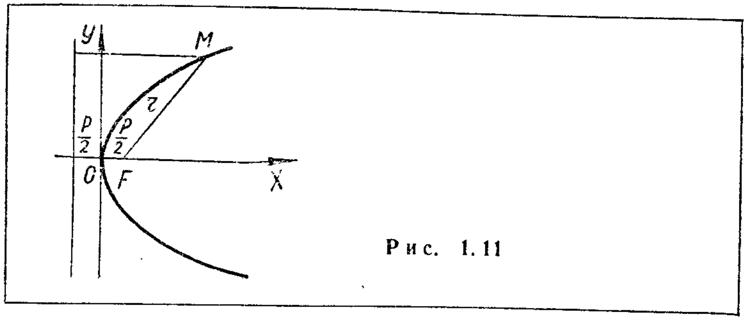

Рис. 1.11

Парабола (1.45) имеет *фокус* $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$. *Фокальный радиус* точки $M(x,\ y)$ параболы выражается формулой

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{1.47}$$

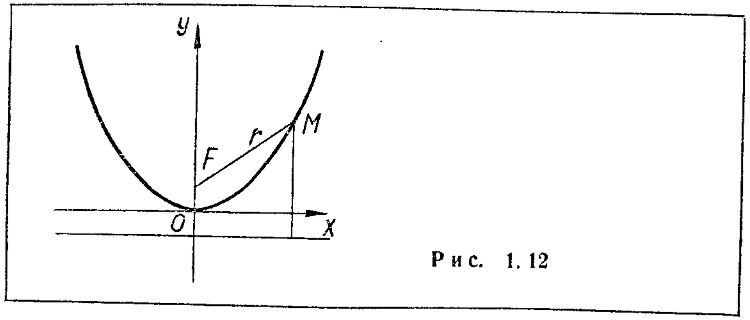

Рис. 1.12

Парабола, симметричная относительно оси Oy и проходящая через начало координат (рис. 1.12), имеет уравнение

$$x^2 = 2py. \tag{1.48}$$

Уравнение *директрисы* этой параболы:

$$y = -\frac{p}{2}. \tag{1.49}$$

Фокусом параболы (1.48) является точка $F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$.

Фокальный радиус точки $M(x, y)$ параболы (1.48)

$$r = y + \frac{p}{2}. \qquad (1.50)$$

Примеры

14. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 12x$. Определить расстояние точки $M(3, 6)$ до фокуса.

Сравнивая уравнение $y^2 = 12x$ с уравнением (1.45), получаем $2p = 12$, откуда $p = 6$, $\frac{p}{2} = 3$. Следовательно, уравнение директрисы $x = -3$, фокус находится в точке $F(3, 0)$. Точка $M(3, 6)$ лежит на параболе $y^2 = 12x$, так как ее координаты удовлетворяют уравнению параболы. Расстояние точки $M(3, 6)$ до фокуса определяется по формуле (1.47). Подставляя в эту формулу значения $x = 3$ и $p = 6$, получаем $r = 3 + 3 = 6$.

15. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $x^2 = 8y$. Определить расстояние точки $N(4, 2)$ до фокуса.

Из уравнения (1.48) и $x^2 = 8y$ заключаем, что $2p = 8$, $p = 4$, $\frac{p}{2} = 2$. Таким образом, уравнение директрисы запишется в виде $y = -2$, фокусом является точка $F(0, 2)$. Фокальный радиус точки $N(4, 2)$ равен $r = 2 + 2 = 4$.

16. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(0, 3)$ и прямой $y = -5$. Определить точки пересечения этой кривой с осями координат.

Искомым геометрическим местом будет парабола. Напишем ее уравнение. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка геометрического места. По условию $MF = MN$, где N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $y = -5$. Так как

$$MF = \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \text{ и } MN = \sqrt{(y-(-5))^2},$$

то

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(y+5)^2},$$

откуда

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 10y + 25.$$

Приводя подобные члены, получим уравнение параболы

$$x^2 = 16y + 16.$$

Для определения точек пересечения с осью Ox необходимо решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &x^2 = 16y + 16; \\ &y = 0 \text{ (уравнение оси } Ox). \end{aligned}\right\}$$

Имеем $x_1 = -4$, $x_2 = 4$. Таким образом, $M_1(-4, 0)$, $M_2(4, 0)$ — две точки пересечения с осью Ox. Полагая в уравнении параболы $x = 0$ (уравнение оси Oy), получим $y = -1$. Парабола пересекает ось Oy в точке $M_3(0, -1)$.

17. Написать уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 8y = 0$.

Найдем точки пересечения прямой и окружности, для чего решим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &x + y = 0; \\ &x^2 + y^2 + 8y = 0. \end{aligned}\right\}$$

Определяя x из первого уравнения и подставляя его во второе, получим

$$(-y)^2 + y^2 + 8y = 0$$

или

$$2y^2 + 8y = 0, \ 2y(y + 4) = 0,$$

откуда

$$y_1 = 0, \ y_2 = -4.$$

Так как $x = -y$, то $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Следовательно, $O(0, 0)$, $M(4, -4)$ — искомые точки пересечения.

Уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через начало координат, имеет вид

$$x^2 = 2py.$$

Определим параметр p из условия, что парабола проходит через точку $M(4, -4)$. Подставляя координаты этой точки в уравнение параболы, получим

$$4^2 = 2p(-4),$$

откуда

$$2p = -4.$$

Следовательно, искомое уравнение параболы имеет вид

$$x^2 = -4y.$$

18. Дана парабола $y^2 = 6x$. Через точку $N(4, 1)$ провести такую хорду, которая делилась бы в этой точке пополам.

Уравнение искомой хорды запишем в виде

$$y - 1 = k(x - 4) \text{ или } y = k(x-4) + 1.$$

Для нахождения точек пересечения хорды с параболой необходимо решить систему

$$\left.\begin{aligned} &y^2 = 6x; \\ &y = k(x-4) + 1. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим

$$k^2(x^2 - 8x + 16) + 2k(x - 4) + 1 = 6x$$

или

$$k^2x^2 - 2(4k^2 - k + 3)x + 16k^2 - 8k + 1 = 0.$$

Это уравнение можно переписать так:

$$x^2 - \frac{2(4k^2-k+3)}{k^2}x + \frac{16k^2-8k+1}{k^2} = 0.$$

По теореме Виета для корней x_1 и x_2 этого уравнения находим

$$x_1 + x_2 = \frac{2(4k^2-k+3)}{k^2}.$$

Так как $N(4, 1)$ — середина хорды, то

$$\frac{x_1+x_2}{2} = 4.$$

Следовательно,

$$\frac{4k^2-k+3}{k^2} = 4,$$

откуда

$$k = 3.$$

Таким образом, получаем следующее уравнение искомой хорды

$$y - 1 = 3(x-4)$$

или

$$3x - y - 11 = 0.$$

19. Написать уравнение касательной к параболе $y^2 = 4x$, проведенной через точку $N(-3, 2)$.

Уравнение касательной ищем в виде

$$y - 2 = k(x+3)$$

или

$$y = k(x+3) + 2.$$

Точки пересечения последней прямой с параболой найдем из системы:

$$\left.\begin{aligned} &y^2 = 4x; \\ &y = k(x+3)+2. \end{aligned}\right\}$$

Для касательной точки пересечения сливаются в одну, поэтому k определяется из условия, что система имеет единственное решение.

Подставляя второе уравнение системы в первое, получим

$$k^2(x^2+6x+9) + 4k(x+3) + 4 = 4x$$

или

$$k^2x^2 + (6k^2+4k-4)x + 9k^2 + 12k + 4 = 0.$$

Это уравнение имеет два равных корня, когда его дискриминант равен нулю, т. е.

$$(6k^2+4k-4)^2 - 4k^2(9k^2+12k+4) = 0.$$

Преобразуя последнее уравнение (раскрывая скобки, производя умножение и приводя подобные члены), получим

$$-48k^2 - 32k + 16 = 0$$

или

$$3k^2 + 2k - 1 = 0,$$

откуда

$$k_1 = \frac{1}{3}, \ k_2 = -1.$$

Таким образом, уравнения касательных будут

$$y - 2 = -1(x+3);$$
$$y - 2 = \frac{1}{3}(x+3)$$

или

$$x + y + 1 = 0;$$
$$x - 3y + 9 = 0.$$

Задачи

31. Написать уравнение параболы, зная, что:

1) парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $N(-3, 6)$ и начало координат;

2) парабола симметрична относительно оси Oy, проходит через точку $N(6, 3)$ и начало координат.

32. Составить уравнение параболы, зная, что:

1) фокус находится в точке $F(5, 0)$, директриса будет осью ординат и ось симметрии — осью абсцисс;

2) фокус находится в точке $F(0, 5)$, директриса служит осью абсцисс и ось симметрии — осью ординат.

33. Найти координаты фокусов и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением:

1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = -6x$;
3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -4y$.

34. На параболе $y^2 = 16x$ найти точку, фокальный радиус которой равен 5.

35. Написать уравнение параболы, зная, что вершина ее лежит в начале координат, направление оси симметрии совпадает с отрицательным направлением оси Oy, а параметр p равен расстоянию от фокусов гиперболы $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ до асимптот.

36. Дана парабола $x^2 = 16y$. Через точку $N\left(2, \frac{5}{2}\right)$ провести хорду, делящуюся в ней пополам.

37. Найти касательные к параболе $x^2 = 4y$, проходящие через точку $N(0, -1)$.

38. Дана парабола $x^2 = 4y$. Определить длину ее хорды, проходящей через точку $N(2, 3)$ и параллельной прямой $x - 2y + 5 = 0$.

39. Осевое сечение зеркала прожектора имеет форму параболы. Определить положение фокуса, если диаметр зеркала 80 *см*, а глубина его 40 *см*.

40. Найти уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $y - x = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 8x = 0$ и симметрична относительно оси Ox.

Ответы

31. 1) $y^2 = -12x$; 2) $x^2 = 12y$. 32. 1) $y^2 = 10x - 25$; 2) $x^2 = 10y - 25$. 33. 1) $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $x = -\frac{3}{2}$; 2) $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $x = \frac{3}{2}$; 3) $F(0, 1)$, $y = -1$. 34. $M(1, 4)$, $N(1, -4)$. 35. $x^2 = -6y$. 36. $x - 4y + 8 = 0$. 37. $x + y + 1 = 0$; $x - y - 1 = 0$. 38. $d = 3\sqrt{5}$. 39. 10 *см* от вершины. 40. $y^2 = -4x$.

§ 1.5. Преобразования прямоугольных координат

Координаты (x, y) точки M в прямоугольной декартовой системе координат Oxy (старой) и ее координаты (X, Y) в другой прямоугольной системе O_1XY (новой) связаны формулами:

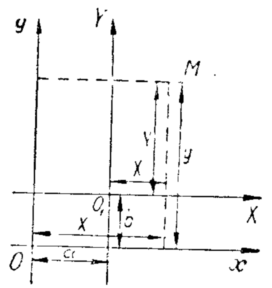

Рис. 1.13

при параллельном переносе (рис. 1.13)

$$\left.\begin{aligned} x &= X + a,\\ y &= Y + b\end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} X &= x - a,\\ Y &= y - b,\end{aligned}\right\} \qquad (1.51)$$

где (a, b) — координаты нового начала O_1 в старой системе координат;

при повороте осей вокруг начала координат на угол α (рис. 1.14)

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\alpha - Y\sin\alpha,\\ y &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha.\end{aligned}\right\} \qquad (1.52)$$

Уравнение

$$y = Ax^2 + Bx + C \qquad (1.53)$$

выделением полного квадрата приводится к уравнению

$$y = A(x - a)^2 + b, \qquad (1.54)$$

которое с помощью преобразования (1.51) можно записать так:

$$Y = AX^2. \qquad (1.54')$$

Последнее уравнение является уравнением параболы с вершиной в начале новой системы координат и осью симметрии, совпадающей с осью OY.

Аналогичным образом уравнение

$$x = Ay^2 + By + C \qquad (1.55)$$

преобразуется к виду

$$X = AY^2. \qquad (1.55')$$

Уравнения

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (1.56)$$

и

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (1.57)$$

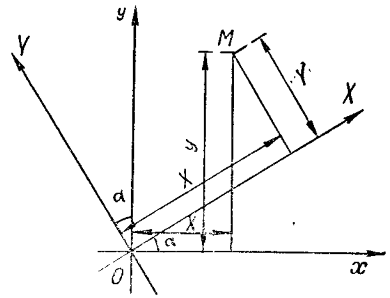

Рис. 1.14

с помощью формул (1.51) приводятся соответственно к уравнениям:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1; \qquad (1.56')$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1. \qquad (1.57')$$

Следовательно, уравнение (1.56) определяет эллипс, оси которого параллельны координатным осям и центр находится в точке $O_1(x_0, y_0)$, а уравнение (1.57) — гиперболу (с теми же особенностями расположения относительно системы координат).

Уравнение равносторонней гиперболы

$$x^2 - y^2 = a^2$$

с помощью преобразования (1.52) при $\alpha = 45^\circ$ приводится к виду

$$XY = c. \tag{1.58}$$

Уравнение

$$xy + Bx + Ay + C = 0 \tag{1.59}$$

с помощью формул (1.51) приводится к уравнению (1.58), где

$$X = x + A, \quad Y = y + B, \quad c = AB - C, \tag{1.60}$$

и, следовательно, определяет гиперболу, асимптоты которой являются координатными осями новой системы координат с началом в точке $O_1(-A, -B)$.

Примеры

1. Уравнение кривой $y = x^2 + 4x + 5$ привести к каноническому виду. Построить эту кривую.

Преобразуем правую часть уравнения, выделяя полный квадрат:

$$y = (x^2 + 4x + 4) + 1, \quad y = (x + 2)^2 + 1.$$

Последнее уравнение можно записать так:

$$y - 1 = (x + 2)^2.$$

Полагая

$$y - 1 = Y, \ x + 2 = X,$$

получим

$$Y = X^2.$$

Это уравнение определяет параболу с вершиной в начале новой системы координат и осью симметрии, совпадающей с осью OY.

Найдем координаты нового начала в старой системе. Так как новые координаты нового начала равны нулю, т. е.

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

то из формул преобразования ($X = x + 2$, $Y = y - 1$) получаем

$$x + 2 = 0, \quad y - 1 = 0,$$

откуда $x = -2$, $y = 1$. Таким образом определена точка $O_1(-2, 1)$.

Строим старую и новую системы координат и кривую относительно новой системы по ее каноническому уравнению $Y = X^2$ (рис. 1.15). Тем самым кривая построена и по отношению к старой системе координат.

2. Упростить уравнение кривой $y = 2x^2 + 8x + 12$, определить ее вид и расположение на плоскости.

Преобразуем правую часть уравнения, выделяя полный квадрат:

$$y = 2(x^2 + 4x + 6) = 2[(x^2 + 4x + 4) + 2] = 2[(x + 2)^2 + 2],$$
$$y = 2(x + 2)^2 + 4, \quad y - 4 = 2(x + 2)^2.$$

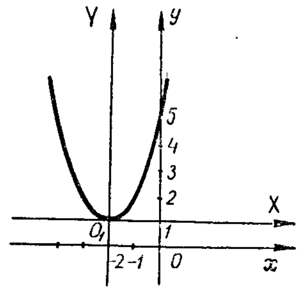

Рис. 1.15

Это уравнение можно записать в виде $Y = 2X^2$, где $Y = y - 4$, $X = x + 2$. Оно определяет параболу, симметричную относительно оси OY, с вершиной в начале новой системы ко-

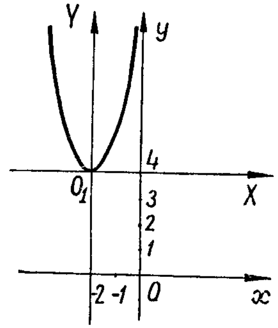

Рис. 1.16

ординат. Найдем старые координаты вершины. Подставляя ее новые координаты (0, 0) в формулы преобразования: $Y = y - 4$, $X = x + 2$, получаем $0 = y - 4$, $0 = x + 2$, откуда $x = -2$, $y = 4$.

Следовательно, данная кривая является параболой, вершина которой находится в точке $O_1(-2, 4)$, а ее ось симметрии параллельна оси Oy (рис. 1.16).

3. Уравнение кривой $x = -4y^2 + 6y - 3$ привести к простейшему виду.

Преобразуя правую часть уравнения, получаем

$$x = -4y^2 + 6y - 3 = -4\left(y^2 - \frac{6}{4}y + \frac{3}{4}\right) =$$
$$= -4\left[\left(y^2 - 2\cdot\frac{3}{4}y + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16} + \frac{3}{4}\right] =$$
$$= -4\left[\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right] = -4\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{4},$$
$$x = -4\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{4}, \quad x + \frac{3}{4} = -4\left(y - \frac{3}{4}\right)^2.$$

Последнее уравнение перепишем так:

$$X = -4Y^2,$$

где $X = x + \frac{3}{4}$, $Y = y - \frac{3}{4}$. Оно определяет параболу с вершиной в точке $O_1\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ и осью симметрии, параллельной оси Ox (рис. 1.17).

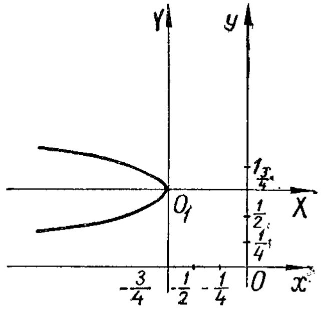

Рис. 1.17

4. Упростить уравнение кривой

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

и определить ее параметры.

Вводя новые координаты по формулам $X = x - 2$, $Y = y + 3$, получаем уравнение эллипса

$$\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} = 1$$

с полуосями $a = 5$, $b = 4$.

Из формул преобразования $X = x - 2$, $Y = y + 3$ находим координаты центра эллипса: $x = 2$, $y = -3$ (рис. 1.18).

5. Определить вид кривой и ее расположение на плоскости по уравнению

$$9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, преобразуем левую часть уравнения:

$$9(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 - 8y + 16) - 81 - 64 + 109 = 0,$$
$$9(x-3)^2 + 4(y-4)^2 - 36 = 0.$$

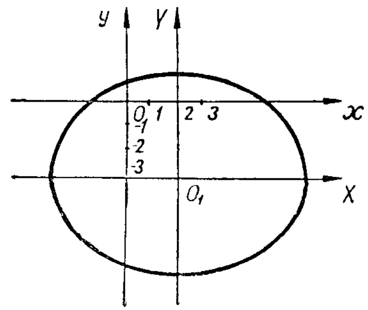

Рис. 1.18

Разделим обе части уравнения на 36

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1.$$

Вводя новые координаты по формулам $X = x - 3$, $Y = y - 4$, запишем уравнение в виде

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $a = 2$, $b = 3$ и с центром в точке $O_1(3, 4)$.

6. Определить вид и расположение на плоскости линии

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0.$$

Преобразуем левую часть уравнения, выделяя полные квадраты:

$$4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 4y + 4) - 4 + 36 - 68 = 0,$$
$$4(x-1)^2 - 9(y+2)^2 - 36 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на 36:

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Вводим новые координаты по формулам $X = x - 1$, $Y = y + 2$. Уравнение примет вид

$$\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Оно определяет гиперболу с центром в точке $O_1(1, -2)$ и полуосями $a=3$, $b=2$ (рис. 1.19).

7. Определить вид и расположение линии

$$xy - 2x - y + 6 = 0.$$

Применяя тождество

$$xy + Ax + By + C = (x + B)(y + A) - AB + C,$$

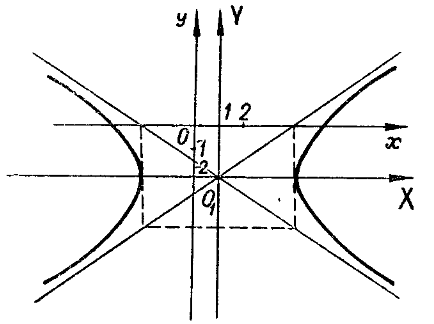

Рис. 1.19

преобразуем левую часть уравнения

$$xy - 2x - y + 6 = (x-1)(y-2) - 2 + 6.$$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x-1)(y-2) = -4.$$

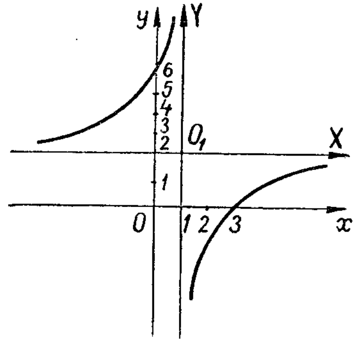

Рис. 1.20

Вводя новые координаты по формулам $x - 1 = X$, $y - 2 = Y$, получаем уравнение $XY = -4$. Это уравнение является уравнением гиперболы, асимптоты которой служат осями новой системы координат (рис. 1.20). Центр гиперболы находится в точке $O_1(1, 2)$.

8. Определить вид и расположение линии

$$y = \frac{9 - x}{x - 3}.$$

Данное уравнение перепишем в виде

$$y(x-3) = 9 - x$$

или

$$xy - 3y + x - 9 = 0.$$

Преобразуя левую часть уравнения, получаем

$$xy - 3y + x - 9 = (x-3)(y+1) - (-3\cdot 1) - 9 = $$
$$= (x-3)(y+1) - 6.$$

Следовательно, уравнение линии можно записать так:

$$(x-3)(y+1) = 6$$

или

$$XY = 6,$$

где

$$X = x - 3,\ Y = y + 1.$$

Уравнение определяет гиперболу с центром в точке $O_1(3, -1)$, асимптоты ее служат осями новой системы координат.

Задачи

Уравнение линии привести к каноническому виду, построить линию:

1. $y = x^2 - 5x + 7$.
2. $y = 4x^2 + 8x + 7$.
3. $y = -3x^2 + 6x - 5$.
4. $x = y^2 + 3y + 4$.
5. $x = 5y^2 - 10y + 6$.
6. $x = -2y^2 + 8y - 3$.
7. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1$.
8. $\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$.
9. $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$.
10. $\frac{(x+5)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$.
11. $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0$.
12. $4x^2 + 9y^2 + 16x + 18y - 11 = 0$.
13. $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$.
14. $9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0$.
15. $xy - 3y + 4x - 20 = 0$.
16. $xy + 2y - x + 2 = 0$.
17. $y = \frac{5 - 3x}{x - 1}$.
18. $y = \frac{2x + 9}{x + 4}$.

Ответы

1. $Y = X^2$; $O_1\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$. 2. $Y = 4X^2$, $O_1(-1, 3)$. 3. $Y = -3X^2$, $O_1(1, -2)$. 4. $X = Y^2$, $O_1\left(\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}\right)$. 5. $X = 5Y^2$, $O_1(1, 1)$. 6 $X = -2Y^2$, $O_1(5, 2)$ 7. $\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{25} = 1$, $O_1(2, -4)$. 8. $\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{25} = 1$, $O_1(-1, 3)$

9. $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{16} = 1$, $O_1(3,\ 2)$. 10. $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1$, $O_1(-5,\ -2)$. 11. $\frac{X^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $O_1(1,\ 1)$. 12. $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$, $O_1(-2,\ -1)$. 13. $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{1} = 1$, $O_1(-3,\ 2)$. 14. $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{9} = 1$, $O_1(-1,\ 1)$. 15. $XY = 8$, $O_1(3,\ -4)$. 16. $XY = -4$, $O_1(-2,\ 1)$. 17. $XY = 2$, $O_1(1,\ -3)$. 18. $XY = 1$, $O_1(-4,\ 2)$.

§ 1.6. Полярные координаты

Полярными координатами точки M на плоскости называются *полярный радиус* $\rho = OM$ и *полярный угол* $\varphi = \angle POM$, отсчитываемый от полярной оси OP к отрезку OM (рис. 1.21) против движения часовой стрелки.

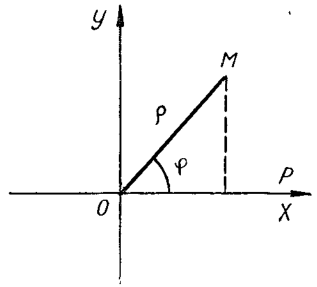

Рис. 1.21

Прямоугольные декартовы и полярные координаты точки M при соответствующем выборе координатных систем (рис. 1.21) связаны формулами:

$$x = \rho\cos\varphi;\quad y = \rho\sin\varphi; \tag{1.61}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{1.62}$$

Уравнение линии на плоскости в полярных координатах следующее:

$$F(\rho,\ \varphi) = 0. \tag{1.63}$$

Примеры

1. Найти уравнение окружности, проходящей через полюс, центр окружности лежит на полярной оси, а радиус равен a.

Соединим отрезками прямой точку M с полюсом и с конечной точкой D диаметра, проходящего через полюс O (рис. 1.22).

Координатами точки M будут угол φ и длина ρ отрезка OM. Из прямоугольного треугольника OMD получаем искомое уравнение

$$\rho = 2a\cos\varphi.$$

2. Точка M равномерно движется по прямой ON, равномерно вращающейся вокруг точки O. Траектория точки M называется

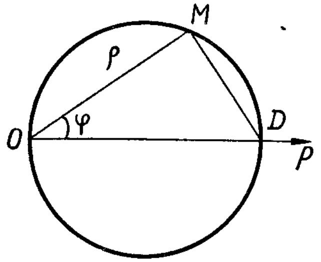

Рис. 1. 22

спиралью Архимеда. Составить уравнение спирали Архимеда и построить ее.

Примем точку O (рис. 1.23) за полюс системы, начальное положение OP прямой ON — за полярную ось. Пусть в началь-

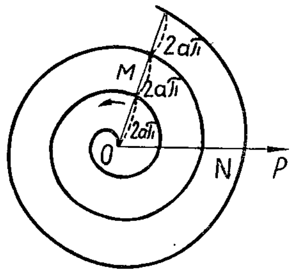

Рис. 1. 23

ный момент движения точка M находится в полюсе. Расстояние $OM = \rho$, пройденное точкой M вдоль прямой ON, и полярный угол φ возрастают в силу равномерности движения пропорционально времени. Следовательно, они пропорциональны друг другу, т. е.

$$\rho = a\varphi, \tag{A}$$

где a — коэффициент пропорциональности.

Уравнение (А) и является уравнением спирали Архимеда. В декартовой системе координат:

$$\sqrt{x^2+y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

(Последнее уравнение получено из уравнения (А) с помощью формул (1.62).)

Построим кривую по ее уравнению (А). Придавая значения φ и определяя соответствующие значения ρ, составим таблицу:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π	...
ρ	0	$\frac{\pi}{6}a$	$\frac{\pi}{4}a$	$\frac{\pi}{3}a$	$\frac{\pi}{2}a$	$\frac{2}{3}\pi a$	$\frac{3}{4}\pi a$	$\frac{5}{6}\pi a$	πa	$\frac{5}{4}\pi a$	$\frac{4}{3}\pi a$	$\frac{3}{2}\pi a$	$\frac{7}{4}\pi a$	$2\pi a$	...

Построив соответствующие точки, получим искомую кривую (см. рис. 1.23).

3. Отрезок AB постоянной длины $2a$ своими концами скользит по осям декартовых координат. Из начала координат на AB опущен перпендикуляр OM. Геометрическое место точек M называется *четырехлепестковой розой*. Написать ее уравнение, построить кривую.

Из треугольника OMA (рис. 1.24) определим

$$\rho = OM = OA\cos\varphi.$$

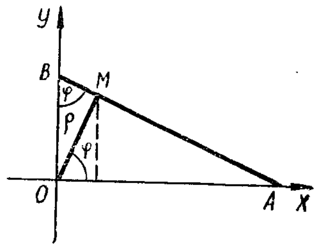

Рис. 1.24

Из треугольника ABO получаем

$$OA = AB\sin\varphi = 2a\sin\varphi,$$

поэтому

$$\rho = 2a\sin\varphi\cos\varphi.$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$\rho = a\sin 2\varphi.$$

Кривая изображена на рис. 1.25.

4. Из точки O на окружности радиуса a проводится луч OK (рис. 1.26), от точки L пересечения его с окружностью откладывается отрезок $LM = 2a$ по направлению луча OK. Линия, описываемая точкой M при вращении луча, называется *кардиоидой*. Составить уравнение кардиоиды.

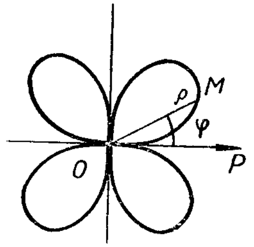

Рис. 1.25

Выберем полярную систему координат, как показано на рис. 1.26. Непосредственно из чертежа получаем

$$\rho = OL + LM.$$

Так как

$$LM = 2a,\quad OL = OB\cos\varphi = 2a\cos\varphi,$$

то

$$\rho = 2a(1+\cos\varphi).$$

Полученное уравнение и является искомым. Когда φ пробегает промежуток $(-\pi, \pi)$, кардиоида описывается полностью.

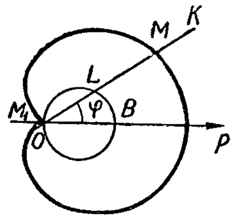

Рис. 1.26

5. На окружности радиуса a фиксирована точка O. Луч Ox вращается около точки O, при этом он пересекает окружность в некоторой точке N. На прямой ON от точки N в направлении луча Ox откладывается отрезок $NM = b$. Когда луч Ox совершит полный оборот, точка M опишет кривую, называемую *улиткой Паскаля*. Составить уравнение этой кривой и построить ее. Показать, что при $b = 2a$ получается кардиоида (см. пример 4).

Примем точку O за полюс, а полярную ось совместим с диаметром OA (рис. 1.27). Непосредственно из чертежа находим

$$\rho = OM = ON + NM.$$

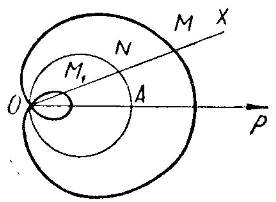

Рис. 1.27

Подставляя в это равенство выражения

$$ON = 2a\cos\varphi, \quad NM = b,$$

получим уравнение улитки Паскаля в полярных координатах

$$\rho = 2a\cos\varphi + b.$$

Исходя из определения кривой, легко построить ряд ее точек. Форма кривой зависит от соотношения между постоянными $2a$ и b. Если $b < 2a$, кривая имеет вид, изображенный на рис. 1.27. На рис. 1.28 изображена кривая для случая $b > 2a$.

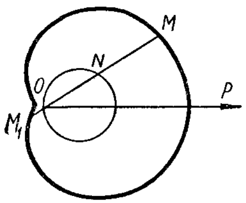

Рис. 1.28

Если $b = 2a$, то уравнение улитки Паскаля примет вид

$$\rho = 2a(1 + \cos\varphi).$$

Это уравнение кардиоиды, рассмотренной в предыдущем примере (см. рис. 1.26).

В декартовых прямоугольных координатах уравнение улитки Паскаля таково:

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Следовательно, улитка Паскаля является алгебраической кривой четвертого порядка.

Примечание. В области техники улитка Паскаля находит, в частности, применение в кулачковых механизмах. Она используется как линия для вычерчивания профиля эксцентрика, если требуется, чтобы скользящий по профилю стержень совершал гармоническое колебание. В самом деле, поступательное перемещение S точки M (рис. 1.29) определится по формуле

$$S = \rho = 2a\cos\omega t + b = 2a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + b,$$

где ω — угловая скорость эксцентрика.

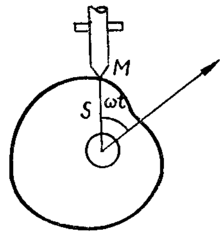

Рис. 1.29

Одна из составных частей в механизме для поднятия и опускания семафора очерчена по улитке Паскаля.

В швейной машине форму кардиоиды имеет кулачок, под воздействием которого колеблется толкатель, подающий нитку на шпульку.

6. Написать уравнение лемнискаты Бернулли в полярных координатах и построить ее.

В примере 5 § 1.2 было получено уравнение лемнискаты Бернулли в прямоугольных декартовых координатах:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Так как x и y входят в это уравнение только в четных степенях, то лемниската симметрична относительно координатных осей (если точка $M(x, y)$ принадлежит лемнискате, то точки $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$, $M_3(-x, -y)$ также ей принадлежат (см. замечание к примеру 1 § 1.1)).

Поскольку

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad x^2 + y^2 = \rho^2,$$

то уравнение лемнискаты в полярных координатах примет вид

$$\rho^4 = 2a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

или

$$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi.$$

Из этого уравнения видно, что $\rho = a\sqrt{2}$ при $\varphi = 0$. Если φ увеличивается от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{4}$, то ρ уменьшается от $\rho = a\sqrt{2}$ до $\rho = 0$. Если $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то ρ принимает мнимые значения, т. е. на лемнискате нет точек, для которых φ меняется в указанных пределах. Следовательно, мы можем построить часть лемнискаты, расположенную в первой четверти $\left(\text{для } 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$, и потом в силу симметрии кривой всю линию.

Построение лемнискаты по точкам можно также осуществить следующим образом. Переписывая уравнение лемнискаты в виде

$$\rho^2 = c^2 (2\cos^2\varphi - 1),$$

где $c^2 = 2a^2$, заключаем, что полярный радиус ее произвольной точки является катетом прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна $c\sqrt{2}\cos\varphi$, а другой катет равен c. На оси абсцисс от точки O отложим отрезки $OA = OA' = c$ (рис. 1.30), на оси

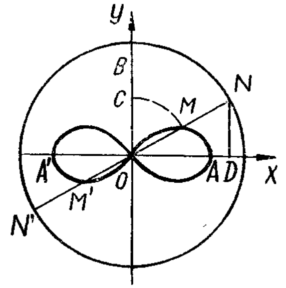

Рис. 1.30

ординат — отрезок $OB = c$, радиусом $AB = c\sqrt{2}$ описываем окружность с центром в начале координат. Через точку O проводим прямую под углом $\varphi \left(\varphi < \frac{\pi}{4}\right)$ к оси Ox, пересекающую окружность в точках N и N'. Из точки N опустим перпендикуляр ND на ось Ox, из точки A радиусом, равным OD, засекаем на OB точку C. Тогда

$$OC^2 = AC^2 - OA^2 = OD^2 - OA^2 = (ON\cos\varphi)^2 - OA^2 =$$
$$= (c\sqrt{2}\cos\varphi)^2 - c^2,$$

откуда и следует, что катет OC определяет длину полярного радиуса точки лемнискаты, соответствующей углу φ. На прямой NN' из точки O радиусом OC засекаем две точки M и M', принадлежащие лемнискате. Повторяя указанное построение при других значениях φ, получим вторую пару точек и т. д.

Примечание. В технике лемниската применяется, в частности, в качестве переходной кривой на закруглениях малого радиуса, как это имеет место на железнодорожных линиях в горной местности и на трамвайных путях.

Уравнение лемнискаты встречается впервые в математической литературе в статье Я. Бернулли, опубликованной в «Acta eruditorum» в 1694 г.

7. Написать уравнение конического сечения в полярных координатах. (Сечением любого круглого конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, определяется кривая, которая может быть лишь эллипсом, гиперболой или параболой.)

Пусть ABC (рис. 1.31) — дуга конического сечения (эллипса, гиперболы или параболы), B — вершина, F — фокус, DN — соответствующая директриса. Примем точку F за полюс, прямую BFP за полярную ось, выбрав на ней направление от фокуса F в сторону, противоположную директрисе. Пусть M_0 — точка дуги BC конического сечения, лежащая на перпендикуляре к полярной оси, проходящем через полюс F. Назовем фокальным параметром $p = FM_0$.

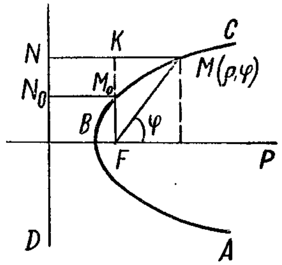

Рис. 1.31

Пусть $M(\rho, \varphi)$ — произвольная точка кривой. Найдем зависимость между полярными координатами ρ, φ и данными числами p и ε, где ε — эксцентриситет. По общему свойству всех точек конического сечения (см. определение параболы, пример 9 и задачу 30 § 1.4) имеем

$$\frac{FM}{MN} = \varepsilon. \tag{A}$$

Далее,

$$FM = \rho, \quad MN = N_0M_0 + \rho\cos\varphi.$$

Так как

$$\frac{FM_0}{N_0M_0} = \varepsilon, \quad FM_0 = p,$$

то

$$N_0M_0 = \frac{p}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$MN = \frac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi. \tag{B}$$

Равенство (A) с учетом (B) перепишем в виде

$$\frac{\rho}{\frac{p}{\varepsilon}+\rho\cos\varphi}=\varepsilon,$$

откуда

$$\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}. \qquad (C)$$

Уравнение (C) будет определять эллипс, если $\varepsilon<1$, параболу при $\varepsilon=1$, гиперболу, когда $\varepsilon>1$.

В уравнении (C) величина p для параболы имеет прежнее значение (т. е. то же, что в уравнении $y^2=2px$), так как $p=FM_0=M_0N_0$ есть расстояние от фокуса до директрисы. Выразим p для эллипса и гиперболы. Подставляя координаты точки $M_0(-c,\ p)$ эллипса в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

получаем

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=1,$$

откуда

$$\frac{p^2}{b^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},\quad p^2=\frac{b^4}{a^2},\qquad p=\frac{b^2}{a}.$$

Подставляя координаты точки гиперболы $M_0(c,\ p)$ в ее уравнение, находим

$$\frac{c^2}{a^2}-\frac{p^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{p^2}{b^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

откуда

$$p=\frac{b^2}{a}.$$

Таким образом, уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах (при указанном выборе полюса и полярной оси) имеют одинаковый вид:

$$\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi},$$

где $p=\frac{b^2}{a}$ для эллипса и гиперболы.

8. Прямая $x=a$ пересекает ось Ox в точке A и произвольный луч OB в точке B. На луче от точки B по обе стороны отложены отрезки BM_1 и BM_2, равные AB. Написать уравнение геометрического места точек M_1 и M_2 в полярных и прямоугольных декартовых координатах. (Кривая эта называется *строфоидой*.)

Из чертежа (рис. 1.32) получаем

$$\rho=OB\pm AB.$$

Так как

$$OB=\frac{a}{\cos\varphi},\quad AB=a\operatorname{tg}\varphi,$$

то

$$\rho=\frac{a(1\pm\sin\varphi)}{\cos\varphi}.$$

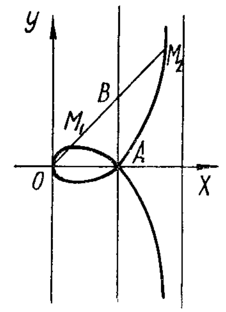

Рис. 1.32

В декартовых координатах это уравнение примет вид

$$y^2=\frac{x(x-a)^2}{2a-x}.$$

Задачи

1. В полярной системе координат $(\rho,\ \varphi)$ построить точки: $A(2,\ 0)$, $B\left(3,\ \frac{\pi}{4}\right)$, $C\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $D(4,\ \pi)$, $E\left(2,\ \frac{3\pi}{4}\right)$, $F(-2,0)$, $G\left(-3,\ \frac{\pi}{4}\right)$, $K\left(1,\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $L(4,\ -\pi)$, $M\left(-2,\ -\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Написать в полярных координатах уравнения линий:
1) $xy=\frac{c}{2}$; 2) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$;
3) $y-2x=0$; 4) $x^2+y^2=2ay$.

3. Построить линии:
1) $\rho=R$; 2) $\varphi=\frac{\pi}{3}$; 3) $\rho=\frac{a}{\cos\varphi}$;
4) $\rho=a(1-\cos\varphi)$; 5) $\rho=2(1+2\cos\varphi)$.

4. Написать в декартовых координатах уравнения линий и построить линии:
1) $\rho\sin\varphi=b$; 2) $\rho^2\cos 2\varphi=a^2$; 3) $\rho=a\cos\varphi$.

5. Построить линии:

1) $\rho = e^{\varphi}$ (логарифмическая спираль);

2) $\rho = \frac{a}{\varphi}$ (гиперболическая спираль);

3) $\rho = a\sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза);

4) $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

6. Написать канонические уравнения кривых второго порядка:

1) $\rho = \frac{16}{5-3\cos\varphi}$; 2) $\rho = \frac{16}{3-5\cos\varphi}$; 3) $\rho = \frac{5}{1-\cos\varphi}$.

7. Через точку $E\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$ проведена прямая, параллельная полярной оси. Произвольный луч OK пересекает эту прямую в точке K. На луче по обе стороны от точки K отложены отрезки $KM_1 = KM = l$. Геометрическое место точек M и M_1 называется *конхоидой Никомеда*. Составить уравнение конхоиды и построить ее.

8. Написать уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек $F_1(-b, 0)$, $F_2(b, 0)$ есть величина постоянная, равная a^2. Построить кривую (*овалы Кассини*; при $b = a$ получаем лемнискату Бернулли).

Ответы

1. Указание. Отрицательные углы φ отсчитываются по часовой стрелке, отрицательные значения ρ откладываются не на луче, наклоненном к полярной оси под углом φ, а на его продолжении за полюс (т. е. на луче, образующем с полярной осью угол $\varphi + \pi$). 3. 1) окружность радиуса R;

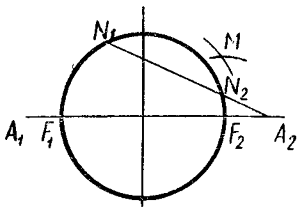

Рис. 1.33

2) прямая, проходящая через начало координат под углом $\varphi = 60°$ к оси Ox; 3) прямая $x = a$; 4) кардиоида; 5) улитка Паскаля 4. 1) $y = b$; 2) $x^2 - y^2 = a^2$; 3) $x^2 + y^2 = ax$. 5. См. приложение. 6. 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $y^2 = 10x$. 7. $\rho = \frac{a}{\sin\varphi} + l$. См. приложение. 8. $\rho = b\sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{a^4}{b^4} - 1\right)}}$; в декартовых координатах. $(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) = a^4 - b^4$.

Указания. 1. Из условия имеем $MF_1 \cdot MF_2 = a^2$, откуда $\sqrt{(x+b)^2 + y^2}\cdot\sqrt{(x-b)^2 + y^2} = a^2$. 2. Построение овалов Кассини можно осуществить следующим образом. Зная параметры a и b, находим положение фокусов F_1 и F_2 и вершин A_1 и A_2 (рис 1.33). Проводим из точки A_2 луч который пересечет окружность, описанную из начала координат радиусом, равным b, в точках N_1 и N_2. Если теперь из фокусов F_1 и F_2 описать окружности радиусами, равными A_2N_1 и A_2N_2, то точка M их пересечения будет принадлежать овалу. Действительно, $MF_1 \cdot MF_2 = A_2N_1 \cdot A_2N_2 = \text{const}$ в силу известной теоремы о произведении секущей на ее внешнюю часть. Меняя направление луча $A_2N_2N_1$, можно построить любое число точек овала Кассини.

§ 1.7. Параметрические уравнения линии

Параметрическими уравнениями линии на плоскости называются уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(t); \\ y &= \varphi_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{1.64}$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — функции переменной t.

Примеры

1. Написать параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка окружности (рис. 1.34).

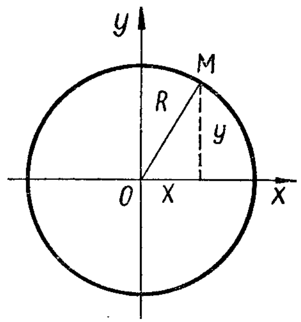

Рис. 1.34

Тогда

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t; \\ y &= R\sin t. \end{aligned}\right\}$$

Полученные уравнения и будут искомыми. Исключая параметр t из этих уравнений (для чего нужно возвести в квадрат оба уравнения и почленно сложить), получим уравнение окружности в прямоугольных координатах:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

2. Окружность радиуса a катится по оси абсцисс. Найти параметрические уравнения линии, описываемой при указанном движении той точкой окружности, которая при начальном положении окружности находилась в начале координат. (Описываемая линия называется *циклоидой*.)

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка циклоиды (рис. 1.35). Тогда

$$x = OP = OQ - PQ = \breve{MQ} - PQ = at - a\sin t = a(t - \sin t),$$

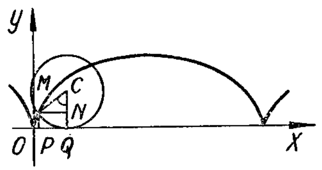

Рис. 1.35

где $t = \angle MCQ$ — угол поворота окружности,

$$y = PM = QN = QC - NC = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

Итак, получены параметрические уравнения циклоиды:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t); \\ y &= a(1 - \cos t). \end{aligned}\right\}$$

3. Прямоугольник, две стороны которого совпадают с осями координат, изменяется так, что его диагональ сохраняет постоянную величину a. Линия, описываемая основанием перпендикуляра, опущенного из вершины прямоугольника, противоположной

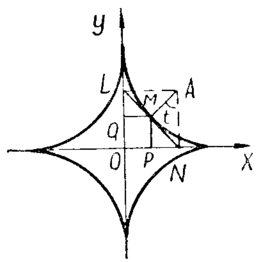

Рис. 1.36

началу координат, на его диагональ, называется *астроидой*. Найти ее уравнение.

Пусть $OLAN$ — один из прямоугольников, для которых $LN = a$ (рис. 1.36). Введем в рассмотрение угол $t = \angle ALN$, тогда $\angle MAN = t$, $\angle MNP = t$.

По определению координат имеем:

$$x = OP = QM, \quad y = MP.$$

Подставляя в эти равенства выражения для QM и MP, получаемые из треугольников LQM, LMA и LAN, находим:

$$\begin{aligned} x = QM &= LM\cos t = (LA\cos t)\cos t = LA\cos^2 t = \\ &= (LN\cos t)\cos^2 t = a\cos^3 t; \\ y = MP &= MN\sin t = (AN\sin t)\sin t = AN\sin^2 t = \\ &= (LN\sin t)\sin^2 t = a\sin^3 t. \end{aligned}$$

Следовательно, получены параметрические уравнения астроиды

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t; \\ y &= a\sin^3 t. \end{aligned}\right\}$$

Исключая параметр t (для чего нужно извлечь сначала корень кубический из обеих частей уравнений, а потом возвести их в квадрат), получим уравнение астроиды в прямоугольных декартовых координатах

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

4. По окружности $x^2 + y^2 = a^2$ перемещается прямая, начальное положение которой $x = a$. Определить траекторию точки перемещающейся прямой, принимая за начальное ее положение точку $A(a, 0)$. (Кривая называется *разверткой окружности*.)

Возьмем произвольную точку N данной окружности (рис. 1.37). Введем угол $t = \angle AON$. В силу условия задачи длина дуги

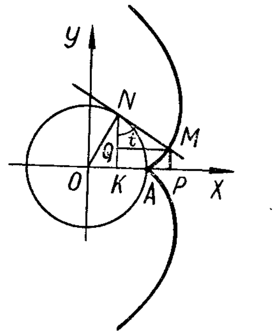

Рис. 1.37

NA равна длине отрезка NM, где M — точка искомой траектории, начальное положение которой совпадало с точкой A. Координаты точки M через угол t и радиус a выразятся следующим образом:

$$x = OP = OK + KP = OK + QM = a\cos t + NM\sin t =$$
$$= a\cos t + at\sin t;$$
$$y = MP = QK = NK - NQ = a\sin t - MN\cos t =$$
$$= a\sin t - at\cos t.$$

Таким образом, получены следующие параметрические уравнения развертки окружности:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos t + t\sin t);\\ y &= a(\sin t - t\cos t). \end{aligned}\right\}$$

5. Окружность радиуса r катится без скольжения по окружности радиуса R. Написать параметрические уравнения кривой, описанной фиксированной точкой катящейся окружности. (Эта кривая называется *эпициклоидой*, при $r = R$ эпициклоида обращается в кардиоиду, см. пример 4 § 1.6.)

Поместим начало координат в центр неподвижной окружности. Считаем, что в исходном положении вычерчивающая точка совпадает с точкой A, в которой производящая окружность касается неподвижной, и ось абсцисс направим через точку A (рис. 1.38).

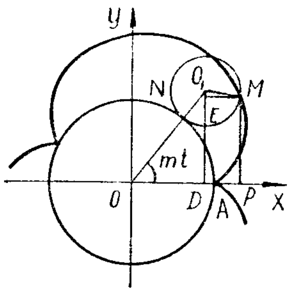

Рис. 1.38

Угол MO_1N между радиусами, проведенными в вычерчивающую точку производящей окружности и в точку касания ее с неподвижной окружностью, обозначим через t. Рассмотрим отношение радиусов окружностей $m = r : R$, которое называется их модулем. Так как качение производящей окружности предполагается совершающимся без скольжения, то $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{MN}$ или $R \cdot \angle NOA = rt$, откуда

$$\angle NOA = \frac{r}{R} t = mt.$$

Из чертежа получаем:

$$x = OP = OD + DP = OD + EM = (R + r)\cos mt +$$
$$+ r\sin\angle MO_1E;$$
$$y = MP = O_1D - O_1E = (R + r)\sin mt - r\cos\angle MO_1E.$$

Так как

$$\sin\angle MO_1E = \sin(t - \angle OO_1D) = \sin\left[t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right)\right] =$$
$$= -\cos(t + mt);$$
$$\cos\angle MO_1E = \sin(t + mt)$$

и, кроме того, $r = mR$, то параметрические уравнения эпициклоиды запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + mR)\cos mt - mR\cos(t + mt);\\ y &= (R + mR)\sin mt - mR\sin(t + mt). \end{aligned}\right\}$$

Задачи

1. Построить кривую

$$x = t^2, \quad y = 3t.$$

2. Даны параметрические уравнения линии:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Написать уравнение линии в прямоугольных координатах.

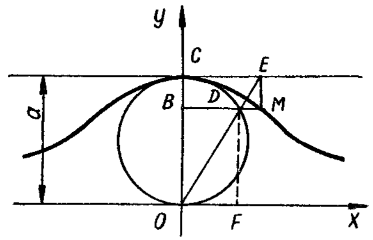

Рис. 1.39

3. Линия задана параметрическими уравнениями:

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right); \qquad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Составить ее уравнение в прямоугольных декартовых координатах.

4. Декартовым листом называется кривая, параметрические уравнения которой имеют вид:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}; \qquad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

Написать уравнение кривой в прямоугольных координатах.

5. Окружность радиуса r катится без скольжения по окружности радиуса $R > r$ внутри ее. Составить параметрические уравнения кривой (*гипоциклоиды*), описанной точкой M катящейся окружности (при $R = 4r$ гипоциклоида обращается в астроиду $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, см. пример 3).

6. Дана окружность диаметра $OC = a$ и касательная в точке C. Произвольный луч OE пересекает в точках D и E окружность и касательную. Через эти точки проведены прямые, параллельные соответственно оси Ox и оси Oy до пересечения в точке M. Геометрическое место точек M называется *локоном Аньези*. Составить параметрические уравнения кривой и построить ее.

Ответы

1. $y^2 = 9x$. 2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. 4. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. 5. $x = (R - mR)\cos mt + mR\cos(t - mt)$; $y = (R - mR)\sin mt - mR\sin(t - mt)$. 6. $x = a \operatorname{ctg} t$; $y = a\sin^2 t$; $y(x^2 + a^2) = a^3$.(См. рис. 1. 39.)

Глава 2. Определители и системы линейных алгебраических уравнений

§ 2.1. Определители второго и третьего порядка, их свойства

Пусть задана квадратная таблица из четырех чисел a_1, a_2, b_1, b_2

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{A}$$

Число $a_1b_2 - a_2b_1$ называется *определителем второго порядка*, соответствующим таблице (A). Этот определитель обозначается символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{2.1}$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются *элементами* определителя (2.1). В определителе различают первый *столбец* $\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}$, второй столбец $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}$, а также первую *строку* $a_1\ b_1$ и вторую строку $a_2\ b_2$.

Пара чисел $a_1\,b_2$ образует *главную диагональ*, пара $a_2\,b_1$ — вторую диагональ.

Знаки перед произведениями, стоящими в правой части формулы (2.1), расставляются по схеме, указанной на рис. 2.1.

Пусть дана квадратная таблица из девяти чисел a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{B}$$

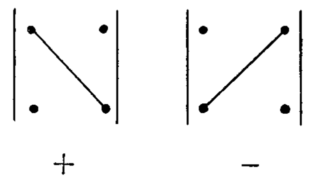

Рис. 2.1

Определителем третьего порядка, соответствующим таблице (B) называется число, находимое по формуле

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + a_2b_3c_1 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3. \tag{2.2}$$

Числа a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 называются элементами определителя. В определителе третьего порядка различают три столбца и три строки.

Числа a_1, b_2, c_3 образуют главную диагональ, числа c_1, b_2, a_3 — вторую диагональ.

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части формулы (2.2) брать со знаком $+$ и какие со знаком —, полезно следующее правило.

Один из трех членов определителя, входящих в его выражение (2.2) со знаком $+$, является произведением элементов

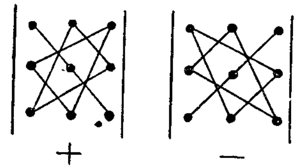

Рис. 2.2

главной диагонали, два других члена — произведением элементов, стоящих на параллелях к главной диагонали, и элемента из противоположного угла. Члены, входящие со знаком —, строятся таким же образом, но относительно второй диагонали.

Схематически правило изображено на рис. 2.2.

Минором какого-либо элемента называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием той строки и того столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Замечание. В определителе второго порядка $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ минором элемента a_1 является элемент b_2, его можно считать «определителем первого порядка». Элемент b_2 получается из определителя второго порядка вычеркиванием первой строки и первого столбца. Аналогично минором элемента a_2 является элемент b_1 и т. д.

Алгебраическим дополнением элемента называется его минор, взятый со своим или с противоположным знаком, согласно следующему правилу: если сумма номеров столбца и строки, на пересечении которых стоит элемент, есть число четное, то минор берется со своим знаком, если нечетное — то с противоположным.

Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Например:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.3)$$

Формула (2.3) определяет разложение определителя по элементам первой строки.

Свойства определителей

1. Величина определителя не изменится при замене всех его строк соответствующими столбцами.
2. При перестановке двух столбцов (или строк) определитель меняет знак.
3. Определитель с двумя одинаковыми столбцами (или строками) равен нулю.
4. Множитель, общий для элементов некоторого столбца (или строки), можно выносить за знак определителя.
5. Определитель равен нулю, если все элементы некоторого столбца (или строки) равны нулю.
6. Величина определителя не изменится, если к элементам некоторого столбца (строки) прибавить элементы другого столбца (строки), предварительно умножив их на один и тот же множитель.

Указанные свойства позволяют упростить вычисление определителей третьего порядка, а именно, каждый определитель можно разложить по элементам любой строки (столбца), обратив в нули два элемента этой строки (столбца).

2. 1. 1. Некоторые приложения определителей к аналитической геометрии

1. Площадь треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ вычисляется по формуле

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad (2.4)$$

где знак выбирается одинаковым со знаком определителя.

2. Условие, при котором три точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ лежат на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.5)$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.6)$$

4. Условие, при котором три прямые
$A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$
пересекаются в одной точке:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.7)$$

Примеры

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}.$$

По формуле (2.1) получим

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - (-5) \cdot 3 = 39.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

• Прибавляя удвоенный второй столбец к первому, затем к третьему столбцу и применяя формулу (2.3), найдем

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 14 & 2 & 12 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 14 & 2 & 16 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} 14 & 16 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(84-80) = 8.$$

Замечание. Определитель можно было бы вычислить, разлагая его, например, по элементам третьей строки, предварительно обратив в нули два ее элемента.

Тот же результат можно получить непосредственно по формуле (2.3):

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(4-24) + 2(20-12) + 4(20-2) = -80 + 16 + 72 = 8.$$

3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -38 & 4 \\ 5 & -35 & 2 \\ 2 & -49 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам третьего столбца, обратив предварительно в нули два его элемента. Прибавляя к первой строке вторую, умноженную на -2, и к третьей — вторую, умноженную на $-\frac{3}{2}$, находим

$$\begin{vmatrix} 3 & -38 & 4 \\ 5 & -35 & 2 \\ 2 & -49 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 32 & 0 \\ 5 & -35 & 2 \\ -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -7 & 32 \\ -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -7 & 32 \\ -11 & 7 \end{vmatrix} = -(-49+352) = -303.$$

4. Определить x из уравнения

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

По формуле (2.2) получаем

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 + 1 + 1 - x - x - x = x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Решим это кубическое уравнение. Разлагая на множители левую часть уравнения, находим

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2-1) - 2(x-1) =$$
$$= (x-1)[x(x+1)-2] = (x-1)(x^2+x-2).$$

Следовательно,

$$(x-1)(x^2+x-2) = 0,$$

откуда $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2.$

5. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1, -1)$, $B(2, 3)$, $C(4, 5)$.

Вычислим определитель, входящий в формулу (2.4), пользуясь формулой (2.2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 + 10 - 12 + 2 - 5 = -6.$$

Так как $\Delta < 0$, то в формуле (2.4) нужно взять знак минус:

$$S = -\frac{1}{2}\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)(-6) = 3 \text{ (кв. ед.)}.$$

6. Упростить выражение

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель по элементам первой строки, получаем

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta =$$

$$= \cos(\alpha+\beta).$$

Задачи

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}.$ **2.** $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}.$ **4.** $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}.$

5. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}.$ **6.** $\begin{vmatrix} \sqrt{x} & x \\ 1 & \sqrt{x} \end{vmatrix}.$

Вычислить определители, разложив их по элементам первой строки:

7. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$. 8. $\begin{vmatrix} 1 & -b & -1 \\ b & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители:

9. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$. 10. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. 12. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$. 14. $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

Решить уравнения:

16. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ 17. $\begin{vmatrix} x & -2 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

18. Лежат ли точки $A(1,\ 1)$, $B(-2,\ 7)$, $C(0,\ 3)$ на одной прямой?

19. Даны точки $A(1,\ -1)$, $B(2,\ 4)$. На прямой $y = 2x - 4$ выбрать точку C так, чтобы площадь треугольника ABC была равна 4 квадратным единицам.

20. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(0,\ -2)$, $M_2(-5,\ 3)$. Проходит ли прямая M_1M_2 через точку пересечения прямых: $x - 3y - 2 = 0$, $2x + 5y + 7 = 0$.

Ответы

1. 3. **2.** —4. **3.** 2. **4.** $a^2 + b^2$. **5.** 1. **6.** 0. **7.** 55. **8.** $2(1 - b^2)$. **9.** 6. **10.** 4. **11.** 6. **12.** —6. **13.** 27. **14.** 0, **15.** $(x - y)(y - z)(z - x)$. **16.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. **17.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. **18.** Да. **19.** $M_1(-2, -8)$, $M_2\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$. **20.** $x + y + 2 = 0$. Проходит.

§ 2.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью определителей

Система двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1; \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

имеет единственное решение

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{2.9}$$

при условии, что определитель системы отличен от нуля, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.10}$$

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1; \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2; \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \tag{2.12}$$

где

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}, \tag{2.13}$$

при условии, что определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.14}$$

Однородная система двух уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0; \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

имеет решение

$$x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad y = k\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}; \quad z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{2.16}$$

где k — произвольный множитель, если хотя бы один из определителей отличен от нуля. В случае, когда все определители равны нулю, система (2.15) сводится к одному уравнению.

Однородная система трех уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0; \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0; \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.17)$$

имеет решение, отличное от нулевого ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ — — нулевое решение системы), когда определитель системы равен нулю, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.18)$$

Примеры

1. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 4x + y &= 5; \\ 3x - 2y &= 12. \end{aligned}\right\}$$

В данном случае: $a_1 = 4$, $b_1 = 1$, $c_1 = 5$, $a_2 = 3$, $b_2 = -2$, $c_2 = 12$.

Определитель системы $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, поэтому мы можем пользоваться формулами (2.9). Получаем

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 12 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-10 - 12}{-8 - 3} = \frac{-22}{-11} = 2;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{33}{-11} = -3.$$

2. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 4; \\ 3x + 6y + 2z &= 4; \\ 4x - y - 3z &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Вычислим определители, входящие в формулы (2.12):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -9 & -3 \end{vmatrix} = -(-9)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9(4 - 3) = 9;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 13 & 11 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 13 & 11 \end{vmatrix} = 1(-44 + 26) = -18;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 10 & 13 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 10 & 13 \end{vmatrix} = 1(-13 + 40) = 27;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & -9 & 1 \end{vmatrix} = -(-9)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9(8 - 12) = -36.$$

Так как определитель системы $\Delta \neq 0$, то подставляя полученные значения в формулы (2.12), находим

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-18}{9} = -2; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{27}{9} = 3; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-36}{9} = -4.$$

3. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 0; \\ 3x + y - 2z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Составим таблицу из коэффициентов данной системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычеркивая поочередно столбцы, получим определители:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2; \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

(во втором определителе меняем порядок столбцов).

По формулам (2.16) находим решение системы:

$$x = 2k, \quad y = 16k, \quad z = 11k,$$

где k — произвольный множитель.

4. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0; \\ 2x + 4y - 6z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Составляя таблицу из коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

и вычеркивая поочередно столбцы, получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Данная система приводится к одному уравнению

$$x + 2y - 3z = 0,$$

в чем можно убедиться непосредственно, сокращая на 2 второе уравнение.

Решение системы будет

$$y = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}x,$$

где x и z могут принимать произвольные значения.

5. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 0; \\ x - y + z &= 0; \\ 2x + y - 3z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Определитель системы

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Следовательно, данная система имеет единственное нулевое решение: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0; \\ 3x - y + 2z &= 0; \\ x - 3y &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Минор этого определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

отличен от нуля. Следовательно, третье уравнение данной системы есть следствие двух первых. Решая эти уравнения по формулам (2.16), получим

$$x = k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3k, \quad y = k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = k, \quad z = k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4k,$$

где k — произвольный множитель.

7. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0; \\ 4x + 4y - 4z &= 0. \\ 5x + 5y - 5z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 5 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Все миноры определителя Δ тоже равны нулю. Система приводится к одному уравнению, что непосредственно видно, если сократить второе уравнение на 4 и третье на 5. Чтобы найти решение системы, достаточно разрешить лишь первое уравнение, например, относительно y. Находим

$$y = z - x,$$

где x и z могут принимать любые значения.

8. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 3; \\ x + y + z &= 1; \\ x + y \quad &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

но среди его миноров есть отличный от нуля, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Среди определителей третьего порядка таблицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеется определитель, отличный от нуля, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Данная система несовместна (не имеет решения), что видно если сложить первые два уравнения и сравнить результат с третьим уравнением.

9. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 3; \\ x + y + z &= 1; \\ x + y \quad &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Определитель системы $\Delta = 0$, но среди его миноров есть отличные от нуля. Определители третьего порядка таблицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

все равны нулю. Данная система приводится к двум уравнениям, что становится ясным, если сложить первые два уравнения. Решая совместно, например второе и третье уравнения, получим:

$$x + y = 2,\ z = -1 \text{ или } x = 2 - y,\ z = -1,$$

где y может принимать любые значения.

10. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1; \\ 2x + 4y + 6z &= 3; \\ 3x + 6y + 9z &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Все его миноры также равны нулю. Среди определителей второго порядка таблицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

есть отличные от нуля, например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Данная система несовместна, в чем убеждаемся непосредственно, умножив первое уравнение на 2 или на 3.

11. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1; \\ 2x + 4y + 6z &= 2; \\ 3x + 6y + 9z &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Определитель системы тот же, что и в предыдущем примере, значит $\Delta = 0$. Все его миноры тоже равны нулю. Определители второго порядка таблицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

равны нулю. Данная система приводится к одному уравнению, в чем непосредственно убеждаемся, если сократим второе уравнение на 2, а третье на 3. Остается решить первое уравнение, чтобы получить решение данной системы. Таким образом, находим

$$x = 1 - 2y - 3z,$$

где y и z произвольны.

Задачи

Решить с помощью определителей системы уравнений:

1. $\begin{cases} 5x + 3y = 21; \\ 2x + 7y = 20. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 6x + 5y = 1; \\ 8x + 3y = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 9x + 2y = 8; \\ 4x + y = 3. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 2x + 3y = 9; \\ 5x + 2y = 6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 2y = 4; \\ 3x + y = 12. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} (1 + a)x - ay = 1 + a; \\ ax + (1 - a)y = a - 1. \end{cases}$

Решить системы уравнений:

7. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6; \\ 4x + y + 4z = 9; \\ 3x + 5y + 2z = 10. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x + y + z = 0; \\ 2x - 3y + 4z = 0; \\ 4x - 11y + 10z = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 3; \\ 4x + 2y + 5z = 5; \\ 3x + 4y + 7z = 2. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} x + y + z = 0; \\ 2x - 3y + 4z = 0; \\ 5x - 7y + 8z = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z - 8 = 0; \\ x + 5y + 2z - 5 = 0; \\ 2x + 3y + 4z - 3 = 0. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x + y + z = 2; \\ 2x - 3y + 4z = 3; \\ 4x - 11y + 10z = 5. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + 3y + 2z - 4 = 0; \\ 2x + 6y + z = 2; \\ 4x + 8y - z - 2 = 0. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0; \\ x + y - z - 2 = 0; \\ 5x + y - z - 7 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0; \\ 3x - 4y + z = 0. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0; \\ x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$

Ответы

1. $x = 3,\ y = 2$. **2.** $x = 1,\ y = -1$. **3.** $x = 2,\ y = -5$. **4.** $x = 0,\ y = 3$. **5.** $x = 4,\ y = 0$. **6.** $x = 1 - a,\ y = -(1 + a)$. **7.** $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$. **8.** $x = 7k,\ y = -2k,\ z = -5k$. **9.** $x = 1,\ y = -2,\ z = 1$. **10.** $x = y = z = 0$. **11.** $x = 2,\ y = 1,\ z = -1$. **12.** $x = \frac{1}{5}(9 - 7z),\ y = \frac{1}{5}(1 + 2z)$. **13.** $x = 3,\ y = -1,\ z = 2$. **14.** Система несовместна. **15.** $x = -10k,\ y = -10k,\ z = -10k$. **16.** $x = 4k,\ y = -5k,\ z = -7k$.

Глава 3. Векторная алгебра

§ 3. 1. Основные понятия

Различают величины векторные и скалярные. *Скалярная* величина может быть охарактеризована одним *числом*, выражающим отношение этой величины к соответствующей единице измерения. Примеры скалярных величин: длина, площадь, объем, время, угол, температура, плотность, сопротивление проводника, электроемкость, работа и др.

Векторная величина характеризуется *числом* и *направлением*. Примеры векторных величин: сила, скорость, ускорение, напряженность электрического или магнитного поля и др. Всякая векторная величина может быть изображена с помощью прямолинейного отрезка, у которого различают начало и конец.

Вектором называется направленный отрезок. Вектор вполне характеризуется следующими элементами: 1) *начальной точкой* («точкой приложения»); 2) *направлением*; 3) *длиной* («модулем вектора»). Если начало вектора есть M, а его конец N (рис. 3 1),

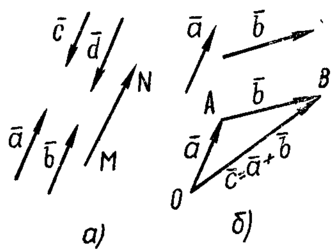

Рис. 3. 1

вектор обозначается символом $\overline{MN}$ или $\overrightarrow{MN}$. Иногда вектор обозначают одной буквой жирного шрифта **a**, **b** и т. д. или такой же буквой светлого шрифта с черточкой наверху $\bar{a}$, $\bar{b}$ и т. д.

Длина вектора $\overline{MN}$ обозначается через $|\overline{MN}|$, вектора $\bar{a}$ — через $|\bar{a}|$ или просто через a.

Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице.

Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают. *Нуль-вектор* обозначается символом 0.

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой), называются *коллинеарными*. Коллинеарные векторы могут иметь одно и то же направление (равнонаправленные векторы; рис. 3.1, *а*, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$) или противоположные направления (рис. 3.1, *а*, векторы $\bar{b}$ и $\bar{d}$, $\bar{c}$ и $\bar{b}$, $\bar{a}$ и $\bar{d}$).

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, направлены в одну и ту же сторону и имеют равные длины (другими словами равными векторами называются равнонаправленные векторы с одинаковыми длинами; $\bar{a}=\bar{b}$).

Векторы, противоположно направленные и имеющие равные длины, называются *противоположными* (векторы $\bar{b}$ и $\bar{d}$, векторы $\overline{MN}$ и $\overline{NM}$). Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается через $-\bar{a}$.

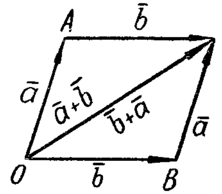

Рис. 3.2

Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется третий вектор $\bar{c}$, определяемый следующим построением: 1) от произвольной точки O пространства откладывается вектор $\overline{OA}=\bar{a}$; 2) от его конца A откладывается вектор $\overline{AB}=\bar{b}$; 3) начало первого вектора соединяется с концом второго; полученный вектор $\overline{OB}$ есть вектор-сумма $\bar{c}$ (см. рис. 3. 1, *б*).

Сумма двух векторов обладает свойством переместительности (рис. 3.2)

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a} \tag{3.1}$$

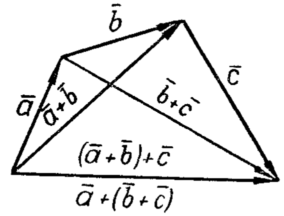

Рис. 3. 3

и свойством сочетательности (рис. 3.3)

$$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c}). \tag{3.2}$$

Сумма противоположных векторов равна нуль-вектору.

Суммой n векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_n$ называется вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}_1$, а конец —

с концом вектора $\bar{a}_n$, при условии, что точка приложения каждого последующего вектора совпадает с концом предыдущего. На рис. 3.4 изображена сумма 5 векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Сумма n векторов обладает свойством сочетательности (слагаемые можно группировать как угодно).

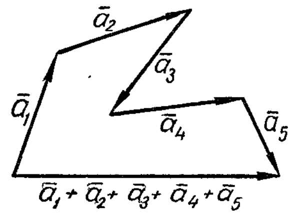

Рис. 3.4

Разностью двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{d}$, который при сложении с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$:

$$\bar{b}+\bar{d}=\bar{a}, \quad \bar{a}-\bar{b}=\bar{d}.$$

Построение вектора $\bar{d}$ можно осуществить следующим образом. От произвольной точки пространства O откладывается вектор $\overline{OA}=\bar{a}$ и вектор $\overline{OB}=\bar{b}$, тогда вектор $\bar{d}=\overline{BA}$, т. е. начало его совпадает с концом вычитаемого вектора $\bar{b}$, а конец его — с концом уменьшаемого вектора $\bar{a}$ (рис. 3.5). Другой способ: вектор $\bar{d}$ равен сумме двух векторов $\bar{a}$ и $-\bar{b}$ (рис. 3.5).

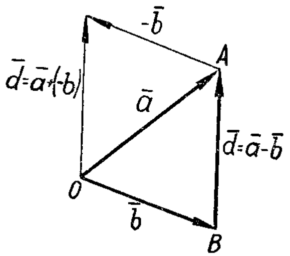

Рис. 3.5

Произведением вектора $\bar{a}$ *на число* λ называется новый вектор $\lambda\bar{a}$, длина которого равна $|\lambda||\bar{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\bar{a}$ при $\lambda>0$ и противоположно ему при $\lambda<0$. На рис. 3.6 изображены векторы $\bar{a}$, $3\bar{a}$, $-2\bar{a}$.

Свойства произведения вектора на число:

1) $\lambda(\mu\bar{a})=(\lambda\mu)\bar{a}$;
2) $(-\lambda)\bar{a}=\lambda(-\bar{a})=-(\lambda\bar{a})$;
3) $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$;
4) $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$;
5) $\lambda\bar{a}=0$, если $\lambda=0$ или $\bar{a}=0$.

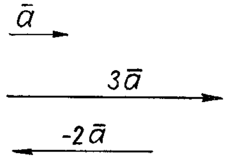

Рис. 3.6

Всякий вектор $\bar{a}$ может быть представлен в виде $\bar{a}=\bar{a}^0|\bar{a}|$, где $\bar{a}^0$ — единичный вектор направления вектора $\bar{a}$.

Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — два коллинеарных вектора, то всегда можно найти такой скаляр λ, что

$$\bar{b}=\lambda\bar{a}. \tag{3.3}$$

Число λ называется *отношением вектора* $\bar{b}$ *к коллинеарному ему вектору* $\bar{a}$ ($\bar{a}\neq 0$):

$$\frac{\bar{b}}{\bar{a}}=\lambda \quad \text{или} \quad \bar{b}:\bar{a}=\lambda.$$

Условие, необходимое и достаточное для коллинеарности двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, выражается равенством (3.3) или в более общем виде равенством

$$\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}=0. \tag{3.4}$$

Векторы, параллельные одной и той же плоскости (или лежащие в одной плоскости), называются *компланарными*. Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарны, то любой вектор $\bar{c}$, компланарный с векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, можно единственным образом представить в виде

$$\bar{c}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}. \tag{3.5}$$

Условие, необходимое и достаточное для компланарности трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ выражается равенством (3.5) или в более общем виде

$$\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}=0, \tag{3.6}$$

где числа α, β и γ одновременно в нуль не обращаются.

Если даны три некомпланарных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, то всякий четвертый вектор $\overline{d}$ можно однозначно разложить по векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$:

$$\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}. \tag{3.7}$$

Между любыми четырьмя векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ существует *линейная зависимость*, т. е.

$$\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} + \delta\overline{d} = 0, \tag{3.8}$$

где α, β, γ, δ не равны нулю одновременно.

Линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, ... , $\overline{a}_n$ называется выражение

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{a}_n, \tag{3.9}$$

где α_1, α_2 , ... , α_n — произвольные числа.

К линейной комбинации векторов можно применять все правила преобразований, установленные в алгебре для многочленов первой степени.

Примеры

1. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 3.7) $\overline{AB}=\overline{p}$, $\overline{AD}=\overline{q}$. Выразить векторы $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{CA}$, $\overline{BD}$, $\overline{DB}$ через $\overline{p}$ и $\overline{q}$.

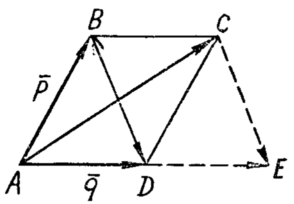

Рис. 3.7

Коллинеарные векторы BC и AD имеют равные длины (противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны) и одинаково направлены. В соответствии с определением равенства векторов получаем $\overline{BC}=\overline{AD}$. Так как $\overline{AD}=\overline{q}$, то $\overline{BC}=\overline{q}$.

Векторы $\overline{CD}$ и $\overline{AB}$ противоположно направлены и имеют равные длины. По определению противоположных векторов получаем

$$\overline{CD} = -\overline{DC} = -\overline{AB} = -\overline{p}, \text{ т. е. } \overline{CD} = -\overline{p}.$$

Вектор $\overline{AC}$ является суммой векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, но $\overline{BC}=\overline{AD}$, поэтому $\overline{AC}=\overline{p}+\overline{q}$.

Далее, $\overline{CA} = -\overline{AC} = -(\overline{p}+\overline{q}) = -\overline{p}-\overline{q}$. (Этот результат можно получить и другим способом: $\overline{CA}=\overline{CD}+\overline{DA}$, $\overline{CD}=-\overline{DC}=-\overline{AB}=-\overline{p}$, $\overline{DA}=-\overline{AD}=-\overline{q}$, поэтому $\overline{CA}=-\overline{p}-\overline{q}$.)

По определению разности двух векторов получаем: $\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}$ или $\overline{BD}=\overline{q}-\overline{p}$, так как $\overline{AD}=\overline{q}$, $\overline{AB}=\overline{p}$.

Аналогичным образом находим, что $\overline{DB}=\overline{p}-\overline{q}$.

Ответ: $\overline{BC}=\overline{q}$, $\overline{CD}=-\overline{p}$, $\overline{AC}=\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{CA}=-\overline{p}-\overline{q}$, $\overline{BD}=\overline{q}-\overline{p}$, $\overline{DB}=\overline{p}-\overline{q}$.

Замечание. Если даны два неколлинеарных вектора $\overline{p}$ и $\overline{q}$, то их сумма и разность являются диагональными векторами параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}$ и $\overline{q}$.

2. При каких условиях векторы $\overline{p}+\overline{q}$ и $\overline{p}-\overline{q}$ коллинеарны?

В силу замечания к примеру 1, если векторы $\overline{p}$ и $\overline{q}$ не коллинеарны, то на них можно построить параллелограмм, диагональные векторы которого $\overline{p}+\overline{q}$ и $\overline{p}-\overline{q}$ во всяком случае не коллинеарны. Следовательно, коллинеарность векторов $\overline{p}+\overline{q}$ и $\overline{p}-\overline{q}$ может иметь (и действительно имеет) место, тогда и только тогда, когда $\overline{p}$ и $\overline{q}$ коллинеарны.

3. Показать на чертеже, что $(\overline{p}+\overline{q})+(\overline{q}-\overline{p})=2\overline{q}$.

Как известно (см. примеры 1 и 2), $\overline{p}+\overline{q}$ и $(\overline{q}-\overline{p})$ — диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}$ и $\overline{q}$. Построим $\overline{CE}=\overline{BD}$ (рис. 3.7). Так как

$$\overline{AC}=\overline{p}+\overline{q},\quad \overline{CE}=\overline{BD}=\overline{q}-\overline{p},\quad \overline{AE}=\overline{AD}+\overline{DE}=\overline{q}+\overline{q}=2\overline{q}$$

$$\text{и } \overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE},$$

$$\text{то } 2\overline{q}=(\overline{p}+\overline{q})+(\overline{q}-\overline{p}).$$

Замечание. Алгебраически равенство проверяется раскрытием скобок.

4. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 3.8) $\overline{AB}=\overline{p}$, $\overline{AD}=\overline{q}$, $\overline{AA'}=\overline{r}$. Выразить векторы $\overline{AC}$, $\overline{D'B'}$, $\overline{AC'}$ $\overline{B'C}$, $\overline{D'B}$, $\overline{DB'}$ через $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$.

По определению суммы векторов получаем:

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{p}+\overline{q};$$

$$\overline{AC'}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CC'}=\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AA'}=\overline{p}+\overline{q}+\overline{r}.$$

По определению разности двух векторов находим:

$$\overline{D'B'}=\overline{A'B'}-\overline{A'D'}=\overline{AB}-\overline{AD}=\overline{p}-\overline{q};$$

$$\overline{B'C}=\overline{BC}-\overline{BB'}=\overline{AD}-\overline{AA'}=\overline{q}-\overline{r}.$$

Так как

$$\overline{D'B} = \overline{D'D} + \overline{DA} + \overline{AB} \text{ и } \overline{D'D} = -\overline{AA'} = -\bar{r},$$

то

$$\overline{DA} = -\bar{q},\ \overline{AB} = \bar{p},$$

$$\overline{D'B} = \bar{p} - \bar{q} - \bar{r}.$$

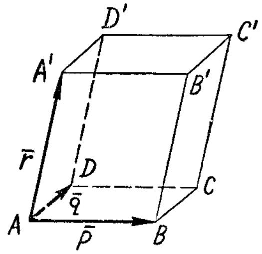

Рис. 3.8

Поскольку

$$\overline{DB'} = \overline{DA} + \overline{AB} + \overline{BB'} \text{ и } \overline{DA} = -\bar{q},\ \overline{AB} = \bar{p},\ \overline{BB'} = \bar{r},$$

то

$$\overline{DB'} = \bar{p} - \bar{q} + \bar{r}.$$

5. Доказать, что при любом расположении точек A, B, C справедлива формула $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$

Вектор $\overline{BC}$ отложен от конца вектора $\overline{AB}$, вектор $\overline{CA}$ — от конца вектора $\overline{BC}$, тогда конец вектора $\overline{CA}$ совпадает с началом вектора $\overline{AB}$. Следовательно, сумма $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ является вектором, начало и конец которого совпадают. Такой вектор по определению есть нуль-вектор, т. е. $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$

6. На сторонах треугольника ABC построены произвольные параллелограммы $ABML$, $BCPN$, $ACQR$ (рис. 3.9). Доказать, что из отрезков RL, MN, PQ можно составить треугольник (сохраняя при этом направление каждого отрезка).

Из чертежа (рис. 3.9) непосредственно получаем

$$\overline{LM} + \overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RL} = 0;$$

с другой стороны,

$$\overline{LM} + \overline{NP} + \overline{QR} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0 \text{ (см. пример 5).}$$

Следовательно,

$$\overline{MN} + \overline{PQ} + \overline{RL} = 0.$$

Последнее равенство означает, что ломаная, построенная на трех данных векторах $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ и $\overline{RL}$, должна замкнуться, а это и требовалось доказать.

7. Дан треугольник ABC, в котором $\overline{AB} = \bar{p}$, $\overline{BC} = \bar{q}$ (рис. 3.10). Выразить векторы $\overline{AK}$, $\overline{BL}$, $\overline{CM}$, где K, L, M — основания медиан, через векторы $\bar{p}$, $\bar{q}$.

Пользуясь определением суммы двух векторов, получаем

$$\overline{AK} = \overline{AB} + \overline{BK}.$$

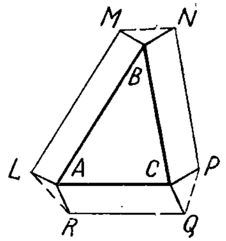

Рис. 3.9

Так как

$$\overline{BK} = \frac{1}{2}\overline{BC}$$

(это следует из определения произведения вектора на число и определения медианы) $\overline{AB} = \bar{p}$, $\overline{BC} = \bar{q}$, то

$$\overline{AK} = \bar{p} + \frac{1}{2}\bar{q}.$$

Далее,

$$\overline{BL} = \overline{BC} + \overline{CL},\quad \overline{CL} = -\frac{1}{2}\overline{AC}$$

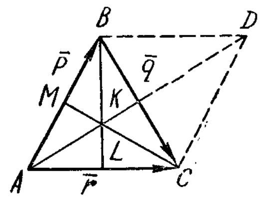

Рис. 3.10

(векторы $\overline{CL}$ и $\overline{AC}$ противоположно направлены), $\overline{AC} = \bar{p} + \bar{q}$, поэтому

$$\overline{BL} = \bar{q} - \frac{1}{2}(\bar{p} + \bar{q}) = \frac{1}{2}(\bar{q} - \bar{p}).$$

Аналогично находим, что

$$\overline{CM} = \frac{1}{2}\bar{p} - (\bar{p} + \bar{q}) = -\bar{q} - \frac{1}{2}\bar{p}.$$

Замечание. Эти выражения для $\overline{AK}$, $\overline{BL}$ и $\overline{CM}$ можно получить и по-другому. Например, достроив треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$, получим

$$\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BD}) = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) =$$
$$= \frac{1}{2}[\bar{p} + (\bar{p} + \bar{q})] = \bar{p} + \frac{1}{2}\bar{q}.$$

8. Показать, что $|\bar{a} + \bar{b}| \leqslant |\bar{a}| + |\bar{b}|$. В каком случае в этом соотношении имеет место знак равенства?

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарны, то, построив их сумму, получим треугольник, длины сторон которого соответственно равны $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$ и $|\bar{a} + \bar{b}|$. Неравенство

$$|\bar{a} + \bar{b}| < |\bar{a}| + |\bar{b}|$$

вытекает из того, что в треугольнике одна сторона меньше суммы двух других. Равенство

$$|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a}| + |\bar{b}|$$

имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одинаково направлены.

9. В равностороннем треугольнике ABC (рис. 3.11) M есть середина стороны BC, O — центр тяжести треугольника. Имеет ли смысл каждое из выражений: 1) $\overline{AO}:\overline{AM}$, 2) $\overline{MO}:\overline{AO}$, 3) $\overline{OA}:\overline{OB}$? В случае утвердительного ответа найти значение соответствующего выражения.

Так как векторы $\overline{AO}$ и $\overline{AM}$ коллинеарны, то отношение $\overline{AO}:\overline{AM}$ имеет смысл. Найдем значение этого отношения. Поскольку центр тяжести треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан и эта точка делит каждую медиану в отношении $2:1$ (считая от вершины), то

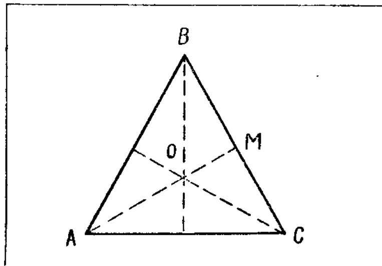

Рис. 3.11

$$|\overline{AM}| = 3|\overline{OM}|,\quad |\overline{AO}| = 2|\overline{OM}|,$$

следовательно,

$$\overline{AO}:\overline{AM} = \frac{2|\overline{OM}|}{3|\overline{OM}|} = \frac{2}{3}.$$

Отношение $\overline{MO}:\overline{AO}$ также имеет смысл, ибо векторы $\overline{MO}$ и $\overline{AO}$ коллинеарны. Так как эти векторы противоположно направлены, то

$$\overline{MO}:\overline{AO} = -\left|\frac{\overline{MO}}{\overline{AO}}\right| = -\frac{1}{2}.$$

Отношение $\overline{OA}:\overline{OB}$ смысла не имеет, ибо векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ не коллинеарны.

10. Упростить выражение

$$\frac{4\bar{a} - 2\bar{b} + 5\bar{c}}{2} - \frac{4\bar{a} - 4\bar{b} - 3\bar{c}}{6} + \frac{2\bar{a} - 20\bar{b} + 3\bar{c}}{3}.$$

Приводим данное выражение к общему знаменателю, получим

$$\frac{4\bar{a} - 2\bar{b} + 5\bar{c}}{2} - \frac{4\bar{a} - 4\bar{b} - 3\bar{c}}{6} + \frac{2\bar{a} - 20\bar{b} + 3\bar{c}}{3} =$$
$$= \frac{12\bar{a} - 6\bar{b} + 15\bar{c} - 4\bar{a} + 4\bar{b} + 3\bar{c} + 4\bar{a} - 40\bar{b} + 6\bar{c}}{6} =$$
$$= \frac{12\bar{a} - 42\bar{b} + 24\bar{c}}{6} = 2\bar{a} - 7\bar{b} + 4\bar{c}.$$

Задачи

1. Дан прямоугольник $ABCD$. Коллинеарны ли векторы $\overline{AD}$ и $\overline{CB}$; $\overline{AD} - \overline{AB}$ и $\overline{DA} - \overline{DC}$; $\overline{DA} + \overline{AB}$ и $\overline{BC} + \overline{CD}$?

2. Даны две различные точки A и B окружности радиуса R с центром в точке O. Равны ли векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$?

3. Дан ромб $ABCD$. Равны ли векторы $\overline{AD}$ и $\overline{DC}$, $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?

4. В правильном восьмиугольнике $ABCDEFGH$ даны $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{b}$, $\overline{CD} = \bar{c}$, $\overline{DE} = \bar{d}$. Выразить каждый из векторов $\overline{BF}$, $\overline{BG}$, $\overline{FD}$, $\overline{DG}$, $\overline{DH}$, $\overline{CG}$, $\overline{CA}$ через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$.

5. Дана точка O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ и векторы $\overline{AB} = \bar{p}$, $\overline{AD} = \bar{q}$. Выразить через $\bar{p}$ и $\bar{q}$ следующие векторы: $\overline{BC}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AO}$, $\overline{CO}$, $\overline{BO}$.

6. Проверить на рисунке следующие формулы:

$$(\bar{a} + \bar{b}) - (\bar{a} - \bar{b}) = 2\bar{b};\quad \frac{\bar{a} - \bar{b}}{2} + \bar{b} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2}.$$

7. Показать, что

$$|\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n| \leqslant |\bar{a}_1| + |\bar{a}_2| + \ldots + |\bar{a}_n|.$$

В каком случае в этом соотношении имеет место знак равенства?

8. В треугольнике ABC $\overline{AB} = \overline{p}$, $\overline{BC} = \overline{q}$, $\overline{CA} = \overline{r}$. Выразить через $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ векторы $\overline{AK}$, $\overline{BL}$, $\overline{CM}$, где K, L, M — середины сторон треугольника.

9. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения его диагоналей, M — произвольная точка, отличная от O. Можно ли выразить числом отношение $(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}) : \overline{MO}$?

10. Упростить выражения:

1) $2(3\overline{a} - 4\overline{b} + 5\overline{c}) - 3(\overline{a} + 2\overline{b} - 3\overline{c}) + 5(2\overline{a} + 3\overline{b} - 4\overline{c})$;

2) $\dfrac{2\overline{a} - 3\overline{b} + 4\overline{c}}{2} - \dfrac{5\overline{a} - 6\overline{b} - 2\overline{c}}{3} + \dfrac{\overline{a} - 2\overline{b} - 6\overline{c}}{4}$.

Ответы

1. Векторы $\overline{AD}$ и $\overline{CB}$ коллинеарны; векторы $\overline{DA} + \overline{AB} = \overline{DB}$ и $\overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BD}$ также коллинеарны **2.** $\overline{OA} \neq \overline{OB}$. **3.** $\overline{AD} \neq \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AB} \neq \overline{CD}$. **4.** $\overline{BF} = \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} - \overline{a}$; $\overline{BG} = -\overline{a} + \overline{d} + \overline{c}$; $\overline{FD} = \overline{a} - \overline{d}$; $\overline{DG} = \overline{d} - \overline{a} - \overline{b}$; $\overline{DH} = \overline{d} - \overline{a} - \overline{b} - \overline{c}$; $\overline{CG} = \overline{c} + \overline{d} - \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{CA} = -\overline{a} - \overline{b}$. **5.** $\overline{BC} = \overline{q}$; $\overline{CB} = -\overline{q}$; $\overline{CD} = -\overline{p}$; $\overline{AC} = \overline{p} + \overline{q}$; $\overline{BD} = -\overline{p} + \overline{q}$; $\overline{DB} = \overline{p} - \overline{q}$; $\overline{AO} = \frac{1}{2}(\overline{p} + \overline{q}) = \frac{1}{2}\overline{p} + \frac{1}{2}\overline{q}$; $\overline{CO} = -\frac{1}{2}(\overline{p} + \overline{q})$; $\overline{BO} = \frac{1}{2}(-\overline{p} + \overline{q})$.
7. Указание. Отрезок прямой короче ломаной, проведенной между его концами. Знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда направления векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ совпадают. **8.** $\overline{AK} = \overline{p} + \frac{1}{2}\overline{q}$, $\overline{BL} = \overline{q} + \frac{1}{2}\overline{r}$, $\overline{CM} = \overline{r} + \frac{1}{2}\overline{p}$. Другие выражения: $\overline{AK} = \frac{1}{2}(\overline{p} - \overline{r})$, $\overline{BL} = \frac{1}{2}(\overline{q} - \overline{p})$, $\overline{CM} = \frac{1}{2}(\overline{r} - \overline{q})$. **9.** Да, отношение равно 4. **10.** 1) $13\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$, 2) $-\frac{5}{12}\overline{a} + \frac{7}{6}\overline{c}$.

§ 3.2. Координаты вектора. Простейшие действия над векторами, заданными своими координатами

Осью называется прямая, на которой установлено положительное направление. Ось Ou вполне определяется единичным вектором $\overline{e} = \overline{OE}$ (рис. 3.12).

Проекцией точки A на ось Ou называется точка A_1 пересечения этой оси с плоскостью, проходящей через данную точку A перпендикулярно Ou (рис. 3.12, *а*).

Проекцией вектора AB на ось Ou называется *алгебраическая величина* отрезка A_1B_1 (рис. 3.12, *б*), где A_1, B_1 — проекции точек A и B на данную ось (т. е. длина отрезка A_1B_1, взятая со знаком $+$, когда направление отрезка совпадает с положительным направлением оси Ou, и со знаком $-$ в противном случае).

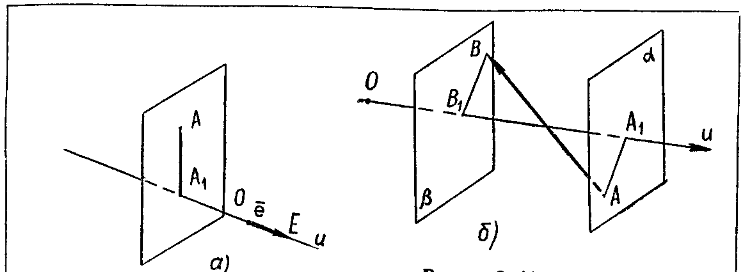

Рис. 3.12

Если φ — угол между вектором $\overline{a}$ и осью Ou, то проекция вектора $\overline{a}$ на ось Ou равна произведению длины вектора на косинус угла φ:

$$\text{пр}_{Ou}\,\overline{a} = |\overline{a}| \cos\varphi. \tag{3.10}$$

Свойства проекции вектора на ось Ou:

1. $\text{пр}_{Ou}(\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_n) = \text{пр}_{Ou}\overline{a}_1 + \text{пр}_{Ou}\overline{a}_2 + \ldots + \text{пр}_{Ou}\overline{a}_n$;
2. $\text{пр}_{Ou}(\alpha\overline{a}) = \alpha\,\text{пр}_{Ou}\,\overline{a}$.

Прямоугольными координатами точки M в пространстве называются числа x, y, z, выражающие алгебраические величины отрезков OP, OQ, OR (рис. 3.13), где P, Q, R — проекции этой точки на взаимно перпендикулярные координатные оси: ось Ox (ось абсцисс), ось Oy (ось ординат), ось Oz (ось аппликат).

Координатами вектора $\overline{a}$ относительно прямоугольной системы координат $Oxyz$ называются проекции X, Y, Z вектора $\overline{a}$ на оси координат. Обозначение:

$$\overline{a} = \{X, Y, Z\} \text{ или } \overline{a}\{X, Y, Z\}. \tag{3.11}$$

Если $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ — орты координатных осей Ox, Oy, Oz, то вектор $\overline{a}\{X, Y, Z\}$ можно представить в виде

$$\overline{a} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}. \tag{3.12}$$

Векторы

$$\overline{a}_x = X\overline{i},\ \overline{a}_y = Y\overline{j},\ \overline{a}_z = Z\overline{k} \tag{3.13}$$

называются *составляющими* или *компонентами* вектора $\overline{a} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}$.

Координаты суммы векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых. Если $\bar{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\bar{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \ldots,$ $\bar{a}_n = \{X_n, Y_n, Z_n\}$ и $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n = \bar{a}$, где $\bar{a} = \{X, Y, Z\}$, то $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$,

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n. \tag{3.14}$$

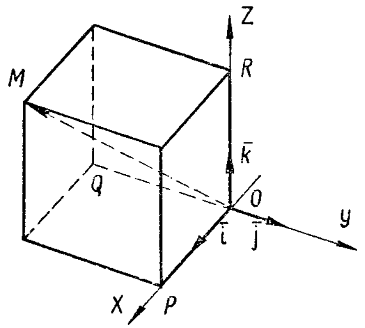

Рис. 3.13

Координаты разности векторов равны разностям соответствующих координат. Если $\bar{a}_1 - \bar{a}_2 = \bar{a}$ и $\bar{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\bar{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\bar{a} = \{X, Y, Z\}$, то

$$X = X_1 - X_2,\ Y = Y_1 - Y_2,\ Z = Z_1 - Z_2. \tag{3.15}$$

Координаты произведения вектора $\bar{a}$ на число λ равны произведениям соответствующих координат вектора $\bar{a}$ на λ. Если $\bar{b} = \lambda\bar{a}$ и $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, то

$$X_2 = \lambda X_1,\ Y_2 = \lambda Y_1,\ Z_2 = \lambda Z_1. \tag{3.16}$$

Равенства (3.16) выражают необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Радиус-вектором точки M называется вектор $\overline{OM}$, идущий от начала координат к данной точке M (см. рис. 3.13).

Если $\bar{r}_1 = \overline{OA_1}$ и $\bar{r}_2 = \overline{OA_2}$ — радиус-векторы точек $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $A_1A_2 = \{X, Y, Z\}$ выражается формулой

$$\overline{A_1A_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1, \tag{3.17}$$

т. е. всякий вектор равен радиус-вектору конца минус радиус-вектор начала (рис. 3.14). Равенство (3.17) в координатах запишется так:

$$X = x_2 - x_1;\ Y = y_2 - y_1;\ Z = z_2 - z_1, \tag{3.17'}$$

т. е. координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала.

Длина вектора $\overline{A_1A_2} = \{X, Y, Z\} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ вычисляется по формуле

$$d = |\overline{A_1A_2}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{3.18}$$

или

$$d = |\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{3.19}$$

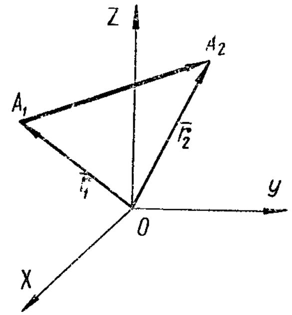

Рис. 3.14

Формулой (3.19) определяется также расстояние между двумя точками пространства $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

Направляющими косинусами вектора $\overline{A_1A_2} = \{X, Y, Z\}$ или $\overline{A_1A_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ называются косинусы углов α, β, γ, образованных этим вектором с осями координат Ox, Oy, Oz:

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}; \tag{3.20}$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}; \tag{3.21}$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \tag{3.22}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{3.23}$$

Координаты всякого вектора $\bar{a} = \{X, Y, Z\}$ через направляющие косинусы выражаются формулами:

$$X = |\bar{a}|\cos\alpha;\ Y = |\bar{a}|\cos\beta;\ Z = |\bar{a}|\cos\gamma. \tag{3.24}$$

Координаты единичного вектора $\bar{e}$ равны его направляющим косинусам:

$$\bar{e} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}. \qquad (3.25)$$

В частности координаты единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ координатных осей выражаются следующим образом:

$$\bar{i} = \{1,\ 0,\ 0\},\ \bar{j} = \{0,\ 1,\ 0\},\ \bar{k} = \{0,\ 0,\ 1\}. \qquad (3.26)$$

Радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, делящей данный отрезок M_1M_2, где $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в данном отношении $\lambda = m_1 : m_2$ выражается формулой

$$\bar{r} = \frac{m_2\bar{r}_1 + m_1\bar{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{или} \quad \bar{r} = \frac{\bar{r}_1 + \lambda\bar{r}_2}{1+\lambda}, \qquad (3.27)$$

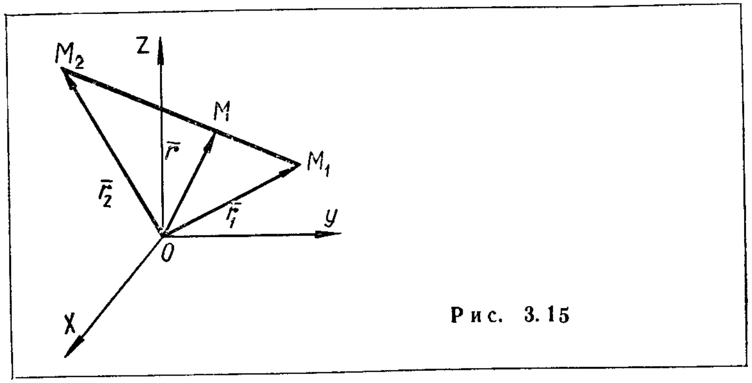

Рис. 3.15

где $\bar{r}_1 = \overline{OM}_1$, $\bar{r}_2 = \overline{OM}_2$ (рис. 3.15). Координаты точки M находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (3.28)$$

Если M — середина отрезка M_1M_2, то:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (3.29)$$

Примеры

1. Дан вектор $\bar{a}$, образующий с осью Ou угол $\varphi_1 = 60°$, и вектор $\bar{b}$, образующий с той же осью угол $\varphi_2 = 120°$. Найти проекцию суммы $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$, где $\bar{c} = 3\bar{a}$, на ось Ou, если известно, что $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 4$.

Так как проекция суммы векторов равна сумме их проекций, необходимо найти проекцию каждого слагаемого на ось Ou. В соответствии с формулой (3.10) получаем:

$$\text{пр}_{Ou}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi_1 = 6\cos 60° = 6\cdot\frac{1}{2} = 3;$$

$$\text{пр}_{Ou}\bar{b} = |\bar{b}|\cos\varphi_2 = 4\cos 120° = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

По свойству 2 находим проекцию вектора $\bar{c} = 3\bar{a}$:

$$\text{пр}_{Ou}\bar{c} = \text{пр}_{Ou}(3\bar{a}) = 3\,\text{пр}_{Ou}\bar{a} = 3\cdot 3 = 9.$$

По свойству 1 находим:

$$\text{пр}_{Ou}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = \text{пр}_{Ou}\bar{a} + \text{пр}_{Ou}\bar{b} + \text{пр}_{Ou}\bar{c} = 3 + (-2) + 9 = 10.$$

2. Дан вектор $\bar{a} = \{3,\ -4,\ 5\}$. Написать разложение вектора $\bar{a}$ по координатным ортам. Чему равны составляющие вектора $\bar{a}$?

В соответствии с формулами (3.11) и (3.12) разложение вектора $\bar{a}$ по координатным ортам имеет вид

$$\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 5\bar{k}.$$

По формулам (3.13) находим составляющие вектора $\bar{a}$:

$$\bar{a}_x = 3\bar{i},\ \bar{a}_y = -4\bar{j},\ \bar{a}_z = 5\bar{k}.$$

3. Найти координаты и составляющие вектора

$$\bar{a} = 2\bar{i} + 6\bar{j} - 7\bar{k}.$$

Вектор $\bar{a}$ имеет следующие координаты:

$$X = 2,\ Y = 6,\ Z = -7$$

и составляющие (или компоненты):

$$\bar{a}_x = 2\bar{i},\ \bar{a}_y = 6\bar{j},\ \bar{a}_z = -7\bar{k}.$$

4. Даны векторы $\bar{a} = \{1,\ -2,\ 3\}$, $\bar{b} = \{2,\ 1,\ -4\}$. Найти векторы: $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$, $\bar{p} = 3\bar{a} + 2\bar{b}$, $\bar{q} = 5\bar{a} - 4\bar{b}$.

Пользуемся формулами (3.14), (3.15). В данном случае имеем:

$$X_1 = 1,\ Y_1 = -2,\ Z_1 = 3,\ X_2 = 2,\ Y_2 = 1,\ Z_2 = -4.$$

По формулам (3.14) получаем координаты вектора $\bar{c}$:

$$X = 1 + 2 = 3; \quad Y = -2 + 1 = -1; \quad Z = 3 + (-4) = -1;$$

$$\bar{c} = \{3,\ -1,\ -1\}.$$

С помощью формул (3.15) находим координаты вектора $\bar{d}$:

$$X = 1 - 2 = -1;\ Y = -2 - 1 = -3;\ Z = 3 - (-4) = 7;$$

$$\bar{d} = \{-1,\ -3,\ 7\}.$$

Координаты векторов $3\bar{a}$ и $2\bar{b}$ определяем по формулам (3.16):

$$3\bar{a} = \{3\cdot 1,\ 3(-2),\ 3\cdot 3\} = \{3, -6,\ 9\};$$

$$2\bar{b} = \{2\cdot 2,\ 2\cdot 1,\ 2(-4)\} = \{4,\ 2,\ -8\}.$$

Снова используя формулы (3.14), получаем координаты вектора $\bar{p}$:

$$X = 3 + 4 = 7;\ Y = -6 + 2 = -4;\ Z = 9 + (-8) = 1;$$

$$\bar{p} = \{7,\ -4,\ 1\}.$$

Аналогичным образом находим координаты вектора $\bar{q}$:

$$X = 5\cdot 1 - 4\cdot 2 = -3;\ Y = 5(-2) - 4\cdot 1 = -14;$$

$$Z = 5\cdot 3 - 4(-4) = 31;\ \bar{q} = \{-3,\ -14,\ 31\}.$$

5. Даны векторы: $\bar{a}_1 = \{2,\ 4,\ -6\}$, $\bar{a}_2 = \{-1,\ -2,\ 3\}$, $\bar{a}_3 = \{4, 8, -12\}$, $\bar{a}_4 = \{6, 0, 0\}$, $\bar{a}_5 = \{0,\ -5, 0\}$, $\bar{a}_6 = \{0, 0, 2\}$, $\bar{a}_7 = \{0,\ 1,\ 3\}$, $\bar{a}_8 = \{2,\ 0,\ -1\}$, $\bar{a}_9 = \{3,\ -4,\ 0\}$. Какие из этих векторов коллинеарны, параллельны координатным осям, параллельны координатным плоскостям?

Так как координаты векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ пропорциональны, т. е.

$$-1 = \left(-\frac{1}{2}\right)2,\ \ -2 = \left(-\frac{1}{2}\right)4,\ \ 3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-6\right),$$

то векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ коллинеарны. Поскольку $\bar{a}_2 = -\frac{1}{2}\bar{a}_1$, то векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ противоположно направлены. Векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_3$ также коллинеарны, ибо

$$4 = 2\cdot 2,\ 8 = 2\cdot 4,\ -12 = 2(-6).$$

Векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_3$ одного направления, так как $\bar{a}_3 = 2\bar{a}_1$.

Сравнивая координаты векторов $\bar{a}_4$, $\bar{a}_5$, $\bar{a}_6$ с координатами векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (формулы (3.26)), заключаем, что вектор $\bar{a}_4$ параллелен оси Ox, вектор $\bar{a}_5$ — оси Oy, вектор $\bar{a}_6$ — оси Oz ($\bar{a}_4$ и $\bar{i}$ коллинеарны, так как $\bar{a}_4 = 6\bar{i}$; $\bar{a}_5$ и $\bar{j}$ коллинеарны, ибо $\bar{a}_5 = -5\bar{j}$; $\bar{a}_6$ и $\bar{k}$ также коллинеарны, ибо $\bar{a}_6 = 2\bar{k}$).

Поскольку у вектора $\bar{a}_7$ координата $x = 0$, т. е. проекция на ось Ox равна нулю, то вектор $\bar{a}_7$ перпендикулярен оси Ox и, следовательно, параллелен плоскости Oyz. Аналогичным образом заключаем, что вектор $\bar{a}_8$ параллелен плоскости Oxz, а вектор $\bar{a}_9$ — плоскости Oxy.

Замечание 1. Если одна из координат вектора равна нулю, то вектор перпендикулярен соответствующей координатной оси.

Замечание 2. Если вектор имеет только одну отличную от нуля координату, то он параллелен соответствующей координатной оси.

6. Даны две точки $A_1(2,\ -5,\ 1)$, $A_2(3,\ 4,\ -6)$. Найти координаты и компоненты вектора $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$.

Искомые координаты находим по формулам (3.17′). В данном случае имеем: $x_1 = 2$, $y_1 = -5$, $z_1 = 1$, $x_2 = 3$, $y_2 = 4$, $z_2 = -6$. Подставляя эти значения в указанные формулы находим:

$$X = 3 - 2 = 1,\ Y = 4 - (-5) = 9,\ Z = -6 - 1 = -7.$$

Следовательно, $\bar{a} = \{1,\ 9,\ -7\}$; компоненты $\bar{a}_x = \bar{i}$, $\bar{a}_y = 9\bar{j}$, $\bar{a}_z = -7\bar{k}$.

7. Даны проекции силы F на координатные оси: $X = 4$, $Y = 4$, $Z = -4\sqrt{2}$. Найти величину силы F и направление ее действия.

Вектор $\overline{AB} = \bar{F}$ по условию имеет координаты $X = 4$, $Y = 4$, $Z = -4\sqrt{2}$. Величина силы F равна модулю вектора $\bar{F}$, который можно вычислить по формуле (3.18):

$$|\bar{F}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4\sqrt{2})^2} = 8.$$

Направляющие косинусы вектора $\bar{F}$ определим по формулам (3.20) — (3.22):

$$\cos\alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};\ \cos\beta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};\ \cos\gamma = \frac{-4\sqrt{2}}{8} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, сила $F = 8$ действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы: $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 135°$.

8. Вычислить периметр треугольника ABC с вершинами $A(8,\ 0,\ 7)$, $B(10,\ 2,\ 8)$, $C(10,\ -2,\ 8)$.

Найдем длины сторон треугольника по формуле (3.19). Подставляя координаты соответствующих точек в эту формулу, получим:

$$AB = \sqrt{(10-8)^2 + (2-0)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3;$$

$$BC = \sqrt{(10-10)^2 + (-2-2)^2 + (8-8)^2} = \sqrt{(-4)^2} = 4;$$

$$AC = \sqrt{(10-8)^2 + (-2-0)^2 + (8-7)^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3.$$

Следовательно, периметр треугольника $P = 4 + 3 + 3 = 10$.

9. Вектор $\bar{a}$ составляет с осью ординат и осью аппликат углы в 60°. Найти угол между вектором $\bar{a}$ и осью абсцисс.

Воспользуемся формулой (3.23). В данном случае $\beta = \gamma = 60°$, поэтому $\cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{2}$. Подставляя эти значения в формулу (3.23), получим

$$\cos^2\alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \text{ или } \cos^2\alpha = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\alpha_1 = 45°$, $\alpha_2 = 135°$.

10. Даны вершины $A(2,\ 2,\ 2)$, $B(6,\ 5,\ 0)$, $C(0,\ 3,\ 8)$ параллелограмма $ABCD$. Найти вершину D.

Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Так как O — середина отрезка AC, то по формулам (3.29) получим:

$$x = \frac{2+0}{2} = 1,\quad y = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2},\quad z = \frac{2+8}{2} = 5,\quad O\left(1,\ \frac{5}{2},\ 5\right).$$

С другой стороны, O — середина BD. Координаты точек B и O известны, координаты точки D определим по тем же формулам (3.29).

Имеем:

$$1 = \frac{6+x}{2};\quad \frac{5}{2} = \frac{5+y}{2};\quad 5 = \frac{0+z}{2},$$

откуда $x = -4$, $y = 0$, $z = 10$. Следовательно, $D(-4,\ 0,\ 10)$.

11. Отрезок AB, где $A(3,\ -5,\ 2)$, $B(5,\ -3,\ 1)$, точками C и D разделен на три равные части. Найти координаты точек C и D.

По условию $AC:CB = 1:2$, $AD:DB = 2:1$. Подставляя в формулы (3.28) значения $x_1 = 3$, $y_1 = -5$, $z_1 = 2$, $x_2 = 5$, $y_2 = -3$, $z_2 = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, получим координаты точки C:

$$x = \frac{3+\frac{1}{2}\cdot 5}{1+\frac{1}{2}} = \frac{11}{3};\quad y = \frac{-5+\frac{1}{2}(-3)}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{13}{3};$$

$$z = \frac{2+\frac{1}{2}\cdot 1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}.$$

Координаты точки D находятся с помощью тех же формул при $\lambda = 2$:

$$x = \frac{3+2\cdot 5}{1+2} = \frac{13}{3},\quad y = \frac{-5+2(-3)}{1+2} = -\frac{11}{3},$$

$$z = \frac{2+2\cdot 1}{1+2} = \frac{4}{3}.$$

Следовательно, $C\left(\frac{11}{3},\ -\frac{13}{3},\ \frac{5}{3}\right)$, $D\left(\frac{13}{3},\ -\frac{11}{3},\ \frac{4}{3}\right)$.

Задачи

1. Даны векторы $\bar{a} = \{2,\ -5,\ 3\}$, $\bar{b} = \{1,\ 3,\ -7\}$. Найти векторы $\bar{c} = 4\bar{a} + 3\bar{b}$, $\bar{d} = 5\bar{a} - 2\bar{b}$.

2. Сила $F = 6_н$ действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы $\alpha = \beta = 120°$, $\gamma = 45°$. Найти проекции вектора силы и его составляющие.

3. Даны точки $A(1,\ -3,\ -2)$, $B(8,\ 0,\ -4)$, $C(4,\ 8,\ -3)$. Найти такую точку D, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом.

4. Вершины четырехугольника находятся в точках $A(2,0,4)$, $B(7,-15,\ 16)$, $C(-1,\ -1,\ 11)$, $D(-14,\ 28,\ -6)$. Показать, что $ABCD$ есть трапеция.

5. Найти координаты концов отрезка, который точками $C(7,\ 0,\ 3)$ и $D(-5,\ 0,\ 0)$ разделен на три равные части.

Ответы

1. $\bar{c} = \{11,\ -11,\ -9\}$, $\bar{d} = \{8,\ -31,\ 29\}$. 2. $x = -3$, $y = -3$, $z = 3\sqrt{2}$, $\bar{F}_x = -3\bar{i}$, $\bar{F}_y = -3\bar{j}$, $\bar{F}_z = 3\sqrt{2}\,\bar{k}$. 3. $D(-3,\ 5,\ -1)$. 4. Указание. Убедиться в том, что среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ есть два коллинеарных. 5. $A(19,\ 0,\ 6)$, $B(-17,\ 0,\ -3)$.

§ 3.3. Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается одним из символов $\bar{a}\bar{b}$, или $\bar{a}\cdot\bar{b}$, или $(\bar{a}\bar{b})$:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos(\widehat{\bar{a}\bar{b}}). \qquad (3.30)$$

Учитывая равенство (3.10), формулу (3.30) можно записать так:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\,\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} \quad \text{или} \quad \bar{a}\bar{b} = |\bar{b}|\,\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}. \qquad (3.31)$$

Из формулы (3.30) следует, что $\bar{a}\bar{b} > 0$, если угол $\varphi = (\widehat{\bar{a}\bar{b}})$ — острый; $\bar{a}\bar{b} < 0$, если угол φ — тупой; $\bar{a}\bar{b} = 0$, если угол φ — прямой или один из векторов равен нулю.

Свойства скалярного произведения:

1. $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$ (свойство переместительности);
2. $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$ (свойство распределительности);
3. $\lambda(\bar{a}\bar{b}) = (\lambda\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(\lambda\bar{b})$ (свойство сочетательности).

Скалярное произведение $\bar{a}\bar{a}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\bar{a}$ и обозначается символом $\bar{a}^2$. Из формулы (3.30) следует, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, т. е.

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2. \tag{3.32}$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами

$$\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \quad \bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\},$$

то их скалярное произведение выразится формулой

$$\bar{a}\bar{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2, \tag{3.33}$$

угол между ними — формулой

$$\cos(\widehat{\bar{a}\bar{b}}) = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}, \tag{3.34}$$

а необходимое и достаточное условие их перпендикулярности примет вид

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \tag{3.35}$$

Примеры

1. Найти скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, для которых $|\bar{a}| = 8$, $|\bar{b}| = 5$ в каждом из следующих случаев: $\varphi_1 = 60°$, $\varphi_2 = 90°$, $\varphi_3 = 120°$, $\varphi_4 = 180°$, где $\varphi = (\widehat{\bar{a}\bar{b}})$.

По формуле (3.30) находим:

1) $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi_1 = 8\cdot 5\cos 60° = 20$;

2) $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi_2 = 8\cdot 5\cos 90° = 0$;

3) $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi_3 = 8\cdot 5\cos 120° = -20$;

4) $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi_4 = 8\cdot 5\cos 180° = -40$.

2. Доказать, что вектор $\bar{p} = \bar{a} - \frac{\bar{b}(\bar{b}\bar{a})}{\bar{b}^2}$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$.

Умножая скалярно вектор $\bar{b}$ на вектор $\bar{p}$, получим

$$\bar{b}\bar{p} = \bar{b}\bar{a} - \frac{\bar{b}\bar{b}(\bar{b}\bar{a})}{\bar{b}^2} = (\bar{b}\bar{a}) - \frac{\bar{b}^2(\bar{b}\bar{a})}{\bar{b}^2} = (\bar{b}\bar{a}) - \frac{|\bar{b}|^2(\bar{b}\bar{a})}{|\bar{b}|^2} =$$

$$= (\bar{b}\bar{a}) - (\bar{b}\bar{a}) = 0.$$

Так как $\bar{b}\bar{p} = 0$, то $\bar{b} \perp \bar{p}$.

3. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$, чтобы вектор $\bar{p} + \bar{q}$ был перпендикулярен вектору $\bar{p} - \bar{q}$?

Если $(\bar{p} + \bar{q}) \perp (\bar{p} - \bar{q})$, то $(\bar{p} + \bar{q})(\bar{p} - \bar{q}) = 0$. Раскрывая скобки в последнем равенстве (что можно сделать в силу свойства 2), получим

$$(\bar{p} + \bar{q})(\bar{p} - \bar{q}) = \bar{p}\bar{p} - \bar{p}\bar{q} + \bar{q}\bar{p} - \bar{q}\bar{q} = 0.$$

Принимая во внимание свойство 1, формулу (3.32), находим

$$|\bar{p}|^2 - |\bar{q}|^2 = 0,$$

откуда $|\bar{p}| = |\bar{q}|$.

Обратное также верно. Если $|\bar{p}| = |\bar{q}|$, то $(\bar{p} + \bar{q}) \perp (\bar{p} - \bar{q})$. Какой геометрический смысл имеет данное условие? (См. замечание к примеру 1 § 3.1.)

4. Даны три вектора: $\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$, $\bar{b} = 12\bar{i} - 4\bar{k}$, $\bar{c} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$. Вычислить выражение $5\bar{a}^2 - \bar{b}^2 + 7\bar{c}^2$.

Найдем вначале скалярные квадраты данных векторов. Если $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, то из формул (3.18) и (3.32) следует, что

$$\bar{a}^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2. \tag{3.33'}$$

Подставляя координаты данных векторов в формулу (3.33'), получим:

$$\bar{a}^2 = 4^2 + (-3)^2 + 0^2 = 25; \quad \bar{b}^2 = 12^2 + 0^2 + (-4)^2 = 160;$$

$$\bar{c}^2 = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 = 9.$$

Следовательно, $5\bar{a}^2 - \bar{b}^2 + 7\bar{c}^2 = 5\cdot 25 - 160 + 7\cdot 9 = 28$.

5. Даны два вектора: $\bar{a} = \{1, -2, 2\}$, $\bar{b} = \{2, -2, -1\}$. Найти их скалярное произведение и угол между ними. Чему равно выражение $2\bar{a}^2 - 4\bar{a}\bar{b} + 5\bar{b}^2$?

Подставляя в формулу (3.33) координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, находим

$$\bar{a}\bar{b} = 1\cdot 2 + (-2)(-2) + 2(-1) = 4.$$

Так как

$$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3 \text{ и } |\bar{b}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3,$$

то по формуле (3.34) получим

$$\cos(\widehat{\bar{a}\bar{b}}) = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{4}{3\cdot 3} = \frac{4}{9}.$$

Поскольку $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 = 3^2 = 9$ и $\bar{b}^2 = |\bar{b}|^2 = 3^2 = 9$, то

$$2\bar{a}^2 - 4\bar{a}\bar{b} + 5\bar{b}^2 = 2\cdot 9 - 4\cdot 4 + 5\cdot 9 = 47.$$

6. Вычислить, какую работу производит сила $\bar{F} = \{2, -1, -4\}$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(1, -2, 3)$ в положение $N(5, -6, 1)$.

В соответствии с определением работы и скалярного произведения получаем

$$A = \bar{F}\bar{s},$$

где A — работа; $\bar{F}$ — вектор действующей силы; $\bar{s}$ — вектор пути.

Найдем вектор $\bar{s} = \overline{MN}$. По формулам (3.17') получаем:

$$\bar{s} = \{5-1,\ -6-(-2),\ 1-3\},\quad \bar{s} = \{4,\ -4,\ -2\}.$$

С помощью формулы (3.33) находим

$$A = \bar{F}\bar{s} = 2\cdot 4 + (-1)(-4) + (-2)(-4) = 20 \text{ (ед. работы)}.$$

7. Дан треугольник с вершинами $A(-3,\ 5,\ 6)$, $B(1,\ -5,\ 7)$, $C(8,\ -3,\ -1)$. Найти внутренний угол при вершине A и внешний угол при вершине C.

Внутренний угол треугольника при вершине A равен углу между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а внешний угол при вершине C равен углу между векторами $\overline{CB}$ и $\overline{AC}$ (сделайте чертеж).

По формулам (3.17') находим координаты указанных векторов:

$$\overline{AB} = \{4,\ -10,\ 1\},\quad \overline{AC} = \{11,\ -8,\ -7\},$$
$$\overline{CB} = \{-7,\ -2,\ 8\}.$$

С помощью формулы (3.34) находим косинусы углов:

$$\cos\varphi_1 = \cos(\widehat{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}) = \frac{4\cdot 11 + (-10)(-8) + 1(-7)}{\sqrt{4^2+(-10)^2+1^2}\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}} =$$
$$= \frac{117}{\sqrt{117}\sqrt{234}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos\varphi_2 = \cos(\widehat{\overline{CB}\cdot\overline{AC}}) = \frac{(-7)\,11 + (-2)(-8) + 8(-7)}{\sqrt{(-7)^2+(-2)^2+8^2}\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}} =$$
$$= \frac{-117}{\sqrt{117}\sqrt{234}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi_1 = 45°$, $\varphi_2 = 135°$.

8. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5,\ 3,\ 4)$, $B(-1,\ -7,\ 5)$, $C(6,\ -5,\ -3)$, $D(2,\ 5,\ -4)$ есть квадрат.

По формулам (3.17') находим векторы

$$\overline{AB} = \{4,\ -10,\ 1\},\quad \overline{BC} = \{7,\ 2,\ -8\},\quad \overline{DC} = \{4,\ -10,\ 1\},$$
$$\overline{AD} = \{7,\ 2,\ -8\}.$$

Сравнивая координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$, заключаем, что

$$\overline{AB} = \overline{DC},\quad \overline{BC} = \overline{AD}.$$

Так как

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} = \sqrt{117},$$
$$|\overline{BC}| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{117},$$

то

$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{DC}| = |\overline{AD}|.$$

Поскольку

$$\overline{AB}\cdot\overline{BC} = 4\cdot 7 + (-10)\,2 + 1(-8) = 0,$$

то $\overline{AB} \perp \overline{BC}$.

Следовательно, четырехугольник $ABCD$ есть квадрат.

9. При каком значении λ векторы $\bar{a} = 4\bar{i} + \lambda\bar{j} + 5\bar{k}$ и $\bar{b} = \lambda\bar{i} + 2\bar{j} - 6\bar{k}$ взаимно перпендикулярны?

Условие перпендикулярности (3.35) в данном случае запишется так:

$$4\lambda + 2\lambda + 5(-6) = 0 \text{ или } 6\lambda - 30 = 0,$$

откуда $\lambda = 5$.

10. Найти вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = \{1,\ 2,\ -3\}$ и удовлетворяющий условию $\bar{x}\bar{a} = 28$.

Принимая во внимание условие коллинеарности двух векторов (3.16), заключаем, что

$$\bar{x} = \{\lambda,\ 2\lambda,\ -3\lambda\},$$

где λ — пока неизвестный коэффициент. Так как $\bar{x}\bar{a} = 28$, то в соответствии с формулой (3.33) находим

$$1\cdot\lambda + 2\cdot 2\lambda + (-3)(-3\lambda) = 28 \text{ или } 14\lambda = 28, \text{ откуда } \lambda = 2.$$

Следовательно, $\bar{x} = \{2,\ 4,\ -6\}$.

11. Даны три вектора $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{c} = 10\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$. Найти $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$, $\text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c})$, $\text{пр}_{\bar{a}+\bar{b}}\bar{c}$, $\text{пр}_{\bar{b}}(2\bar{a} - 3\bar{c})$.

Применим формулу

$$\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|}, \tag{3.31'}$$

получающуюся из первой формулы (3.31).

Подставляя условия примера в формулу (3.31'), получим

$$\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|} = \frac{1\cdot 2 + (-2)\,1 + 2(-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = -\frac{4}{3}.$$

Для нахождения остальных проекций определим векторы:

$$\bar{b} + \bar{c} = (2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) + (10\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}) = 12\bar{i} + 5\bar{j};$$
$$\bar{a} + \bar{b} = (\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}) + (2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) = 3\bar{i} - \bar{j};$$
$$2\bar{a} - 3\bar{c} = 2(\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}) - 3(10\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}) = -28\bar{i} - 16\bar{j} - 2\bar{k}.$$

В соответствии с формулой (3.31') находим:

$$\text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c}) = \frac{\bar{a}(\bar{b} + \bar{c})}{|\bar{a}|} = \frac{1\cdot 12 + (-2)\,5 + 2\cdot 0}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{2}{3};$$

$$\text{пр}_{\bar{a}+\bar{b}}\bar{c} = \frac{(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}}{|\bar{a}+\bar{b}|} = \frac{3\cdot 10 + (-1)\,4 + 0\cdot 2}{\sqrt{3^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{26}{\sqrt{10}};$$

$$\text{пр}_{\bar b}(2\bar a-3\bar c)=\frac{\bar b(2\bar a-3\bar c)}{|\bar b|}=\frac{2(-28)+1(-16)+(-2)(-2)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=$$
$$=-\frac{68}{3}.$$

Замечание. Проекцию вектора $\bar b$ на вектор $\bar a$ можно найти и по формуле

$$\text{пр}_{\bar a}\bar b=\bar b\cdot\bar a_0,$$

где $\bar a_0=\dfrac{\bar a}{|\bar a|}$ — единичный вектор направления $\bar a$. В данном случае $\bar a_0=\left\{\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$, поэтому $\text{пр}_{\bar a}\bar b=\bar b\cdot\bar a_0=-\frac{4}{3}$.

Задачи

1. Известно, что $|\bar a|=6$, $|\bar b|=\sqrt{2}$. Найти скалярное произведение векторов $\bar a$ и $\bar b$ в каждом из следующих случаев:

$$\cos\varphi_1=45^\circ,\ \cos\varphi_2=90^\circ,\ \cos\varphi_3=135^\circ,\ \cos\varphi_4=180^\circ.$$

2. Доказать, что вектор $\bar p=\bar c(\bar b\bar a)-\bar a(\bar b\bar c)$ перпендикулярен вектору $\bar b$.

3. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar a$ и $\bar b$, заданных своими координатами, и углы между ними:

1) $\bar a=\{3,\ -4\}$, $\bar b=\{5,\ 12\}$;
2) $\bar a=\{2,\ -3,\ 2\}$, $\bar b=\{4,\ 2,\ -1\}$.

4. Даны три силы: $\bar F_1=\{2,\ -5,\ 1\}$, $\bar F_2=\{1,\ 2,\ -6\}$, $\bar F_3=\{-4,\ -3,\ 3\}$, приложенные в одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $M(4,\ 2,\ -8)$ в точку $N(3,\ -2,\ -5)$.

5. Найти внутренние углы треугольника с вершинами $A(5,\ 2,\ -4)$, $B(9,\ -8,\ -3)$, $C(16,\ -6,\ -11)$.

6. Даны два вектора: $\bar a=\{1,\ -2,\ 4\}$, $\bar b=\{3,\ 1,\ -5\}$. Найти вектор x, зная, что он перпендикулярен оси Oy и удовлетворяет условиям: $\bar x\bar a=-3$, $\bar x\bar b=8$.

7. Даны три вектора: $\bar a=\{2,\ -1,\ 3\}$, $\bar b=\{4,\ 3,\ -5\}$, $\bar c=\{7,\ -2,\ -6\}$. Найти вектор $\bar x$, удовлетворяющий условиям: $\bar x\bar a=8$, $\bar x\bar b=0$, $\bar x\bar c=10$.

8. Найти проекцию вектора $\bar a=\{4,\ 3,\ -7\}$ на ось вектора $\bar b=\{1,\ -2,\ -2\}$.

Ответы

1. 6, 0; -6; $-6\sqrt{2}$. 3. 1) $\bar a\bar b=-33$, $\cos\varphi=-\frac{33}{65}$; 2) $\bar a\bar b=0$. 4. 19. 5. $\varphi_1=\varphi_2$; $\varphi_3=90^\circ$. 6. $\bar x=\{1,\ 0,\ -1\}$. 7. $\bar x=\{2,\ -1,\ 1\}$. 8. 4.

§ 3.4. Векторное произведение

Пространственным репером называется совокупность трех *некомпланарных* векторов, приложенных в одной точке и заданных в определенном порядке.

Репер $\bar a=\overline{OA}$, $\bar b=\overline{OB}$, $\bar c=\overline{OC}$ называется *правым* (рис. 3.16, *а*), если кратчайший поворот вектора $\overline{OA}$ к вектору $\overline{OB}$ совершается против часовой стрелки для наблюдателя, глаз которого находится в точке C.

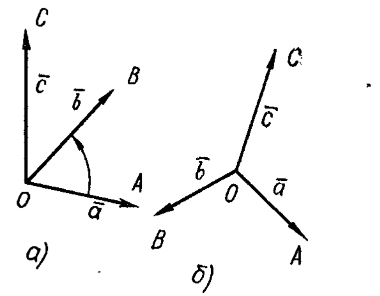

Рис. 3.16

Если же указанный поворот совершается по часовой стрелке (рис. 3.16, *б*), то репер называется *левым*.

Если даны два репера и каждый из них правый или каждый левый, то говорят, что эти реперы имеют *одинаковую ориентацию*; если же один репер правый, а другой — левый, то реперы имеют *противоположную ориентацию*.

Векторным произведением двух векторов $\bar a$ и $\bar b$ называется третий вектор $\bar c$ (рис. 3.17), удовлетворяющий условиям:

1) вектор $\bar c$ перпендикулярен каждому из векторов $\bar a$ и $\bar b$;

2) модуль вектора $\bar c$ равен произведению модулей векторов $\bar a$ и $\bar b$ на синус угла между ними, т. е.

$$|\bar c|=|\bar a|\cdot|\bar b|\sin(\widehat{\bar a\bar b});\qquad(3.36)$$

3) реперы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ и $\bar i$, $\bar j$, $\bar k$ ($\bar i$, $\bar j$, $\bar k$ — координатные орты) имеют одинаковую ориентацию.

Векторное произведение $\bar{c}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается одним из символов:

$$\bar{c} = [\bar{a}\bar{b}] \text{ или } \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}. \qquad (3.37)$$

Из формулы (3.36) следует, что модуль векторного произведения $[\bar{a}\bar{b}]$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$|[\bar{a}\bar{b}]| = S. \qquad (3.38)$$

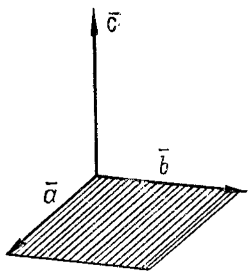

Рис. 3.17

Векторное произведение может быть выражено формулой

$$[\bar{a}\bar{b}] = S\bar{e}, \qquad (3.39)$$

где $\bar{e}$ — орт направления $[\bar{a}\bar{b}]$.

Векторное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны:

$$[\bar{a}\bar{b}] = 0, \text{ если } \bar{a} = \lambda\bar{b}. \qquad (3.40)$$

В частности

$$[\bar{a}\bar{a}] = 0. \qquad (3.40')$$

Свойства векторного произведения:

1. $[\bar{a}\bar{b}] = -[\bar{b}\bar{a}]$,
2. $[\bar{a}+\bar{b}, \bar{d}] = [\bar{a}\bar{d}] + [\bar{b}\bar{d}]$,
3. $[\lambda\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda\bar{b}] = \lambda[\bar{a}\bar{b}]$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами

$$\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \ \bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\},$$

то

$$[\bar{a}\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \qquad (3.41)$$

или

$$[\bar{a}\bar{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 Z_1 \\ Y_2 Z_2 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} X_1 Z_1 \\ X_2 Z_2 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} X_1 Y_1 \\ X_2 Y_2 \end{vmatrix} \right\}. \qquad (3.42)$$

Площадь треугольника, построенного на этих векторах, выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}|[\bar{a}\bar{b}]| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 Z_1 \\ Y_2 Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 Z_1 \\ X_2 Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 Y_1 \\ X_2 Y_2 \end{vmatrix}^2}, \qquad (3.43)$$

а синус угла между ними — формулой

$$\sin(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}) = \frac{|[\bar{a}\bar{b}]|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 Z_1 \\ Y_2 Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 Z_1 \\ X_2 Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 Y_1 \\ X_2 Y_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \qquad (3.44)$$

Замечание. Формула (3.42) означает, что координаты векторного произведения можно получить следующим образом. Выписываем таблицу из координат векторов (соблюдая порядок):

$$\begin{pmatrix} X_1 Y_1 Z_1 \\ X_2 Y_2 Z_2 \end{pmatrix}.$$

Закрывая первый столбец этой таблицы, получаем определитель, являющийся первой координатой. Закрывая второй столбец и беря полученный определитель со знаком минус, найдем вторую координату. Закрывая третий столбец, получим определитель, являющийся третьей координатой векторного произведения $[\bar{a}\bar{b}]$.

Примеры

1. Найти векторные произведения

$$[\bar{i}\bar{j}], [\bar{j}\bar{k}], [\bar{k}\bar{i}], [\bar{j}\bar{i}], [\bar{k}\bar{j}], [\bar{i}\bar{k}],$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — орты правой системы координат.

Найдем вначале $[\bar{i}\bar{j}]$. Пользуясь определением векторного произведения, заключаем:

1) вектор $[\bar{i}\bar{j}]$ коллинеарен $\bar{k}$, так как он перпендикулярен векторам $\bar{i}$ и $\bar{j}$;

2) вектор $[\bar{i}\bar{j}]$ является единичным, так как площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{i}$ и $\bar{j}$, равна единице (параллелограмм в данном случае представляет собой квадрат $AOBD$ со стороной, равной единице, см. рис. 3.18).

Из полученных утверждений следует, что вектор $[\bar{i}\bar{j}]$ равен либо $\bar{k}$, либо $-\bar{k}$. Вторую возможность нужно отбросить, так как репер $\bar{i}$, $\bar{j}$, $-\bar{k}$ является левым. Следовательно, $[\bar{i}\bar{j}] = \bar{k}$.

Аналогичным образом находим, что $[\bar j\bar k]=\bar i$, $[\bar k\bar i]=\bar j$.

При нахождении вектора $[\bar j\bar i]$ утверждения 1) и 2) остаются верными. Заключение будет другим: так как репер $\bar j$, $\bar i$, $-\bar k$ является правым, то $[\bar j\bar i]=-\bar k$. Аналогично получаем $[\bar k\bar j]=-\bar i$ и $[\bar i\bar k]=-\bar j$.

Замечание. Три последних результата можно получить из трех первых, пользуясь свойством 1.

2. Даны векторы $\bar a$ и $\bar b$, для которых $|\bar a|=6$, $|\bar b|=4$. Найти векторные произведения в каждом из следующих случаев: $\varphi_1=0$, $\varphi_2=30°$, $\varphi_3=90°$, $\varphi_4=150°$, где $\varphi=(\widehat{\bar a\,\bar b})$.

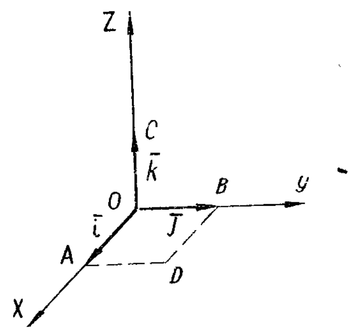

Рис. 3.18

По формуле (3.36) находим модули векторных произведений: 1) $|[\bar a\bar b]|=|\bar a|\cdot|\bar b|\sin 0=0$; 2) $|[\bar a\bar b]|=|\bar a|\cdot|\bar b|\sin 30°=6\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=12$; 3) $|[\bar a\bar b]|=|\bar a|\cdot|\bar b|\sin 90°=6\cdot 4=24$; 4) $|[\bar a\bar b]|=|\bar a|\cdot|\bar b|\sin 150°=6\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=12$.

По формуле (3.39) получаем:
1) $[\bar a\bar b]=0$; 2) $[\bar a\bar b]=12\bar e$; 3) $[\bar a\bar b]=24\bar e$; 4) $[\bar a\bar b]=12\bar e$, где $\bar e$ — единичный вектор направления $[\bar a\bar b]$.

3. Найти векторное произведение векторов

$$\bar a=2\bar i-3\bar j+5\bar k,\quad \bar b=4\bar i+2\bar j-6\bar k.$$

Пользуясь формулой (3.40′), свойствами векторного произведения и результатами примера 1, получаем

$$[\bar a\bar b]=[(2\bar i-3\bar j+5\bar k)(4\bar i+2\bar j-6\bar k)]=8[\bar i\bar i]+4[\bar i\bar j]-12[\bar i\bar k]-12[\bar j\bar i]-6[\bar j\bar j]+18[\bar j\bar k]+20[\bar k\bar i]+10[\bar k\bar j]-30[\bar k\bar k]=4[\bar i\bar j]-$$

$$-12[\bar i\bar k]-12[\bar j\bar i]+18[\bar j\bar k]+20[\bar k\bar i]+10[\bar k\bar j]=16[\bar i\bar j]-8[\bar k\bar j]+32[\bar k\bar i]=8\bar i+32\bar j+16\bar k.$$

4. Упростить выражение $[(3\bar a-2\bar b)(2\bar a+5\bar b)]$.

Пользуясь формулой (3.40′) и свойствами векторного произведения, получаем

$$[(3\bar a-2\bar b)(2\bar a+5\bar b)]=[3\bar a2\bar a]+[3\bar a5\bar b]+[(-2\bar b)\,2\bar a]+[(-2\bar b)\,5\bar b]=6[\bar a\bar a]+15[\bar a\bar b]-4[\bar b\bar a]-10[\bar b\bar b]=15[\bar a\bar b]+4[\bar a\bar b]=19[\bar a\bar b].$$

5. Показать, что векторы $[\bar a\bar b]$ и $[2\bar a(3\bar a-5\bar b)]$ коллинеарны.
Упростим второе векторное произведение:

$$[2\bar a(3\bar a-5\bar b)]=[2\bar a3\bar a]+[2\bar a(-5\bar b)]=6[\bar a\bar a]-10[\bar a\bar b]=-10[\bar a\bar b].$$

Векторы $[\bar a\bar b]$ и $-10[\bar a\bar b]$ коллинеарны.

6. Даны векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$, удовлетворяющие условию $\bar a+\bar b+\bar c=0$. Доказать, что $[\bar a\bar b]=[\bar b\bar c]=[\bar c\bar a]$.

Умножим векторно $\bar a$ на $\bar a+\bar b+\bar c=0$. Получим

$$[\bar a\bar a]+[\bar a\bar b]+[\bar a\bar c]=0 \text{ или } [\bar a\bar b]=-[\bar a\bar c]=[\bar c\bar a].$$

Умножая векторно $\bar a+\bar b+\bar c=0$ на $\bar b$, находим

$$[\bar a\bar b]+[\bar b\bar b]+[\bar c\bar b]=0 \quad\text{или}\quad [\bar a\bar b]=-[\bar c\bar b]=[\bar b\bar c].$$

Из двух равенств $[\bar a\bar b]=[\bar c\bar a]$ и $[\bar a\bar b]=[\bar b\bar c]$ следует доказываемое равенство.

Замечание. Векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ образуют треугольник. Все векторы $[\bar a\bar b]$, $[\bar b\bar c]$, $[\bar c\bar a]$ направлены в одну сторону, а модуль каждого из них равен удвоенной площади треугольника, построенного на векторах $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$.

7. Доказать, что

$$[\bar a\bar b]^2+(\bar a\bar b)^2=\bar a^2\bar b^2.$$

По определению векторного и скалярного произведения имеем:

$$|[\bar a\bar b]|=|\bar a|\cdot|\bar b|\sin(\widehat{\bar a\,\bar b}),$$

$$\bar a\bar b=|\bar a|\cdot|\bar b|\cos(\widehat{\bar a\,\bar b}).$$

Возводя в квадрат обе части каждого равенства и складывая почленно, получим

$$|[\bar a\bar b]|^2+(\bar a\bar b)^2=|\bar a|^2\cdot|\bar b|^2.$$

Так как квадрат длины вектора равен его скалярному квадрату, то полученному равенству можно придать вид

$$[\bar{a}\bar{b}]^2 + (\bar{a}\bar{b})^2 = \bar{a}^2\bar{b}^2.$$

8. Даны векторы

$$\bar{a} = \{1, -2, 2\}, \bar{b} = \{3, 0, -4\}.$$

Найти их векторное произведение, синус угла между ними и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

Составим таблицу из координат векторов

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Закрывая поочередно первый, второй, третий столбцы и рассматривая полученные определители (причем второй — со знаком минус), получаем

$$[\bar{a}\bar{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right\} \text{ или } [\bar{a}\bar{b}] = \{8, 10, 6\}.$$

По формуле (3.38) находим площадь параллелограмма

$$S = |[\bar{a}\bar{b}]| = \sqrt{8^2 + 10^2 + 6^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

С помощью формулы (3.44) определяем синус угла между данными векторами

$$\sin(\widehat{\bar{a}\bar{b}}) = \frac{|[\bar{a}\bar{b}]|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{\sqrt{8^2 + 10^2 + 6^2}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10\sqrt{2}}{3\cdot 5} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

9. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(-1, 0, 2)$, $B(1, -2, 5)$, $C(3, 0, -4)$.

Находим сначала координаты векторов $\bar{a} = \overline{AB}$ и $\bar{b} = \overline{AC}$:

$$\bar{a} = \{2, -2, 3\}, \bar{b} = \{4, 0, -6\}.$$

Координаты векторного произведения $[\bar{a}\bar{b}]$ определяем по формуле (3.42), предварительно выписав таблицу

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$[\bar{a}\bar{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

или $[\bar{a}\bar{b}] = \{12, 24, 8\}$.

С помощью формулы (3.43) находим площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}|[\bar{a}\bar{b}]| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{784} = \frac{28}{2} = 14 \text{ (кв. ед.)}.$$

10. Три силы $\bar{F}_1 = \{2, 4, 6\}$, $\bar{F}_2 = \{1, -2, 3\}$, $\bar{F}_3 = \{1, 1, -7\}$ приложены в точке $A(3, -4, 8)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(4, -2, 6)$.

Если вектор $\bar{F}$ изображает силу, приложенную в точке M, а вектор $\bar{a} = \overline{NM}$, то вектор $[\bar{a}\bar{F}]$ представляет собой момент силы $\bar{F}$ относительно точки N.

Найдем сначала равнодействующую трех данных сил

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3.$$

Так как координаты суммы векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых, то

$$\bar{F} = \{2 + 1 + 1,\ 4 + (-2) + 1,\ 6 + 3 + (-7)\},\ \bar{F} = \{4, 3, 2\}.$$

По координатам конца и начала определяем координаты вектора $\bar{a}$:

$$\bar{a} = \overline{BA} = \{3 - 4,\ -4 - (-2),\ 8 - 6\},\ \bar{a} = \{-1, -2, 2\}.$$

С помощью формулы (3.42) находим координаты $[\bar{a}\bar{F}]$:

$$[\bar{a}\bar{F}] = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \right\},$$

$$[\bar{a}\bar{F}] = \{-10, 10, 5\}.$$

Следовательно, величина момента равнодействующей равна

$$|[\bar{a}\bar{F}]| = \sqrt{(-10)^2 + 10^2 + 5^2} = \sqrt{225} = 15.$$

Направляющие косинусы момента силы определим по формулам (3.20) — (3.22):

$$\cos\alpha = \frac{-10}{15} = -\frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{10}{15} = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

Задачи

1. Найти векторное произведение векторов $\bar{a} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = 6\bar{i} + 5\bar{j} - 4\bar{k}$.

2. Показать, что векторы $[\bar{b}\bar{a}]$ и $[3\bar{b}(4\bar{a} + 5\bar{b})]$ коллинеарны.

3. Упростить выражения: 1) $[(2\bar{a} - 3\bar{b})(\bar{a} + 4\bar{b})]$, 2) $[(4\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c})(\bar{a} + 3\bar{b} - 2\bar{c})]$, 3) $[(3\bar{i} - 4\bar{j} - 5\bar{k})(2\bar{i} + 6\bar{j} - \bar{k})]$.

4. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ связаны соотношениями $[\bar{a}\bar{b}] = [\bar{c}\bar{d}]$, $[\bar{a}\bar{c}] = [\bar{b}\bar{d}]$. Доказать, что векторы $(\bar{a} - \bar{d})$ и $(\bar{b} - \bar{c})$ коллинеарны.

5. Даны векторы $\bar{a} = \{-4, -8, 8\}$, $\bar{b} = \{4, 3, 2\}$. Найти их векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

6. Дан треугольник с вершинами $A(4, -14, 8)$, $B(2, -18, 12)$, $C(12, -8, 12)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

7. Даны две силы $\bar{F}_1 = \{4, 1, 3\}$, $\bar{F}_2 = \{-2, 2, 1\}$, приложенные в точке $A(6, -6, -3)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно: 1) начала координат; 2) точки $B(5, -8, -5)$.

8. Доказать «тождество Лагранжа»:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \end{vmatrix}.$$

9. Даны векторы $\bar{a} = \{3, 1, 2,\}$ $\bar{b} = \{2, 7, 4\}$, $\bar{c} = \{1, 2, 1\}$. Найти $[[\bar{a}\bar{b}]\,\bar{c}]$ и $[\bar{a}\,[\bar{b}\bar{c}]]$.

Ответы

1. $[\bar{a}\bar{b}] = 2\bar{i} + 16\bar{j} + 23\bar{k}$. 3. 1) $11\,[\bar{a}\bar{b}]$; 2) $13\,[\bar{a}\bar{b}] - 10\,[\bar{a}\bar{c}] - 4\,[\bar{b}\bar{c}]$; 3) $34\bar{i} - 7\bar{j} + 26\bar{k}$. 5. $[\bar{a}\bar{b}] = \{-40, 40, 20\}$, $S = 60$, $\sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{29}}$. 6. $h = 10$. 7. 1) $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \{2, 3, 4\}$, $\bar{a} = \overline{OA} = \{6, -6, -3\}$. $|[\bar{a}\bar{F}]| = 45$, $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$. 2) $\bar{F} = \{2, 3, 4\}$, $\bar{a} = \overline{BA} = \{1, 2, 2\}$, $|[\bar{a}\bar{F}]| = \sqrt{5}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. 8. *Указание.* Воспользоваться тождеством примера 7. 9. $[[\bar{a}\bar{b}]\,\bar{c}] = \{-46, 29, -12\}$, $[\bar{a}\,[\bar{b}\bar{c}]] = \{-7, 7, 7\}$.

§ 3.5. Смешанное произведение. Двойное векторное произведение

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется число, равное векторному произведению $[\bar{a}\bar{b}]$, умноженному скалярно на вектор $\bar{c}$. Смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ обозначается символом $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Верны следующие равенства:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = [\bar{a}\bar{b}]\,\bar{c} = \bar{a}\,[\bar{b}\bar{c}]. \tag{3.45}$$

Смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, взятому со знаком плюс, когда реперы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ имеют одинаковую ориентацию, и со знаком минус — в противном случае. Равенство

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \tag{3.46}$$

является необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Свойства смешанного произведения:

1. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -(\bar{b}\bar{a}\bar{c}) = -(\bar{c}\bar{b}\bar{a}) = -(\bar{a}\bar{c}\bar{b})$;
2. $\bar{a}\,(\bar{b} + \bar{d})\,\bar{c} = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{d}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\,(\bar{c} + \bar{d}) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{d}$;
3. $\bar{a}\,(\lambda\bar{b})\,\bar{c} = \bar{a}\bar{b}\,(\lambda\bar{c}) = \lambda\,(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$.

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ заданы своими координатами

$$\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \bar{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\},$$

то их смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} X_1 Y_1 Z_1 \\ X_2 Y_2 Z_2 \\ X_3 Y_3 Z_3 \end{vmatrix}, \tag{3.47}$$

а объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, определяется формулой

$$V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = \pm \begin{vmatrix} X_1 Y_1 Z_1 \\ X_2 Y_2 Z_2 \\ X_3 Y_3 Z_3 \end{vmatrix}, \tag{3.48}$$

в которой знак берется одинаковым со знаком определителя.

Двойным векторным произведением $[[\bar{a}\bar{b}]\,\bar{c}]$ называется векторное произведение вектора $[\bar{a}\bar{b}]$ на вектор $\bar{c}$. Умножая вектор $\bar{a}$ векторно на $[\bar{b}\bar{c}]$, получим двойное векторное произведение $[\bar{a}\,[\bar{b}\bar{c}]]$. В общем случае

$$[\bar{a}\,[\bar{b}\bar{c}]] \neq [[\bar{a}\bar{b}]\,\bar{c}]. \tag{3.49}$$

Примеры

1. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ удовлетворяют условию $[\bar{a}\bar{b}] + [\bar{b}\bar{c}] + [\bar{c}\bar{a}] = 0$. Доказать, что эти векторы компланарны.

Умножим скалярно вектор $\bar{a}$ на вектор $[\bar{a}\bar{b}] + [\bar{b}\bar{c}] + [\bar{c}\bar{a}] = 0$. Получим

$$\bar{a}\,[\bar{a}\bar{b}] + \bar{a}\,[\bar{b}\bar{c}] + \bar{a}\,[\bar{c}\bar{a}] = 0 \text{ или } \bar{a}\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c}\bar{a} = 0. \tag{A}$$

Так как векторы $\bar{a}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{a}$, $\bar{c}$, $\bar{a}$ компланарны, то в силу условия (3.46) заключаем, что

$$\bar{a}\bar{a}\bar{b} = 0, \ \bar{a}\bar{c}\bar{a} = 0. \tag{B}$$

Равенство (A) с учетом равенств (B) принимает вид

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0.$$

В силу того же условия (3.46) заключаем, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны.

Замечание. Смешанное произведение трех векторов, среди которых имеется два равных, равно нулю.

2. Доказать тождество $\bar{a}\bar{b}(\bar{c}+\alpha\bar{a}+\beta\bar{b})=\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, где α и β — произвольные числа.

Принимая во внимание свойства смешанного произведения и замечание к примеру 1, получаем

$$\bar{a}\bar{b}(\bar{c}+\alpha\bar{a}+\beta\bar{b})=\bar{a}\bar{b}\bar{c}+\alpha\bar{a}\bar{b}\bar{a}+\beta\bar{a}\bar{b}\bar{b}=\bar{a}\bar{b}\bar{c}.$$

3. Найти смешанное произведение трех векторов $\bar{a}=\{1, 1, 2\}$, $\bar{b}=\{2, 1, 1\}$, $\bar{c}=\{1, -2, 3\}$. Какой репер образуют векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$? (Координатный репер — правый.)

По формуле (3.47) находим

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & -3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-10.$$

Так как смешанное произведение отрицательно, то реперы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ имеют противоположную ориентацию, т. е. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — левый репер.

4. Доказать, что векторы $\bar{a}=\{1, 2, -2\}$, $\bar{b}=\{1, -2, 1\}$, $\bar{c}=\{5, -2, -1\}$ компланарны.

Найдем смешанное произведение этих векторов по формуле (3.47):

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 5 & -2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, выполнено условие (3.46). Это и означает, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны.

5. Найти объем V_1 тетраэдра $ABCD$ с вершинами в точках $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_0, y_0, z_0)$.

Найдем векторы трех ребер тетраэдра, исходящих из какой-либо его вершины, например вершины D:

$$\bar{a}=\overline{DA}=\{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\},\ \bar{b}=\overline{DB}=\{x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0\},\ \bar{c}=\overline{DC}=\{x_3-x_0, y_3-y_0, z_3-z_0\}. \qquad (A)$$

Построив параллелепипед на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, примем за его основание параллелограмм $ABCL$, построенный на векторах $\bar{a}=\overline{DA}$ и $\bar{b}=\overline{DB}$. За основание тетраэдра примем грань ABC.

Площадь этой грани равна половине площади S параллелограмма $ABCL$:

$$S_1=\frac{1}{2}S. \qquad (B)$$

Так как высота у параллелепипеда и тетраэдра одна и та же, то обозначив ее через h, получим:

$$V_1=\frac{1}{3}S_1h; \qquad (C)$$

$$V=Sh, \qquad (D)$$

где V — объем параллелепипеда.

Из формул (B) — (D) следует, что

$$V_1=\frac{1}{6}V. \qquad (E)$$

Принимая во внимание равенство (A) и формулу (3.48), получим

$$V_1=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0\end{vmatrix}. \qquad (3.50)$$

6. Даны вершины тетраэдра: $A(0, -2, 5)$, $B(6, 6, 0)$, $C(3, -3, 6)$, $D(2, -1, 3)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины C.

Найдем сначала объем тетраэдра $ABCD$. По формуле (3.50) получаем

$$V_1=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}0-2 & -2-(-1) & 5-3\\ 6-2 & 6-(-1) & 0-3\\ 3-2 & -3-(-1) & 6-3\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & -1 & 2\\ 4 & 7 & -3\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 7 & 11\\ 4 & -2 & -1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 11\\ 4 & -1\end{vmatrix}.$$

Так как определитель равен отрицательному числу, то в данном случае перед формулой нужно взять знак минус. Следовательно,

$$V_1=-\frac{1}{6}(-1-4\cdot 11)=\frac{45}{6}=\frac{15}{2}.$$

Искомую величину h определим из формулы $V=\frac{1}{3}Sh$, где S — площадь основания. Определим площадь S:

$$S=\frac{1}{2}|[\bar{a}\bar{b}]|,$$

где $\bar{a}=\overline{DA}=\{-2, -1, 2\}$; $\bar{b}=\overline{DB}=\{4, 7, -3\}$.

Поскольку

$$[\bar a\bar b] = \left\{ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \right\},$$

$$[\bar a\bar b] = \{-11, \; 2, \; -10\},$$

то

$$S = \frac{1}{2}\,|[\bar a\bar b]| = \frac{1}{2}\sqrt{(-11)^2 + 2^2 + (-10)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{225} = \frac{15}{2}.$$

Подставляя в формулу $V = \frac{1}{3}\,Sh$ значения $V = \frac{15}{2}$ и $S = \frac{15}{2}$, получим $h = 3$.

7. Показать, что точки $A(3, -4, 1)$, $B(2, -3, 7)$, $C(1, -4, 3)$, $D(4, -3, 5)$ лежат в одной плоскости.

Если точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_0, y_0, z_0)$ лежат в одной плоскости, то объем тетраэдра $ABCD$ равен нулю. Из формулы (3.50) получаем необходимое и достаточное условие компланарности четырех точек:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.51)$$

Подставляя координаты точек A, B, C, D в определитель, стоящий в правой части формулы (3.50), получаем

$$\begin{vmatrix} 3-4 & -4-(-3) & 1-5 \\ 2-4 & -3-(-3) & 7-5 \\ 1-4 & -4-(-3) & 3-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Доказать тождество $[[\bar a\bar b]\,\bar c] = \bar b\,(\bar a\bar c) - \bar a\,(\bar b\bar c)$.

Векторы $\bar a, \bar b, \bar c$ приведем к общему началу. Введем прямоугольную систему координат следующим образом. Начало координат поместим в точке приложения векторов $\bar a, \bar b, \bar c$ (рис. 3.19). Вектор $\bar i$ направим вдоль вектора $\bar a$, вектор $\bar j$ выберем в плоскости векторов $\bar a, \bar b$, тогда вектор $\bar k$ определится условием, что репер $\bar i, \bar j, \bar k$ — правый. При таком выборе системы координат имеем:

$$\bar a = \{x_1, 0, 0\}; \quad \bar b = \{x_2, y_2, 0\}; \quad \bar c = \{x_3, y_3, z_3\}. \qquad (A)$$

По формуле (3.42) получаем

$$[\bar a\bar b] = \{0, \; 0, \; x_1y_2\} \quad \text{и} \quad [[\bar a\bar b]\,\bar c] = \{-x_1y_2y_3, \; x_1y_2x_3, \; 0\}. \qquad (B)$$

С другой стороны:

$$\bar a\bar c = x_1x_3, \quad \bar b\,(\bar a\bar c) = \{x_1x_2x_3, \; x_1y_2x_3, \; 0\},$$

$$\bar b\bar c = x_2x_3 + y_2y_3, \quad \bar a\,(\bar b\bar c) = \{x_1x_2x_3 + x_1y_2y_3, \; 0, \; 0\},$$

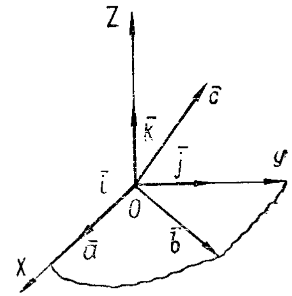

Рис. 3.19

откуда

$$\bar b\,(\bar a\bar c) - \bar a\,(\bar b\bar c) = \{-x_1y_2y_3, \; x_1y_2x_3, \; 0\}. \qquad (C)$$

Сравнивая формулы (B) и (C), получим

$$[[\bar a\bar b]\,\bar c] = \bar b\,(\bar a\bar c) - \bar a\,(\bar b\bar c). \qquad (3.52)$$

9. Доказать тождество

$$[\bar a\,[\bar b\bar c]] = \bar b\,(\bar a\bar c) - \bar c\,(\bar a\bar b). \qquad (3.53)$$

Для доказательства используем свойства векторного произведения и формулу (3.52), полученную в примере 8:

$$[\bar a\,[\bar b\bar c]] = -[[\bar b\bar c]\,\bar a] = -\{\bar c\,(\bar a\bar b) - \bar b\,(\bar a\bar c)\} = \bar b\,(\bar a\bar c) - \bar c\,(\bar a\bar b).$$

Замечание. Результатам, содержащимся в формулах (3.52) и (3.53) можно дать следующую формулировку: двойное векторное произведение равно среднему (по занимаемому месту) вектору, умноженному на скалярное произведение двух крайних, минус другой вектор внутренней скобки, умноженный на скалярное произведение двух остальных.

10. Доказать тождество

$$[\bar a\bar b]\,[\bar c\bar d] = \begin{vmatrix} \bar a\bar c & \bar a\bar d \\ \bar b\bar c & \bar b\bar d \end{vmatrix}. \qquad (3.54)$$

Скалярное произведение векторных произведений $[\bar a\bar b]$ и $[\bar c\bar d]$ можно рассматривать как смешанное произведение трех векторов $\bar a$, $\bar b$ и $[\bar c\bar d]$. Принимая во внимание формулу (3.45), получим

$$[\bar a\bar b]\,[\bar c\bar d] = \bar a\bar b\,[\bar c\bar d] = \bar a\,[\bar b\,[\bar c\bar d]]. \qquad (A)$$

$$[\bar{b}\,[\bar{c}\bar{d}]] = \bar{c}\,(\bar{b}\bar{d}) - \bar{d}\,(\bar{b}\bar{c}),$$

поэтому

$$\bar{a}\,[\bar{b}\,[\bar{c}\bar{d}]] = \bar{a}\,\{\bar{c}\,(\bar{b}\bar{d}) - \bar{d}\,(\bar{b}\bar{c})\} = (\bar{a}\bar{c})\,(\bar{b}\bar{d}) - (\bar{a}\bar{d})\,(\bar{b}\bar{c}) = \begin{vmatrix} \bar{a}\bar{c} & \bar{a}\bar{d} \\ \bar{b}\bar{c} & \bar{b}\bar{d} \end{vmatrix}. \quad (\text{B})$$

Из равенств (А) и (В) получаем соотношение (3.54).

Замечание. В случае, когда $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{d}$, получаем тождество примера 7 § 3.4, или в координатах «тождество Лагранжа» (см. задачу 8 § 3.4).

Задачи

1. Доказать тождество $(\bar{a} + \bar{b})(\bar{b} + \bar{c})(\bar{c} + \bar{a}) = 2\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.
2. Найти смешанное произведение трех векторов: $\bar{a} = \{7, -1, 4\}$, $\bar{b} = \{-4, 5, -6\}$, $\bar{c} = \{6, 8, -3\}$. Какой репер образуют векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$?
3. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = \{3, 4, 6\}$, $\bar{b} = \{4, 1, 1\}$, $\bar{c} = \{2, 0, 3\}$.
4. Показать, что векторы $\bar{a} = \{1, 5, 4\}$, $\bar{b} = \{6, -4, 4\}$, $\bar{c} = \{10, -1, 10\}$ компланарны.
5. Проверить, что точки $A(5, -1, -1)$, $B(4, 2, 2)$, $C(5, 3, 1)$, $D(8, 0, -5)$ лежат в одной плоскости.
6. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(5, 2, 2)$, $B(-8, -2, 5)$, $C(6, 3, 0)$, $D(9, 3, 2)$.
7. Даны вершины тетраэдра $A(4, 5, -3)$, $B(6, 3, 0)$, $C(8, 5, -9)$, $D(-3, -2, -10)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.
8. При каких условиях $[[\bar{a}\bar{b}]\,\bar{c}] = [\bar{a}\,[\bar{b}\bar{c}]]$.
9. Показать, что $[\bar{a}\,[\bar{b}\bar{c}]] + [\bar{b}\,[\bar{c}\bar{a}]] + [\bar{c}\,[\bar{a}\bar{b}]] = 0$.
10. Доказать тождество $[\bar{a}\bar{b}]\,[\bar{c}\bar{d}] + [\bar{a}\bar{c}]\,[\bar{d}\bar{b}] + [\bar{a}\bar{d}]\,[\bar{b}\bar{c}] = 0$.

Ответы

2. 31 Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правый репер. 3. 43 6. 0,5. 7. $h = 11$. 8. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ должны быть коллинеарны или вектор $\bar{b}$ должен быть перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{c}$. 9. Указание. Воспользоваться замечанием к примеру 9. 10. Указание. К каждому слагаемому применить формулу (3.54).

Глава 4. Аналитическая геометрия в пространстве

§ 4.1. Плоскость в пространстве

Плоскость в пространстве относительно прямоугольной системы координат может быть задана различными способами. Например, плоскость однозначно определяется точкой и вектором, ей перпендикулярным; тремя точками; отрезками, отсекаемыми на осях координат и т. п. В зависимости от способа задания плоскости рассматривают различные виды ее уравнения.

4.1.1. Общее уравнение плоскости. Уравнение в отрезках. Составление уравнения плоскости по различным ее заданиям

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной вектору $\bar{n} = \{A, B, C\}$, в векторном виде записывается так:

$$\bar{n}\,(\bar{r} - \bar{r}_0) = 0, \tag{4.1}$$

где $\bar{r}_0$ — радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$; $\bar{r}$ — радиус-вектор произвольной точки $M(x, y, z)$ данной плоскости. Уравнение (4.1) выражает условие перпендикулярности векторов $\bar{n}$ и $\bar{r} - \bar{r}_0 = \overline{M_0M}$ (рис. 4.1), имеющее место для любой точки плоскости. Это уравнение можно записать в виде

$$\bar{n}\bar{r} + D = 0, \text{ где } D = -(\bar{n}\bar{r}_0). \tag{4.2}$$

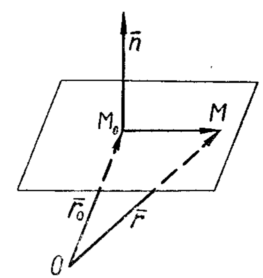

Рис. 4.1

Так как $\bar{n} = \{A, B, C\}$ и $\bar{r} - \bar{r}_0 = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, то в соответствии с формулой (3.33) уравнение (4.1) примет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{4.3}$$

или

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4.4}$$

где

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Уравнение (4.3) называется *уравнением плоскости, проходящей через данную точку*, а уравнение (4.4) — *общим уравнением плоскости*.

Замечание. В уравнениях (4.3) и (4.4) коэффициенты A, B, C одновременно в нуль не обращаются (так как вектор $\overline{n}$ не является нуль-вектором).

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Свободный член равен нулю, т. е. $D = 0$:

$Ax + By + Cz = 0$ (плоскость проходит через начало координат). (4.5).

2. Один из коэффициентов при текущих координатах равен нулю и

а) $D \neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной оси:

$A = 0,\ By + Cz + D = 0$ (плоскость параллельна оси Ox); (4.6)

$B = 0,\ Ax + Cz + D = 0$ (плоскость параллельна оси Oy); (4.7)

$C = 0,\ Ax + By + D = 0$ (плоскость параллельна оси Oz); (4.8)

б) $D = 0$, тогда плоскость проходит через соответствующую координатную ось:

$A = 0,\ By + Cz = 0$ (плоскость проходит через ось Ox); (4.9)

$B = 0,\ Ax + Cz = 0$ (плоскость проходит через ось Oy); (4.10)

$C = 0,\ Ax + By = 0$ (плоскость проходит через ось Oz). (4.11)

3. Два коэффициента при текущих координатах равны нулю и

а) $D \neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости:

$B = 0,\ C = 0,\ Ax + D = 0$ (плоскость параллельна плоскости Oyz); (4.12)

$A = 0,\ C = 0,\ By + D = 0$ (плоскость параллельна плоскости Oxz); (4.13)

$A = 0,\ B = 0,\ Cz + D = 0$ (плоскость параллельна плоскости Oxy); (4.14)

б) $D = 0$, тогда плоскость совпадает с соответствующей координатной плоскостью:

$B = 0,\ C = 0,\ Ax = 0$ или $x = 0$ (уравнение плоскости Oyz); (4.15)

$A = 0,\ C = 0,\ By = 0$ или $y = 0$ (уравнение плоскости Oxz); (4.16)

$A = 0,\ B = 0,\ Cz = 0$ или $z = 0$ (уравнение плоскости Oxy). (4.17)

Если ни один из коэффициентов общего уравнения (4.4) не равен нулю, то оно может быть преобразовано к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (4.18)$$

где $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$ — алгебраические величины направленных отрезков, отсекаемых на осях координат. Уравнение (4.18) называется *уравнением плоскости в отрезках*.

Примеры

1. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{n} = \{2, -1, 4\}$ и проходящей через точку $M_0(5, 2, -3)$. Лежат ли на этой плоскости точки $P(1, 2, -1)$, $Q(4, 5, 1)$ и $R(-6, 2, -3)$?

Подставляя в уравнение (4.3) значения $A = 2$, $B = -1$, $C = 4$, $x_0 = 5$, $y_0 = 2$, $z_0 = -3$, получим

$$2(x-5) - (y-2) + 4(z+3) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, находим искомое уравнение плоскости

$$2x - y + 4z + 4 = 0.$$

Выясним, лежат ли точки P, Q и R на данной плоскости. Подставляя последовательно координаты этих точек в левую часть последнего уравнения, получим:

$$2\cdot 1 - 1\cdot 2 + 4(-1) + 4 = 0;$$
$$2\cdot 4 - 1\cdot 5 + 4\cdot 1 + 4 > 0;$$
$$2(-6) - 1\cdot 2 + 4(-3) + 4 < 0.$$

Следовательно, точка P лежит на данной плоскости. Точки Q и R плоскости не принадлежат. Они находятся по разные стороны от нее (в результате подстановки их координат в уравнение плоскости получены числа разных знаков).

Замечание. Плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ разбивает пространство на два подпространства: для точек одного из них $Ax + By + Cz + D < 0$, для точек другого $Ax + By + Cz + D > 0$.

2. Составить уравнения плоскостей по следующим данным:

1) плоскость перпендикулярна оси Oz и проходит через точку $P(1, -2, 3)$;

2) плоскость проходит через ось Oy и точку $Q(4, 2, -5)$;

3) плоскость параллельна оси Ox и проходит через две точки $R(1, 1, 2)$ и $S(5, 3, -2)$.

1) Плоскость, перпендикулярная оси Oz, параллельна координатной плоскости Oxy и ее уравнение (см. уравнение (4.14)) имеет вид

$$Cz + D = 0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки P, получим $C \cdot 3 + D = 0$, откуда $D = -3C$. Следовательно, $Cz - 3C = 0$, $C(z-3) = 0$, но $C \neq 0$, значит получим уравнение $z - 3 = 0$ или $z = 3$.

2) Так как плоскость проходит через ось Oy, то ее уравнение (см. уравнение (4.10)) ищем в таком виде:

$$Ax + Cz = 0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки Q, получим $A \cdot 4 + C(-5) = 0$, откуда $A = \frac{5}{4}C$. Таким образом, плоскость имеет уравнение $\frac{5}{4}Cx + Cz = 0$ или $C\left(\frac{5}{4}x + z\right) = 0$, но $C \neq 0$, значит $5x + 4z = 0$.

3) Поскольку плоскость параллельна оси Ox, то ее уравнение не содержит члена с x (см. уравнение (4.6)), т. е. имеет вид

$$By + Cz + D = 0.$$

Так как плоскость проходит через две точки R и S, то их координаты удовлетворяют уравнению. Подставляя координаты этих точек в данное уравнение, получим:

$$B + 2C + D = 0;$$
$$3B - 2C + D = 0,$$

откуда $B = -\frac{D}{2}$, $C = -\frac{D}{4}$. Следовательно, уравнение принимает вид

$$-\frac{D}{2}y - \frac{D}{4}z + D = 0 \text{ или } 2y + z - 4 = 0.$$

3. Определить отрезки, отсекаемые плоскостью $2x - 3y + 8z - 4 = 0$ на осях координат.

Переписав уравнение в виде $2x - 3y + 8z = 4$ и разделив обе части его на 4, получим

$$\frac{x}{2} - \frac{3}{4}y + 2z = 1 \text{ или } \frac{x}{2} + \frac{y}{-\frac{4}{3}} + \frac{z}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением (4.18), находим:

$$a = 2,\ b = -\frac{4}{3},\ c = \frac{1}{2}.$$

4. Построить плоскости:

$$1)\ 3x + 4y - 6z - 12 = 0;\ 2)\ z + y - 2 = 0;$$
$$3)\ z + y = 0;\ 4)\ 3y - 7 = 0.$$

1) Определив отрезки $a = 4$, $b = 3$, $c = -2$, отсекаемые на осях координат, получим три точки $A(4, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, -2)$, в которых плоскость пересекает координатные оси (рис. 4.2, *а*).

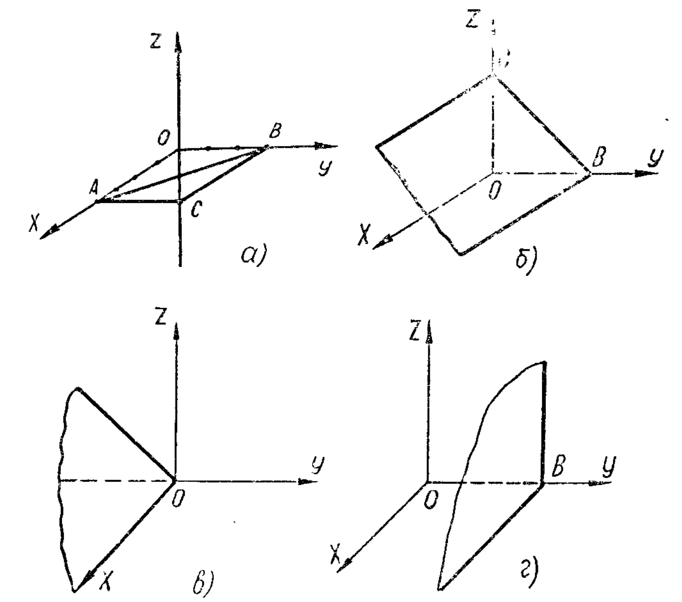

Рис. 4.2

2) Вторая плоскость параллельна оси Ox (см. уравнение (4.6)). Полагая $y = 0$, из уравнения $z + y - 2 = 0$ получим $z = 2$. Следовательно, плоскость пересекает ось Oz в точке $C(0, 0, 2)$. Аналогично находим, что точка $B(0, 2, 0)$ есть точка пересечения с осью Oy (рис. 4.2, *б*).

3) Плоскость $z + y = 0$ проходит через ось Ox (см. уравнение (4.9)). Она делит пополам угол между координатными плоскостями Oxz и Oxy (рис. 4.2, *в*).

4) Плоскость $3y-7=0$ параллельна плоскости Oxz (см. уравнение (4.13). Она отсекает на оси Oy отрезок $b=\frac{7}{3}$ (рис. 4.2, *г*) $\left(\text{значение } b \text{ получено из уравнения } y=\frac{7}{3}\right)$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Написать уравнение для случая $M_1(1, 3, -2)$, $M_2(4, -5, 6)$, $M_3(-3, 1, 2)$.

Пусть M — произвольная точка плоскости (рис. 4.3) и $\bar r_1=\overline{OM_1}$, $\bar r_2=\overline{OM_2}$, $\bar r_3=\overline{OM_3}$, $\bar r=\overline{OM}$ — радиус-векторы точек M_1, M_2, M_3, M.

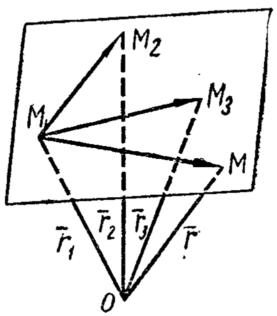

Рис. 4.3

Введем в рассмотрение векторы:

$$\overline{M_1M_2}=\bar r_2-\bar r_1,\ \overline{M_1M_3}=\bar r_3-\bar r_1,\ \overline{M_1M}=\bar r-\bar r_1.$$

Поскольку эти три вектора лежат в одной плоскости, то их смешанное произведение равно нулю, т. е.

$$(\bar r-\bar r_1)(\bar r_2-\bar r_1)(\bar r_3-\bar r_1)=0. \qquad (4.19)$$

Уравнение (4.19) является искомым. В координатной форме оно имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (4.20)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 3, -2)$, $M_2(4, -5, 6)$, $M_3(-3, 1, 2)$ в соответствии с (4.20), запишется так:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 4-1 & -5-3 & 6+2 \\ -3-1 & 1-3 & 2+2 \end{vmatrix}=0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 3 & -8 & 8 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Разлагая последний определитель по элементам первой строки, получим

$$(x-1)\begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}+(z+2)\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}=0$$

или

$$8x+22y+19z-36=0.$$

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ параллельно данному вектору $\bar a=\{a_1, a_2, a_3\}$. Векторы $\bar a$ и $\overline{M_1M_2}$ — неколлинеарны.

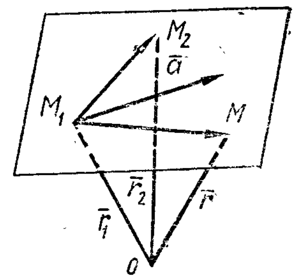

Рис. 4.4

Отложим вектор $\bar a$ от точки M_1 (рис. 4.4). Пусть $M(x, y, z)$ произвольная точка плоскости и $\bar r_1=\overline{OM_1}$, $\bar r_2=\overline{OM_2}$ и $\bar r=\overline{OM}$ — радиус-векторы точек M_1, M_2, M. Введем в рассмотрение векторы

$$\overline{M_1M_2}=\bar r_2-\bar r_1,\ \overline{M_1M}=\bar r-\bar r_1.$$

Векторы $\bar a$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M}$ лежат в одной плоскости, поэтому их смешанное произведение равно нулю, т. е.

$$(\bar r-\bar r_1)(\bar r_2-\bar r_1)\bar a=0. \qquad (4.21)$$

В координатной форме это уравнение примет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (4.22)$$

7. Показать, что плоскости $5x-3y-26z-3=0$, $10x+3y+11z-42=0$, $20x-39y-23z+96=0$,

$$10x+21y+2z+21=0$$

образуют тетраэдр. Лежит ли внутри этого тетраэдра точка $E(1, 1, 2)$?

Четыре плоскости образуют тетраэдр, если каждая тройка их пересекается в одной точке и среди четырех точек пересечения нет совпадающих.

Решая систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 5x - 3y - 26z - 3 &= 0; \\ 10x + 3y + 11z - 42 &= 0; \\ 20x - 39y - 23z + 96 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

получим точку $A(3, 4, 0)$.

Из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 5x - 3y - 26z - 3 &= 0; \\ 10x + 3y + 11z - 42 &= 0; \\ 10x + 21y + 2z + 21 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

получим вторую точку $B(4, -3,1)$.

Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} 5x - 3y - 26z - 3 &= 0; \\ 20x - 39y - 23z + 96 &= 0; \\ 10x + 21y + 2z + 21 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

дает третью точку $C(-4, 1, -1)$.

Наконец, решая систему

$$\left.\begin{aligned} 10x + 3y + 11z - 42 &= 0; \\ 20x - 39y - 23z + 96 &= 0; \\ 10x + 21y + 2z + 21 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

получим четвертую точку $D(-1, -1, 5)$.

Так как полученные точки различны, то данные плоскости образуют тетраэдр, вершинами которого являются точки A, B, C, D.

Выясним теперь, лежит ли точка E внутри тетраэдра $ABCD$. Если E лежит внутри тетраэдра, то она и каждая вершина его располагаются по одну сторону от противоположной грани. Далее, если две точки пространства находятся по одну сторону плоскости, то при подстановке их координат в левую часть уравнения этой плоскости получаем числа одного знака (см. замечание к примеру 1). Рассмотрим точки A и E. Для точки A противоположной является грань, лежащая в плоскости $10x + 21y + 2z + 21 = 0$. Подставляя координаты точек A и E в левую часть уравнения этой плоскости, получим

$$10 \cdot 3 + 21 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 21 > 0, \quad 10 \cdot 1 + 21 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 21 > 0.$$

Следовательно, точки A и E лежат по одну сторону от грани BCD.

Для точки C противоположной будет грань, лежащая в плоскости $10x + 3y + 11z - 42 = 0$. Подставляя координаты точек C и E в левую часть последнего уравнения, получим

$$10(-4) + 3 \cdot 1 + 11(-1) - 42 < 0,$$
$$10 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 11 \cdot 2 - 42 < 0.$$

Таким образом, точки C и E лежат по одну сторону от грани ABD.

Так как

$$20 \cdot 4 - 39(-3) - 23 \cdot 1 + 96 > 0,$$
$$20 \cdot 1 - 39 \cdot 1 - 23 \cdot 2 + 96 > 0,$$

то точки B и E находятся по одну сторону от грани ACD. Аналогичным образом убеждаемся, что точки D и E лежат по одну сторону от грани ABC.

Следовательно, точка E лежит внутри тетраэдра $ABCD$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, -2, 6)$, $M_2(5, -4, -2)$ и отсекающей равные отрезки на осях Ox и Oy.

Уравнение плоскости ищем в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

По условию $a = b$, поэтому уравнение можно записать так:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 1.$$

Подставляя координаты точек M_1 и M_2 в последнее уравнение, получим

$$\frac{1}{a} + \frac{-2}{a} + \frac{6}{c} = 1, \quad \frac{5}{a} + \frac{-4}{a} + \frac{-2}{c} = 1$$

или

$$-\frac{1}{a} + \frac{6}{c} = 1, \quad \frac{1}{a} - \frac{2}{c} = 1.$$

Решая полученную систему уравнений, находим $c = 2$, $a = \frac{1}{2}$.

Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{2} = 1$$

или

$$4x + 4y + z - 2 = 0.$$

Задачи

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, -1, -4)$ и перпендикулярной вектору $\overline{n} = \{3, -6, 1\}$, в векторной и координатной формах.

2. Написать уравнение плоскости в каждом из следующих случаев:

1) плоскость перпендикулярна оси Ox и проходит через точку $P(4, -7, 6)$;

2) плоскость параллельна оси Oy и проходит через точки $Q(1, 2, -1)$, $R(2, -3, -4)$;

3) плоскость проходит через точку $S(6, -7, 5)$ и ось Oz.

3. Определить отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостями:

1) $2x-3y+4z-24=0$; 2) $4x+y-3z-2=0$.

4. Построить плоскости:

1) $2x+3y-4z-12=0$; 2) $2x-3y-6=0$;

3) $4x+5y=0$; 4) $4x+9=0$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4, -3, 5)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки: $L(-2, 4, 1)$, $M(0, 2, -1)$, $N(2, 0, -1)$.

7. Грани тетраэдра лежат в плоскостях: $x+y+z-1=0$; $x-y-1=0$; $x-z-1=0$; $z-2=0$. Лежит ли начало координат внутри этого тетраэдра?

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и параллельной двум неколлинеарным векторам $\bar{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$, $\bar{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$. Написать уравнение в случае, когда $M_1(2, -1, 3)$, $\bar{a}=\{1, -1, 2\}$, $\bar{b}=\{2, 1, -3\}$.

Ответы

1. $\bar{n}\bar{r}-8=0$; $3x-6y+z-8=0$. 2. 1) $x-4=0$; 2) $3x+z-2=0$; 3) $7x+6y=0$. 3. 1) $a=12$, $b=-8$, $c=6$; 2) $a=\frac{1}{2}$, $b=2$, $c=-\frac{2}{3}$. 5. $x+y+z-6=0$. 6. $x+y-2=0$. 7. Не лежит. 8. $(\bar{r}-\bar{r}_1)\bar{a}\bar{b}=0$,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

или $x+7y+3z-4=0$.

4.1.2. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Нормальным уравнением плоскости называется уравнение вида

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \tag{4.23}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную плоскость, а p — его длина.

Общее уравнение плоскости (4.4) умножением на *нормирующий множитель*

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{4.24}$$

знак которого противоположен знаку D, можно привести к нормальному виду (4.23).

Расстояние точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости (4.23) вычисляется по формуле

$$d=|x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p|, \tag{4.25}$$

а до плоскости (4.4) — по формуле

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4.26}$$

Отклонением точки от плоскости называется число $(+d)$, если эта точка и начало координат лежат по разные стороны от данной плоскости, и число $(-d)$, если они лежат по одну сторону от данной плоскости.

Отклонение δ точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от плоскости (4.23) определяется формулой

$$\delta=\pm(x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p), \tag{4.27}$$

а от плоскости (4.4) — формулой

$$\delta=\pm\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{4.28}$$

где знак следует выбрать противоположным знаку D.

Очевидно,

$$d=|\delta|. \tag{4.29}$$

Примеры

9. Найти направляющие косинусы и длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость

$$10x-2y-11z+45=0.$$

Уравнение плоскости приведем к нормальному виду. Найдем сначала нормирующий множитель. В данном случае $A=10$, $B=-2$, $C=-11$, $D=45$. Поскольку $D>0$, то в формуле (4.24) нужно взять знак минус. Получаем

$$\mu=-\frac{1}{\sqrt{10^2+(-2)^2+(-11)^2}}=-\frac{1}{15}.$$

Умножая обе части данного уравнения плоскости на нормирующий множитель, получим нормальное уравнение

$$-\frac{10}{15}x+\frac{2}{15}y+\frac{11}{15}z-\frac{45}{15}=0$$

$$\text{или } -\frac{2}{3}x+\frac{2}{15}y+\frac{11}{15}z-3=0.$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением (4.23), находим:

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3}, \ \cos\beta = \frac{2}{15}, \ \cos\gamma = \frac{11}{15}, \ p = 3.$$

10. Вычислить расстояния точек $M_1(3, 4, -7)$, $M_2(2, 4, 9)$, $M_3(5, 1, 0)$ до плоскости $2x - y + 2z - 9 = 0$.

По формуле (4.26) получаем:

$$d_1 = \frac{|2\cdot 3 - 4 + 2(-7) - 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-21|}{3} = 7;$$

$$d_2 = \frac{|2\cdot 2 - 4 + 2\cdot 9 - 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|9|}{3} = 3, \ d_3 = \frac{|2\cdot 5 - 1 + 2\cdot 0 - 9|}{3} = 0.$$

Следовательно, точка M_3 лежит на данной плоскости.

11. Дан тетраэдр с вершинами $A(2, -1, 3)$, $B(1, -3, 5)$, $C(6, 2, 5)$, $D(3, -2, -5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Искомая высота равна расстоянию от точки D до плоскости, проходящей через точки A, B, C. Составим уравнение этой плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1-2 & -3+1 & 5-3 \\ 6-2 & 2+1 & 5-3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

или $2x - 2y - z - 3 = 0$.

По формуле (4.26) находим расстояние точки D до плоскости:

$$d = \frac{|2\cdot 3 - 2(-2) - (-5) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|12|}{3} = 4.$$

12. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точки $A(9, -2, 2)$ и от плоскости $3x - 6y + 2z - 3 = 0$.

Пусть $M(x, 0, 0)$ — искомая точка ($y = 0$, $z = 0$, так как точка лежит на оси Ox). Находим расстояние этой точки до данной плоскости и точки A:

$$d_1 = \frac{|3\cdot x - 6\cdot 0 + 2\cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{|3x - 3|}{7};$$

$$d_2 = MA = \sqrt{(9 - x)^2 + (-2)^2 + 2^2}.$$

В соответствии с условием имеем $d_1 = d_2$, поэтому

$$\sqrt{(9 - x)^2 + 8} = \frac{|3x - 3|}{7} \quad \text{или} \quad 7\sqrt{x^2 - 18x + 89} = 3|x - 1|.$$

Возводя в квадрат обе части последнего уравнения и приводя подобные члены, получим

$$5x^2 - 108x + 544 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим $x_1 = 8$, $x_2 = 13{,}6$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют две точки:

$$M_1(8, 0, 0) \text{ и } M_2(13{,}6;\ 0;\ 0).$$

13. На оси Oz найти точку, равноудаленную от двух плоскостей:

$$2x - 2y + z - 3 = 0; \ x + 2y - 2z + 12 = 0.$$

Пусть $M(0, 0, z)$ — искомая точка. Расстояния этой точки до данных плоскостей определяются соответственно формулами:

$$d_1 = \frac{|2\cdot 0 - 2\cdot 0 + z - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|z - 3|}{3};$$

$$d_2 = \frac{|1\cdot 0 + 2\cdot 0 - 2z + 12|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2z + 12|}{3}.$$

По условию $d_1 = d_2$, поэтому

$$\frac{|z - 3|}{3} = \frac{|-2z + 12|}{3}, \text{ откуда } z - 3 = \pm(-2z + 12).$$

Решая уравнения

$$z - 3 = -2z + 12 \text{ и } z - 3 = -(-2z + 12),$$

получим $z_1 = 5$, $z_2 = 9$. Таким образом, условию удовлетворяют две точки $M_1(0, 0, 5)$ и $M_2(0, 0, 9)$.

14. Составить уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между пересекающимися плоскостями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Каждая из искомых плоскостей является геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных плоскостей. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка искомой плоскости, тогда:

$$d_1 = \frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}; \quad d_2 = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Так как по условию $d_1 = d_2$, то

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

откуда получаем уравнения искомых плоскостей:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности, если даны плоскости $5x - 10y + 10z - 6 = 0$, $10x + 2y - 11z + 4 = 0$, то уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между ними, запишутся следующим образом:

$$\frac{5x - 10y + 10z - 6}{\sqrt{5^2 + (-10)^2 + 10^2}} = \pm\frac{10x + 2y - 11z + 4}{\sqrt{10^2 + 2^2 + (-11)^2}}.$$

Следовательно,

$$5x - 10y + 10z - 6 = \pm(10x + 2y - 11z + 4),$$

откуда

1) $5x - 10y + 10z - 6 = (10x + 2y - 11z + 4)$
или $5x + 12y - 21z + 10 = 0$;

2) $5x - 10y + 10z - 6 = -(10x + 2y - 11z + 4)$
или $15x - 8y - z - 2 = 0$.

15. Определить, лежат ли точка $M(1, 1, -9)$ и начало координат по одну или по разные стороны от плоскости $2x - 2y + z + 12 = 0$.

Уравнение плоскости приведем к нормальному виду. Так как $D > 0$, то в формуле (4.24) нужно взять знак минус, т. е.

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{1}{3}.$$

Умножая обе части уравнения на нормирующий множитель, получим

$$-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 4 = 0.$$

Подставляя координаты точки M в последнее уравнение, находим отклонение δ

$$\delta = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(-9) - 4 < 0.$$

Поскольку $\delta < 0$, то точка M и начало координат лежат по одну сторону от данной плоскости.

16. Определить, лежат ли точки $M(1, -1, 2)$ и $N(-2, 1, -3)$ в одном, в смежных или вертикальных углах, образованных при пересечении двух плоскостей:

1) $3x - 2y + 4z - 10 = 0$, $x + 3y - 5z + 6 = 0$;
2) $2x + 4y - z - 5 = 0$, $x - y - z - 3 = 0$;
3) $5x - 6y + 2z + 7 = 0$, $x + y - 3z + 8 = 0$.

Если две точки лежат в одном двугранном углу, образованном двумя плоскостями, то они расположены по одну сторону от каждой плоскости.

Если две точки находятся в смежных углах, то они расположены по разные стороны от одной из них и по одну сторону от другой.

Если точки находятся в вертикальных углах, то они расположены по разные стороны от каждой из данных плоскостей. Для каждого из этих трех утверждений обратное также верно.

1) Найдем отклонения точек M и N от первой плоскости

$$\delta_1 = \frac{3 \cdot 1 - 2(-1) + 4 \cdot 2 - 10}{\sqrt{9 + 4 + 16}} > 0;$$

$$\delta_2 = \frac{3(-2) - 2 \cdot 1 + 4(-3) - 10}{\sqrt{9 + 4 + 16}} < 0$$

и от второй плоскости

$$\delta_1' = \frac{1 + 3(-1) - 5 \cdot 2 + 6}{-\sqrt{1 + 9 + 25}} > 0;$$

$$\delta_2' = \frac{-2 + 3 \cdot 1 - 5(-3) + 6}{-\sqrt{1 + 9 + 25}} < 0.$$

Так как δ_1 и δ_2 разных знаков, то точки M и N расположены по разные стороны от первой плоскости, по той же причине они находятся по разные стороны и от второй плоскости. Следовательно, точки M и N лежат в вертикальных углах.

2) Находим отклонения точек M и N от первой плоскости

$$\delta_1 = \frac{2 \cdot 1 + 4(-1) - 2 - 5}{\sqrt{4 + 16 + 1}} < 0; \quad \delta_2 = \frac{2(-2) + 4 \cdot 1 - (-3) - 5}{\sqrt{4 + 16 + 1}} < 0$$

и от второй плоскости

$$\delta_1' = \frac{1 - (-1) - 2 - 3}{\sqrt{1 + 1 + 1}} < 0; \quad \delta_2' = \frac{-2 - 1 - (-3) - 3}{\sqrt{1 + 1 + 1}} < 0.$$

Следовательно, точки M и N находятся в одном углу.

3) Поскольку

$$\delta_1 = \frac{5 \cdot 1 - 6(-1) + 2 \cdot 2 + 7}{-\sqrt{25 + 36 + 4}} < 0;$$

$$\delta_2 = \frac{5(-2) - 6 \cdot 1 + 2(-3) + 7}{-\sqrt{25 + 36 + 4}} > 0;$$

$$\delta_1' = \frac{1 + (-1) - 3 \cdot 2 + 8}{-\sqrt{1 + 1 + 9}} < 0; \quad \delta_2' = \frac{1(-2) + 1 - 3(-3) + 8}{-\sqrt{1 + 1 + 9}} < 0,$$

то точки M и N лежат по разные стороны от первой плоскости и по одну сторону от второй. Следовательно, они расположены в смежных двугранных углах.

Задачи

9. Определить, какие из уравнений являются нормальными:

1) $\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0$; 2) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - 2 = 0$; 3) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 2 = 0$.

10. Найти направляющие косинусы и длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $2x - 3y - 6z - 14 = 0$.

11. Определить расстояния точек $P(4, 3, -2)$, $Q(0, 6, 0)$ и $R(15, 0, 0)$ до плоскости $2x + 10y - 11z - 15 = 0$.

12. Дан тетраэдр с вершинами $A(3, 4, 0)$, $B(4, -3, 1)$, $C(-4, 1, -1)$, $D(-1, -1, 5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D.

13. На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух плоскостей

$$x + y - z + 1 = 0, \quad x - y + z - 5 = 0.$$

14. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $P(5, 2, 0)$ и удаленной от точки $Q(6, 1, -1)$ на расстояние 1 и от точки $R(0, 5, 4)$ на расстояние 3.

15. Составить уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $x + 2y - 2z - 3 = 0$, $2x - y + 2z - 9 = 0$.

16. Доказать, что плоскость $5x - 3y + 4z - 2 = 0$ пересекает отрезок, соединяющий начало координат с точкой $M(1, 2, 3)$.

Ответы

9. Уравнение 3. *Указание.* Если уравнение является нормальным, то выполняются два условия: 1) свободный член отрицателен; 2) сумма квадратов коэффициентов прн текущих координатах равна единице. **10.** $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = -\frac{3}{7}$, $\cos\gamma = -\frac{6}{7}$; $p = 2$. **11.** $d_1 = 3$, $d_2 = 3$, $d_3 = 1$. **12.** $h = \frac{135}{\sqrt{710}}$. **13.** $M(0, -3, 0)$. **14.** $x + 2y + 2z - 9 = 0$, $y - 2 = 0$. **15.** $x - 3y + 4z - 6 = 0$, $3x + y - 12 = 0$. **16.** *Указание.* Показать, что $\delta_1 < 0$, $\delta_2 > 0$.

4.1.3. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Угол между двумя плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{4.30}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{4.31}$$

определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{4.32}$$

Необходимое и достаточное условие параллельности плоскостей (4.30) и (4.31):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \tag{4.33}$$

или $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$, $D_2 \neq \lambda D_1$

(коэффициенты при текущих координатах пропорциональны).

Необходимое и достаточное условие совпадения плоскостей (4.30) и (4.31)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \tag{4.34}$$

(все соответствующие коэффициенты пропорциональны).

Условие перпендикулярности плоскостей (4.30) и (4.31):

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{4.35}$$

Примеры

17. Найти угол между двумя плоскостями

$$11x - 8y - 7z + 5 = 0, \quad 7x + 2y - 8z - 3 = 0.$$

Подставляя в формулу (4.32) значения $A_1 = 11$, $B_1 = -8$, $C_1 = -7$, $A_2 = 7$, $B_2 = 2$, $C_2 = -8$, получим

$$\cos\varphi = \frac{11 \cdot 7 + (-8)2 + (-7)(-8)}{\sqrt{121 + 64 + 49}\,\sqrt{49 + 4 + 64}} = \frac{117}{\sqrt{234}\,\sqrt{117}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = 45°$.

Замечание. Формула (4.32) определяет один из двух неравных между собой углов, сумма которых равна 180°. Если уравнение второй плоскости написать в виде $-7x - 2y + 8z + 3 = 0$, то по формуле (4.32) получим $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $\varphi = 135°$.

18. Через точку $N(2, -1, -3)$ провести плоскость, параллельную плоскости $5x - 4y + 6z - 3 = 0$.

В соответствии с условием (4.33) уравнение плоскости ищем в виде

$$5\lambda x - 4\lambda y + 6\lambda z + D = 0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки N, находим

$$5\lambda \cdot 2 - 4\lambda(-1) + 6\lambda(-3) + D = 0 \text{ или } -4\lambda = -D,$$

откуда $D = 4\lambda$. Подставляя значение D в искомое уравнение и полагая $\lambda = 1$, получим

$$5x - 4y + 6z + 4 = 0.$$

Замечание. Уравнение плоскости, параллельной плоскости $Ax + By + Cz + D_1 = 0$, можно искать в виде $Ax + By + Cz + D = 0$.

19. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $4x - 4y + 2z - 3 = 0$ и отстоящей от нее на 5 единиц.

Уравнение искомой плоскости запишем так:

$$4x - 4y + 2z + D = 0.$$

Найдем расстояние между плоскостями, для чего возьмем произвольную точку первой плоскости и определим ее расстояние до второй. Положив $x=0$, $y=0$, из уравнения $4x-4y+2z-3=0$ найдем $z=\frac{3}{2}$; получим точку $M\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$. Расстояние этой точки до плоскости $4x-4y+2z+D=0$ определяется формулой

$$d=\left|\frac{4\cdot 0-4\cdot 0+2\cdot\frac{3}{2}+D}{\sqrt{16+16+4}}\right|=\frac{|3+D|}{6}.$$

Так как по условию $d=5$, то для определения D имеем уравнение

$$5=\frac{|3+D|}{6} \text{ или } 30=\pm(3+D),$$

откуда

$$D_1=27, \; D_2=-33.$$

Подставляя в искомое уравнение найденные значения D получим две плоскости:

$$4x-4y+2z+27=0 \text{ и } 4x-4y+2z-33=0.$$

20. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $x+2y-2z+7=0$ и удаленной от точки $M(4, 3, -2)$ на расстояние $d=7$.

Уравнение искомой плоскости ищем в виде

$$x+2y-2z+D=0.$$

Расстояние точки M до этой плоскости выразится формулой

$$d=\frac{|4+2\cdot 3-2(-2)+D|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|14+D|}{3}.$$

Так как по условию $d=7$, то для определения D получим уравнение

$$7=\frac{|14+D|}{3} \text{ или } 21=\pm(14+D),$$

откуда $D_1=7$, $D_2=-35$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две плоскости

$$x+2y-2z+7=0, \; x+2y-2z-35=0.$$

Первая плоскость совпадает с данной плоскостью.

21. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную плоскости $5x-2y+5z-10=0$ и образующую с плоскостью $x-4y-8z+12=0$ угол $\varphi=45°$.

Поскольку искомая плоскость проходит через начало координат, то ее уравнение имеет вид

$$Ax+By+Cz=0.$$

Коэффициенты A, B, C одновременно в нуль не обращаются (это координаты вектора, перпендикулярного плоскости). Предполагая, что $A\neq 0$, уравнение перепишем в виде

$$x+by+cz=0,$$

где

$$b=\frac{B}{A}, \; c=\frac{C}{A}.$$

Условие перпендикулярности (4.35) для плоскостей $x+by+cz=0$ и $5x-2y+5z-10=0$ запишется так:

$$5-2b+5c=0. \tag{A}$$

Угол между плоскостями $x-4y-8z+12=0$ и $x+by+cz=0$ определится формулой (4.32):

$$\cos\varphi=\frac{1-4b-8c}{\sqrt{1+16+64}\sqrt{1+b^2+c^2}}.$$

Так как $\varphi=45°$, то для определения коэффициентов b и c имеем второе уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1-4b-8c}{\sqrt{81}\sqrt{1+b^2+c^2}}. \tag{B}$$

Решим систему уравнений (A) и (B). Определяя b из уравнения (A), подставляя полученное выражение $b=\frac{5(1+c)}{2}$ в уравнение (B) и освобождаясь от радикалов, находим

$$81\left[1+\frac{25(1+c)^2}{4}+c^2\right]=2\left[1-10(1+c)-8c\right]^2$$

или

$$\frac{81}{4}(29c^2+50c+29)=2\cdot 9^2(-1-2c)^2,$$

откуда

$$29c^2+50c+29=8+32c+32c^2.$$

Приводя подобные члены и сокращая на 3, получим квадратное уравнение

$$c^2-6c-7=0,$$

его корни $c_1=7$, $c_2=-1$. По формуле $b=\frac{5(1+c)}{2}$ находим $b_1=20$, $b_2=0$.

Следовательно, условию задачи удовлетворяют две плоскости: $x+20y+7z=0$ и $x-z=0$.

Замечание. При решении задачи был исключен случай $A=0$. Это исключение оправданно, так как предположение $A=0$ приводит к несовместной системе уравнений относительно B и C.

22. Составить уравнение плоскости, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно к двум пересекающимся плоскостям $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Написать уравнение плоскости для случая, когда $M(2, -3, 1)$ и плоскости заданы уравнениями $3x - y + 2z - 1 = 0$, $4x + 5y - 3z + 2 = 0$.

В общем уравнении плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ коэффициенты при x, y и z — координаты вектора $\bar{n} = \{A, B, C\}$, перпендикулярного к плоскости.

Так как вектор $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ перпендикулярен плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, а вектор $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ перпендикулярен плоскости $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то задача сводится к составлению уравнения плоскости, проходящей через данную точку и параллельной двум неколлинеарным векторам (см. задачу 8).

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости, $\bar{r} = \overline{OM}$ ее радиус-вектор, $\bar{r}_0 = \overline{OM}_0$ — радиус-вектор данной точки M_0, тогда векторы $\bar{r} - \bar{r}_0$, $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ компланарны и их смешанное произведение равно нулю:

$$(\bar{r} - \bar{r}_0)\,\bar{n}_1\,\bar{n}_2 = 0.$$

Это уравнение и является искомым векторным уравнением плоскости. В координатах оно принимает вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Для данного конкретного случая, когда $x_0 = 2$, $y_0 = -3$, $z_0 = 1$, $A_1 = 3$, $B_1 = -1$, $C_1 = 2$, $A_2 = 4$, $B_2 = 5$, $C_2 = -3$, последнее уравнение запишется так:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y + 3 & z - 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$7x - 17y - 19z - 46 = 0.$$

23. Доказать, что параллелепипед, грани которого лежат в плоскостях $7x - 11y + 9z - 14 = 0$, $4x + 5y + 3z + 6 = 0$, $78x - 15y - 79z + 3 = 0$, является прямоугольным.

Составляем выражение $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$ для каждого случая:

1) $7 \cdot 4 + (-11)5 + 9 \cdot 3 = 0$; 2) $4 \cdot 78 + 5(-15) + 3(-79) = 0$; 3) $7 \cdot 78 + (-11)(-15) + 9(-79) = 0$.

Так как выполняется условие (4.35) для каждой пары плоскостей, то плоскости попарно перпендикулярны. Это и означает, что параллелепипед является прямоугольным.

17. Найти угол между двумя плоскостями:

1) $4x - 10y + z - 3 = 0$, $-11x + 8y + 7z + 5 = 0$;
2) $2x + 6y + 5z - 9 = 0$, $4x - 3y + 2z + 7 = 0$;
3) $x + 2y - 3z - 6 = 0$, $3x + 6y - 9z - 2 = 0$;
4) $2x - 3y + 6z + 8 = 0$, $x + 2y + 2z - 4 = 0$.

18. Составить уравнение плоскости, проведенной через точку $K(1, 5, 2)$ параллельно плоскости, проходящей через три точки $L(4, -3, 1)$, $M(3, 4, 0)$, $N(-1, -1, 5)$.

19. Дана вершина параллелепипеда $P(3, 2, 4)$ и уравнения плоскостей, в которых лежат его три непараллельные грани:

$$x + 2y + 3z - 12 = 0,\ 3x - y + 2z - 6 = 0,$$
$$2x + 3y - z - 18 = 0.$$

Написать уравнения плоскостей, в которых лежат три другие грани.

20. Составить уравнение плоскости, проведенной через точки $P(1, -1, 2)$, $Q(3, 1, -2)$ перпендикулярно к плоскости $4x - 5y + 3z - 2 = 0$.

21. Написать уравнение плоскости, проведенной через точку $P(2, 1, -3)$ перпендикулярно к двум плоскостям:

$$2x - 3y + z - 5 = 0; \quad x + 4y - 2z + 3 = 0.$$

22. Найти плоскость, параллельную плоскости $x - 2y + 2z - 7 = 0$ и отстоящую от точки $P(4, 1, -3)$ на расстоянии $d = 2$.

23. Составить уравнение плоскости, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Ответы

17. $\varphi_1 = 135°$, $\varphi_2 = 90°$, $\varphi_3 = 0°$, $\varphi_4 = 78°28'$. **18.** $10x + 3y + 11z - 47 = 0$. **19.** $x + 2y + 3z - 19 = 0$, $3x - y + 2z - 15 = 0$, $2x + 3y - z - 8 = 0$. **20.** $7x + 11y + 9z - 14 = 0$. **21.** $2x + 5y + 11z + 24 = 0$. **22.** $x - 2y + 2z + 10 = 0$, $x - 2y + 2z - 2 = 0$.
23. $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$

§ 4. 2. Прямая в пространстве

Прямая в пространстве относительно прямоугольной декартовой системы координат может быть задана различными способами. Например, прямая однозначно определяется точкой и параллельным ей вектором, двумя точками и т. п. В зависимости от способа задания прямой рассматривают различные виды ее уравнений.

4. 2. 1. Параметрические уравнения прямой. Канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\bar{a}=\{l, m, n\}$, в векторном виде записывается так

$$\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{a}t, \qquad (4.36)$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор любой точки $M(x, y, z)$ прямой (рис. 4. 5), $\bar{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0, t — параметр, принимающий всевозможные действительные значения. Вектор $\bar{a}$ называется

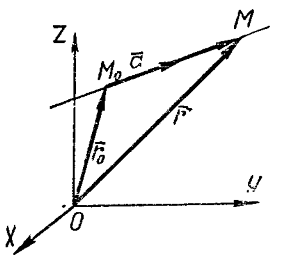

Рис. 4.5

направляющим вектором прямой. Его координаты пропорциональны *направляющим косинусам* прямой.

Уравнение (4. 36) в координатах примет вид:

$$x=x_0+lt;\ y=y_0+mt;\ z=z_0+nt. \qquad (4.37)$$

Уравнения (4. 37) называются *параметрическими* уравнениями прямой. Если параметр t рассматривать как время, а уравнения (4. 37) как уравнения движения точки M, то эти уравнения будут определять прямолинейное и равномерное движение точки M. При $t=0$ точка M совпадает с M_0. Скорость точки M постоянна и определяется формулой

$$v=\sqrt{l^2+m^2+n^2}. \qquad (4.38)$$

Исключая из уравнений (4. 37) параметр t, получим *канонические* уравнения прямой

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (4.39)$$

Уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (4.40)$$

Примеры

1. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1, -2, 3)$ и параллельной вектору $\bar{a}=\{2, 4, -5\}$. Найти точку P прямой, которой соответствует значение $t=2$.

Пользуемся формулами (4. 37). Так как в данном случае $x_0=1$, $y_0=-2$, $z_0=3$, $l=2$, $m=4$, $n=-5$, то параметрические уравнения прямой имеют вид

$$x=1+2t,\ y=-2+4t,\ z=3-5t.$$

При $t=2$ получаем

$$x=1+2\cdot 2=5;\ y=-2+4\cdot 2=6;\ z=3-5\cdot 2=-7.$$

На прямой фиксирована точка $P(5, 6, -7)$.

2. Составить параметрические уравнения прямых, проведенных через точку $M_0(5, -1, -4)$ в каждом из следующих случаев:

1) прямая параллельна прямой $x=3+6t$, $y=2-4t$, $z=7-t$;

2) прямая параллельна оси Ox;

3) прямая перпендикулярна плоскости $x+2y+3z-5=0$.

1) Так как прямая параллельна прямой $x=3+6t$, $y=2-4t$, $z=7-t$, то они имеют один и тот же направляющий вектор $\bar{a}=\{6, -4, -1\}$. Подставляя значения $x_0=5$, $y_0=-1$, $z_0=-4$ и координаты вектора $\bar{a}$ в формулы (4. 37), получим параметрические уравнения прямой

$$x=5+6t,\ y=-1-4t,\ z=-4-t.$$

2) Вектор, параллельный оси Ox, имеет координаты $y=0$, $z=0$ (координата x равна длине вектора, взятой с соответствующим знаком). В качестве направляющего вектора можно взять вектор $\bar{a}=\{1, 0, 0\}$, совпадающий с ортом $\bar{i}$, поэтому $x=5+t$, $y=-1$, $z=-4$.

3) Поскольку вектор $\bar{n}=\{1, 2, 3\}$ перпендикулярен плоскости $x+2y+3z-5=0$, то в силу условия он будет параллелен прямой. Следовательно, параметрические уравнения прямой примут вид

$$x=5+t,\ y=-1+2t,\ z=-4+3t.$$

3. Написать параметрические уравнения прямой, проведенной через начало координат перпендикулярно плоскости $4x-3y+5z-7=0$.

Вектор $\bar{n}=\{4, -3, 5\}$ нормали к плоскости является направляющим вектором прямой. Так как прямая проходит через начало координат, то $x_0=y_0=z_0=0$. Таким образом,

$$x=4t,\ y=-3t,\ z=5t.$$

4. Составить канонические уравнения прямой, проведенной через точку $M_0(6, 2, -3)$ параллельно вектору $\bar{a} = \{4, -5, 7\}$. Лежат ли на этой прямой точки $P(2, 7, -10)$, $Q(10, -3, 5)$, $R(3, 4, 7)$?

Применяем формулы (4. 39). Так как $x_0 = 6$, $y_0 = 2$, $z_0 = -3$, $l = 4$, $m = -5$, $n = 7$, то канонические уравнения примут вид

$$\frac{x-6}{4} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+3}{7}.$$

Подставляя в эти уравнения координаты точек P, Q, R, соответственно находим

$$\frac{2-6}{4} = \frac{7-2}{-5} = \frac{-10+3}{7} = -1, \quad \frac{10-6}{4} = \frac{-3-2}{-5} \neq \frac{5+3}{7},$$

$$\frac{3-6}{4} \neq \frac{4-2}{-5} \neq \frac{7+3}{7}.$$

Следовательно, точка P лежит на прямой, а точки Q и R на прямой не лежат.

5. Составить канонические уравнения диагоналей параллелограмма, три вершины которого находятся в точках $A(2, 4, 6)$, $B(-3, 5, 4)$, $C(8, -6, 2)$.

Задача сводится к составлению уравнения прямой, проходящей через две точки. Напишем уравнения диагонали AC. По формуле (4. 40) получаем

$$\frac{x-2}{8-2} = \frac{y-4}{-6-4} = \frac{z-6}{2-6}, \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y-4}{-10} = \frac{z-6}{-4} \text{ или}$$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-6}{-2}.$$

Поскольку точка D не дана, то уравнения диагонали BD напишем как уравнения прямой, проходящей через точки B и S, где S — точка пересечения диагоналей. Так как S является серединой отрезка AC, то ее координаты равны полусуммам соответствующих координат концов, т. е. $S(5, -1, 4)$. Уравнения диагонали BD принимают вид

$$\frac{x+3}{5+3} = \frac{y-5}{-1-5} = \frac{z-4}{4-4} \text{ или } \frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-3}, \ z-4=0.$$

Замечание. Если при подстановке координат точек в уравнения (4 40) один или два знаменателя обращаются в нуль, то нужно приравнять нулю соответствующий числитель. (Все три знаменателя не могут быть равны нулю одновременно, так как точки M_1 и M_2 различны.)

6. Даны вершины треугольника $P(6, -2, 2)$, $Q(4, -5, -4)$, $R(-2, -17, 0)$. Составить параметрические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине Q.

Найдем вначале точку N пересечения биссектрисы со стороной PR. Из элементарной геометрии известно, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Так как

$$QP = \sqrt{(4-6)^2 + (-2+5)^2 + (2+4)^2} = 7;$$

$$QR = \sqrt{(-2-4)^2 + (-17+5)^2 + 4^2} = 14,$$

то $l = PN : NR = QP : QR = 7 : 14$, т. е. $l = \frac{1}{2}$.

По формулам (3. 28) находим точку N:

$$x = \frac{6 + \frac{1}{2}(-2)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{10}{3}; \quad y = \frac{-2 + \frac{1}{2}(-17)}{1 + \frac{1}{2}} = -7;$$

$$z = \frac{2 + \frac{1}{2}\cdot 0}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}; \quad N\left(\frac{10}{3}, -7, \frac{4}{3}\right).$$

Напишем канонические уравнения прямой, проходящей через точки Q и N:

$$\frac{x-4}{\frac{10}{3}-4} = \frac{y+5}{-7+5} = \frac{z+4}{\frac{4}{3}+4} \text{ или } \frac{x-4}{-\frac{2}{3}} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+4}{\frac{16}{3}}.$$

Умножая все знаменатели на $\frac{3}{2}$, получим канонические уравнения биссектрисы внутреннего угла при вершине Q:

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+4}{8}.$$

Обозначая буквой t равные отношения и выражая x, y, z через t получим параметрические уравнения той же биссектрисы:

$$x = 4 - t, \quad y = -5 - 3t, \quad z = -4 + 8t.$$

7. Даны уравнения движения точки $M(x, y, z)$: $x = 3 + 6t$, $y = 5 - 2t$, $z = -8 + 3t$. Определить ее скорость.

В соответствии с формулой (4. 38) получаем

$$v = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7.$$

8. Даны уравнения движения точки $M(x, y, z)$: $x = 2 + 2t$, $y = -2 - 2t$, $z = 1 + t$. Вычислить расстояние, пройденное точкой M за промежуток времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = 6$.

Определим начало и конец прямолинейного пути точки M. При $t = 1$ находим

$$x = 2 + 2\cdot 1 = 4, \quad y = -2 - 2\cdot 1 = -4, \quad z = 1 + 1 = 2.$$

Итак, получили точку $M_1(4, -4, 2)$. При $t = 6$ получаем вторую точку $M_2(14, -14, 7)$.

Пройденное расстояние равно длине отрезка M_1M_2:

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(14-4)^2 + (-14+4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{225} = 15.$$

9. Точка $M(x, y, z)$ движется равномерно и прямолинейно из начального положения $M_0(2, 12, -5)$ в направлении, противоположном вектору $\overline{b} = \{-1, 2, -2\}$ со скоростью $v = 12$. Составить уравнения движения точки M и определить точку, с которой она совпадает в момент времени $t = 4$.

Определим сначала координаты направляющего вектора $\overline{a}$. По условию $\overline{a} = -\lambda\overline{b}$, $\lambda > 0$, т. е. $\overline{a} = \{\lambda, -2\lambda, 2\lambda\}$. Далее, $|\overline{a}| = v = 12$, поэтому $\sqrt{\lambda^2 + (-2\lambda)^2 + (2\lambda)^2} = 12$ или $3\lambda = 12$, откуда $\lambda = 4$. Следовательно, $\overline{a} = \{4, -8, 8\}$. Уравнения движения точки M примут вид

$$x = 2 + 4t,\ y = 12 - 8t,\ z = -5 + 8t.$$

Полагая в этих уравнениях $t = 4$, получим точку $N(18, -20, 27)$.

Задачи

1. Составить параметрические уравнения прямых, проведенных через точку $M_0(5, -3\ 8)$ в каждом из следующих случаев:

1) прямая параллельна прямой $x = 1 - 3t$, $y = 4 + 2t$, $z = 5 - 6t$;

2) прямая параллельна оси Oy;

3) прямая параллельна оси Oz;

4) прямая перпендикулярна плоскости $4x + 7y - 8z - 3 = 0$.

2. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(5, -3, \sqrt{2})$ и параллельной вектору, образующему с координатными ортами углы $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Лежат ли на этой прямой точки $P(1, -2, 3)$, $Q(4, -4, 0)$?

3. Составить канонические уравнения сторон треугольника с вершинами $P(2, -4, 3)$, $Q(4, 6, 7)$, $R(5, 2, -8)$ и уравнения его медианы, проведенной из вершины R.

4. Дан треугольник с вершинами $A(4, 1, -1)$, $B(7, 4, -5)$, $C(-5, 13, 8)$. Написать параметрические уравнения биссектрисы внешнего угла при вершине A.

5. Составить уравнения траектории точки $M(x, y, z)$, движущейся прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\overline{b} = \{2, -2, 1\}$ из начального положения $M_0(4, 6, -7)$ со скоростью $v = 15$.

6. Написать уравнения траектории точки $M(x, y, z)$, которая, двигаясь прямолинейно и равномерно, прошла расстояние от точки $M_1(1, 7, -5)$ до точки $M_2(21, -48, 45)$ за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 5$.

Ответы

1. 1) $x = 5 - 3t$, $y = -3 + 2t$, $z = 8 - 6t$; 2) $x = 5$, $y = -3 + t$, $z = 8$; 3) $x = 5$, $y = -3$, $z = 8 + t$; 4) $x = 5 + 4t$, $y = -3 + 7t$, $z = 8 - 8t$.
2. $\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. На прямой лежит точка Q.
3. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-3}{2}$, $\frac{x-4}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-7}{-15}$, $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-3}{-11}$; $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+8}{13}$. **4.** $\frac{x-4}{6} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{7}$. **5.** $x = 4 + 10t$, $y = 6 - 10t$, $z = -7 + 5t$. **6.** $x = 1 + 4t$, $y = 7 - 11t$, $z = -5 + 10t$.

4. 2. 2. Прямая как линия пересечения двух плоскостей. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Прямая как линия пересечения двух плоскостей определяется совместным заданием двух уравнений первой степени:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.\ 41)$$

при условии, что коэффициенты A_1, B_1, C_1 первого не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 второго.

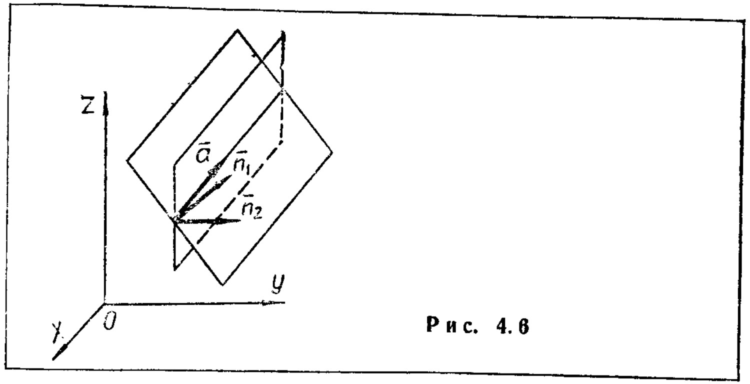

Рис. 4.6

За направляющий вектор прямой (4. 41) можно принять векторное произведение $\overline{a} = [\overline{n}_1\overline{n}_2]$, где $\overline{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\overline{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ — векторы нормалей к соответствующим плоскостям (рис. 4. 6):

$$\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \text{ или } \overline{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}. \qquad (4.\ 42)$$

6*

Канонические уравнения прямой (4. 41) имеют вид

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 C_1 \\ A_2 C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}}, \qquad (4.\ 43)$$

а ее параметрические уравнения запишутся так:

$$x = x_0 + \begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix} t; \quad y = y_0 - \begin{vmatrix} A_1 C_1 \\ A_2 C_2 \end{vmatrix} t; \quad z = z_0 + \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} t. \qquad (4.\ 44)$$

Даны две прямые своими параметрическими уравнениями:

$$x = x_1 + l_1 t, \quad y = y_1 + m_1 t, \quad z = z_1 + n_1 t; \qquad (4.\ 45)$$

$$x = x_2 + l_2 t, \quad y = y_2 + m_2 t, \quad z = z_2 + n_2 t. \qquad (4.\ 46)$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}, \qquad (4.\ 47)$$

составленный из коэффициентов, входящих в уравнения (4. 45), (4. 46).

I. Равенство

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности двух прямых одной плоскости.

1. Если в определителе (4. 47) все строки пропорциональны, т. е.

$$l_2 = \lambda l_1, \ m_2 = \lambda m_1, \ n_2 = \lambda n_1, \ x_2 - x_1 = \mu l_1, \ y_2 - y_1 = \mu m_1, \ z_2 - z_1 = \mu n_1, \qquad (4.\ 48)$$

то прямые (4. 45) и (4. 46) *совпадают.*

2. Если пропорциональны только первые две строки, т. е.

$$l_2 = \lambda l_1, \ m_2 = \lambda m_1, \ n_2 = \lambda n_1, \qquad (4.\ 49)$$

то прямые (4. 45) и (4. 46) *параллельны.*

3. Если $\Delta = 0$, но условие (4. 49) не выполнено, то прямые (4. 45) и (4. 46) *пересекаются.*

II. Если $\Delta \neq 0$, то прямые (4. 45) и (4. 46) *скрещиваются.*

Примеры

10. Написать канонические и параметрические уравнения прямой:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 4y + 5z - 10 = 0; \\ 6x - 5y + z - 17 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Чтобы воспользоваться формулами (4. 43) и (4. 44) необходимо найти координаты направляющего вектора $\bar{a}$. Для этого удобно поступить следующим образом. Составим таблицу из коэффициентов при текущих координатах в данных уравнениях:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Закрывая поочередно один столбец этой таблицы, вычислим полученные определители и возьмем второй определитель со знаком минус. Получим координаты направляющего вектора $\bar{a}$:

$$l = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 21; \ m = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 27; \ n = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 9.$$

Возьмем теперь какую-нибудь точку данной прямой. Для этого нужно придать конкретное значение одной из координат, значения двух других определятся системой уравнений. Положим, например, $z = 0$, тогда исходные уравнения примут вид:

$$3x - 4y - 10 = 0; \ 6x - 5y - 17 = 0.$$

Решая эту систему, получим $x_0 = 2$, $y_0 = -1$. Следовательно на прямой фиксирована точка $M_0(2, -1, 0)$. Уравнения (4. 43) запишем так:

$$\frac{x-2}{21} = \frac{y+1}{27} = \frac{z}{9} \ \text{или} \ \frac{x-2}{7} = \frac{y+1}{9} = \frac{z}{3}.$$

Параметрические уравнения (4. 44) принимают вид:

$$x = 2 + 7t; \ y = -1 + 9t; \ z = 3t.$$

Замечание. Точку M_0 на прямой можно выбрать произвольно, поэтому в уравнениях (4. 43) и (4. 44) при разных выборах M_0 окажутся различные числа x_0, y_0, z_0 для одной и той же прямой. Координаты направляющего вектора определяются с точностью до постоянного множителя.

11. Составить уравнения оси Ox.

Ось Ox можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей Oxz и Oxy. Уравнение плоскости Oxz есть $y = 0$, а уравнение плоскости $Oxy - z = 0$, поэтому ось Ox имеет следующие уравнения:

$$y = 0; \ z = 0.$$

12. Привести уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 2z - 5 = 0; \\ 2x + y - 4z - 7 = 0 \end{aligned}\right\}$$

к уравнениям в проекциях на координатные плоскости Oxz, Oyz.

Одну и ту же прямую можно представить множеством разных систем двух уравнений первой степени. В частности, прямую (4. 41) можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, проходящих через нее и перпендикулярных двум координатным плоскостям.

Представим данную прямую как линию пересечения двух плоскостей, проходящих через нее и перпендикулярных плоскостям Oxz и Oyz. Плоскость, перпендикулярная плоскости Oxz, параллельна оси Oy, поэтому в ее уравнении коэффициент при y равен нулю. Исключая y путем почленного сложения двух данных уравнений, получим

$$4x - 2z - 12 = 0 \text{ или } z = 2x - 6.$$

Исключая x путем почленного вычитания второго уравнения из первого, получим

$$-2y + 6z + 2 = 0 \text{ или } z = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}.$$

Следовательно, уравнения прямой в проекциях на плоскости Oxz и Oyz, имеют вид:

$$z = 2x - 6; \; z = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}.$$

13. Найти уравнение проекции прямой

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-5}{4}$$

на плоскость

$$x - 3y + 2z - 7 = 0.$$

Проекция прямой на плоскость представляет собой линию пересечения этой плоскости и плоскости, проходящей через данную прямую перпендикулярно данной плоскости.

Составим уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-5}{4}$$

перпендикулярно плоскости $x - 3y + 2z - 7 = 0$. Пусть $M\,(x,\; y,\; z)$ — произвольная точка искомой плоскости, $M_0\,(2, -1,\; 5)$ — принадлежащая ей точка прямой, тогда векторы $\overline{M_0M} = \{x-2,\; y+1,\; z-5\}$, $\bar{a} = \{6,\; -5,\; 4\}$, $\bar{n} = \{1,\; -3,\; 2\}$ лежат в одной плоскости, поэтому их смешанное произведение равно нулю, т. е. $\overline{M_0M} \cdot \bar{a} \cdot \bar{n} = 0$ или в координатах

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 6 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Упрощая это уравнение, получим $2x - 8y - 13z + 53 = 0$. Таким образом, искомая проекция определяется уравнениями:

$$x - 3y + 2z - 7 = 0; \; 2x - 8y - 13z + 53 = 0.$$

14. Исследовать взаимное расположение двух прямых в каждом из следующих случаев:

1) $x = 1 - 2t,\; y = 2 + 5t,\; z = -3 + 4t$ и $x = -4 + 3t,$
$y = 2 - t,\; z = 5 - 2t;$

2) $x = 2 + t,\; y = -3 - 2t,\; z = 4 - 2t$ и $x = 7 + 5t,$
$y = 8 - 10t,\; z = 9 - 10t;$

3) $x = 6 + 2t,\; y = 5 - t,\; z = 3 + 2t$ и $x = 10 + 4t,$
$y = 3 - 2t,\; z = 7 + 4t;$

4) $x = 1 + 2t,\; y = 7 + t,\; z = 3 + 4t$ и $x = 6 + 3t,$
$y = -1 - 2t,\; z = -2 + t.$

Если прямые пересекаются, найти точку их пересечения.

1) Определитель (4. 47) в данном случае принимает вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ -4-1 & 2-2 & 5-(-3) \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 0 & -6 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 13 & -6 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = -74.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то прямые скрещиваются.

2) Определитель (4. 47) имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 5 & -10 & -10 \\ 7-2 & 8+3 & 9-4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 5 & 11 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку $\Delta = 0$ и только первые две строки пропорциональны, то прямые параллельны.

3) Так как в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 10-6 & 3-5 & 7-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

все строки пропорциональны, то прямые совпадают.

4) Так как определитель равен нулю, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6-1 & -1-7 & -2-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 9 \\ 21 & -8 & 27 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 21 & 27 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

и первые две его строки не пропорциональны, то прямые пересекаются.

Найдем общую точку этих прямых. Уравнение второй прямой запишем в виде:

$$x = 6 + 3s; \quad y = -1 - 2s; \; z = -2 + s,$$

где s — параметр. Приравнивая соответствующие координаты, получим систему уравнений

$$1+2t=6+3s,\ 7+t=-1-2s,\ 3+4t=-2+s.$$

Исключая t из первых двух уравнений, получим $7s=-21$, откуда $s=-3$. Из первого уравнения находим $t=-2$. (Третье уравнение системы при найденных значениях t и s обращается в тождество.) Подставляя значение t в уравнения первой прямой или значение s в уравнения второй прямой, получим точку пересечения $N\ (-3,\ 5,\ -5)$.

Замечание. Одни и те же координаты точки пересечения двух прямых получаются, как правило, при различных значениях параметра, входящего в их уравнения. При отыскании общей точки пересекающихся прямых целесообразно обозначить параметры в их уравнениях различными буквами.

Задачи

7. Составить параметрические уравнения прямых:

1) $\left.\begin{aligned} x+y-6z-4=0;\\ 3x-y-5z-8=0;\end{aligned}\right\}$ 2) $\left.\begin{aligned} 2x-y+3z-7=0;\\ 4x+5y-6z-10=0.\end{aligned}\right\}$

8. Привести уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y+z-10=0;\\ 2x-y-z-6=0\end{aligned}\right\}$$

к уравнениям в проекциях на координатные плоскости Oxy, Oyz.

9. Составить уравнения проекции прямой

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt$$

на плоскость $Ax+By+Cz+D=0$.

10. Написать уравнения проекции прямой

$$x=2+4t,\ y=1-t,\ z=3-2t$$

на плоскость $3x-y+2z-7=0$.

11. Составить уравнения: 1) оси Oy; 2) оси Oz.

12. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых в пространстве; если прямые параллельны, написать уравнение плоскости, проходящей через них; если прямые пересекаются, найти их общую точку и написать уравнение содержащей их плоскости:

1) $x=9t,\ \ y=5t,\ \ z=-3+t$ и $x=27-9t,\ y=15-5t,\ z=-t$;

2) $x=t,\ y=-8-4t,\ z=-3-3t$ и $x+y-z=0,\ 2x-y+2z=0$;

3) $\left.\begin{aligned} 2x+3y=0;\\ z-4=0\end{aligned}\right\}$ и $\left.\begin{aligned} x+z-8=0;\\ 2y+3z-7=0;\end{aligned}\right\}$

4) $\left.\begin{aligned} x+z-1=0;\\ x-2y+3=0\end{aligned}\right\}$ и $\left.\begin{aligned} 3x+y-z+13=0;\\ y+2z-8=0.\end{aligned}\right\}$

Ответы

7. 1) $x=3+11t,\ y=1+13t,\ z=4t$; 2) $x=-9t,\ y=8,\ z=5+14t$. **8.** $y=x-4,\ y=z-2$. **9.** $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ l & m & n\\ A & B & C\end{vmatrix}=0,\ Ax+By+Cz+D=0$. **10.** $4x+14y+z-25=0,\ 3x-y+2z-7=0$. **11.** 1) $x=0,\ z=0$; 2) $x=0,\ y=0$. **12.** 1) совпадают; 2) параллельны и лежат в плоскости $12x-3y+8z=0$; 3) скрещиваются; 4) пересекаются в точке $N(-3,\ 0,\ 4)$ и лежат в плоскости $3x+4y+5z-11=0$.

4. 2. 3. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми

Углом между прямой и координатной осью называется угол между направляющим вектором прямой и ортом оси.

Углом между двумя прямыми называется угол между направляющими векторами этих прямых.

Косинус угла между двумя прямыми

$$x=x_1+l_1t,\ y=y_1+m_1t,\ z=z_1+n_1t; \qquad (4.50)$$
$$x=x_2+l_2t,\ y=y_2+m_2t,\ z=z_2+n_2t \qquad (4.51)$$

определяется формулой

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \qquad (4.52)$$

Условие перпендикулярности прямых (4. 50) и (4. 51):

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0. \qquad (4.53)$$

Расстояние от точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до прямой (4. 50) вычисляется по формуле

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0\\ m_1 & n_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0\\ l_1 & n_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0\\ l_1 & m_1\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}} \qquad (4.54)$$

или в векторной форме

$$d=\frac{\sqrt{[(\bar r_1-\bar r_0)\bar a]^2}}{\sqrt{\bar a^2}}, \qquad (4.55)$$

где $\bar r_1$ и $\bar r_0$ — радиус-векторы точек M_1, M_0; $\bar a$ — направляющий вектор (рис. 4. 7).

Кратчайшее расстояние между прямыми (рис. 4. 8)

$$\bar r=\bar r_1+\bar a_1t,\ \ \bar r=\bar r_2+\bar a_2t$$

определяется формулой

$$d = \frac{|(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\bar{a}_1\,\bar{a}_2|}{|[\bar{a}_1\bar{a}_2]|} \qquad (4.56)$$

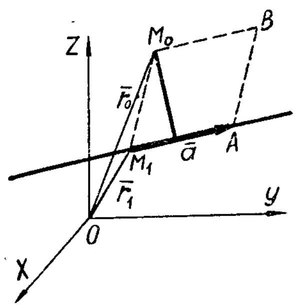

Рис. 4.7

или в координатной форме

$$d = \pm\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 n_1 \\ m_2 n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 n_1 \\ l_2 n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 m_1 \\ l_2 m_2 \end{vmatrix}^2}}, \qquad (4.57)$$

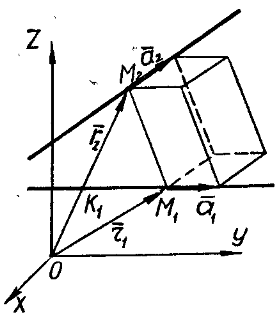

Рис. 4.8

где знак плюс берется в случае, когда определитель третьего порядка положителен и знак минус — в противном случае.

Примеры

15. Найти углы между координатными осями и прямой, проходящей через две точки $M_1(3, -4, \sqrt{2})$, $M_2(4, -5, 2\sqrt{2})$.

В качестве направляющего вектора можно взять вектор

$$\bar{a} = \overline{M_1M_2} = \{4 - 3,\ -5 - (-4),\ 2\sqrt{2} - \sqrt{2}\} = \{1,\ -1,\ \sqrt{2}\}.$$

Направляющие косинусы этого вектора определятся формулами (3. 20) — (3. 22):

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{1}{2},\quad \cos\beta = -\frac{1}{2},\quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, прямая образует с координатными осями углы:

$$\alpha = 60^\circ;\ \beta = 120^\circ;\ \gamma = 45^\circ.$$

Замечание. В качестве направляющего вектора можно взять и вектор $\overline{M_2M_1} = \{-1,\ 1,\ -\sqrt{2}\}$, тогда получим углы $\alpha_1 = 120^\circ$, $\beta_1 = 60^\circ$, $\gamma_1 = 135^\circ$, дополняющие углы α, β, γ до 180°.

16. Определить направляющие косинусы прямой

$$x = 4 + 2t,\ y = -3 - t,\ z = 5 - 2t.$$

Направляющий вектор прямой есть вектор $\bar{a} = \{2, -1, -2\}$. По формулам (3. 20) — (3. 22) получаем направляющие косинусы прямой:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3};\ \cos\beta = -\frac{1}{3};\ \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

17. Найти угол между двумя прямыми:

$$\frac{x-5}{7} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-6}{-8};\quad \frac{x-2}{11} = \frac{y-4}{-8} = \frac{z+1}{-7}.$$

Первая прямая имеет направляющий вектор $\bar{a}_1 = \{7,\ 2,\ -8\}$, вторая $\bar{a}_2 = \{11,\ -8,\ -7\}$. В соответствии с формулой (4. 52) получаем

$$\cos\varphi = \frac{7\cdot 11 + 2(-8) + (-8)(-7)}{\sqrt{49+4+64}\,\sqrt{121+64+49}} = \frac{117}{\sqrt{117}\cdot\sqrt{234}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = 45^\circ$.

18. Составить уравнение прямой, проведенной через точку $M_0(2, -3, 5)$ перпендикулярно двум данным прямым:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{2};\quad \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+7}{-2}.$$

Уравнение прямой ищем в виде

$$\frac{x-2}{l} = \frac{y+3}{m} = \frac{z-5}{n}.$$

Коэффициенты l, m, n, определяемые с точностью до постоянного множителя, в силу условия (4. 53) должны удовлетворять системе двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (-1)\,l + 2m + 2n &= 0; \\ 6l + 3m - 2n &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Складывая и вычитая почленно эти уравнения, получим

$$\left.\begin{aligned} 5l + 5m &= 0; \\ 3l - 2n &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда $l = -m$, $l = \frac{2}{3} n$. Полагая например, $n = 3$, получим $l = 2$, $m = -2$.

Следовательно, уравнение прямой принимает вид

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{3}.$$

19. Найти расстояние от точки $M_0(1, -2, 3)$ до прямой $x = 9 - 2t$, $y = 4 - 4t$, $z = 7 + 4t$.

Пользуемся формулой (4.54). Так как $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $z_0 = 3$, $x_1 = 9$, $y_1 = 4$, $z_1 = 7$, $l_1 = -2$, $m_1 = -4$, $n_1 = 4$, то

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 4-(-2) & 7-3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 9-1 & 7-3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 9-1 & 4-(-2) \\ -2 & -4 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{40^2 + 40^2 + (-20)^2}}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{\sqrt{3600}}{\sqrt{36}} = 10.$$

Итак, расстояние равно 10.

20. Вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми

$$x = 3 + 2t, \ y = 7 - 2t, \ z = 1 + 3t;$$
$$x = 5 + 4t, \ y = 8, \ z = 2 - 6t.$$

Прежде всего можно убедиться, что прямые являются скрещивающимися. В самом деле, определитель (4.47) отличен от нуля, т. е.

$$\begin{vmatrix} 5-3 & 8-7 & 2-1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 56.$$

Так как определитель положителен, то в формуле (4.57) нужно взять знак плюс. Подставляя соответствующие значения в эту формулу, получим

$$d = \frac{\begin{vmatrix} 5-3 & 8-7 & 2-1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}^2}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix}}{\sqrt{12^2 + (-24)^2 + 8^2}} =$$

$$= \frac{56}{28} = 2.$$

13. Найти направляющие косинусы прямых

1) $\frac{x-5}{6} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{3}$; 2) $\left.\begin{aligned} 2x - 2z + 3 &= 0; \\ 10x - 12y + 4z - 5 &= 0. \end{aligned}\right\}$

14. Определить углы между осями координат и каждой из следующих прямых:

1) $\frac{x-4}{\sqrt{2}} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-7}{-1}$; 2) $\left.\begin{aligned} 3x - 4y &= 0; \\ 5x - 3z &= 0. \end{aligned}\right\}$

15. Найти угол между двумя прямыми в каждом из следующих случаев:

1) $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-10} = \frac{z-7}{1}$ и $\frac{x-4}{-11} = \frac{y+5}{8} = \frac{z-6}{7}$;

2) $\left.\begin{aligned} x + y - 4 &= 0; \\ \sqrt{2}y - z - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$ и $\left.\begin{aligned} x - y &= 0; \\ \sqrt{2}y - z - \sqrt{2} &= 0. \end{aligned}\right\}$

16. Вычислить расстояние от точки $M_0(7, -2, 3)$ до каждой из следующих прямых:

1) $x = 3 - t$, $y = -5 - 2t$, $z = 1 + 2t$;
2) $x = 6 + 10t$, $y = -3 + 11t$, $z = 2 + 2t$.

17. Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми:

1) $\frac{x-3}{-6} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x+2}{3} = \frac{z-3}{-1}$, $y - 4 = 0$;

2) $x = 3 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + 2t$ и $x = -t$, $y = 2 + 3t$, $z = 3t$.

18. Найти расстояние между параллельными прямыми:

1) $x = 5 - 4t$, $y = 2 + 7t$, $z = 1 + 4t$ и $x = 8t$, $y = 3 - 14t$, $z = 4 - 8t$;

2) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.

19. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба и непересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно 1.

20. Составить уравнение прямой, проведенной через точку $M_0(4, 7, -5)$ перпендикулярно двум данным прямым $x = 3 + 2t$, $y = 8 - t$, $z = -1 + 4t$ и $x = 1 + 3t$, $y = -5 + t$, $z = 6 + t$.

21. Составить уравнение общего перпендикуляра к двум непараллельным прямым

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{a}_1 t, \ \bar{r} = \bar{r} + \bar{a}_2 t.$$

Ответы

13. 1) $\cos\alpha = \frac{6}{7}$, $\cos\beta = -\frac{2}{7}$, $\cos\gamma = \frac{3}{7}$; 2) $\cos\alpha = \frac{6}{11}$, $\cos\beta = \frac{7}{11}$, $\cos\gamma = \frac{6}{11}$. 14. 1) $\alpha = 45°$, $\beta=60°$, $\gamma=120°$; 2) $\alpha=118°41'$, $\beta=68°54'$, $\gamma=36°52'$. 15. 1) $\varphi = 135°$; 2) $\varphi = 60°$. 16. 1) $d = 5$; 2) $d = \frac{\sqrt{86}}{15}$. 17. 1) $\frac{31}{13}$; 2) $\frac{18}{\sqrt{110}}$. 18. 1) $\frac{1}{3}\sqrt{146}$; 2) 3. 19. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. 20. $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+5}{1}$. 21. $(\bar r - \bar r_1)\,\bar a_1 \bar a = 0$, $(\bar r - \bar r_2)\,\bar a_2 \bar a = 0$, где $\bar a = [\bar a_1 \bar a_2]$.

§ 4. 3. Прямая и плоскость в пространстве

Угол между прямой

$$x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt \qquad (4.58)$$

и плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (4.59)$$

определяется формулой

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (4.60)$$

Координаты точки пересечения прямой (4. 58) и плоскости (4. 59) находятся из системы уравнений (4. 58) и (4. 59).

Условие параллельности прямой (4. 58) и плоскости (4. 59):

$$Al + Bm + Cn = 0. \qquad (4.61)$$

Условие, при котором прямая (4. 58) лежит на плоскости (4. 59):

$$Al + Bm + Cn = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \qquad (4.62)$$

Условие перпендикулярности прямой (4. 58) и плоскости (4. 59):

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \text{ или } A = \lambda l,\ B = \lambda m,\ C = \lambda n,\ \lambda \neq 0. \qquad (4.63)$$

Пучком плоскостей называется совокупность плоскостей, проходящих через данную прямую.

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;\\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.64)$$

имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (4.65)$$

где α и β принимают всевозможные действительные значения ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$).

Уравнение (4. 65) можно записать так:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (4.65')$$

где $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha \neq 0$.

Примеры

1. Найти угол между прямой $x = 5 + t$, $y = -3 + t$, $z = 4 - 2t$ и плоскостью $4x - 2y - 2z + 7 = 0$.

Применяем формулу (4. 60). Так как $l = 1$, $m = 1$, $n = -2$, $A = 4$, $B = -2$, $C = -2$, то

$$\sin\varphi = \frac{|4\cdot 1 + (-2)\,1 + (-2)(-2)|}{\sqrt{1+1+4}\,\sqrt{16+4+4}} = \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{24}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\varphi = 30°$.

2. Найти точку пересечения плоскости $3x - 4y + 5z + 16 = 0$ и прямой $x = -6 + 2t$, $y = 7 - t$, $z = 8 - 3t$.

Решим совместно систему уравнений прямой и плоскости. Подставим выражения для x, y, z в уравнение плоскости

$$3(-6 + 2t) - 4(7 - t) + 5(8 - 3t) + 16 = 0.$$

После упрощений получим

$$-5t + 10 = 0,$$

откуда $t = 2$. Из уравнений прямой при $t = 2$ находим координаты точки пересечения $x = -2$, $y = 5$, $z = 2$.

Таким образом, искомой точкой пересечения является точка $N(-2,\ 5,\ 2)$.

3. Найти проекцию точки $P(3,\ 2,\ -1)$ на плоскость

$$x - 5y + 4z - 31 = 0.$$

Задача сводится к отысканию основания перпендикуляра, опущенного из точки P на данную плоскость. Напишем уравнения этого перпендикуляра (см. § 4. 2, пример 3):

$$x = 3 + t,\ y = 2 - 5t,\ z = -1 + 4t.$$

Находим точку пересечения перпендикуляра и данной плоскости:

$$(3 + t) - 5(2 - 5t) + 4(-1 + 4t) - 31 = 0,\ 42t - 42 = 0,\ t = 1.$$

Следовательно, проекцией точки P на плоскость является точка $Q(4,\ -3,\ 3)$.

4. Найти проекцию точки $P(5,\ -6,\ 7)$ на прямую $x = 7 - 2t$, $y = 1 + 3t$, $z = 4 + t$.

Искомая проекция является точкой пересечения данной прямой и плоскости, проведенной через точку P перпендикулярно этой прямой. Составим уравнение указанной плоскости (см. § 4. 1, пример 1):

$$-2(x - 5) + 3(y + 6) + (z - 7) = 0 \text{ или } 2x - 3y - z - 21 = 0.$$

Находим точку пересечения данной прямой и полученной плоскости:

$$2(7-2t)-3(1+3t)-(4+t)-21=0, \quad -14t-14=0,$$
$$t=-1.$$

Итак, точка $Q(9, -2, 3)$ является проекцией точки P на данную плоскость.

5. Найти точку, симметричную точке $P(2, 7, 1)$ относительно плоскости $x-4y+z+7=0$.

Искомая точка Q является вторым концом отрезка PQ, для которого серединой будет точка R — проекция точки P на данную плоскость. Найдем точку R. Уравнения перпендикуляра к плоскости, проведенного через точку P, имеют вид

$$x=2+t, \ y=7-4t, \ z=1+t.$$

Решим совместно систему уравнений перпендикуляра и данной плоскости

$$(2+t)-4(7-4t)+(1+t)+7=0 \text{ или } 18t-18=0, \ t=1.$$

Следовательно, $R(3, 3, 2)$ — точка пересечения. По формулам (3. 29), которые в данном случае целесообразно представить в виде

$$x_2=2x-x_1, \ y_2=2y-y_1, \ z_2=2z-z_1,$$

находим точку $Q(4, -1, 3)$.

6. При каком значении n прямая $x=2+5t$, $y=-3+2t$, $z=5+nt$ параллельна плоскости $2x+4y-6z+7=0$.

Обращаемся к условию (4. 61) параллельности прямой и плоскости. Подставляя соответствующие значения в это уравнение, получим

$$2\cdot 5+4\cdot 2+(-6)n=0 \text{ или } 18-6n=0,$$

откуда $n=3$.

7. При каких значениях B и D прямая

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{7}$$

лежит в плоскости $4x+By-2z+D=0$?

Подставляя в уравнения (4. 62) соответствующие значения, получим систему уравнений

$$4\cdot 5+B(-3)+(-2)7=0, \quad 4\cdot 1+B(-2)+(-2)4+D=0,$$

из которой определяем $B=2$ и $D=8$.

8. При каких значениях m и A прямая $x=3+2t$, $y=-5+mt$, $z=1+6t$ перпендикулярна плоскости $Ax-2y+3z-5=0$?

Условие (4. 63) в данном случае примет вид

$$\frac{A}{2}=\frac{-2}{m}=\frac{3}{6},$$

т. е. $\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$ и $\frac{-2}{m}=\frac{1}{2}$, откуда $A=1$, $m=-4$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(4, -1, 1)$ и прямую

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y+5z-7=0; \\ 4x+2y-6z-5=0. \end{aligned}\right\}$$

Напишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую. В соответствии с уравнением (4. 65′) получаем

$$(2x-3y+5z-7)+\lambda(4x+2y-6z-5)=0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки P, будем иметь

$$[2\cdot 4-3(-1)+5\cdot 1-7]+\lambda[4\cdot 4+2(-1)-6\cdot 1-5]=0,$$
$$9+3\lambda=0, \ \lambda=-3.$$

Из уравнения пучка при $\lambda=-3$ находим уравнение искомой плоскости

$$10x+9y-23z-8=0.$$

Задачи

1. Найти угол между прямой

$$x=8-2t, \ y=7-2t, \ z=9+4t$$

и плоскостью

$$6x-3y-3z+1=0.$$

2. Найти проекцию точки $P(1, 2, -3)$ на плоскость $6x-y+3z-41=0$.

3. Найти точку, симметричную точке $P(2, -4, 5)$ относительно прямой

$$x=1-3t, \ y=-3+t, \ z=3-4t.$$

4. Провести через точку пересечения плоскости $x+y+z-1=0$ с прямой $y=1$, $z+1=0$ прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную данной прямой.

5. При каком значении l прямая

$$\frac{x-3}{l}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-5}{6}$$

параллельна плоскости $2x-5y+3z-7=0$.

6. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую

$$3x-y+2z+9=0, \ x+z-3=0 \text{ и:}$$

1) через точку $N(4, -2, -3)$;
2) параллельно оси Ox;
3) параллельно оси Oy;
4) параллельно оси Oz.

Ответы

1. $\varphi=30°$. 2. $Q(7, 1, 0)$. 3. $Q\left(\frac{36}{13}, -\frac{38}{13}, \frac{61}{13}\right)$. 4. $x+y+z-1=0$, $x-1=0$. 5. $l=1$. 6. 1) $23x-2y+21z-33=0$; 2) $y+z-18=0$; 3) $x+z-3=0$; 4) $x-y+15=0$.

§ 4.4. Поверхности в пространстве. Сфера. Поверхности вращения. Цилиндрические и конические поверхности

Поверхностью в пространстве называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,\ y,\ z) = 0. \qquad (4.66)$$

Линия в пространстве как пересечение двух поверхностей определяется двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,\ y,\ z) = 0;\\ F_2(x,\ y,\ z) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.67)$$

Уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \qquad (4.68)$$

определяет сферу радиуса R с центром в точке $S(a,\ b,\ c)$. Если $a = b = c = 0$, получаем уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (4.69)$$

Уравнение

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Bx + Cy + Dz + E = 0 \qquad (4.70)$$

с помощью дополнения до полных квадратов можно привести к виду

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d. \qquad (4.71)$$

Если $d > 0$, то уравнение (4.71) определяет сферу радиуса $R = \sqrt{d}$. Если $d = 0$, то уравнению (4.71) удовлетворяют координаты единственной точки $S(a,\ b,\ c)$. Если $d < 0$, то уравнению (4.71) не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства.

Поверхность, образованная вращением линии l

$$\left.\begin{aligned} x = \varphi_1(z);\\ y = \varphi_2(z) \end{aligned}\right\} \qquad (4.72)$$

вокруг оси Oz (рис. 4.9), определяется уравнением

$$x^2 + y^2 = \varphi_1^2(z) + \varphi_2^2(z). \qquad (4.73)$$

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой (образующей), параллельной данному направлению и пересекающей данную линию (направляющую).

Уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Oz, имеет вид

$$F(x,\ y) = 0. \qquad (4.74)$$

Уравнения направляющей цилиндрической поверхности (4.74):

$$\left.\begin{aligned} F(x, y) = 0;\\ z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.75)$$

Конической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой, проходящей через данную точку (вершину конуса) и пересекающей данную линию (направляющую конуса).

Примеры

1. Составить уравнение сферы, если известно, что точки $M_1(4, -3, 7)$, $M_2(2,\ 1,\ 3)$ являются концами одного из ее диа-

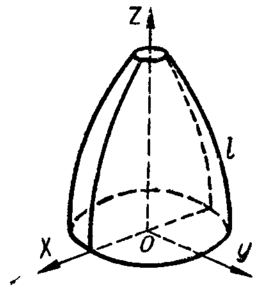

Рис. 4.9

метров. Лежат ли на этой сфере точки $M_3(4,\ -2,\ +7)$, $M_4(5,\ -3, 4)$, $M_5(7,\ 2,\ 3)$?

Центром искомой сферы является середина отрезка M_1M_2, а ее радиус равен половине длины отрезка M_1M_2. Координаты середины отрезка M_1M_2 находим по формулам (3.29), получаем точку $C(3,\ -1{,}5)$. По формуле (3.19) находим радиус сферы

$$R = CM_2 = \sqrt{(2-3)^2 + (1+1)^2 + (3-5)^2} = 3.$$

Подставляя в формулу (4.68) значения $a = 3$, $b = -1$, $c = 5$, $R = 3$, получим уравнение сферы:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9.$$

Выясним, лежат ли точки M_3, M_4, M_5 на этой сфере. Подставляя координаты точек в уравнение сферы, находим:

$$(4-3)^2 + (-2+1)^2 + (7-5)^2 = 1 + 1 + 4 = 6 < 9;$$
$$(5-3)^2 + (-3+1)^2 + (4-5)^2 = 4 + 4 + 1 = 9;$$
$$(7-3)^2 + (2+1)^2 + (3-5)^2 = 16 + 9 + 4 = 29 > 9.$$

Следовательно, точка M_4 лежит на сфере, точки M_3 и M_5 на сфере не лежат.

Замечание. Точка M_3 лежит внутри сферы, ибо ее расстояние до центра сферы меньше радиуса; точка M_5 лежит вне сферы, так как ее расстояние до центра сферы больше радиуса.

2. Написать уравнение сферы, проходящей через четыре точки $M_1(1,1,0)$, $M_2(7, -11, 0)$, $M_3(10, 1, 9)$, $M_4(-2, -11, +9)$.

Уравнение сферы ищем в виде

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Подставляя координаты точек M_1, M_2, M_3, M_4 в это уравнение, получим систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных a, b, c и R:

$$(1-a)^2+(1-b)^2+(0-c)^2=R^2;$$
$$(7-a)^2+(-11-b)^2+(0-c)^2=R^2;$$
$$(10-a)^2+(1-b)^2+(9-c)^2=R^2;$$
$$(-2-a)^2+(-11-b)^2+(9-c)^2=R^2.$$

Решая эту систему уравнений, находим: $a=4$, $b=-5$, $c=6$, $R=9$.

Следовательно, уравнение сферы имеет вид

$$(x-4)^2+(y+5)^2+(z-6)^2=81.$$

3. Найти центр и радиус сферы

$$2x^2+2y^2+2z^2-12x-10y+8z+1=0.$$

Данное уравнение обладает следующей особенностью: коэффициенты при квадратах координат равны между собой, уравнение не содержит членов с произведениями координат. Это уравнение можно привести к виду (4.71). Разделив обе части уравнения на 2, получим

$$x^2+y^2+z^2-6x-5y+4z+\frac{1}{2}=0.$$

Дополним левую часть уравнения до полных квадратов:

$$(x^2-6x+9)+\left(y^2-2\cdot\frac{5}{2}y+\frac{25}{4}\right)+(z^2+4z+4)-9-\frac{25}{4}-$$
$$-4+\frac{1}{2}=0$$

или

$$(x-3)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+(z+2)^2=\frac{75}{4}.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (4.68), находим:

$$a=3,\ b=\frac{5}{2},\ c=-2,\ R=\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

4. Найти точку пересечения сферы

$$(x-4)^2+(y+5)^2+(z-6)^2=81$$

и прямой $x=3-t$, $y=-3+2t$, $z=4-2t$.

Чтобы найти точку пересечения сферы и прямой, необходимо решить совместно систему их уравнений. Подставим выражения для x, y, z через параметр t в уравнение сферы:

$$(-1-t)^2+(2+2t)^2+(-2-2t)^2=81.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$9t^2+18t-72=0 \text{ или } t^2+2t-8=0.$$

Решая последнее уравнение, находим $t_1=-4$, $t_2=2$. Из уравнений прямой при $t_1=-4$ получаем точку пересечения $M_1(7, -11, 12)$, при $t_2=2$ — точку $M_2(1, 1, 0)$.

5. Какую поверхность определяет уравнение

$$x^2+y^2=25?$$

Данное уравнение не содержит членов с координатой z. В соответствии с формулой (4.74) заключаем, что уравнение $x^2+y^2=25$ определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz. В плоскости Oxy уравнение направляющей этой цилиндрической поверхности будет $x^2+y^2=25$. Это окружность радиуса $R=5$. Эта же линия в пространстве в соответствии с формулами (4.75) определяется уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=25;\\ z&=0.\end{aligned}\right\}$$

Следовательно, данное уравнение определяет прямой круговой цилиндр.

6. Дан эллипс

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}&=1;\\ y&=0.\end{aligned}\right\}$$

Вращая этот эллипс вокруг оси Oz, получим поверхность, называемую эллипсоидом вращения. Составить ее уравнение.

Уравнения эллипса приведем к виду (4.72), т. е. выразим x и y как функции переменной z, найдем квадраты x и y:

$$\left.\begin{aligned} x^2&=a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right);\\ y^2&=0.\end{aligned}\right\}$$

В соответствии с формулой (4.73) получим уравнение эллипсоида вращения:

$$x^2+y^2=a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

7. Составить уравнение однополостного гиперболоида вращения, полученного вращением гиперболы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1;\\ y&=0\end{aligned}\right\}$$

вокруг оси Oz.

Из уравнений гиперболы имеем

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right); \\ y^2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Складывая почленно эти уравнения, получаем искомое уравнение однополостного гиперболоида:

$$x^2+y^2=a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

8. Дана ось круглого цилиндра $x=9-t$, $y=4-2t$, $z=7+2t$ и точка $M_0(1, -2, 3)$ на его поверхности. Составить уравнение цилиндра.

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка данного круглого цилиндра. Расстояние этой точки до оси цилиндра равно расстоянию точки M_0 до той же оси. Найдем эти расстояния. По формуле (4.54) получаем:

$$d_0=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 4+2 & 7-3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 9-1 & 7-3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 9-1 & 4+2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{20^2+20^2+(-10)^2}}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{\sqrt{900}}{\sqrt{9}},$$

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 4-y & 7-z \\ -2 & 2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 9-x & 7-z \\ -1 & 2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 9-x & 4-y \\ -1 & -2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{[2(4-y)+2(7-z)]^2+[2(9-x)+(7-z)]^2+[-2(9-x)+(4-y)]^2}}{\sqrt{1+4+4}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(22-2y-2z)^2+(25-2x-z)^2+(2x-y-14)^2}}{\sqrt{9}}.$$

Так как $d_0=d$, то уравнение круглого цилиндра имеет вид

$$\sqrt{(22-2y-2z)^2-(25-2x-z)^2+(2x-y-14)^2}=\sqrt{900}.$$

Упрощая это уравнение, получим

$$8x^2+5y^2+5z^2-4xy+4xz+8yz-156x-60y-138z+405=0.$$

9. Составить уравнение конуса, описанного около сферы $x^2+y^2+z^2=4$, если вершина конуса находится в точке $S(0, 0, 8)$.

Напишем параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $S(0, 0, 8)$:

$$x=lt, \quad y=mt, \quad z=8+nt. \qquad \text{(A)}$$

Найдем точки пересечения этой прямой со сферой и потребуем, чтобы эти точки совпадали, т. е. чтобы прямая касалась сферы. Подставляя уравнения (A) в уравнение сферы, получим квадратное уравнение относительно t

$$(lt)^2+(mt)^2+(8+nt)^2=4$$

или

$$(l^2+m^2+n^2)t^2+16nt+60=0. \qquad \text{(B)}$$

Уравнение (B) имеет равные корни, когда его дискриминант равен нулю, т. е.

$$64n^2-60(l^2+m^2+n^2)=0$$

или

$$n^2-15(l^2+m^2)=0. \qquad \text{(C)}$$

Итак, координаты направляющего вектора прямой, проходящей через точку S и касающейся данной сферы, удовлетворяют уравнению (C). Подставляя в это уравнение выражения для l, m, n из уравнений (A), получим

$$(z-8)^2-15(x^2+y^2)=0.$$

Следовательно, уравнение конуса имеет вид

$$15(x^2+y^2)-(z-8)^2=0.$$

10. Направляющая конуса задана уравнениями

$$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1, \quad y=0,$$

вершина находится в точке $S(0, -3, 4)$. Составить уравнение конуса.

Напишем уравнения образующей конуса как прямой, проходящей через точку S и произвольную точку $N(x, y, z)$ направляющей. Если $M(X, Y, Z)$ — любая точка образующей и тем самым любая точка конуса, то уравнение образующей примет вид

$$\frac{X-0}{x-0}=\frac{Y+3}{y+3}=\frac{Z-4}{z-4}$$

или $X=xt$, $Y+3=(y+3)t$, $Z-4=(z-4)t$.

Из последних уравнений определим x, y, z:

$$x=\frac{X}{t}; \quad y=\frac{Y+3-3t}{t}; \quad z=\frac{Z-4+4t}{t}$$

и подставим их выражения в уравнения направляющей. Так как $y=0$, то $t=\frac{Y+3}{3}$. Исключая t из первого уравнения направляющей, получаем

$$\frac{X^2}{9}+\frac{\left[Z-4+4\left(\frac{Y+3}{3}\right)\right]^2}{25}=\left(\frac{Y+3}{3}\right)^2$$

или

$$\frac{X^2}{9}+\frac{(3Z+4Y)^2}{9\cdot 25}=\frac{(Y+3)^2}{9}.$$

Раскрывая скобки, приводя к общему знаменателю и приводя подобные члены, получим уравнение конуса

$$25X^2 - 9Y^2 + 9Z^2 + 24ZY - 150Y - 225 = 0.$$

Замечание. Если направляющая конической поверхности задана уравнениями $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$, то уравнения образующих этой поверхности можно записать в виде

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{Z - z_0}{z - z_0},$$

где x, y, z — координаты точки, принадлежащей направляющей; x_0, y_0, z_0 — координаты вершины конуса; X, Y, Z — текущие координаты точки конической поверхности. Исключая x, y, z из данных четырех уравнений, получим искомое уравнение конической поверхности.

11. Написать уравнение цилиндрической поверхности, направляющая которой дана уравнениями

$$x^2 + y^2 = 25, \ z = 0,$$

а образующая составляет равные углы с осями координат.

В силу условия уравнения образующей можно записать так:

$$\frac{X - x}{l} = \frac{Y - y}{l} = \frac{Z - z}{l}$$

или

$$X = x + lt, \ Y = y + lt, \ Z = z + lt,$$

где X, Y, Z — координаты любой точки образующей; x, y, z — координаты точки направляющей; $l = m = n$, так как образующая составляет равные углы с осями координат.

Выразим из последних уравнений x, y, z:

$$x = X - lt; \ y = Y - lt; \ z = Z - lt$$

и подставим их в уравнения направляющей.

Так как $z = 0$, то $Z = lt$, следовательно,

$$x = X - Z, \ y = Y - Z,$$

поэтому уравнение цилиндрической поверхности примет вид

$$(X - Z)^2 + (Y - Z)^2 = 25$$

или

$$X^2 + Y^2 + 2Z^2 - 2XZ - 2YZ - 25 = 0.$$

Замечание. Если уравнения направляющей искомой цилиндрической поверхности заданы в виде $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$, то уравнения образующей этой поверхности можно записать так:

$$\frac{X - x}{l} = \frac{Y - y}{m} = \frac{Z - z}{n},$$

где x, y, z — координаты точки направляющей; l, m, n — координаты направляющего вектора образующей; X, Y, Z — текущие координаты точки образующей, или точки цилиндрической поверхности.

Исключая из этих уравнений x, y, z, получим искомое уравнение цилиндрической поверхности.

Задачи

1. Составить уравнение сферы в каждом из следующих случаев:

1) сфера проходит через точку $M_0(3, -1, 4)$ и имеет центр $C(1, -3, 5)$;

2) сфера имеет центр $C(4, 2, 3)$ и касается плоскости

$$6x - 3y + 2z + 4 = 0;$$

3) сфера проходит через три точки $M_1(3, -1, 9)$, $M_2(7, -2, 6)$, $M_3(4, 2, 5)$ и ее центр лежит в плоскости $x + y + z - 7 = 0$.

2. Найти центр и радиус сферы $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 12x + 15y - 9z + 33 = 0$. Лежат ли на этой сфере точки $M_1(3, -2, 1)$, $M_2(1, 0, 0)$, $M_3(2, 1, 3)$?

3. Имеет ли общие точки сфера $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z - 28 = 0$ с каждой из следующих прямых:

1) $x = 7 + 6t$, $y = -1 - 3t$, $z = -2 + 2t$; 2) $x = 2 - t$, $y = -5 - 2t$, $z = -1 - 2t$.

4. Составить уравнение сферы, проходящей через точку $N(3, -2, 2)$ и окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $2x + y - z + 2 = 0$.

5. Какие поверхности определяются уравнениями:

1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $y^2 + z^2 = 16$; 3) $x^2 + z^2 = 25$.

6. Составить уравнение двуполостного гиперболоида вращения, полученного вращением гиперболы:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \ y = 0$$

вокруг оси Oz.

7. Составить уравнение параболоида вращения, полученного вращением параболы

$$x^2 = 2z, \ y = 0$$

вокруг оси Oz.

8. Написать уравнение круглого цилиндра, если даны уравнения его оси

$$x = t, \ y = 1 + 2t, \ z = -3 - 2t$$

и точка $N(1, -2, 1)$ на его поверхности.

9. Написать уравнение конуса с вершиной в точке $S(1, 2, 4)$, образующие которого составляют с плоскостью $4x + 4y + 2z - 3 = 0$ углы $\varphi = 45°$.

10. Направляющая конуса задана уравнениями:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1; \ z = 0,$$

вершина конуса находится в точке $S(5, 0, 3)$. Составить уравнение конуса.

11. Написать уравнение круглого цилиндра, образующие которого касаются сферы $x^2+y^2+z^2=1$ и составляют равные углы с осями координат.

12. Составить уравнение круглого цилиндра, описанного около двух сфер:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=36;\quad x^2+y^2+z^2=36.$$

Ответы

1 1) $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=9$; 2) $(x-4)^2+(y-2)^2+(z-$ $-3)^2=16$. Указание. Радиус сферы равен расстоянию от центра сферы до плоскости. 3) $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=49$. 2. $a=2$, $b=-\frac{5}{2}$, $c=$ $=\frac{3}{2}$, $R=\sqrt{\frac{3}{2}}$. На сфере лежит точка M_1. 3. 1) $M_1(7, -1, -2)$, $M_2(-5, 5, -6)$; 2) общих точек нет. 4. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-$ $-13=0$. Указание. Уравнение сферы можно искать в виде $x^2+y^2+z^2-$ $-9+\lambda(2x+y-z+2)=0$. 5. 1) круглый цилиндр с образующей, параллельной оси Oz; 2) круглый цилиндр с образующей, параллельной оси Ox; 3) круглый цилиндр с образующей, параллельной оси Oy. 6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-$ $-\frac{z^2}{c^2}=-1$. 7. $x^2+y^2=2z$. 8. $8x^2+5y^2+5z^2-4xy+8yz+4xz+16x+$ $+14y+22z-39=0$. 9. $x^2+y^2+7z^2-16xy-8xz-8yz+62x+44y-$ $-32z-11=0$. 10. $9X^2+16Y^2+9Z^2+30XZ+96Z-144=0$. 11. x^2+y^2+ $+z^2-xy-yz-xz=\frac{3}{2}$. 12. $117x^2+18y^2+18z^2+32xy-32yz-1458=0$.

§ 4.5. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность, определяемая уравнением второй степени относительно текущих координат x, y, z.

При соответствующем выборе прямоугольной декартовой системы координат в пространстве уравнение поверхности второго порядка можно привести к одному из видов:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (эллипсоид, рис. 4.10);} \tag{4.76}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (однополостный гиперболоид, рис. 4.11);} \tag{4.77}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ (двуполостный гиперболоид, рис. 4.12);} \tag{4.78}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ (конус, рис. 4.13);} \tag{4.79}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \text{ (эллиптический параболоид, рис. 4.14);} \tag{4.80}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \text{ (гиперболический параболоид, рис. 4.15);} \tag{4.81}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (эллиптический цилиндр, рис. 4.16);} \tag{4.82}$$

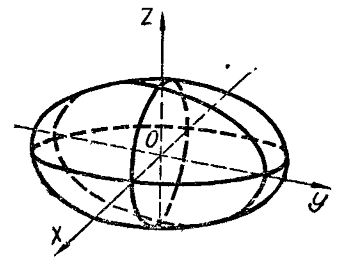

Рис. 4.10

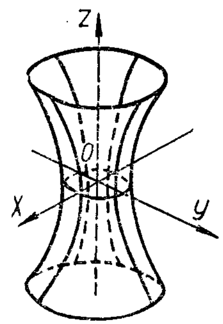

Рис. 4.11

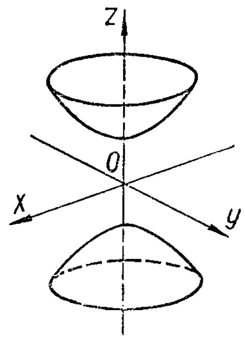

Рис. 4.12

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (гиперболический цилиндр, рис. 4.17); (4.83)

$y^2 = 2px$ (параболический цилиндр, рис. 4.18); (4.84)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (пара пересекающихся плоскостей, рис. 4.19); (4.85)

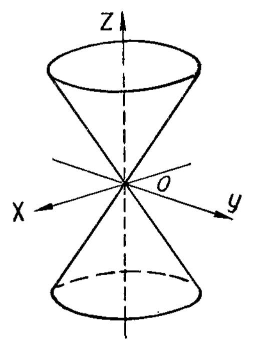

Рис. 4.13

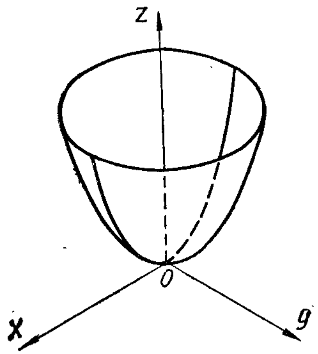

Рис. 4.14

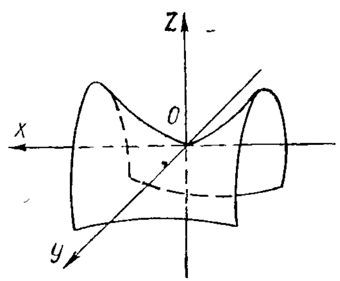

Рис. 4.15

$\frac{x^2}{a^2} = 1$ (пара параллельных плоскостей, рис. 4.20); (4.86)

$x^2 = 0$ (пара совпадающих плоскостей, рис. 4.21). (4.87)

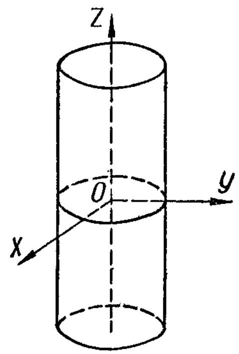

Рис. 4.16

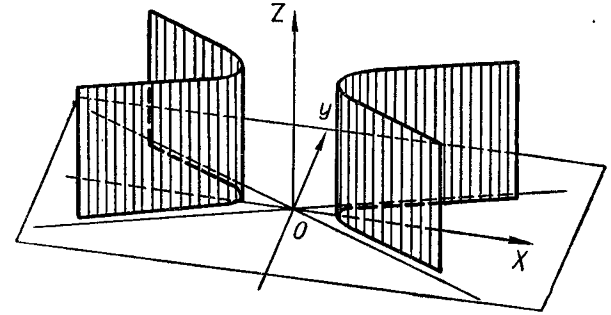

Рис. 4.17

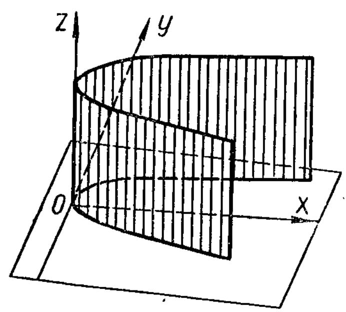

Рис. 4.18

Уравнения (4.76) — (4.87) называются *каноническими* уравнениями поверхностей второго порядка.

Уравнения второй степени могут выражать, кроме поверхностей в собственном смысле, и другие образы, которые лишь условно можно назвать поверхностями.

Общее уравнение второй степени относительно x, y, z может

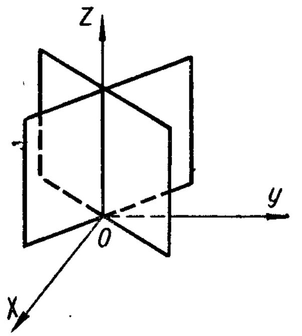

Рис. 4.19

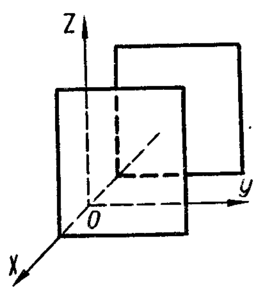

Рис. 4.20

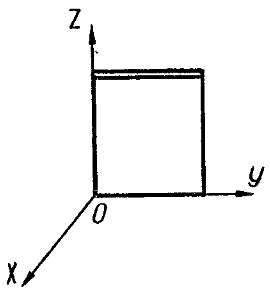

Рис. 4.21

быть приведено к одному из уравнений (4.76) — (4.87) или к одному из следующих уравнений:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{(мнимый конус);} \tag{4.88}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \quad \text{(пара мнимых пересекающихся плоскостей);} \tag{4.89}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{(мнимый эллипсоид);} \tag{4.90}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad \text{(мнимый эллиптический цилиндр);} \tag{4.91}$$

$$\frac{x^2}{a^2}=-1 \quad \text{(пара мнимых параллельных плоскостей).} \tag{4.92}$$

Уравнению (4.88) удовлетворяют координаты единственной точки $O(0,\ 0,\ 0)$, уравнению (4.89) — координаты точек, лежащих на прямой $x=0$, $y=0$. Уравнениям (4.90) — (4.92) не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства.

Поверхности, образованные движением прямой, называются *линейчатыми*, а прямые, целиком лежащие на поверхности, называются *прямолинейными образующими*.

Однополостный гиперболоид (4.77) имеет два семейства прямолинейных образующих:

$$\left.\begin{aligned} p\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=q\left(1-\frac{y}{b}\right);\\ q\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=p\left(1+\frac{y}{b}\right);\end{aligned}\right\} \ (4.93) \qquad \left.\begin{aligned} p'\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=q'\left(1+\frac{y}{b}\right);\\ q'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=p'\left(1-\frac{y}{b}\right).\end{aligned}\right\} \ (4.94)$$

Гиперболический параболоид (4.81) имеет также два семейства образующих:

$$\left.\begin{aligned} p\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)&=qz;\\ q\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=2p;\end{aligned}\right\} \ (4.95) \qquad \left.\begin{aligned} p'\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)&=2q';\\ q'\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=p'z.\end{aligned}\right\} \ (4.96)$$

Формулы преобразования прямоугольной декартовой системы координат в прямоугольную декартову систему:

при параллельном переносе координатных осей:

$$x=X+a,\quad y=Y+b,\quad z=Z+c \tag{4.97}$$

или

$$X=x-a,\quad Y=y-b,\quad Z=z-c, \tag{4.98}$$

где x, y, z — координаты некоторой точки в старой системе координат $Oxyz$; X, Y, Z — координаты той же точки в новой системе координат $O'XYZ$; a, b, c — координаты нового начала O' в старой системе координат;

при повороте координатных осей:

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\alpha_1 + Y\cos\alpha_2 + Z\cos\alpha_3;\\ y &= X\cos\beta_1 + Y\cos\beta_2 + Z\cos\beta_3;\\ z &= X\cos\gamma_1 + Y\cos\gamma_2 + Z\cos\gamma_3,\end{aligned}\right\} \qquad (4.99)$$

где α_1, α_2, α_3 — углы, образуемые осью Ox соответственно с новыми осями OX, OY, OZ; β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 — углы, образуемые соответственно осью Oy и осью Oz с новыми осями (или α_1, β_1, γ_1 — углы, образуемые новой осью OX соответственно со старыми осями Ox, Oy, Oz и т. д.).

Примеры

1. Уравнение поверхности

$$9x^2 + 16y^2 + 36z^2 - 18x + 64y - 216z + 253 = 0$$

привести к каноническому виду и определить вид поверхности.

Преобразуем левую часть уравнения, дополняя соответствующие члены до полных квадратов:

$$9(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 + 4y + 4) + 36(z^2 - 6z + 9) - 9 - 64 - 324 + 253 = 0,$$

$$9(x-1)^2 + 16(y+2)^2 + 36(z-3)^2 = 144.$$

Разделив обе части уравнения на 144, получим

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} + \frac{(z-3)^2}{4} = 1.$$

Вводя новые координаты по формулам (4.98)

$$X = x - 1,\quad Y = y + 2,\quad Z = z - 3,$$

последнее уравнение перепишем в виде

$$\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{9} + \frac{Z^2}{4} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (4.76), заключаем, что данная поверхность — эллипсоид с полуосями $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$.

Следовательно, исходное уравнение также определяет эллипсоид с указанными параметрами и центром в точке $O'(1, -2, 3)$.

Замечание. Если $a = b$, то уравнение (4.76) определяет эллипсоид вращения. При $a = b = c = R$ уравнение (4.76) является уравнением сферы радиуса R с центром в начале координат.

2. Какую поверхность определяет уравнение

$$4x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 16x - 54y - 72z - 65 = 0.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 + 6y + 9) + 36(z^2 - 2z + 1) - 16 + 81 - 36 - 65 = 0$$

или

$$4(x-2)^2 - 9(y+3)^2 + 36(z-1)^2 = 36.$$

Разделив обе части уравнения на 36 и введя новые координаты по формулам

$$X = x - 2,\ Y = y + 3,\ Z = z - 1,$$

получаем

$$\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} + \frac{Z^2}{1} = 1.$$

Изучим форму этой поверхности с помощью метода сечений. Найдем главные сечения. В сечении поверхности плоскостью OXY получим гиперболу

$$\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1,\ Z = 0;$$

в сечении плоскостью OYZ — гиперболу

$$-\frac{Y^2}{4} + \frac{Z^2}{1} = 1,\ X = 0;$$

в сечении плоскостью OXZ — эллипс

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Z^2}{1} = 1,\ Y = 0.$$

Плоскость, параллельная плоскости OXY, пересекает поверхность по гиперболе

$$\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1 - \frac{h^2}{1},\ Z = h.$$

Плоскость, параллельная плоскости OYZ, пересекает поверхность по гиперболе

$$-\frac{Y^2}{4} + \frac{Z^2}{1} = 1 - \frac{h^2}{9},\ X = h.$$

Плоскость, параллельная плоскости OXZ, пересекает поверхность по эллипсу

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Z^2}{1} = 1 + \frac{h^2}{4},\ Y = h.$$

Анализируя сечения, заключаем, что данная поверхность является однополостным гиперболоидом.

Замечание. Уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ определяют однополостные гиперболоиды. Эти уравнения того же типа, что уравнение (4.77). В правой части все эти уравнения содержат единицу, в левой части — только квадраты всех координат, причем два коэффициента положительны, один — отрицателен.

3. Определить вид поверхности

$$3x^2 - 4y^2 + 6z^2 + 24x + 8y - 36z + 122 = 0.$$

Упрощая уравнение, получим

$$3(x^2 + 8x + 16) - 4(y^2 - 2y + 1) + 6(z^2 - 6z + 9) - 48 + 4 - 54 + 122 = 0,$$

$$3(x+4)^2 - 4(y-1)^2 + 6(z-3)^2 = -24,$$

$$\frac{(x+4)^2}{8}-\frac{(y-1)^2}{6}+\frac{(z-3)^2}{4}=-1.$$

Это уравнение можно записать так:

$$\frac{X^2}{8}-\frac{Y^2}{6}+\frac{Z^2}{4}=-1,$$

где $X=x+4,\quad Y=y-1,\quad Z=z-3.$

С помощью метода сечений можно убедиться в том, что уравнение определяет двуполостный гиперболоид.

Замечание. Уравнения $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ являются уравнениями двуполостных гиперболоидов. Эти уравнения, как и уравнение (4.78). в правой части содержат отрицательную единицу, в левой части — два положительных и один отрицательный коэффициент при квадратах координат. Уравнение (4.78) можно записать в виде

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где в правой части стоит единица, но в левой части только один коэффициент положителен, два других — отрицательны.

4. Уравнение поверхности

$$4x^2-9y^2-8x-36y-72z+184=0$$

привести к каноническому виду. Определить, какую поверхность представляет это уравнение.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$4(x^2-2x+1)-9(y^2+4y+4)-72z-4+36+184=0,$$

$$4(x-1)^2-9(y+2)^2=72(z-3).$$

Разделив обе части уравнения на 36, получим

$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=2(z-3)$$

или

$$\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{4}=2Z,$$

где $X=x-1,\quad Y=y+2,\quad Z=z-3.$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (4.81), заключаем, что данная поверхность является гиперболическим параболоидом, для которого $a=3,\ b=2$.

Замечание. Уравнения $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=2x,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=2y$ определяют гиперболические параболоиды. Каковы особенности их расположения относительно системы координат?

5. Какую поверхность представляет уравнение

$$x^2+4y^2-6x+16y+9=0?$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$(x^2-6x+9)+4(y^2+4y+4)-16=0,$$

$$(x-3)^2+4(y+2)^2=16,$$

$$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{4}=1,$$

$$\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{4}=1,$$

где $X=x-3,\ Y=y+2$. Принимая во внимание уравнение (4.82), заключаем, что данное уравнение представляет эллиптический цилиндр, для которого $a=4,\ b=2$.

Замечание. Уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ определяют эллиптические цилиндры с образующей, параллельной соответственно оси Oy оси Ox.

6. Определить вид поверхности

$$y^2-4x-6y+17=0.$$

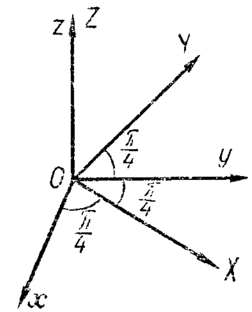

Рис. 4.22

Преобразуя данное уравнение, получим

$$(y^2-6y+9)-4x-9+17=0,\ (y-3)^2=4(x-2).$$

Введем новые координаты $Y=y-3,\ X=x-2$, получим

$$Y^2=4X.$$

Следовательно, данная поверхность является параболическим цилиндром, для которого $p=2$ (см. уравнение (4.84)).

Замечание. Уравнения $y^2=2pz,\ x^2=2pz$ определяют параболические цилиндры с образующей, параллельной соответственно оси Ox, оси Oy.

7. Доказать, что уравнение $z=xy$ определяет гиперболический параболоид.

Перейдем к новой системе координат $OXYZ$, полученной из системы $Oxyz$ путем вращения ее вокруг оси Oz на угол $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Воспользуемся формулами преобразования координат при повороте осей. Так как (рис. 4.22) $\alpha_1=\frac{\pi}{4},\ \alpha_2=\frac{3}{4}\pi,\ \alpha_3=\frac{\pi}{2},\ \beta_1=\frac{\pi}{4},\ \beta_2=\frac{\pi}{4},\ \beta_3=\frac{\pi}{2},\ \gamma_1=\frac{\pi}{2},\ \gamma_2=\frac{\pi}{2},\ \gamma_3=0$, то формулы (4.99) примут вид

$$x=X\frac{\sqrt{2}}{2}-Y\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=X\frac{\sqrt{2}}{2}+Y\frac{\sqrt{2}}{2},\ z=Z.$$

7*

Подставляя выражения для x, y, z в уравнение $z = xy$, получим

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$$

$$\text{или } X^2 - Y^2 = 2Z.$$

Это уравнение получается из уравнения (4.81) при $a = b = 1$. Так как уравнение (4.81) определяет гиперболический параболоид, то уравнение $z = xy$ является уравнением гиперболического параболоида.

8. Найти угол между прямолинейными образующими гиперболического параболоида $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 2z$, проходящими через точку $N\left(4,\ 1,\ \frac{3}{8}\right)$.

Прежде всего точка N лежит на данном гиперболическом параболоиде, так как ее координаты удовлетворяют его уравнению:

$$\frac{4^2}{16} - \frac{1^2}{4} = 2\cdot\frac{3}{8}.$$

Преобразуем уравнение к виду

$$\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) = 2z.$$

Два семейства прямолинейных образующих определяются системами уравнений:

$$\left.\begin{aligned} p\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) &= qz; \\ q\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) &= 2p; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} p'\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) &= 2q'; \\ q'\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) &= p'z. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя координаты точки N в эти уравнения, находим:

$$\left.\begin{aligned} p\left(\frac{4}{4} - \frac{1}{2}\right) &= q\cdot\frac{3}{8}; \\ q\left(\frac{4}{4} + \frac{1}{2}\right) &= 2p; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} p'\left(\frac{4}{4} - \frac{1}{2}\right) &= 2q'; \\ q'\left(\frac{4}{4} + \frac{1}{2}\right) &= p'\cdot\frac{3}{8}, \end{aligned}\right\}$$

откуда $q = \frac{4}{3}p$, $p' = 4q'$.

Следовательно, уравнения прямолинейных образующих примут вид

$$\left.\begin{aligned} 3\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) &= 4z; \\ 4\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) &= 2\cdot 3; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 4\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) &= 2; \\ \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) &= 4z \end{aligned}\right\}.$$

или

$$\left.\begin{aligned} 3x - 6y - 16z &= 0; \\ x + 2y - 6 &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x - 2y - 2 &= 0; \\ x + 2y - 16z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Первая прямая имеет направляющий вектор $\overline{a_1} = \{8,\ -4,\ 3\}$, вторая $\overline{a_2} = \{8,\ 4,\ 1\}$, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{51}{9\sqrt{89}}.$$

Задачи

1. Какие геометрические образы представляются уравнениями:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0;\quad 2)\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 2z;\quad 3)\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1?$$

2. Какие поверхности определяют уравнения:

$$1)\ x^2 = 2py;\quad 2)\ z^2 = 2py;\quad 3)\ z^2 = 2px?$$

В задачах 3—10 привести уравнение к каноническому виду и определить вид поверхности:

3. $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 - 12x - 24y - 24z + 30 = 0$.
4. $-x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4x + 4y - 24z + 52 = 0$.
5. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 2x + 8y + 27z - 18 = 0$.
6. $x^2 + 2y^2 + 6x - 18y - 8z + 49 = 0$.
7. $x^2 - 3y^2 + 8x + 6y + 10 = 0$.
8. $x^2 + 4x - 6y + 22 = 0$.
9. $z^2 - 2z - 8x - 7 = 0$.
10. $z^2 + 4z + 6y - 20 = 0$.
11. Доказать, что уравнение $z^2 = xy$ определяет конус.
12. Найти прямолинейные образующие однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1,$$

проходящие через точку $N(4,\ -3,\ -2)$.

Ответы

1. 1) конус, 2) гиперболический параболоид, 3) гиперболический цилиндр. 2. 1) — 3) параболический цилиндр. 3. Однополостный гиперболоид. 4. Двуполостный гиперболоид. 5. Конус. 6. Эллиптический параболоид. 7. Гиперболический цилиндр. 8. Параболический цилиндр. 9. Параболический цилиндр. 10. Параболический цилиндр. 11. Указание. Повернуть систему координат вокруг оси Oz на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (см. пример 7).

12. $\left.\begin{aligned} 3x + 4y - 6z - 12 &= 0; \\ 3x - 4y + 6z - 12 &= 0 \end{aligned}\right\}$ и $\left.\begin{aligned} y + 3 &= 0; \\ x + 2z &= 0. \end{aligned}\right\}$

Глава 5. Матрицы и их применение

§ 5. 1. Матрицы, основные действия над ними

Матрицей называется система mn величин, расположенных в прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов. Величины, из которых составлена матрица, называются ее *элементами*. Элемент матрицы, стоящий на пересечении строки с номером k (номера считаются сверху вниз) и столбца с номером l (номера считаются слева направо) обозначается через a_{kl}. Числа k, l называются *индексами* элемента.

Матрица обозначается одним из символов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}. \quad (5.\ 1)$$

Квадратной матрицей n-го порядка называется матрица, имеющая n строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (5.\ 2)$$

Определителем квадратной матрицы называется такой определитель, у которого элементы те же, что и у матрицы и стоят на тех же местах.

Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ ее, составленная из элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Симметрической матрицей называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу, т. е.

$$a_{kl} = a_{lk}. \quad (5.\ 3)$$

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, не находящиеся на главной диагонали, равны нулю.

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой каждый элемент, находящийся на главной диагонали, равен единице.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Суммой матриц A и B, имеющих одинаковое число строк и одинаковое число столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad (5.\ 4)$$

называется третья матрица C

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}, \quad (5.\ 5)$$

каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых матриц, т. е.

$$c_{kl} = a_{kl} + b_{kl} \quad (k = 1, 2, \dots, m;\ l = 1, 2, \dots, n). \quad (5.\ 6)$$

Сумма матриц A и B обозначается так:

$$C = A + B. \quad (5.\ 7)$$

Аналогично определяется *разность* матриц A и B

$$C = A - B, \quad (5.\ 8)$$

где

$$c_{kl} = a_{kl} - b_{kl}. \quad (5.\ 9)$$

Произведением матрицы A на число λ называется матрица B, которая получается из матрицы A умножением всех ее элементов на λ:

$$b_{kl} = \lambda a_{kl}. \quad (5.\ 10)$$

Обозначение:

$$B = \lambda A. \quad (5.\ 11)$$

Матрицы A и B называются *равными*

$$A = B, \quad (5.\ 12)$$

если они имеют одно и то же число строк и одно и то же число столбцов и если при этом каждый элемент a_{kl} матрицы A равен соответствующему элементу b_{kl} матрицы B.

Произведением AB двух квадратных матриц A и B одного порядка называется третья квадратная матрица C того же порядка, составленная по следующему правилу: элемент c_{kl}, стоящий в матрице C на пересечении k-й строки с l-м столбцом, есть сумма произведений элементов k-й строки матрицы A на соответствующие элементы l-го столбца матрицы B:

$$c_{kl} = a_{k1}b_{1l} + a_{k2}b_{2l} + a_{k3}b_{3l} + \dots + a_{kn}b_{nl}. \quad (5.\ 13)$$

Определитель произведения AB квадратных матриц A и B равен произведению их определителей:

$$D_{AB} = D_A \cdot D_B. \quad (5.\ 14)$$

Определение произведения можно распространить и на неквадратные матрицы, у которых число *столбцов* матрицы множимого A равно числу *строк* матрицы множителя B. При соблюдении этого условия множимое A может иметь любое число (m) строк, а матрица B — любое число (n) столбцов. Матрица $C = AB$ будет иметь m строк и n столбцов, ее элементы вычисляются по формуле (5. 13).

Основные свойства действий над матрицами:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
5. $A(BC) = (AB)C$;
6. $A(B + C) = AB + AC$.

Примеры

1. Найти сумму матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -5 \\ -1 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -7 & -5 & 5 \\ 1 & -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Обе матрицы имеют одинаковое число строк (три) и одинаковое число столбцов (три). Такие матрицы можно складывать. По формуле (5. 6) получаем

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 + (-1) & -3 + 3 & 4 + (-4) \\ 7 + (-7) & 6 + (-5) & -5 + 5 \\ -1 + 1 & 8 + (-8) & 9 + (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сумма матриц оказалась единичной матрицей.

2. Даны три матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 8 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $3A + 4B - 2C$.

По определению произведения матрицы на число, получаем:

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 9 & -12 & 15 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}, \quad 4B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 8 & 12 & 16 \\ 4 & -20 & 24 \end{pmatrix},$$

$$2C = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 2 & -6 & 4 \\ 16 & 12 & -14 \end{pmatrix}.$$

На основании формул (5. 6) и (5. 9) находим

$$3A + 4B - 2C = \begin{pmatrix} 3+4-6 & 0-4-8 & 6+0-10 \\ 9+8-2 & -12+12-(-6) & 15+16-4 \\ 6+4-16 & 3+(-20)-12 & -9+24-(-14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -4 \\ 15 & 6 & 27 \\ -6 & -29 & 29 \end{pmatrix}.$$

3. Найти произведение AB двух квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Обе матрицы являются квадратными матрицами второго порядка. Такие матрицы можно умножать. Применим формулу (5. 13). Эта формула имеет следующий смысл: чтобы получить элемент матрицы произведения AB, стоящий на пересечении строки k и столбца l, нужно взять сумму произведений элементов строки k матрицы A на соответственные элементы столбца l матрицы B («скалярное произведение» строки k матрицы A на столбец l матрицы B).

В соответствии с формулой (5. 13) элемент c_{11} получается как сумма произведений элементов первой строки матрицы A на элементы первого столбца матрицы B, элемент c_{21} — как сумма произведений элементов второй строки матрицы A на элементы первого столбца матрицы B:

$$c_{11} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 17, \quad c_{21} = 5 \cdot 3 + (-6)\,7 = -27.$$

Аналогично определяются элементы c_{12} и c_{22}:

$$c_{12} = 1\,(-4) + 2 \cdot 8 = 12, \quad c_{22} = (-4)\,5 + (-6)\,8 = -68.$$

Следовательно,

$$C = \begin{pmatrix} 17 & -27 \\ 12 & -68 \end{pmatrix}.$$

4. Найти произведения AB и BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

По формуле (5. 13) получаем элементы c_{kl} матрицы AB:

$$c_{11} = 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + (-7)\,2 = 18; \quad c_{21} = (-1)\,4 + 6 \cdot 4 + (-3)\,2 = 14;$$
$$c_{31} = 2 \cdot 4 + (-4)\,4 + 1 \cdot 2 = -6;$$
$$c_{12} = 5\,(-1) + 3\,(-2) + (-7)\,0 = -11; \quad c_{22} = (-1)(-1) + 6\,(-2) + (-3)\,0 = -11; \quad c_{32} = 2\,(-1) + (-4)(-2) + 1 \cdot 0 = 6;$$
$$c_{13} = 5 \cdot 3 + 3\,(-6) + (-7)\,3 = -24; \quad c_{23} = (-1)\,3 + 6\,(-6) + (-3)\,3 = -48; \quad c_{33} = 2 \cdot 3 + (-4)(-6) + 1 \cdot 3 = 33.$$

Итак,

$$AB=\begin{pmatrix} 18 & -11 & -24 \\ 14 & -11 & -48 \\ -6 & 6 & 33 \end{pmatrix}.$$

По той же формуле (5. 13) находим элементы c_{kl} матрицы BA. Меняя местами матрицы A и B, умножая последовательно первую, вторую, третью строки матрицы B на первый столбец матрицы A, получим элементы первого столбца матрицы BA:

$$c'_{11}=4\cdot 5+(-1)(-1)+3\cdot 2=27;\ c'_{21}=4\cdot 5+(-2)(-1)+$$
$$+(-6)\,2=10;\ c'_{31}=2\cdot 5+0\,(-1)+3\cdot 2=16.$$

Аналогично вычисляются элементы второго столбца:

$$c'_{12}=4\cdot 3+(-1)\,6+3\,(-4)=-6;\ c'_{22}=4\cdot 3+(-2)\,6+$$
$$+(-6)(-4)=24;\ c'_{32}=2\cdot 3+0\cdot 6+3\,(-4)=-6$$

и элементы третьего столбца матрицы BA:

$$c'_{13}=4\,(-7)+(-1)(-3)+3\cdot 1=-22;\ c'_{23}=4\,(-7)+(-2)(-3)+$$
$$+(-6)\,1=-28;\ c'_{33}=2\,(-7)+0\,(-3)+3\cdot 1=-11.$$

Следовательно,

$$BA=\begin{pmatrix} 27 & -6 & -22 \\ 10 & 24 & -28 \\ 16 & -6 & -11 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая матрицы AB и BA и пользуясь определением равенства матриц, заключаем, что $AB\neq BA$.

Замечание 1. Умножение матриц не подчиняется закону переместительности.

Замечание 2. Для проверки правильности результатов, полученных при умножении квадратных матриц, можно воспользоваться равенством (5. 14). Так как

$$D_A=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}=11,\quad D_B=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=12,$$

$$D_{AB}=\begin{vmatrix} 18 & -11 & -24 \\ 14 & -11 & -48 \\ -6 & 6 & 33 \end{vmatrix}=132,$$

то равенство (5. 14) действительно выполняется.

Замечание 3. Из формулы (5. 14) следует равенство

$$D_{BA}=D_A\cdot D_B.$$

В данном примере можно непосредственно убедиться, что $D_{BA}=132$, следовательно, указанное равенство выполняется.

5. Найти произведения AB и BA двух матриц

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, поэтому можно умножать матрицу A на матрицу B. По формуле (5. 13) находим:

$$c_{11}=1\cdot 2+0\cdot 1+2\cdot 3+(-1)\,4=4;$$
$$c_{21}=3\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 3+2\cdot 4=15;$$
$$c_{12}=1\cdot 1+0\cdot 0+2\,(-2)+(-1)(-1)=-2;$$
$$c_{22}=3\cdot 1+1\cdot 0+0\,(-2)+2\,(-1)=1.$$

Следовательно,

$$AB=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы A, поэтому можно умножать матрицу B на матрицу A:

$$BA=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 6 & -7 \\ 1 & -1 & 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. Систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2&=-5; \\ 7x_1-4x_2&=26 \end{aligned}\right\}\qquad (A)$$

записать в матричном виде.

Систему эту можно представить так:

$$\begin{pmatrix} 2x_1+3x_2 \\ 7x_1-4x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 26 \end{pmatrix}.\qquad (B)$$

Действительно, согласно определению, равенство двух матриц имеет место в том и только в том случае, когда их соответственные элементы равны. Поэтому последнее равенство имеет тот же смысл, что и исходная система. Матрицу, стоящую в левой части равенства (B), можно представить в виде произведения AX двух матриц

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}\ \text{и}\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (A) принимает вид

$$AX=B,\ \text{где}\ B=\begin{pmatrix} -5 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Задачи

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ 5 & 6 & -7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}.$$

Составить матрицу $3A+2B$.

2. Найти произведения AB и BA двух квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 7 & -2\end{pmatrix}.$$

3. Найти произведение AB матриц

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы произведения двух матриц

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ -5 & 6 & 7\\ 2 & -3 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 6 & -1\\ 0 & -5 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

5. Найти произведение AB двух матриц

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 0 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\\ 1 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}.$$

Можно ли умножать матрицу B на матрицу A?

6. Записать в матричной форме систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}5x_1+2x_2&=11;\\ 7x_1-6x_2&=9.\end{aligned}\right\}$$

Ответы

1. $\begin{pmatrix}8 & 3 & -5\\ 18 & -4 & -5\\ 19 & 28 & -9\end{pmatrix}$. 2. $AB=\begin{pmatrix}3 & 10\\ 47 & -8\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}26 & -13\\ 24 & -31\end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

4. $D_{AB}=396$. 5. $AB=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 5 & 10\\ 11 & 0\end{pmatrix}$.

Матрицу B на матрицу A умножать нельзя, так как число столбцов B не равно числу строк A. 6. $AX=B$, где $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & -6\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}11\\ 9\end{pmatrix}$.

§ 5. 2. Линейные преобразования на плоскости и в пространстве. Аффинные преобразования. Собственные векторы матрицы

Если каждой точке M плоскости (пространства) поставлена в соответствие определенная точка M' той же плоскости (пространства), то говорят, что задано *преобразование* плоскости (пространства).

Если плоскость (пространство) подвергнуть некоторому преобразованию A, потом преобразованию B, то в результате возникает новое преобразование, которое называется *произведением* преобразования A на преобразование B и обозначается символом BA.

Преобразование, которое каждой точке M ставит в соответствие точку M', совпадающую с M, называется *тождественным*.

Если произведение BA преобразования A на преобразование B является тождественным, то преобразование B называется *обратным* по отношению к A.

Преобразование плоскости, выражаемое формулами вида

$$\left.\begin{aligned}x'&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13};\\ y'&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23},\end{aligned}\right\}\qquad (5.\ 15)$$

называется *линейным*.

Матрица

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\qquad (5.\ 16)$$

составленная из коэффициентов при x и y, называется матрицей линейного преобразования (5. 15), а ее определитель — определителем указанного преобразования.

Линейное преобразование плоскости (5. 15) называется *аффинным*, если его определитель отличен от нуля, т. е.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.\qquad (5.\ 17)$$

Аффинное преобразование плоскости вполне определяется заданием трех неколлинеарных точек, в которые должны перейти три данные неколлинеарные точки.

Линейное преобразование пространства определяется формулами

$$\left.\begin{aligned}x'&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14};\\ y'&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24};\\ z'&=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}.\end{aligned}\right\}\qquad (5.\ 18)$$

Линейное преобразование (5. 18) называется *аффинным* преобразованием пространства, если его определитель отличен от нуля, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5. 19}$$

Аффинное преобразование пространства вполне определяется заданием четырех некомпланарных точек, в которые должны перейти четыре данные некомпланарные точки.

При аффинных преобразованиях плоскости:

1) прямые линии переходят в прямые;

2) параллельные прямые преобразуются в параллельные прямые;

3) сохраняется простое отношение трех точек;

4) линии второго порядка преобразуются в линии второго порядка (причем эллипс переходит в эллипс, гипербола — в гиперболу, парабола — в параболу);

5) сохраняется отношение ориентированных площадей соответственных фигур, это отношение равно определителю преобразования (5. 17).

При аффинных преобразованиях пространства:

1) прямые переходят в прямые, плоскости — в плоскости;

2) сохраняется параллельность прямых и плоскостей;

3) сохраняется простое отношение трех точек;

4) поверхности второго порядка преобразуются в поверхности второго порядка (причем сохраняется тип поверхности);

5) сохраняется отношение ориентированных объемов соответственных тел, это отношение равно определителю преобразования (5. 19).

Ненулевой вектор $\bar{p}$ называется *собственным вектором* квадратной матрицы A, если линейное преобразование с матрицей A переводит вектор $\bar{p}$ в коллинеарный ему вектор $\bar{p}'$, т. е.

$$\bar{p}' = \lambda \bar{p}. \tag{5. 20}$$

Число λ называется *собственным числом* (или «собственным значением») матрицы A, соответствующим собственному вектору $\bar{p}$.

Координаты l, m собственных векторов матрицы (5. 16) находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \lambda l &= a_{11} l + a_{12} m; \\ \lambda m &= a_{21} l + a_{22} m \end{aligned}\right\} \tag{5. 21}$$

или

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) l + a_{12} m &= 0; \\ a_{21} l + (a_{22} - \lambda) m &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5. 22}$$

где λ — корень характеристического уравнения для матрицы A:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5. 23}$$

Собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{5. 24}$$

находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) l + a_{12} m + a_{13} n &= 0; \\ a_{21} l + (a_{22} - \lambda) m + a_{23} n &= 0; \\ a_{31} l + a_{32} m + (a_{33} - \lambda) n &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5. 25}$$

где λ — корень характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5. 26}$$

Если матрица A — симметрическая, то все корни ее характеристического уравнения действительны.

Собственные векторы, соответствующие двум различным корням характеристического уравнения, взаимно перпендикулярны.

Для всякой симметрической матрицы (5. 24) существует тройка взаимно перпендикулярных собственных векторов.

Примеры

1. Найти преобразование, переводящее точки $M_1(0, 1)$, $M_2(1, 0)$, $M_3(1, 1)$ в точки $M_1'(2, -1)$, $M_2'(1, 4)$, $M_3'(5, 6)$. В какую точку переходит при этом преобразовании точка $N(-1, 2)$? Какая точка преобразуется в точку $L'(-2, -3)$?

Задача сводится к определению коэффициентов линейного преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11} x + a_{12} y + a_{13}; \\ y' &= a_{21} x + a_{22} y + a_{23}. \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Подставляя координаты соответственных точек M_1 и M_1' в эти уравнения, получим

$$2 = a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 + a_{13}, \quad -1 = a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 + a_{23}.$$

Подстановка координат точек M_2 и M_2' приводит к уравнениям

$$1 = a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + a_{13}, \quad 4 = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 + a_{23}.$$

Подставляя координаты точек M_3 и M_3' в уравнения (A), находим

$$5 = a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 1 + a_{13}, \quad 6 = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 1 + a_{23}.$$

Итак, для определения шести неизвестных коэффициентов получено шесть уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{12}+a_{13}=2;\ a_{22}+a_{23}=-1;\ a_{11}+a_{13}=1;\ a_{21}+a_{23}=4; \\ a_{11}+a_{12}+a_{13}=5;\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=6. \end{array}\right\} \quad (B)$$

Решая эту систему (для чего можно, например, из первого и пятого уравнения вычесть третье, из шестого — второе и четвертое), получим

$$a_{11}=3,\ a_{12}=4,\ a_{13}=-2,\ a_{21}=7,\ a_{22}=2,\ a_{23}=-3.$$

Следовательно, формулы данного преобразования имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} x'=3x+4y-2; \\ y'=7x+2y-3. \end{array}\right\}$$

Это преобразование является аффинным, так как его определитель отличен от нуля.

Найдем, в какую точку переходит при данном преобразовании точка $N(-1,\ 2)$. Подставляя ее координаты в формулы преобразования, находим:

$$x'=3(-1)+4\cdot 2-2=3;\quad y'=7(-1)+2\cdot 2-3=-6.$$

Итак, точка $N(-1,\ 2)$ переходит в точку $N'(3,\ -6)$.

Подставляя координаты точки L' в эти формулы, получим:

$$-2=3x+4y-2;\quad -3=7x+2y-3;$$

$$3x+4y=0;\qquad 7x+2y=0,$$

откуда $x=0,\ y=0$. Следовательно, в точку $L'(-2,\ -3)$ переходит точка $L(0,\ 0)$.

2. Найти преобразование, обратное линейному преобразованию

$$\left.\begin{array}{l} x'=2x+3y-7; \\ y'=3x+5y-9. \end{array}\right\} \quad (A)$$

Это преобразование является аффинным, так как его определитель отличен от нуля. Если данное преобразование переводит точку $M(x,\ y)$ в точку $M'(x',\ y')$, то обратное ему преобразование переводит точку $M'(x',\ y')$ в точку $M(x,\ y)$. Чтобы решить задачу, нужно выразить x и y через $x',\ y'$. Так как определитель преобразования отличен от нуля, то система (А) разрешима относительно x и y. Решение можно найти с помощью определителей или способом исключения одного из неизвестных.

Умножая первое уравнение на 5, второе на -3, складывая почленно, получим $5x'-3y'=x-8$, откуда $x=5x'-3y'+8$.

Умножая первое уравнение на -3, второе на 2 и складывая почленно, получим $-3x'+2y'=y+3$, откуда $y=-3x'+2y'-3$.

Следовательно, обратное преобразование имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} x=5x'-3y'+8; \\ y=-3x'+2y'-3. \end{array}\right\}$$

3. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение (5. 23) в данном случае принимает вид

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$\lambda^2-13\lambda+36=0,$$

откуда

$$\lambda_1=4,\ \lambda_2=9.$$

Система уравнений (5. 22) для определения координат собственных векторов при $\lambda_1=4$ запишется так:

$$\left.\begin{array}{l} (5-4)l+2m=0; \\ 2l+(8-4)m=0 \end{array}\right\} \text{ или } \left.\begin{array}{l} l+2m=0; \\ 2l+4m=0. \end{array}\right\}$$

Второе уравнение является следствием первого. Из первого уравнения находим отношение координат собственного вектора $l:m=2:-1$. Получен собственный вектор $\bar{p}_1=\{2,\ -1\}$.

При $\lambda_2=9$ получаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} (5-9)l+2m=0; \\ 2l+(8-9)m=0 \end{array}\right\} \text{ или } \left.\begin{array}{l} -4l+2m=0; \\ 2l-\ m=0, \end{array}\right\}$$

откуда находим второй собственный вектор $\bar{p}_2=\{1,\ 2\}$.

Как и следовало ожидать, $\bar{p}_1\perp\bar{p}_2$, ибо $\bar{p}_1\bar{p}_2=2\cdot 1+(-1)\times\times 2=0$.

Замечание. Зная один собственный вектор, мы тем самым знаем бесчисленное множество других, ибо всякий вектор, коллинеарный с собственным, сам является собственным и имеет то же самое собственное число. Например, при $\lambda_1=4$ собственными являются векторы $\bar{q}_1=\{20,\ -10\}$, $\bar{l}_1=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$, $\bar{r}_1=\{-2,\ 1\}$.

4. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение (5. 26) в данном случае запишется так:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Применяя правило, определяемое формулой (2. 2), находим

$$(1-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)+3+3-9(5-\lambda)-(1-\lambda)-(1-\lambda)=0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим кубическое уравнение

$$\lambda^3-7\lambda^2+36=0. \qquad \text{(A)}$$

Чтобы решить это уравнение, поступим следующим образом. Методом проб найдем один из корней уравнения λ_1, разделив потом левую часть уравнения на $\lambda-\lambda_1$ и приравняв нулю результат, получим квадратное уравнение. Корень λ_1 ищем среди делителей свободного члена уравнения (А). Для уравнения третьей степени имеет место теорема Виета, в соответствии с которой произведение корней равно свободному члену. Нетрудно убедиться, что $\lambda_1=3$ есть корень уравнения (А). Так как

$$(\lambda^3-7\lambda^2+36):(\lambda-3)=\lambda^2-4\lambda-12,$$

то для определения двух других корней получим квадратное уравнение $\lambda^2-4\lambda-12=0$, откуда $\lambda_2=6$, $\lambda_3=-2$.

Найдем собственный вектор $\bar{p}_1$, соответствующий собственному значению $\lambda_1=3$. Система уравнений (5. 25) примет вид

$$\left.\begin{aligned} (1-3)\,l+m+3n&=0; \\ l+(5-3)\,m+n&=0; \\ 3l+m+(1-3)\,n&=0 \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} -2l+m+3n&=0; \\ l+2m+n&=0; \\ 3l+m-2n&=0. \end{aligned}\right\}$$

Из последней системы находим

$$l:m:n=1:-1:1, \quad \bar{p}_1=\{1,\ -1,\ 1\}.$$

Аналогично определяем

$$\bar{p}_2=\{1,\ 2,\ 1\}, \quad \bar{p}_3=\{1,\ 0,\ -1\}.$$

Легко видеть, что

$$\bar{p}_1 \perp \bar{p}_2, \quad \bar{p}_2 \perp \bar{p}_3, \quad \bar{p}_1 \perp \bar{p}_3.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^3-12\lambda^2+36\lambda=0,$$

$$\text{т. е. } \lambda(\lambda^2-12\lambda+36)=0,$$

имеет корни $\lambda_1=\lambda_2=6$, $\lambda_3=0$.

Система уравнений (5. 25) при $\lambda_3=0$ запишется так:

$$\left.\begin{aligned} 5l-2m-n&=0; \\ -2l+2m-2n&=0; \\ -l-2m+5n&=0. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда находим отношение координат собственного вектора

$$l:m:n=1:2:1, \quad \bar{p}_1=\{1,\ 2,\ 1\}.$$

При $\lambda_1=\lambda_2=6$ система уравнений

$$\left.\begin{aligned} (5-6)\,l-2m-n&=0; \\ -2l+(2-6)\,m-2n&=0; \\ -l-2m+(5-6)\,n&=0 \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} -l-2m-n&=0; \\ -2l-4m-2n&=0; \\ -l-2m-n&=0 \end{aligned}\right\}$$

сводится к одному уравнению $l+2m+n=0$, поэтому отношение координат собственных векторов однозначно определить нельзя. Собственному значению $\lambda=6$ соответствует бесчисленное множество *неколлинеарных* собственных векторов, перпендикулярных к вектору $\bar{p}_1=\{1,\ 2,\ 1\}$. Из этих векторов можно произвольным образом выбрать два ортогональных вектора. Например, в качестве $\bar{p}_2$ возьмем вектор с координатами $l_2=1$, $m_2=-1$, $n_2=1$ (они удовлетворяют уравнению $l+2m+n=0$). Тогда координаты собственного вектора $\bar{p}_3=\{l_3,\ m_3,\ n_3\}$, ортогонального $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$, определятся уравнениями

$$l_3+2m_3+n_3=0, \quad l_3\cdot 1+m_3(-1)+n_3\cdot 1=0,$$

откуда

$$l_3=1, \quad m_3=0, \quad n_3=-1.$$

Итак, получено три взаимно перпендикулярных собственных вектора:

$$\bar{p}_1=\{1,\ 2,\ 1\}, \quad \bar{p}_2=\{1,\ -1,\ 1\}, \quad \bar{p}_3=\{1,\ 0,\ -1\}.$$

Задачи

1. Найти преобразование, переводящее точки $M_1(0,\ 0,\ 0)$, $M_2(1,\ 0,\ 0)$, $M_3(0,\ 1,\ 0)$, $M_4(0,\ 0,\ 1)$ в точки $M_1'(6,\ -5,\ 2)$, $M_2'(8,\ -1,\ 3)$, $M_3'(4,\ -2,\ 5)$, $M_4'(1,\ -3,\ -5)$. В какую точку перейдет при этом точка $N(2,\ 3,\ 1)$? Какая точка преобразуется в точку $L'(1,\ 4,\ -1)$?

2. Найти преобразование, обратное данному преобразованию:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + 2y - 5; \\ y' &= 2x + 3y - 4. \end{aligned}\right\}$$

В задачах 3—9 определить собственные значения и собственные векторы матрицы:

$$3.\ A = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}. \quad 4.\ A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$5.\ A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}. \quad 6.\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$7.\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad 8.\ A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$9.\ A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & 11 & 2 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответы

1. $x' = 2x - 2y - 5z + 6,\quad y' = 4x + 3y + 2z - 5,\quad z' = x + 3y - 7z + 2$; $N(-1, 14, 6)$, $L(1, 1, 1)$. **2.** $x = 2y' - 3x' - 7$, $y = 2x' - y' + 6$. **3.** $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 18$, $\bar{p}_1 = \{1, -1\}$, $\bar{p}_2 = \{1, 1\}$. **4.** $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$, $p_1 = \{1, 3\}$, $p_2 = \{3, -1\}$. **5.** Нет собственных значений. **6.** $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 0$, $\bar{p}_1 = \{1, 1, -2\}$, $\bar{p}_2 = \{1, 1, 1\}$, $\bar{p}_3 = \{1, -1, 0\}$. **7.** $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 0$, $\bar{p}_1 = \{1, 1, -1\}$, $\bar{p}_2 = \{1, -2, -1\}$, $\bar{p}_3 = \{1, 0, 1\}$. **8.** $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$, $\bar{p}_1 = \{1, 2, 2\}$, $\bar{p}_2 = \{2, 1, -2\}$, $\bar{p}_3 = \{2, -2, 1\}$. **9.** $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 18$, $\lambda_3 = -9$, $\bar{p}_1 = \{1, 2, 2\}$, $\bar{p}_2 = \{-2, 2, -1\}$, $\bar{p}_3 = \{2, 1, -2\}$.

§ 5. 3. Приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду

Общее уравнение второго порядка относительно x и y

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (5.\ 27)$$

с помощью преобразований прямоугольной системы координат

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha; \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}\right\} (5.\ 28) \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} X &= x' - x_0; \\ Y &= y' - y_0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.\ 29)$$

приводится к одному из канонических уравнений:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \ \text{(эллипс)}; \qquad (5.\ 30)$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \ \text{(гипербола)}; \qquad (5.\ 31)$$

$$Y^2 = 2pX \ \text{(парабола)}; \qquad (5.\ 32)$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0 \ \text{(две пересекающиеся прямые)}; \qquad (5.\ 33)$$

$$X^2 = a^2 \ \text{(две параллельные прямые)}; \qquad (5.\ 34)$$

$$X^2 = 0 \ \text{(две совпадающие прямые)}; \qquad (5.\ 35)$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1 \ \text{(мнимый эллипс)}; \qquad (5.\ 36)$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0 \ \text{(две мнимые пересекающиеся прямые)}; \qquad (5.\ 37)$$

$$X^2 = -a^2 \ \text{(две мнимые параллельные прямые)}. \qquad (5.\ 38)$$

Если координатные оси новой системы $Ox'y'$ направить по двум взаимно перпендикулярным собственным векторам матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ a_{21} = a_{12}, \qquad (5.\ 39)$$

составленной из коэффициентов уравнения (5. 27), то члены второго порядка

$$\Phi(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy \qquad (5.\ 40)$$

преобразуются в члены второго порядка

$$\Phi'(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2, \qquad (5.\ 41)$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения этой матрицы.

Полученное уравнение

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0 \qquad (5.\ 42)$$

с помощью преобразования параллельного переноса (5. 29) приводится к каноническому виду, т. е. к одному из уравнений (5. 30)—(5. 38).

Примеры

1. Определить вид, параметры и расположение линии по ее уравнению

$$13x^2 + 10xy + 13y^2 - 72 = 0.$$

Выпишем коэффициенты уравнения: $a_{11} = 13$, $2a_{12} = 10$, $a_{12} = 5$, $a_{22} = 13$, $a_{33} = -72$, $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$ и составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет собственные значения $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 18$ и собственные векторы $\bar{p}_1 = \{1, -1\}$, $\bar{p}_2 = \{1, 1\}$. Вектор $\bar{p}_1$ образует с осью Ox угол α, определяемый равенствами (см. 3. 20):

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\alpha = -45°$. Повернем систему Oxy вокруг начала на угол $\alpha = -45°$ (т. е. направим ось Ox' по вектору $\bar{p}_1$, ось Oy' — по $\bar{p}_2$). В новой системе $Ox'y'$ уравнение линии в соответствии с формулой (5. 41) принимает вид

$$8x'^2 + 18y'^2 = 72.$$

Разделив обе части уравнения на 72, получим

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $a = 3$, $b = 2$.

2. Определить вид, параметры и расположение линии

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Матрица A, составленная из коэффициентов при старших членах и ее характеристическое уравнение соответственно примут вид

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$.

Находим собственные векторы: $\bar{p}_1 = \{2, -1\}$, $\bar{p}_2 = \{1, 2\}$. Вектор $\bar{p}_1$ образует с осью Ox угол α, определяемый равенствами:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \qquad (A)$$

Повернем систему Oxy на данный угол α, т. е. совершим преобразование координат (5. 28):

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'; \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

В соответствии с формулой (5. 41) члены второй степени преобразуются следующим образом:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 = 4x'^2 + 9y'^2.$$

Подставляя выражения для x и y из формулы (B) в оставшиеся члены уравнения, получим

$$-32x - 56y + 80 = -32\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 56\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 80 = -\frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{144}{\sqrt{5}}y' + 80.$$

Следовательно, исходное уравнение примет вид

$$4x'^2 + 9y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{144}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$4\left(x'^2 - 2\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{5}\right) + 9\left(y'^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}y' + \frac{64}{5}\right) - \frac{4}{5} - \frac{9\cdot 64}{5} + 80 = 0, \quad 4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36. \qquad (C)$$

Совершим теперь преобразование параллельного переноса по формулам

$$\left.\begin{aligned} X &= x' - \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ Y &= y' - \frac{8}{\sqrt{5}}. \end{aligned}\right\} \qquad (D)$$

Уравнение (C) перепишем в виде

$$4X^2 + 9Y^2 = 36 \text{ или } \frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1. \qquad (E)$$

Следовательно, исходное уравнение является уравнением эллипса с полуосями $a = 3$, $b = 2$.

Вид кривой и ее параметры a и b определены. Чтобы выяснить расположение линии, найдем точку, в которой находится начало новой системы координат $O'XY$. Так как для точки O' (начало системы $O'XY$) $X = 0$, $Y = 0$, то из формул (D) определим $x' = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y' = \frac{8}{\sqrt{5}}$, а из формул (B) найдем $x = 2$, $y = 3$. Итак, началом системы $O'XY$ служит точка O' (2, 3).

Построив в старой системе координат Oxy точку O' (2, 3), отложив от нее векторы $\bar{p}_1 = \{2, -1\}$, $\bar{p}_2 = \{1, 2\}$ и направив по ним координатные оси $O'X$, $O'Y$, построим эллипс (E) в новой системе $O'XY$. Тем самым определено расположение эллипса относительно старой системы координат Oxy.

3. Определить вид, параметры и расположение линии

$$7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0.$$

Характеристическое уравнение матрицы A, составленной из коэффициентов при старших членах,

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 \\ -12 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = 16$. Этим собственным значениям соответствуют собственные векторы $\bar{p}_1 = \{3, 4\}$, $\bar{p}_2 = \{4, -3\}$.

Вектор $\overline{p}_1$ образует с осью Ox угол α, определяемый равенствами:

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}; \quad \sin\alpha = \frac{4}{5}.$$

Повернем систему координат Oxy на угол α. Формулы преобразования (5. 28) запишутся так:

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'; \quad y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'. \qquad (A)$$

Исходное уравнение линии примет вид

$$-9x'^2 + 16y'^2 - 38\left(\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\right) + 24\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right) + 175 = 0$$

или

$$-9x'^2 + 16y'^2 - \frac{18}{5}x' + \frac{224}{5}y' + 175 = 0.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$-9\left(x'^2 + \frac{2}{5}x' + \frac{1}{25}\right) + 16\left(y'^2 + \frac{14}{5}y' + \frac{49}{25}\right) + 9\cdot\frac{1}{25} - 16\cdot\frac{49}{25} + 175 = 0$$

или

$$-9\left(x' + \frac{1}{5}\right)^2 + 16\left(y' + \frac{7}{5}\right)^2 + 144 = 0. \qquad (B)$$

После преобразования параллельного переноса

$$X = x' + \frac{1}{5}, \quad Y = y' + \frac{7}{5} \qquad (C)$$

уравнение (B) запишется так

$$-9X^2 + 16Y^2 + 144 = 0 \text{ или } 9X^2 - 16Y^2 - 144 = 0,$$

откуда

$$\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1. \qquad (D)$$

Уравнение (D) определяет гиперболу с полуосями $a = 4$, $b = 3$. Найдем точку, в которой находится начало системы $O'XY$. Так как для этой точки $X = 0$, $Y = 0$, то из формул (C) и (A) находим $x = 1$, $y = -1$. Построив точку $O'(1, -1)$ относительно старой системы Oxy, отложив из этой точки векторы $\overline{p}_1 = \{3, 4\}$, $\overline{p}_2 = \{4, -3\}$ и направив по ним координатные оси $O'X$, $O'Y$, построим гиперболу (D) в новой системе $O'XY$.

4. Определить вид, параметры и расположение линии

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$. Им соответствуют собственные векторы $\overline{p}_1 = \{1, 1\}$, $\overline{p}_2 = \{-1, 1\}$. Вектор $\overline{p}_1$ образует с осью Ox угол α, определяемый равенствами:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (A)$$

Повернем систему Oxy на угол α, т. е. совершим преобразование

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'; \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

В новой системе $Ox'y'$ уравнение кривой примет вид

$$2x'^2 - 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 4 = 0.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$2\left(x'^2 - 2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}x' + 2\right) + \frac{8}{\sqrt{2}}y' - 4 + 4 = 0,$$

$$2(x' - \sqrt{2})^2 = -\frac{8}{\sqrt{2}}Y'.$$

С помощью преобразования параллельного переноса

$$\left.\begin{aligned} X &= x' - \sqrt{2}; \\ Y &= y' \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

последнее уравнение приводится к каноническому виду

$$X^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}Y. \qquad (D)$$

Уравнение (D) определяет параболу с параметром $p = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$. Из уравнений (C) и (B) находим точку $O'(1, 1)$ — начало новой системы координат $O'XY$. В этой точке находится вершина параболы.

5. Определить форму и расположение линии

$$x^2 + y^2 - 2xy - x + y - 2 = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$. Этим собственным значениям соответствуют собственные векторы $\overline{p}_1 = \{1, -1\}$, $\overline{p}_2 = \{1, 1\}$. Вектор $\overline{p}_1$ образует с осью Ox угол α, определяемый равенствами:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Формулы преобразования координат при повороте осей на угол α запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y', \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Уравнение линии в новой системе координат примет вид

$$2x'^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) - 2 = 0,$$

$$2x'^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' - 2 = 0, \quad x'^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x' - 1 = 0.$$

Преобразуем последнее уравнение:

$$\left(x'^2 - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}x' + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8} - 1 = 0, \quad \left(x' - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{9}{8} = 0$$

или

$$X^2 = \frac{9}{8}, \qquad (B)$$

где

$$X = x' - \frac{1}{2\sqrt{2}}. \qquad (C)$$

Уравнение (B) определяет пару прямых $X = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $X = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$, параллельных новой координатной оси $O'X$.

Напишем уравнения этих прямых в старой системе координат Oxy. Из уравнений (A) находим

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y); \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y). \end{aligned}\right\}. \qquad (D)$$

Из формул (C) и (D) получаем

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - y - \frac{1}{2}\right). \qquad (E)$$

Уравнение (B) приводится к виду

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-y-\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{9}{8}, \quad \left(x-y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

$$\left(x-y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0,$$

$$\left[\left(x-y-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\right]\left[\left(x-y-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\right] = 0,$$

$$(x-y-2)(x-y+1) = 0,$$

откуда получаем уравнения прямых:

$$x - y - 2 = 0; \quad x - y + 1 = 0.$$

Замечание 1. Линия второго порядка, состоящая из двух прямых, называется *распадающейся*. Необходимое и достаточное условие распадения линии (5. 27) выражается равенством $\Delta = 0$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Замечание 2. Установив, что линия распадающаяся, уравнения составляющих ее прямых можно найти приведением многочлена к сумме квадратов по способу Лагранжа. Применим этот способ к данному уравнению. Выпишем все члены, содержащие x, дополним их до полного квадрата, прибавляя и вычитая соответствующие члены:

$$x^2 + y^2 - 2xy - x + y - 2 = \left[x^2 - 2x\left(y + \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2\right] -$$

$$-\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + y - 2 = \left[x - \left(y + \frac{1}{2}\right)\right]^2 - y^2 - y - \frac{1}{4} + y^2 + y - 2 =$$

$$= \left(x - y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \left(x - y - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x - y - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0,$$

откуда $x - y - 2 = 0$, $x - y + 1 = 0$.

6. Доказать, что линия $2x^2 - 4y^2 - 2xy - x - 4y - 1 = 0$ распадается на пару пересекающихся прямых. Найти уравнения этих прямых с помощью способа Лагранжа.

Выпишем коэффициенты данного уравнения $a_{11} = 2$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = -4$, $a_{13} = -\frac{1}{2}$, $a_{23} = -2$, $a_{33} = -1$ и составим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -4 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Так как $\Delta = 0$ (вторая и третья строки пропорциональны), то данная линия распадается на пару прямых (см. замечание 1).

Найдем уравнения этих прямых с помощью способа Лагранжа:

$$2x^2 - 4y^2 - 2xy - x - 4y - 1 = 2\left[x^2 - xy - \frac{1}{2}x\right] - 4y^2 -$$

$$-4y - 1 = 2\left[x^2 - 2x\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right)^2\right] - 2\left(\frac{1}{2}y +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\right)^2 - 4y^2 - 4y - 1 = 2\left[x - \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right)\right]^2 - 2\left(\frac{1}{4}y^2 +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}y + \frac{1}{16}\right) - 4y^2 - 4y - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{2}y^2 -$$

$$-\frac{9}{2}y-\frac{1}{8}-1=2\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{2}\left(y^2+2\cdot\frac{1}{2}y+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\right)+\frac{9}{8}-\frac{1}{8}-1=2\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=0,$$
$$4\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\right)^2-9\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=0,$$
$$\left[2\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\right)-3\left(y+\frac{1}{2}\right)\right]\left[2\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+3\left(y+\frac{1}{2}\right)\right]=0,$$
$$\left(2x-y-\frac{1}{2}-3y-\frac{3}{2}\right)\left(2x-y-\frac{1}{2}+3y+\frac{3}{2}\right)=0,$$
$$(2x-4y-2)(2x+2y+1)=0,$$
$$2x-4y-2=0,\ 2x+2y+1=0.$$

Итак, уравнения прямых имеют вид

$$x-2y-1=0,\ 2x+2y+1=0.$$

7. Доказать, что уравнение

$$x^2+4y^2+4xy-2x-4y+1=0$$

определяет пару совпадающих прямых. С помощью способа Лагранжа найти уравнения прямых.

Так как

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ -1 & -2 & 1\end{vmatrix}=0,$$

то линия — распадающаяся.

Найдем уравнения прямых с помощью способа Лагранжа:

$$x^2+4y^2+4xy-2x-4y+1=[x^2+2x(2y-1)+(2y-1)^2]-$$
$$-(2y-1)^2+4y^2-4y+1=[x+(2y-1)]^2-(4y^2-4y+1)+$$
$$+4y^2-4y+1=(x+2y-1)^2=0.$$

Следовательно, прямые определяются уравнениями:

$$x+2y-1=0,\quad x+2y-1=0.$$

Замечание. С помощью способа Лагранжа можно определить вид любой кривой второго порядка.

8. Пользуясь приведением многочлена второй степени к сумме квадратов по способу Лагранжа, определить вид кривой

$$4x^2-4xy+y^2-8x+6y-2=0.$$

Преобразуя левую часть уравнения, получим

$$4x^2-4xy+y^2-8x+6y-2=4(x^2-xy-2x)+y^2+6y-2=$$
$$=4\left[x^2-2x\left(\frac{1}{2}y+1\right)+\left(\frac{1}{2}y+1\right)^2\right]-4\left(\frac{1}{2}y+1\right)^2+y^2+6y-$$

$$-2=4\left[x-\left(\frac{1}{2}y+1\right)\right]^2-4\left(\frac{1}{4}y^2+y+1\right)+y^2+6y-$$
$$-2=4\left(x-\frac{1}{2}y-1\right)^2+2y-6=0,$$
$$4\left(x-\frac{1}{2}y-1\right)^2=-2(y-3),$$
$$\left(x-\frac{1}{2}y-1\right)^2=-\frac{1}{2}(y-3). \qquad (A)$$

Вводя новые переменные по формулам

$$\left.\begin{aligned}X&=x-\frac{1}{2}y-1;\\ Y&=y-3,\end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

уравнение (A) перепишем в виде

$$X^2=-\frac{1}{2}Y. \qquad (C)$$

Уравнение (C) является уравнением параболы. Формулы (B) определяют аффинное преобразование. При аффинном преобразовании парабола переходит в параболу. Следовательно, исходное уравнение также определяет параболу.

Задачи

Определить вид линии, пользуясь приведением многочлена второй степени к сумме квадратов по способу Лагранжа:

1. $x^2+5y^2-2xy+2x+14y+13=0.$
2. $x^2-3y^2-2xy+2x-18y-19=0.$
3. $x^2+y^2+2xy-2x-8y+7=0.$
4. $5x^2+5y^2-26xy-10x+26y+5=0.$
5. $x^2+y^2+2xy+2x+2y-3=0.$
6. $x^2+4y^2-4xy+2x-4y+1=0.$
7. $5x^2+5y^2-26xy-10x+26y-41=0.$
8. $x^2+5y^2-2xy+2x+14y+17=0.$
9. $13x^2+13y^2-10xy-26x+10y+49=0.$
10. $2x^2+2y^2+4xy+2x+2y+5=0.$

Определить вид, параметры, расположение линий второго порядка и построить их:

11. $17x^2+17y^2-16xy=250.$
12. $3x^2+3y^2+10xy=8.$
13. $9x^2+24xy+16y^2+120x-90y=0.$
14. $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0.$
15. $5x^2+12xy-22x-12y-19=0.$

16. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0.$

17. $x^2 - 2y^2 - xy + 3y - 1 = 0.$

18. $4x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0.$

Ответы

1. Эллипс. 2. Гипербола. 3. Парабола. 4. Пара пересекающихся прямых. 5. Пара параллельных прямых. 6. Пара совпадающих прямых. 7. Гипербола. 8. Пара мнимых пересекающихся прямых 9. Мнимый эллипс. 10. Пара мнимых параллельных прямых. 11. Эллипс $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{9} = 1$, $O'(0, 0)$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$. 12. Гипербола $\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} = 1$, $O'(0, 0)$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$. 13. Парабола; $p = 3$, $O'(0, 0)$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. 14. Эллипс $\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{4} = 1$, $O'(1, 1)$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$. 15. Гипербола $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{9} = 1$, $O'(1, 1)$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. 16. Парабола; $p = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $O'\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$. 17. Пара прямых $x - 2y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$. 18. Пара совпадающих прямых $2x - y + 1 = 0$.

§ 5. 4. Приведение общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду

Общее уравнение второго порядка относительно x, y, z

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + \\ + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (5.43)$$

с помощью преобразований прямоугольной декартовой системы координат (4. 97) и (4. 99) можно привести к каноническому виду, т. е. к одному из уравнений (4. 76) — (4. 92).

Если новые координатные оси Ox', Oy', Oz' направить по трем взаимно перпендикулярным собственным векторам симметрической матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} (a_{ij} = a_{ji}), \qquad (5.44)$$

составленной из соответствующих коэффициентов уравнения (5.43), то члены второго порядка

$$\Phi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \qquad (5.45)$$

преобразуются в члены второго порядка

$$\Phi'(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2, \qquad (5.46)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — корни характеристического уравнения данной матрицы.

Уравнение (5.43) преобразуется при этом в уравнение

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0, \qquad (5.47)$$

коэффициенты a'_{14}, a'_{24}, a'_{34} которого определяются с помощью формул (4.99).

Уравнение (5.47) с помощью преобразования параллельного переноса

$$\left.\begin{aligned} X &= x' - a; \\ Y &= y' - b; \\ Z &= z' - c \end{aligned}\right\} \qquad (5.48)$$

приводится к каноническому виду.

Примеры

1. Определить вид, параметры и расположение поверхности по ее уравнению

$$5x^2 + 11y^2 + 2z^2 - 16xy + 20xz + 4yz = 18.$$

Данное уравнение не содержит членов с первой степенью x, y, z, поэтому для его упрощения достаточно найти собственные значения λ_1, λ_2, λ_3 матрицы A, составленной из коэффициентов при членах второго порядка: $a_{11} = 5$, $a_{22} = 11$, $a_{33} = 2$, $a_{12} = -8$, $a_{13} = 10$, $a_{23} = 2$.

Матрица A и ее характеристическое уравнение примут вид:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & 11 & 2 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 5-\lambda & -8 & 10 \\ -8 & 11-\lambda & 2 \\ 10 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

(при составлении матрицы принято во внимание, что $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$). Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 18\lambda^2 - 81\lambda + 18\cdot 81 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$. Найдем собственные векторы, соответствующие данным собственным значениям. При $\lambda_1 = 18$ система (5. 25) запишется так:

$$\left.\begin{aligned} (5-18)l - 8m + 10n &= 0; \\ -8l + (11-18)m + 2n &= 0; \\ 10l + 2m + (2-18)n &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} -13l - 8m + 10n &= 0; \\ -8l - 7m + 2n &= 0; \\ 10l + 2m - 16n &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда находим $\overline{p}_1 = \{-2, 2, -1\}$. Аналогично получаем собственные векторы $\overline{p}_2 = \{1, 2, 2\}$, $\overline{p}_3 = \{2, 1, -2\}$.

Перейдем к новой системе координат $Ox'y'z'$ с началом в той же точке, оси которой Ox', Oy', Oz' направлены соответственно по векторам $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$, $\overline{p}_3$. В соответствии с формулами (5.45) и (5.46) все члены второго порядка исходного уравнения преобразуются в члены второго порядка $18x'^2 + 9y'^2 - 9z'^2$, а уравнение (5.47) примет вид $18x'^2 + 9y'^2 - 9z'^2 = 18$.

Разделив обе части этого уравнения на 18, получим

$$x'^2 + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{2} = 1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (4.77), заключаем, что данная поверхность является однополостным гиперболоидом с параметрами $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{2}$.

2. Определить вид, параметры и расположение поверхности

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0.$$

Матрица A, составленная из коэффициентов при старших членах уравнения $a_{11} = 7$, $a_{22} = 6$, $a_{33} = 5$, $a_{12} = -2, a_{13} = 0$, $a_{23} = -2$, и ее характеристическое уравнение запишутся так:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Им соответствуют собственные векторы матрицы $\bar{p}_1 = \{1, 2, 2\}$, $\bar{p}_2 = \{2, 1, -2\}$, $\bar{p}_3 = \{2, -2, 1\}$.

Перейдем к новой системе координат $Ox'y'z'$, оси которой направлены по векторам $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$, а начало остается прежним. Формулы преобразования координат (4.99) примут вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z'; \\ y &= \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z'; \\ z &= \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' \end{aligned}\right\} \text{ или } \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(x' + 2y' + 2z'); \\ y &= \frac{1}{3}(2x' + y' - 2z'); \\ z &= \frac{1}{3}(2x' - 2y' + z') \end{aligned}\right\} \text{A}$$

(так как $\cos\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\cos\beta_1 = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma_1 = \frac{2}{3}$ — направляющие косинусы вектора $\bar{p}_1$; $\cos\alpha_2 = \frac{2}{3}$, $\cos\beta_2 = \frac{1}{3}$, $\cos\gamma_2 = -\frac{2}{3}$ — направляющие косинусы $\bar{p}_2$; $\cos\alpha_3 = \frac{2}{3}$, $\cos\beta_3 = -\frac{2}{3}$, $\cos\gamma_3 = \frac{1}{3}$ — направляющие косинусы вектора $\bar{p}_3$). Исходное уравнение с учетом значений λ_1, λ_2, λ_3 и формул (A) запишется в виде

$$3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 6\cdot\frac{1}{3}(x' + 2y' + 2z') - 24\cdot\frac{1}{3}(2x' + y' - 2z') + $$
$$+ 18\cdot\frac{1}{3}(2x' - 2y' + z') + 30 = 0$$

или

$$3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 6x' - 24y' + 18z' + 30 = 0.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$3(x'^2 - 2x' + 1) + 6(y'^2 - 4y' + 4) + 9(z'^2 + 2z' + 1) - 3 - 24 -$$
$$- 9 + 30 = 0$$

или

$$3(x' - 1)^2 + 6(y' - 2)^2 + 9(z' + 1)^2 - 6 = 0. \tag{B}$$

Применяя еще одно преобразование координат, а именно, преобразование параллельного переноса

$$\left.\begin{aligned} X &= x' - 1; \\ Y &= y' - 2; \\ Z &= z' + 1, \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

уравнение (B) приведем к виду

$$3X^2 + 6Y^2 + 9Z^2 = 6 \text{ или } \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{1} + \frac{Z^2}{\frac{2}{3}} = 1. \tag{D}$$

Уравнение (D) определяет эллипсоид с параметрами

$$a = \sqrt{2}, \ b = 1, \ c = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Чтобы определить расположение эллипсоида относительно старой системы координат, необходимо найти точку O' — начало системы $O'XYZ$. Новые координаты этой точки равны нулю, т. е. $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$. Из формул (C) и (A) находим координаты этой точки в старой системе: $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.

3. Определить каноническое уравнение и расположение поверхности

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0.$$

Составим матрицу A и ее характеристическое уравнение

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 10\lambda = 0 \text{ или } \lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = 0,$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 0$, которым соответствуют собственные векторы $\bar{p}_1 = \{1, 1, -2\}$, $\bar{p}_2 = \{1, 1, 1\}$, $\bar{p}_3 = \{1, -1, 0\}$. Введем новую систему координат $Ox'y'z'$, направив оси Ox', Oy', Oz' по векторам $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$.

Формулы преобразования координат при повороте осей примут вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'; \\ y &= \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'; \\ z &= -\frac{2}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y'. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Уравнение поверхности с учетом значений λ_1, λ_2, λ_3 и формул (А) преобразуется следующим образом:

$$2x'^2 + 5y'^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) + 6\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) - 2\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y'\right) + 3 = 0,$$

$$2x'^2 + 5y'^2 + \frac{6}{\sqrt{6}}x' - \frac{10}{\sqrt{2}}z' + 3 = 0. \qquad (B)$$

Уравнение (В) приведем к каноническому виду:

$$2\left(x'^2 + \frac{3}{\sqrt{6}}x' + \frac{9}{24}\right) + 5y'^2 - \frac{10}{\sqrt{2}}z' - \frac{9}{12} + 3 = 0,$$

$$2\left(x' + \frac{3}{2\sqrt{6}}\right)^2 + 5y'^2 = \frac{10}{\sqrt{2}}\left(z' - \frac{9\sqrt{2}}{4\cdot 10}\right),$$

$$2X^2 + 5Y^2 = \frac{10}{\sqrt{2}}Z \text{ или } \frac{X^2}{\frac{5}{2\sqrt{2}}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2Z, \qquad (C)$$

где
$$X = x' + \frac{3}{2\sqrt{6}}, \quad Y = y', \quad Z = z' - \frac{9\sqrt{2}}{40}. \qquad (D)$$

Уравнение (С) определяет эллиптический параболоид, для которого $a^2 = \frac{5}{2\sqrt{2}}$, $b^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Началом новой системы $O'XYZ$ является точка $O'\left(-\frac{1}{40}, -\frac{19}{40}, \frac{1}{2}\right)$, ее координаты определяются из равенств $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ и из формул (D), (А). В этой точке находится вершина эллиптического параболоида.

4. Определить каноническое уравнение и расположение поверхности

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz - 4xz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0.$$

Составим матрицу A и ее характеристическое уравнение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 5-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 0$, которым соответствуют собственные векторы

$$\bar{p}_1 = \{1,\ 1,\ -1\},\ \bar{p}_2 = \{1,\ -2,\ -1\},\ \bar{p}_3 = \{1,\ 0,\ 1\}.$$

Оси новой системы $Ox'y'z'$ направим по векторам $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$. Формулы преобразования координат при повороте осей примут вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'; \\ y &= \frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{2}{\sqrt{6}}y'; \\ z &= -\frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Уравнение поверхности с учетом значений λ_1, λ_2, λ_3 и формул (А) преобразуется следующим образом:

$$3x'^2 + 6y'^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) - 10\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' -\right.$$

$$\left. - \frac{2}{\sqrt{6}}y'\right) - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) - 1 = 0$$

$$\text{или } 3x'^2 + 6y'^2 - \frac{6}{\sqrt{3}}x' + \frac{24}{\sqrt{6}}y' - 1 = 0. \qquad (B)$$

Уравнение (В) приводим к каноническому виду:

$$3\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{3}\right) + 6\left(y'^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}y' + \frac{4}{6}\right) - 1 - 4 - 1 = 0,$$

$$3\left(x' - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 6\left(y' + \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = 6,$$

$$3X^2 + 6Y^2 = 6 \text{ или } \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{1} = 1, \qquad (C)$$

где $X = x' - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $Y = y' + \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Следовательно, данное уравнение определяет эллиптический цилиндр с параметрами $a = \sqrt{2}$, $b = 1$. Ось цилиндра коллинеарна вектору $\bar{p}_3 = \{1,\ 0,\ 1\}$.

5. Определить вид поверхности

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz - x + 2y - 3z - 6 = 0.$$

Составим матрицу A и ее характеристическое уравнение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 \\ -2 & 4-\lambda & -6 \\ 3 & -6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 14\lambda^2 = 0$$

8*

имеет корни $\lambda_1=14$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$. Корню $\lambda_1=14$ соответствует собственный вектор $\overline{p}_1=\{1,\ -2,\ 3\}$. Двойному корню $\lambda=0$ соответствует бесчисленное множество собственных неколлинеарных векторов, ортогональных вектору $\overline{p}_1$. Среди них выберем два взаимно перпендикулярных, например, $\overline{p}_2=\{1,\ -1,\ -1\}$, $\overline{p}_3=\{5,\ 4,\ 1\}$. Перейдем к новой системе координат $Ox'y'z'$, оси которой коллинеарны векторам $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$, $\overline{p}_3$.

Формулы преобразования при повороте осей примут вид

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{\sqrt{14}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{5}{\sqrt{42}}z';\\ y&=-\frac{2}{\sqrt{14}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{4}{\sqrt{42}}z';\\ z&=\frac{3}{\sqrt{14}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{42}}z'.\end{aligned}\right\}\qquad (A)$$

Уравнение поверхности с учетом значений λ_1, λ_2, λ_3 и формул (A) преобразуется следующим образом:

$$14x'^2-\left(\frac{1}{\sqrt{14}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{5}{\sqrt{42}}z'\right)+2\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{4}{\sqrt{42}}z'\right)-3\left(\frac{3}{\sqrt{14}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{42}}z'\right)-6=0,$$

$$14x'^2-\frac{14}{\sqrt{14}}x'-6=0. \qquad (B)$$

Приведем к каноническому виду уравнение (B):

$$14\left(x'^2-\frac{1}{\sqrt{14}}x'+\frac{1}{56}\right)-14\cdot\frac{1}{56}-6=0,\quad 14\left(x'-\frac{1}{2\sqrt{14}}\right)^2-\frac{25}{4}=0,\ 14X^2-\frac{25}{4}=0,\ X^2=\frac{25}{56},$$

где $X=x'-\frac{1}{2\sqrt{14}}$. Уравнение $X^2=\frac{25}{56}$ определяет пару параллельных плоскостей. Уравнения этих плоскостей в старой системе координат можно найти с помощью способа Лагранжа. Выписывая вначале все члены уравнения поверхности, содержащие x, дополняя их до полного квадрата, получим:

$$x^2-4xy+6xz-x+4y^2+9z^2-12yz+2y-3z-6=\left[x^2-2x\left(2y-3z+\frac{1}{2}\right)+\left(2y-3z+\frac{1}{2}\right)^2\right]-\left(2y-3z+\frac{1}{2}\right)^2+4y^2+9z^2-12yz+2y-3z-6=\left[x-\left(2y-3z+\frac{1}{2}\right)\right]^2-\left(4y^2+9z^2+\frac{1}{4}-12yz+2y-3z\right)+4y^2+9z^2-12yz+2y-3z-$$

$$-6=\left(x-2y+3z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0,$$

$$\left[\left(x-2y+3z-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{2}\right]\left[\left(x-2y+3z-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}\right]=0,$$

$$(x-2y+3z-3)(x-2y+3z+2)=0.$$

Следовательно, уравнения плоскостей:

$$x-2y+3z-3=0,\quad x-2y+3z+2=0.$$

Замечание. Уравнения этих плоскостей можно было найти и другим способом. Разрешая уравнения (A) относительно x' и y', выражая $X=x'-\frac{1}{2\sqrt{14}}$ через x и y и подставляя в уравнение $X^2=\frac{25}{56}$, получим $\frac{1}{14}\left(x-2y+3z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{56}$, откуда и следуют уравнения плоскостей.

6. Пользуясь приведением левой части уравнения к сумме квадратов по способу Лагранжа, определить вид поверхности

$$x^2+y^2-3z^2-2xy-6xz-6yz+2x+2y+4z=0.$$

Преобразуя левую часть уравнения, получим

$$x^2-2xy-6xz+2x+y^2-3z^2-6yz+2y+4z=[x^2-2x(y+3z-1)+(y+3z-1)^2]-(y+3z-1)^2+y^2-3z^2-6yz+2y+4z=[x-(y+3z-1)]^2-(y^2+9z^2+1+6yz-2y-6z)+y^2-3z^2-6yz+2y+4z=(x-y-3z+1)^2-12z^2-12yz+10z+4y-1=(x-y-3z+1)^2-12\left[z^2+2z\left(\frac{1}{2}y-\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{1}{2}y-\frac{5}{12}\right)^2\right]+12\left(\frac{1}{2}y-\frac{5}{12}\right)^2+4y-1=(x-y-3z+1)^2-12\left(z+\frac{1}{2}y-\frac{5}{12}\right)^2+12\left(\frac{1}{4}y^2-\frac{5}{12}y+\frac{25}{144}\right)+4y-1=(x-y-3z+1)^2-12\left(z+\frac{1}{2}y-\frac{5}{12}\right)^2+3y^2-y+\frac{13}{12}=(x-y-3z+1)^2-12\left(z+\frac{1}{2}y-\frac{5}{12}\right)^2+3\left(y^2-\frac{1}{3}y+\frac{1}{36}\right)-\frac{3}{36}+\frac{13}{12}.$$

Следовательно, уравнение приведено к виду

$$(x-y-3z+1)^2-12\left(z+\frac{1}{2}y-\frac{5}{12}\right)^2+3\left(y-\frac{1}{6}\right)^2+1=0. \qquad (A)$$

Введем новые координаты по формулам

$$\left.\begin{aligned} X&=x-y-3z+1;\\ Y&=y-\frac{1}{6};\\ Z&=z+\frac{1}{2}y-\frac{5}{12}.\end{aligned}\right\}\qquad (B)$$

Уравнение (А) перепишется так:

$$X^2+3Y^2-12Z^2=-1 \ \text{ или } \ \frac{X^2}{1}+\frac{Y^2}{\frac{1}{3}}-\frac{Z^2}{\frac{1}{12}}=-1. \qquad (C)$$

Полученное уравнение определяет двуполостный гиперболоид.

Линейное преобразование (В) является аффинным (его определитель отличен от нуля). Так как при аффинном преобразовании двуполостный гиперболоид переходит в двуполостный гиперболоид, то исходное уравнение тоже определяет двуполостный гиперболоид.

7. С помощью способа Лагранжа определить вид поверхности

$$4xy+2x+4y-6z-3=0.$$

Левая часть уравнения не содержит членов с квадратами координат. Положим $x=x'+y'$, $y=x'-y'$, $z=z'$, тогда уравнение перепишется так

$$4(x'+y')(x'-y')+2(x'+y')+4(x'-y')-6z'-3=0$$

или

$$4x'^2-4y'^2+6x'-2y'-6z'-3=0.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$4\left(x'^2+\frac{6}{4}x'+\frac{9}{16}\right)-4\left(y'^2+\frac{1}{2}y'+\frac{1}{16}\right)-\frac{9}{4}+\frac{1}{4}-3-6z=0$$

или

$$4\left(x'+\frac{3}{4}\right)^2-4\left(y'+\frac{1}{4}\right)^2=6\left(z+\frac{5}{6}\right).$$

Вводя новые координаты по формулам

$$\left.\begin{aligned} X&=x'+\frac{3}{4};\\ Y&=y'+\frac{1}{4};\\ Z&=z+\frac{5}{6}, \end{aligned}\right\}$$

получим уравнение гиперболического параболоида

$$4X^2-4Y^2=6Z;\quad \frac{X^2}{\frac{3}{4}}-\frac{Y^2}{\frac{3}{4}}=2Z.$$

8. Определить вид поверхности

$$y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$y^2+2xy+2yz-2y+4xz-4x=[y^2+2y(x+z-1)+(x+z-1)^2]-(x+z-1)^2+4xz-4x=[y+(x+z-1)]^2-$$

$$-(x^2+z^2+1+2xz-2x-2z)+4xz-4x=(y+x+z-1)^2-x^2+2xz-z^2-2x+2z-1=(y+x+z-1)^2-(x-z+1)^2=[(y+x+z-1)-(x-z+1)][(y+x+z-1)+(x-z+1)]=(y+2z-2)(y+2x)=0.$$

Следовательно, уравнение определяет две пересекающиеся плоскости

$$y+2z-2=0,\ \ 2x+y=0.$$

Задачи

Определить вид поверхности, пользуясь приведением левой части ее уравнения к сумме квадратов по способу Лагранжа:

1. $2x^2+3y^2+12z^2-4xy+4yz-8z+1=0.$
2. $x^2+2y^2-4z^2-2xy+4yz+8z-2=0.$
3. $8x^2+9y^2-12z^2-16xy+4yz+12z-4=0.$
4. $2x^2+y^2-12z^2-4xy-4yz+8z-3=0.$
5. $7x^2+7y^2-2xy-2z+2=0.$
6. $xy+xz+yz+2x+2y-2z=0.$
7. $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+2x+4y-10z-1=0.$
8. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0.$
9. $4x^2+49y^2+z^2-28xy+4xz-14yz+8x-28y+4z+3=0.$
10. $x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz-2x+4y-6z+1=0.$

Определить каноническое уравнение и расположение поверхности:

11. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0.$
12. $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0.$
13. $5x^2-y^2+z^2+4xy+6xz+2x+4y+6z-8=0.$
14. $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x-2y=0.$
15. $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+2x+4y-10z-1=0.$
16. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0.$

Ответы

1. Эллипсоид. 2. Конус. 3. Однополостный гиперболоид. 4. Двуполостный гиперболоид. 5. Эллиптический параболоид. 6. Однополостный гиперболоид. 7. Гиперболический цилиндр. 8. Параболический цилиндр. 9. Пара параллельных плоскостей. 10. Пара совпадающих плоскостей. 11. Конус $X^2+Y^2-9Z^2=0$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1=\lambda_2=-3$, $\lambda_3=6$, вершина в точке $O'(1,\ 1,\ -1)$; ось конуса коллинеарна вектору $\bar{p}_3=\{2,\ 1,\ -2\}$. 12. Двуполостный гиперболоид $\frac{X^2}{\frac{4}{5}}+\frac{Y^2}{\frac{4}{15}}-\frac{Z^2}{\frac{4}{25}}=-1$. Корни харак-

теристического уравнения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -5$. Ось коллинеарна вектору $\overline{p}_3 = \{0,\ 0,\ 1\}$. **13.** Гиперболический параболоид $7X^2 - 2Y^2 - 2\sqrt{\frac{16}{14}}\,Z = 0$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$. Собственные векторы $\overline{p}_1 = \{4,\ 1,\ 2\}$, $\overline{p}_2 = \{-1,\ 2,\ 1\}$, $\overline{p}_3 = \{1, 2,\ -3\}$, вершина находится в точке $O'\left(-\frac{23}{24},\ \frac{73}{28},\ -\frac{123}{56}\right)$. **14.** Эллиптический цилиндр $\frac{X^2}{\frac{3}{2}} + \frac{Y^2}{1} = 1$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$. Собственные векторы $\overline{p}_1 = \{-1,\ 1,\ 1\}$, $\overline{p}_2 = \{1,\ 0,\ 1\}$, $\overline{p}_3 = \{1,\ 2,\ -1\}$. **15.** Гиперболический цилиндр $X^2 - Y^2 = \frac{1}{3}$. **16.** Параболический цилиндр $Y = \sqrt{3}\ X^2$.

II. Введение в анализ

Глава 6. Функция

§ 6.1. Понятие функции. Область определения функции

Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел называется множеством *действительных* (или *вещественных*) чисел. Действительные числа можно изображать точками на числовой прямой.

Абсолютной величиной (или *модулем*) действительного числа x называется неотрицательное действительное число, определяемое равенствами:

$$|x| = x, \text{ если } x \geqslant 0; \ |x| = -x, \text{ если } x < 0. \tag{6.1}$$

Неравенство

$$|x| \leqslant a \quad (a > 0) \tag{6.2}$$

равносильно неравенствам

$$-a \leqslant x \leqslant a. \tag{6.3}$$

Свойства абсолютной величины:

$$\begin{aligned} &1.\ |x + y| \leqslant |x| + |y|.\\ &2.\ |x - y| \geqslant |x| - |y|.\\ &3.\ |xy| = |x|\,|y|.\\ &4.\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Переменной величиной называется величина, которая принимает различные числовые значения.

Совокупность всех числовых значений переменной величины называется *областью изменения* этой переменной. Различают следующие простейшие области изменения переменной x:

1) *открытый промежуток* или *интервал* $(a,\ b)$, т. е. совокупность всех чисел, заключенных между a и b: $a < x < b$ (точки a и b исключены);

2) *замкнутый промежуток* или *сегмент* $[a,\ b]$, т. е. $a \leqslant x \leqslant b$ (точки a и b включены);

3) *полуинтервалы* $[a,\ b)$, т. е. $a \leqslant x < b$, и $(a,\ b]$, т. е. $a < x \leqslant b$.

Переменная величина y называется *функцией* переменной величины x, если каждому значению x, которое она может принимать, соответствует единственное значение y. Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*.

Функция обозначается одним из символов:

$$y = f(x),\quad y = y(x),\quad y = F(x),\quad y = \varphi(x) \text{ и т. п.}$$

Для функции $y = f(x)$ $f(a)$ — значение, которое она принимает при $x = a$.

Функция и аргумент могут обозначаться и другими буквами, например $u = f(v)$, $S = \varphi(t)$, $r = r(\varphi)$.

Корнем (или *нулем*) функции $y = f(x)$ называется значение аргумента $x = a$, при котором функция равна нулю:

$$f(a) = 0. \tag{6.5}$$

Совокупность всех значений аргумента, при которых функция имеет определенные действительные значения, называется *областью существования* или *областью определения* функции.

Функция может быть задана табличным, графическим, аналитическим или другим способом.

Явной функцией называется функция, заданная формулой

$$y = f(x). \tag{6.6}$$

Неявной функцией называется функция, заданная уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{6.7}$$

не разрешенным относительно y.

Функция, определенная в области $-a < x < a$, называется *четной*, если для любого x из области определения выполняется равенство

$$f(x) = f(-x). \tag{6.8}$$

Функция называется *нечетной*, если для любого x выполняется равенство

$$f(x) = -f(-x). \tag{6.9}$$

Функция называется *периодической* с периодом $2l$, если при любом x из области определения выполняется равенство

$$f(x + 2l) = f(x). \tag{6.10}$$

Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ — $\qquad$ (6.11)

функции своих аргументов, то функция

$$y = f[\varphi(x)] \tag{6.12}$$

называется *функцией от функций* или *сложной функцией*.

Если уравнение $y = f(x)$ разрешимо относительно x, т. е. существует функция $x = \varphi(y)$ такая, что $f[\varphi(y)] \equiv y$, то функция $x = \varphi(y)$ называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$.

Примеры

1. Найти область изменения x, если $|x - 2| < 3$.

По определению абсолютной величины

$$|x-2| = x-2, \text{ если } (x-2) > 0 \text{ или } x > 2;$$
$$|x-2| = -(x-2), \text{ если } (x-2) < 0 \text{ или } x < 2,$$

поэтому соответственно получим неравенства

$$x - 2 < 3 \text{ и } -(x-2) < 3,$$

откуда $\qquad x < 5$ и $x > -1$.

Следовательно, $-1 < x < 5$, т. е. x меняется в интервале $(-1, 5)$.

Этот пример можно решить и по-другому. На основании формул (6.2) и (6.3) можно записать

$$-3 < x - 2 < 3.$$

Прибавляя 2 ко всем частям неравенства, получим

$$2 - 3 < x < 3 + 2 \text{ или } -1 < x < 5.$$

2. Найти область изменения x, если $|x - 1| > 2$.

По определению абсолютной величины

$$x - 1 > 2 \text{ при } (x-1) > 0, \text{ т. е. } x > 1;$$
$$-(x-1) > 2 \text{ при } (x-1) < 0, \text{ т. е. } x < 1.$$

Из неравенств $x - 1 > 2$ и $-x + 1 > 2$ получаем $x > 3$, $x < -1$.

Следовательно, областью изменения переменной x является совокупность двух бесконечных интервалов: $(-\infty, -1)$, $(3, +\infty)$.

3. Решить уравнение $|x-1| + |x-2| = 1$.

Рассмотрим три случая: 1) $x < 1$; 2) $1 \leqslant x \leqslant 2$; 3) $x > 2$.

В первом случае

$$|x-1| = -(x-1) \text{ и } |x-2| = -(x-2),$$

поэтому уравнение перепишется в виде

$$-(x-1) - (x-2) = 1 \text{ или } -2x + 2 = 0,$$

откуда $x = 1$, что противоречит неравенству $x < 1$. В этом случае решений нет.

Во втором случае

$$|x-1| = x-1 \text{ и } |x-2| = -(x-2),$$

поэтому уравнение принимает вид

$$(x-1) - (x-2) = 1,$$

т. е. сводится к тождеству. Следовательно, уравнению удовлетворяют все x из отрезка $[1, 2]$.

В третьем случае получаем

$$(x-1) + (x-2) = 1 \text{ или } 2x - 4 = 0,$$

откуда $x = 2$, что противоречит условию $x > 2$.

Таким образом, уравнению удовлетворяют все значения x, для которых $1 \leqslant x \leqslant 2$.

4. Дана функция $f(x) = x^2 - 10x + 16$.

Найти значения функции при значениях аргумента, равных соответственно среднему геометрическому и среднему арифметическому ее корней.

Найдем корни, или нули, функции. Приравнивая функцию нулю, получим квадратное уравнение $x^2 - 10x + 16 = 0$, корни которого $x_1 = 2$, $x_2 = 8$. Среднее арифметическое корней $x' = \frac{x_1 + x_2}{2} = 5$ и среднее геометрическое $x'' = \sqrt{x_1 x_2} = 4$.

Подставляя найденные значения аргумента в выражение для $f(x)$, получаем соответственно

$$f(4) = 4^2 - 10 \cdot 4 + 16 = -8, \; f(5) = 5^2 - 10 \cdot 5 + 16 = -9.$$

5. Доказать, что функция $f(x) = \sqrt[3]{(x+a)^2} + \sqrt[3]{(x-a)^2}$ является четной.

Убедимся в том, что для данной функции выполняется условие (6.8). Подставляя $-x$ вместо x в выражение для $f(x)$, получим

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x+a)^2} + \sqrt[3]{(-x-a)^2}.$$

Так как

$$(-x+a)^2 = (x-a)^2, \; (-x-a)^2 = (x+a)^2,$$

то

$$f(-x) = \sqrt[3]{(x-a)^2} + \sqrt[3]{(x+a)^2} = \sqrt[3]{(x+a)^2} + \sqrt[3]{(x-a)^2} = f(x).$$

6. Доказать, что функция $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ является нечетной.

Убедимся в том, что выполняется условие (6.9):

$$f(-x) = (-x) - \frac{(-x)^3}{3} + \frac{(-x)^5}{5} = -x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} = -\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) = -f(x).$$

7. Показать, что функция $f(x) = \operatorname{tg} x \sin 3x + \operatorname{ctg} 2x$ является периодической, и найти ее период.

Так как

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi),$$

т. е. функция $\operatorname{tg} x$ имеет период π,

$$\sin(3x + 2\pi) = \sin\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right],$$

т. е. функция $\sin 3x$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$,

$$\operatorname{ctg}(2x + \pi) = \operatorname{ctg}\left[2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

т. е. функция $\operatorname{ctg} 2x$ имеет период $\frac{\pi}{2}$, то функция $f(x)$ имеет период, равный наименьшему кратному чисел π, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, т. е. 2π. В самом деле,

$$f(x + 2\pi) = \operatorname{tg}(x + 2\pi)\sin(3x + 2\pi) + \operatorname{ctg}(2x + 2\pi) = \operatorname{tg} x \sin 3x + \operatorname{ctg} 2x = f(x).$$

8. Найти область определения функции

$$f(x) = \frac{x - 8}{x^2 - 7x + 12}.$$

Данная функция не определена для тех значений x, при которых знаменатель обращается в нуль (так как деление на нуль не имеет смысла). Приравнивая нулю знаменатель, получим $x^2 - 7x + 12 = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Итак, функция определена на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$, кроме точек $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Другими словами, областью определения является совокупность трех интервалов: $(-\infty, 3)$, $(3, 4)$, $(4, +\infty)$.

Замечание. Дробная рациональная функция $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — полиномы соответственно степени m и n, определена для всех x, кроме нулей функции $Q_n(x)$.

9. Найти область существования функции

$$f(x) = \sqrt{(9 - x^2)(x^2 - 4)} + \sqrt[3]{5x + 7}.$$

Функция представляет собой сумму двух функций. Вторая из них определена при всех x, так как корень третьей степени существует при любом x. Первая функция $\sqrt{(9 - x^2)(x^2 - 4)}$ определена лишь при тех значениях x, при которых подкоренное выражение неотрицательно (корень квадратный существует только для неотрицательных чисел). Итак, должно быть

$$(9 - x^2)(x^2 - 4) \geqslant 0.$$

Это возможно, когда:

1) $9 - x^2 \geqslant 0$, $x^2 - 4 \geqslant 0$; 2) $9 - x^2 \leqslant 0$, $x^2 - 4 \leqslant 0$.

Рассмотрим первое условие: $x^2 \leqslant 9$, т. е. $|x| \leqslant 3$ или $-3 \leqslant x \leqslant 3$ и $x^2 \geqslant 4$, т. е. $|x| \geqslant 2$ или $x \leqslant -2$ и $x \geqslant 2$. Таким образом, это условие выполняется, когда

$$-3 \leqslant x \leqslant -2 \text{ и } 2 \leqslant x \leqslant 3.$$

Переходим ко второму условию, которое перепишется так: $x^2 \geqslant 9$, т. е. $|x| \geqslant 3$ или $x \leqslant -3$ и $x \geqslant 3$, и $x^2 \leqslant 4$, т. е. $|x| \leqslant 2$ или $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Следовательно, это условие не выполнимо (не могут одновременно выполняться неравенства $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $x < -3$, $x > 3$).

Таким образом, областью определения функции $f_1(x) = \sqrt{(9-x^2)(x^2-4)}$ является совокупность двух сегментов: $[-3, -2]$, $[2, 3]$.

Сумма двух функций определена там, где определено каждое слагаемое, поэтому исходная функция также определена в указанных двух сегментах (рис. 6.1).

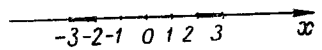

Рис. 6.1

Замечание. Если функция содержит радикалы четной степени, то она определена лишь при тех значениях x, при которых подкоренные выражения неотрицательны.

10. Найти область определения функции

$$y = \arcsin\frac{2x-1}{3}.$$

Функция $u = \arcsin t$ определена при $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Следовательно, данная функция определена только для тех значений x, для которых

$$-1 \leqslant \frac{2x-1}{3} \leqslant 1, \text{ откуда } -3 \leqslant 2x-1 \leqslant 3.$$

Решив эти неравенства, получим $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Итак, функция определена на отрезке $[-1, 2]$.

11. Найти область определения функции

$$f(x) = \log(4 - x^2).$$

Логарифмическая функция определена при положительных значениях своего аргумента, т. е. при $4 - x^2 > 0$, откуда $x^2 < 4$ или $|x| < 2$. Следовательно, данная функция определена при $-2 < x < 2$, т. е. в интервале $(-2, 2)$.

12. Найти $f[\varphi(x)]$ и $\varphi[f(x)]$, если $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = x^2$.

По определению данных функций имеем $f(t) = \sin t$, $\varphi(u) = u^2$, поэтому

$$f[\varphi(x)] = \sin\varphi(x) = \sin x^2,$$
$$\varphi[f(x)] = (f(x))^2 = \sin^2 x.$$

13. Дан треугольник ABC, основание которого $AB = c$ и высота $KC = h$ (рис. 6.2). В треугольник вписан прямоугольник $DENM$, высота которого $DM = x$. Выразить площадь прямоугольника как функцию высоты.

Обозначим основание MN вписанного прямоугольника через y. Площадь выразится формулой

$$S = xy. \qquad (A)$$

Переменные x и y не являются независимыми, они связаны

некоторым соотношением. Из подобия треугольников DEC и ABC получаем

$$\frac{CL}{CK} = \frac{DE}{AB}. \qquad (B)$$

Так как $CL = h - x$, $DE = y$, $CK = h$, $AB = c$, то равенство (B) примет вид

$$\frac{h-x}{h} = \frac{y}{c},$$

откуда

$$y = \frac{c}{h}(h-x). \qquad (C)$$

Из равенств (A) и (C) получаем искомую функциональную зависимость

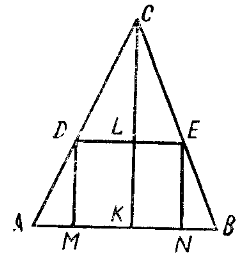

Рис. 6.2

$$S = \frac{c}{h}(h-x)\,x.$$

14. Найти обратные функции для данных функций:

1) $y = 3x - 5$; 2) $y = \sqrt{1 - x^3}$;
3) $y = \arcsin 3x$; 4) $y = x^2 + 2$.

Разрешая каждое из данных уравнений относительно x, получим следующие обратные функции:

1) $x = \frac{1}{3}(y+5)$ (определена при всех y, т. е. для $-\infty < y < +\infty$);

2) $x = \sqrt[3]{1-y^2}$ (определена при всех y);

3) $x = \frac{1}{3}\sin y$ $\left(\text{определена при } -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $x = \sqrt{y-2}$ и $x = -\sqrt{y-2}$ (определены при $y \geqslant 2$, т. е. в бесконечном полуинтервале $[2, +\infty)$).

Задачи

1. Найти область изменения переменной x и изобразить ее на числовой прямой в каждом из следующих случаев:

1) $|x-3|<4$; 2) $|x+2|\leqslant 5$;
3) $|x-4|>7$; 4) $x^2\leqslant 25$;
5) $x^2\geqslant 16$.

2. Решить уравнение $|x^2-9|+|x^2-4|=5$.

3. Дана функция $f(x)=x^2-x+2$. Найти $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x+h)$.

4. Определить, какая из данных функций является четной, нечетной:

1) $f(x)=x^4-\frac{x^2}{2}$; 2) $f(x)=\log\frac{a+x}{a-x}$;
3) $f(x)=a^x+a^{-x}$; 4) $f(x)=a^x-a^{-x}$;
5) $f(x)=3^x$; 6) $f(x)=\sin x+\cos x$.

5. Доказать, что следующие функции являются периодическими, и найти их периоды:

1) $f(x)=\sin 2x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 2) $f(x)=\cos\frac{x}{3}+\operatorname{tg}\frac{x}{5}$.

6. Найти области определения функций и изобразить их на числовой прямой:

1) $y=\sqrt{16-x^2}+\sqrt[3]{2x+3}$; 2) $y=\frac{4x-7}{x^2-5x+6}$;
3) $y=\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$; 4) $f(x)=\sin^2 x$;
5) $u=\sqrt{\sin t}$; 6) $y=\sin\sqrt{x}$;
7) $y=\lg\sin x$; 8) $y=\sqrt{\lg\cos x}$.

7. Найти $f[\varphi(x)]$ и $\varphi[f(x)]$, если $f(x)=x^3$, $\varphi(x)=\cos x$.

8. В треугольнике ABC сторона $BC=a$, сторона $AC=b$ и переменный угол $\angle ACB=x$. Выразить площадь треугольника как функцию x.

9. Найти явные обратные функции для каждой из данных функций:

1) $y=2x-5$; 2) $y=3^x$;
3) $y=\sqrt{1-x^2}$; 4) $y=\cos\frac{x}{3}$.

Ответы

1. 1) $-1<x<7$, 2) $-7\leqslant x\leqslant 3$, 3) $x<-3$ и $x>11$, 4) $-5\leqslant x\leqslant 5$, 5) $x\leqslant -4$ и $x\geqslant 4$. **2.** $-3\leqslant x\leqslant -2$, $2\leqslant x\leqslant 3$. **3.** 4; 2, 2; 4; x^2+x+2, $(2x^2-x+1)\frac{1}{x^2}$.

4. 1) четная; 2) нечетная; 3) четная; 4) нечетная; 5) и 6) функции не удовлетворяют ни условию четности, ни условию нечетности. **5.** 1) $2l=2\pi$ 2) $2l=30\pi$. **6.** 1) $-4\leqslant x\leqslant 4$, 2) $(-\infty,\ 2)$, $(2,\ 3)$ $(3,\ +\infty)$, 3) $-4<x<4$, 4) $-\infty<x<+\infty$, 5) совокупность отрезков $[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$, 6) $x\geqslant 0$, 7) совокупность интервалов $(2k\pi,\ (2k+1)\pi)$, 8) совокупность точек $x_n=2\pi n$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots)$. **7.** $f[\varphi(x)]=\cos^3 x$, $\varphi[f(x)]=\cos x^3$. **8.** $S=\frac{ab}{2}\sin x$.
9. 1) $x=\frac{1}{2}(y+5)$; 2) $x=\log_3 y$; 3) $x=+\sqrt{1-y^2}$, $x=-\sqrt{1-y^2}$; 4) $x=3\arccos y$.

§ 6.2. График функции. Простейшие преобразования графика

Графиком функции $y=f(x)$ называется геометрическое место точек $M(x,\ y)$, координаты которых удовлетворяют данной функциональной зависимости.

Построение графика аналитически заданной функции по точкам выполняется в следующем порядке:

1) составляется таблица значений аргумента и функции на основе данной формулы;

2) в выбранной системе координат строятся точки, координатами которых являются соответствующие друг другу значения переменных, содержащиеся в таблице;

3) полученные точки соединяют плавной линией.

Построение графика функции упрощается, если она является четной, нечетной или периодической. График четной функции симметричен относительно оси Oy; график нечетной функции симметричен относительно начала координат; график периодической функции получается путем повторения части ее графика, соответствующей одному периоду.

Графики суммы (разности), произведения и частного

$$f(x)=f_1(x)\pm f_2(x), \tag{6.13}$$

$$\varphi(x)=f_1(x)\cdot f_2(x), \tag{6.14}$$

$$F(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \tag{6.15}$$

получаются из графиков функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ соответственно путем сложения (вычитания), умножения и деления значений данных функций при данных значениях аргумента.

Предположим, что график функции

$$y=f(x) \tag{6.16}$$

известен (рис. 6.3).

1. График функции

$$y=f(x-a) \tag{6.17}$$

представляет собой график функции $y = f(x)$, сдвинутый вдоль оси Ox на $|a|$ масштабных единиц влево, если $a > 0$, и вправо, если $a < 0$ (рис. 6.3).

2. График функции

$$y = f(x) + b \tag{6.18}$$

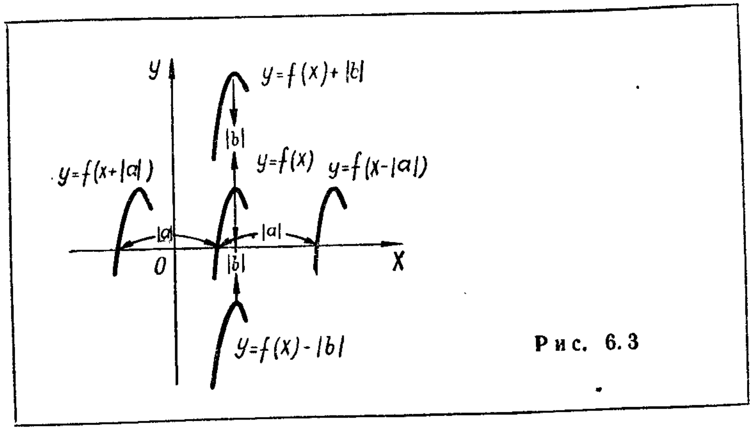

Рис. 6.3

получается из графика $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на $|b|$ единиц вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$ (рис. 6.3).

3. График функции

$$y = cf(x) \tag{6.19}$$

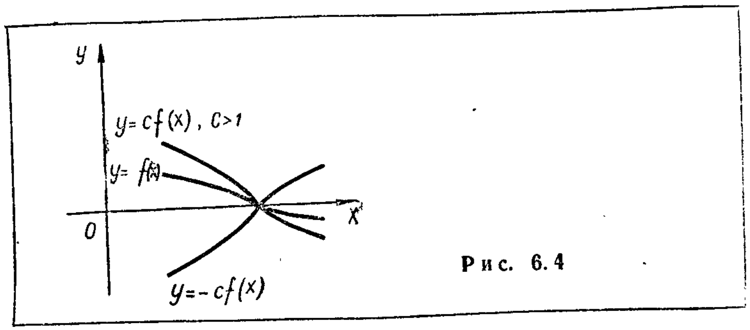

Рис. 6.4

получается из исходного графика путем умножения его ординат на коэффициент c, причем ординаты увеличиваются в c раз при $c > 1$ и уменьшаются в $\frac{1}{c}$ раз при $0 < c < 1$, а соответствующие абсциссы остаются прежними (рис. 6.4). График функции $y = cf(x)$ является зеркальным отображением графика $y = -cf(x)$ относительно оси Ox (рис. 6.4).

4. График функции

$$y = f(kx) \tag{6.20}$$

получается из исходного графика увеличением в $\frac{1}{k}$ раз абсцисс его точек при $0 < k < 1$ и их уменьшением в k раз при $k > 1$ с сохранением их ординат (рис. 6.5). Если $k < 0$, то график

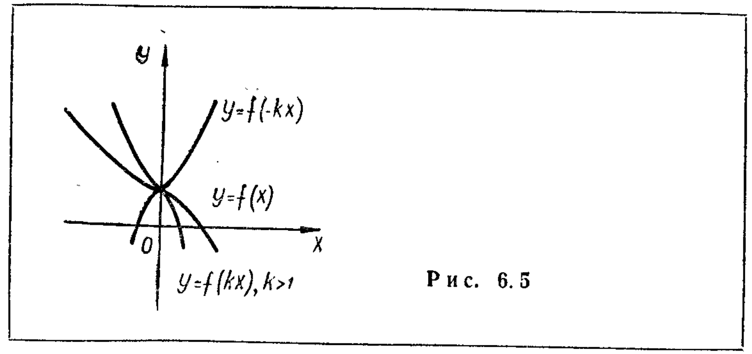

Рис. 6.5

функции $y = f(kx)$ представляет собой отображение графика $y = f(-kx)$ относительно оси Oy.

Указанные преобразования дают возможность строить графики функций более сложного вида:

$$y = cf[k(x - a)] + b. \tag{6.21}$$

Примеры

1. Построить по точкам график функции $y = x^3$ на отрезке $[-2, 2]$.

Составим таблицу значений аргумента и функции:

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	-8	$-\frac{27}{8}$	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8

Построив точки $M_1(-2, -8)$, $M_2\left(-1\frac{1}{2}, -3\frac{3}{8}\right)$, $M_3(-1, -1)$, $M_4\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$, $M_5(0, 0)$, $M_6\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$, $M_7(1, 1)$, $M_8\left(1\frac{1}{2}, 3\frac{3}{8}\right)$, $M_9(2, 8)$ и соединив их плавной кривой, получим график функции $y = x^3$ (рис. 6.6).

2. Построить график функции $y = \frac{1}{x^2}$.

Функция эта определена при всех значениях x, за исключением точки $x = 0$. Придавая аргументу указанные ниже значения и вычисляя соответствующие значения функции, составляем таблицу:

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

Построив точки по данным координатам и соединив их плавной кривой, получим график данной функции (рис. 6.7). Поскольку функция $y = \frac{1}{x^2}$ является четной, график ее симметричен относительно оси Oy.

3. Построить график функции $y = \sqrt{x}$.

Функция $y = \sqrt{x}$ определена, когда подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $x \geqslant 0$. Следовательно, областью определения функции является бесконечный полуинтервал $[0, \infty)$.

Возводя в квадрат обе части данного уравнения, находим $y^2 = x$. Полученное уравнение определяет параболу, для которой ось Ox будет осью симметрии.

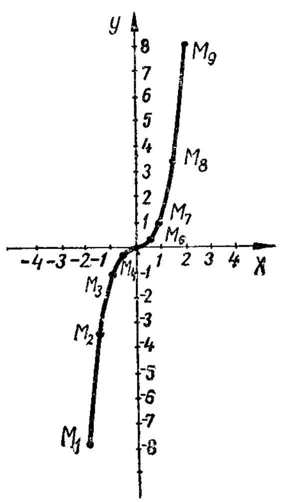

Рис. 6.6

Извлекая квадратный корень, получим $y = \pm\sqrt{x}$. По условию нужно взять только знак плюс. Следовательно, искомым графиком является часть параболы, для которой $y \geqslant 0$ (рис. 6.8).

4. Построить график функции $y = -\sqrt{16 - x^2}$.

Данная функция определена, когда $16 - x^2 \geqslant 0$ или $x^2 \leqslant 16$, т. е. при $-4 \leqslant x \leqslant 4$. Таким образом, областью определения является сегмент $[-4, 4]$.

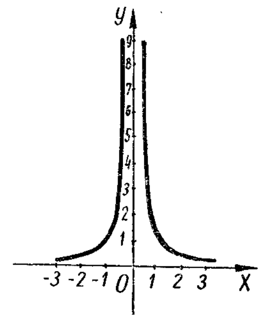

Рис. 6.7

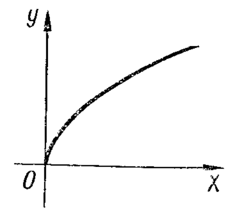

Рис. 6.8

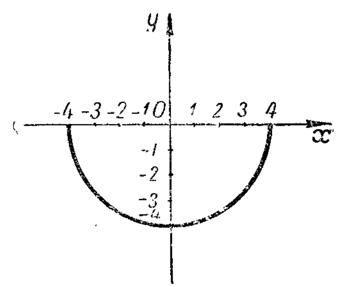

Рис. 6.9

Возводя в квадрат обе части уравнения $y = -\sqrt{16 - x^2}$, получим $x^2 + y^2 = 16$. Это уравнение окружности радиуса $R = 4$ с центром в начале координат.

Поскольку исходная функция принимает лишь отрицательные значения, то графиком ее будет полуокружность, расположенная ниже оси Ox (рис. 6.9).

5. Построить график функции $f(x) = x + \sin x$.

График данной функции получается путем сложения графиков двух функций: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin x$, изображенных на рис. 6.10 штриховыми линиями. Ряд точек графика функции

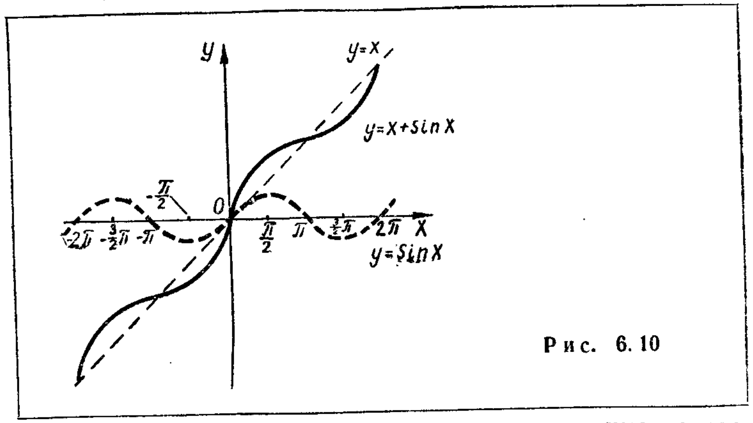

Рис. 6.10

$f(x) = x + \sin x$ можно построить, принимая во внимание следующее:

1) $f(x) = x$ для тех x, при которых $\sin x = 0$;

2) $f(x) = x + 1$ для тех x, при которых $\sin x = 1$;

3) $f(x) = x - 1$ для тех x, при которых $\sin x = -1$.

6. Построить график функции $f(x) = x \sin x$.

График этой функции представляет собой произведение графиков двух функций: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin x$. График можно построить по точкам, имея в виду следующее:

1) так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, то $-x \leqslant f(x) \leqslant x$, т. е. график функции $f(x) = x \sin x$ целиком расположен между прямыми $y = x$ и $y = -x$ (рис. 6.11);

2) $f(x) = 0$, если $\sin x = 0$;

3) $f(x) = x$, если $\sin x = 1$;

4) $f(x) = -x$, если $\sin x = -1$.

7. Построить график функции $f(x) = \operatorname{cosec} x$.

Данная функция определена на всем множестве действительных чисел, кроме точек $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$, т. е. областью ее определения является совокупность интервалов $\ldots (-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi) \ldots$

Так как $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, то график функции можно построить с помощью графика $f_1(x) = \sin x$. Построим график функции $f(x) = \operatorname{cosec} x$ в интервале $(0, \pi)$. При $x = \frac{\pi}{2}$ получаем

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. При $x \to 0$ и $x \to \pi$ функция неограниченно возрастает, график ее имеет вид, изображенный на рис. 6.12. В интервале $(\pi, 2\pi)$ функция принимает отрицательные значения, причем

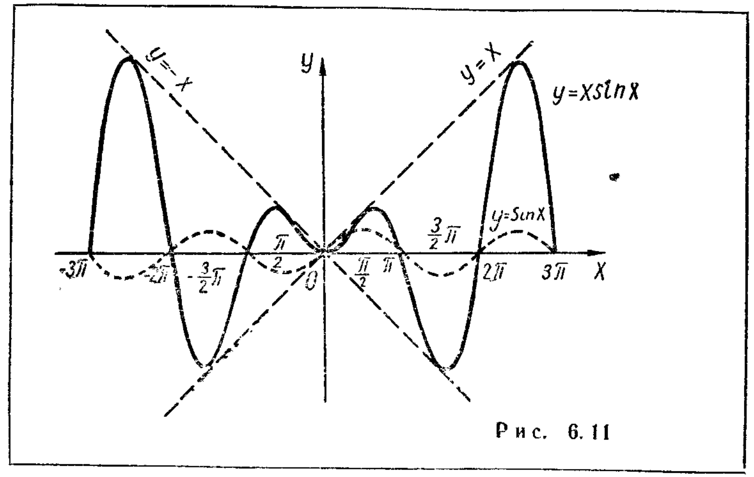

Рис. 6.11

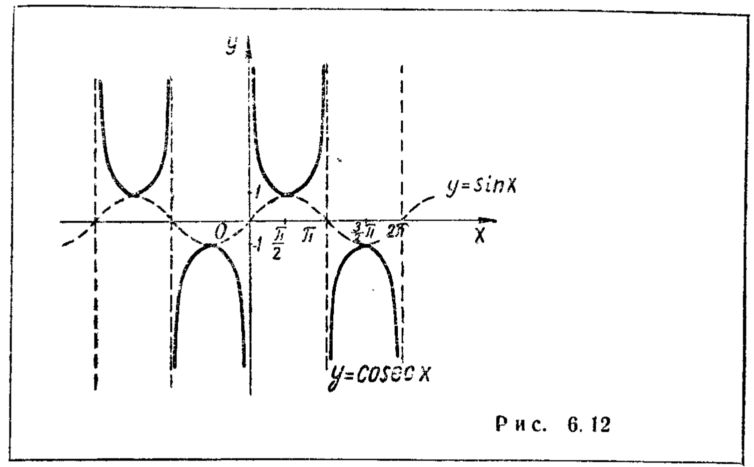

Рис. 6.12

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$. График функции в других интервалах получается из условия периодичности.

8. Построить график функции $y = \sin x + 3$.

Графиком данной функции является синусоида, сдвинутая в направлении оси Oy вверх на три единицы (рис. 6.13) (см. формулу (6.18)).

9. Построить график функции $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

График этой функции представляет собой косинусоиду, сдвинутую вдоль оси Ox вправо на величину, равную $\frac{\pi}{4}$ (рис. 6.14) (см. формулу (6.17)).

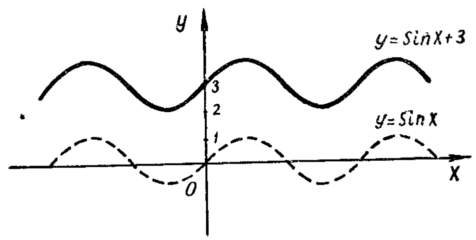

Рис. 6.13

10. Построить график функции $y = 3\sin 2x$.

На основании простейших преобразований графика (3 и 4) заключаем, что график этой функции является синусоидой, абсциссы которой уменьшены в два раза, а ординаты увеличены в три раза (рис. 6.15).

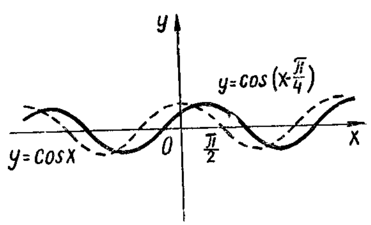

Рис. 6.14

11. Построить график функции

$$y = -4\cos(2x - 6) + 1.$$

Данную функцию можно представить в виде

$$y = -4\cos[2(x - 3)] + 1. \qquad (A)$$

Сравним эту функцию с функцией, получающейся из формулы (6.21) при замене символа f символом cos, т. е. функцией

$$f(x) = c\cos[k(x - a)] + b. \qquad (B)$$

Функция (A) получается из функции (B) при следующих значениях параметров: $c = -4$, $k = 2$, $a = 3$, $b = 1$.

Принимая во внимание простейшие преобразования графика, получаем основные этапы построения графика данной функции:

1) увеличивая в 4 раза ординаты точек графика функции $y = \cos x$, меняя их знаки и сохраняя неизменными абсциссы точек, строим график функции $y = -4\cos x$ (рис. 6.16);

2) уменьшая в 2 раза абсциссы точек графика функции $y = -4\cos x$ и сохраняя их ординаты, строим график функции $y = -4\cos 2x$;

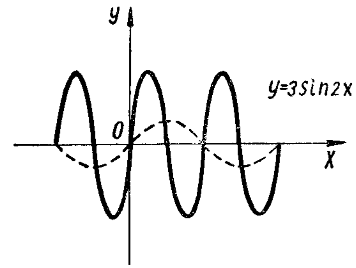

Рис. 6.15

3) перенося точки графика функции $y = -4\cos 2x$ в направлении оси Ox на 3 единицы вправо, строим график функции $y = -4\cos 2(x - 3)$;

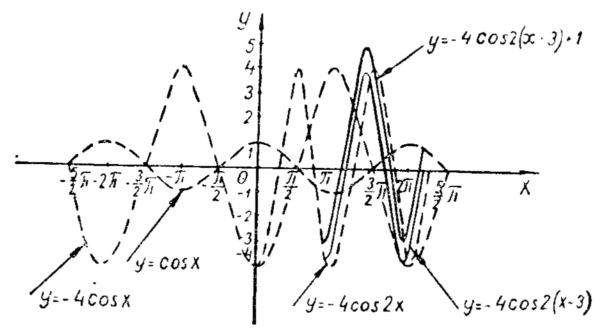

Рис. 6.16

4) перенося точки графика функции $y = -4\cos 2(x - 3)$ в направлении оси Oy на 1 единицу вверх, получим график исходной функции

$$y = -4\cos[2(x - 3)] + 1.$$

Пользуясь периодичностью рассматриваемой функции, полученный график можно продолжить в обе стороны.

12. Построить график функции $f(x) = \sin^2 x$.

Функция эта определена при всех x. Построим сначала график функции $y = \sin x$ (рис. 6.17). Так как $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f(\pi) = 0$, то точки $M_1(0,\ 0)$, $M_2\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$, M_3 $(\pi,\ 0)$ являются общими для обоих графиков. График функции $f(x) = \sin^2 x$ в промежутке $[0,\ \pi]$ расположен ниже синусоиды (поскольку квадраты чисел, меньших единицы, меньше самих чисел), в проме-

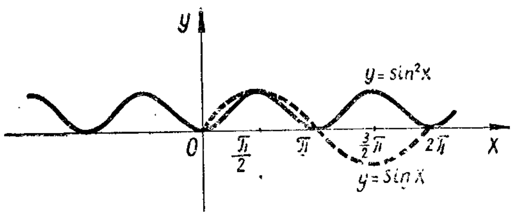

Рис. 6.17

жутке $[\pi,\ 2\pi]$ график также проходит выше оси Ox (6.17), так как $\sin^2 x \geqslant 0$ при любых x.

Замечание. График функции можно построить и другим способом, принимая во внимание, что

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{или} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

13. Построить график функции $f(x) = \sqrt{\sin x}$.

Данная функция определена лишь для тех x, для которых $\sin x \geqslant 0$, т. е. в отрезках вида $[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

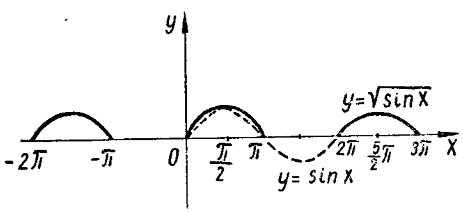

Рис. 6.18

Строим вначале график функции $y = \sin x$ (рис. 6.18). График функции $f(x) = \sqrt{\sin x}$ расположен выше соответствующей дуги синусоиды (так как квадратный корень из числа, меньшего единицы, больше самого числа). Точки, имеющие ординаты $y = 0$, $y = 1$, являются общими для обоих графиков.

14. Построить график функции $f(x) = |\sin x|$.

По определению абсолютной величины (см. § 6.1, равенства

(6.1)) имеем $f(x) = \sin x$, если $\sin x \geqslant 0$ и $f(x) = -\sin x$, если $\sin x < 0$.

Следовательно, график данной функции можно построить следующим образом. Если $\sin x \geqslant 0$, то график ее совпадает с графиком $y = \sin x$; если $\sin x < 0$, то дуга графика $f(x) = |\sin x|$ является отображением относительно оси Ox соответствующей дуги графика $y = \sin x$ (рис. 6.19).

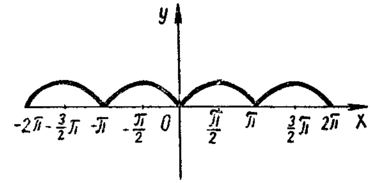

Рис. 6.19

15. Построить график функции $f(x) = \sin |x|$.

Так как $f(-x) = \sin|-x| = \sin|x| = f(x)$, то данная функция является четной. Ее график симметричен относительно оси Oy, при $x \geqslant 0$ график совпадает с графиком функции $y = \sin x$ (рис. 6.20).

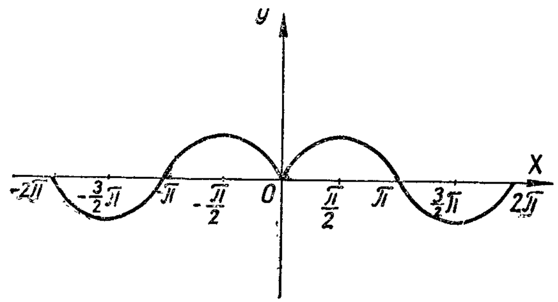

Рис. 6.20

16. Построить график функции $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$.

Построим сначала график функции $y = x^2 - 2x - 3$. Преобразуя правую часть последнего уравнения, получим

$$y = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3, \quad y = (x-1)^2 - 4,$$

откуда

$$y + 4 = (x-1)^2.$$

Это уравнение определяет параболу с вершиной в точке $O'(1,\ -4)$ и осью, параллельной оси Oy (рис. 6.21). Парабола пересекает ось Ox в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ (значения x получены из уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$). Уравнение $y = x^2 - 2x -$

— 3 можно представить в виде $y=(x+1)(x-3)$, откуда видно, что

$$(x^2-2x-3)>0 \text{ при } x<-1 \text{ и } x>3,$$
$$(x^2-2x-3)<0 \text{ при } -1<x<3.$$

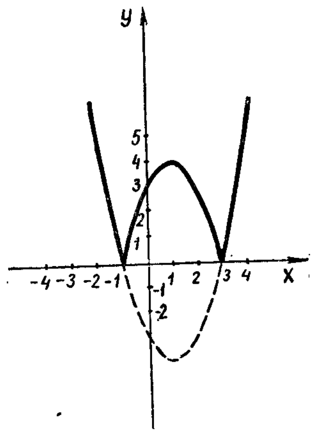

Рис. 6.21

Переходим к функции $f(x)=|x^2-2x-3|$. По определению абсолютной величины имеем:

$$f(x)=x^2-2x-3, \text{ если } x^2-2x-3\geqslant 0;$$
$$f(x)=-(x^2-2x-3), \text{ если } (x^2-2x-3)<0.$$

Следовательно, график функции $f(x)=|x^2-2x-3|$ получается следующим образом: при $x<-1$ и $x>3$ он совпадает с графиком функции $y=x^2-2x-3$; при $-1<x<3$ совпадает с графиком $y=-(x^2-2x-3)$, т. е. получается из графика $y=x^2-2x-3$ при изменении знака ординат всех его точек (рис. 6.21).

Задачи

Построить по точкам графики функций:

1. $y=x^4$. 2. $y=\frac{1}{x^3}$.
3. $y=\sqrt{x+1}+2$. 4. $y=4-\sqrt{1-3x}$.

Построить графики функций (с помощью сложения, умножения, деления):

5. $y=\log_a x+x$. 6. $y=x-\sin x$.
7. $y=x\cos x$. 8. $y=\sec x$.

С помощью простейших преобразований построить графики функций:

9. $y=\cos x-2$. 10. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.
11. $y=4\cos 3x$. 12. $y=-2\sin(3x+9)$.

Построить графики функций:

13. $y=\cos^2 x$. 14. $y=\sqrt{\cos x}$.
15. $y=|\cos x|$. 16. $y=\cos|x|$.
17. $y=|\cos|x||$. 18. $y=|x^2+5x-6|$.

§ 6.3. Предел переменной величины. Бесконечно малая и бесконечно большая величина

Пусть переменная x принимает последовательно значения:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{6.22}$$

Такое перенумерованное множество чисел называется *последовательностью* $\{x_n\}$. Последовательность задана, если известна формула для n-го члена.

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такой номер N, зависящий от ε, что для всех $n>N$ выполняется неравенство

$$|x_n-a|<\varepsilon. \tag{6.23}$$

Обозначение предела последовательности (6.22):

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a. \tag{6.24}$$

Число b называется *пределом* функции $y=f(x)$ при $x\to a$ (в точке a), если для всякого числа $\varepsilon>0$ можно найти такое число $\delta>0$, что

$$|f(x)-b|<\varepsilon, \tag{6.25}$$

когда

$$0<|x-a|<\delta. \tag{6.26}$$

Предел функции обозначается так:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \tag{6.27}$$

(x стремится к a произвольным образом).

Обозначения *односторонних пределов* функции:

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=b \tag{6.28}$$

(x стремится к a слева, оставаясь меньше a),

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b \tag{6.29}$$

(x стремится к a справа, оставаясь больше a).

В частности, при $a=0$ вместо $0-0$ пишут -0 и вместо $0+0$ пишут $+0$, поэтому формулы (6.28) и (6.29) принимают вид:

$$\lim_{x\to -0} f(x)=b, \qquad (6.30)$$

$$\lim_{x\to +0} f(x)=b. \qquad (6.31)$$

Если

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=b, \qquad (6.32)$$

то

$$\lim_{x\to a} f(x)=b. \qquad (6.33)$$

Если односторонние пределы различны, т. е.

$$\lim_{x\to a-0} f(x)\neq \lim_{x\to a+0} f(x) \qquad (6.34)$$

или хотя бы один из них не существует, то не существует и предел функции при $x\to a$.

Переменная величина $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое $\delta>0$, что

$$|\alpha(x)|<\varepsilon, \text{ когда } |x-a|<\delta. \qquad (6.35)$$

Предел бесконечно малой величины $\alpha(x)$ равен нулю, т. е.

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0. \qquad (6.36)$$

Разность между переменной величиной x и ее пределом a есть величина бесконечно малая, т. е.

$$x-a=\alpha, \qquad (6.37)$$

откуда

$$x=a+\alpha. \qquad (6.38)$$

Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин и их произведение есть величина бесконечно малая. Произведение постоянной и ограниченной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая. (Величина x называется *ограниченной*, если существует число $c>0$ такое, что для всех значений x выполняется неравенство $|x|<c$.)

Переменная величина x называется *бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого положительного числа N можно указать такой момент в изменении этой величины, начиная с которого

$$|x|>N. \qquad (6.39)$$

Бесконечно большая величина предела не имеет, но иногда условно говорят, что предел ее есть бесконечность (∞), причем если она, начиная с некоторого момента, принимает только положительные значения, то предел ее $(+\infty)$, если отрицательные, то $(-\infty)$.

Если x — бесконечно большая, то обратная ей величина $\frac{1}{x}$ — бесконечно малая, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0. \qquad (6.40)$$

Если α — бесконечно малая, то $\frac{1}{\alpha}$ — бесконечно большая величина, т. е.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}=\infty. \qquad (6.41)$$

Примеры

1. Показать, что последовательность $x_n=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ имеет пределом нуль. Начиная с какого номера ее значения становятся и остаются меньше 0,001?

Последовательность $x_n=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ принимает значения

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Пусть $\varepsilon=0{,}001$. Неравенство $\frac{1}{n}<\frac{1}{1000}$ будет иметь место, когда $n>1000$. Следовательно, $N=1000$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$. Покажем, что, начиная с некоторого значения n, выполняется неравенство (6.23). В данном случае $x_n=\frac{1}{n}$ и $a=0$. Неравенство $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ или $\frac{1}{n}<\varepsilon$ будет выполняться, когда $n>\frac{1}{\varepsilon}$. В качестве N можно взять меньшее из двух целых чисел, между которыми заключено $\frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое N, что для всех $n>N$ выполняется неравенство $\frac{1}{n}<\varepsilon$; это означает, что x_n имеет пределом нуль, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

(сравните последнее равенство с формулой (6.40)).

2. Доказать, что предел последовательности $y_n=4-\frac{1}{3^n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ равен 4.

Данная последовательность принимает значения

$$3\frac{2}{3},\ 3\frac{8}{9},\ 3\frac{26}{27},\ 3\frac{80}{81}, \ldots$$

Зададим произвольно малое число $\varepsilon > 0$ и составим разность

$$y_n - a = \left(4 - \frac{1}{3^n}\right) - 4 = -\frac{1}{3^n}.$$

Потребуем, чтобы эта разность по абсолютной величине была меньше ε, т. е.

$$|y_n - a| < \varepsilon \text{ или } \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Найдем, при каких n это неравенство будет выполнено. Переписав его в виде $\frac{1}{\varepsilon} < 3^n$ и взяв логарифмы обеих частей, получим

$$\log \frac{1}{\varepsilon} < n \log 3,$$

откуда

$$n > \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 3}.$$

В качестве числа N можно взять меньшее из двух целых чисел, между которыми заключено число $\frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 3}$.

Тогда при всех $n > N$ указанное неравенство будет выполняться, а это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(4 + \frac{1}{3^n}\right) = 4.$$

Замечание 1. Одновременно показано, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0.$$

Замечание 2. Аналогично можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0,$$

если $a > 1$.

Замечание 3. Величина $\alpha(x) = \frac{1}{3^x}$ при $x \to +\infty$ есть бесконечно малая, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3^x} = 0$.

Замечание 4. Величина $\alpha(x) = \frac{1}{a^x}$, где $a > 1$ при $x \to +\infty$ есть бесконечно малая, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.

3. Доказать, что предел последовательности $z_n = -3 + \frac{(-1)^n}{n^2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ равен -3.

Данная последовательность принимает значения

$$-4,\ -2\frac{3}{4},\ -3\frac{1}{9},\ -2\frac{15}{16},\ \ldots$$

Пусть дано любое число $\varepsilon > 0$. Рассмотрим разность

$$z_n - (-3) = \left[-3 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right] - (-3) = \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Эта разность будет по абсолютной величине меньше ε

$$|z_n - (-3)| < \varepsilon,\ \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| < \varepsilon,\ \frac{1}{n^2} < \varepsilon,$$

когда $\frac{1}{\varepsilon} < n^2$, т. е. $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$ или $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. В качестве N можно выбрать меньшее из двух целых чисел, между которыми заключено число $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогда при всех $n > N$

$$|z_n - (-3)| < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -3$.

В частности, если $\varepsilon_1 = 0{,}01$, то $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{100}}} = 10$, $N_1 = 10$.

Следовательно, при $n > 10$ $|z_n - (-3)| < 0{,}01$.

Если $\varepsilon_2 = 0{,}0001$, то $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} = 100$, $N_2 = 100$. Следовательно, при $n > 100$ $|z_n - (-3)| < 0{,}0001$.

Замечание. Все значения последовательности могут быть меньше своего предела (пример 2), или больше своего предела (пример 1), или попеременно то меньше своего предела, то больше его (пример 3).

4. Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+6}{6x} = \frac{5}{6}.$$

Для доказательства достаточно убедиться в том, что разность между переменной величиной $y = \frac{5x+6}{6x}$ и постоянной $b = \frac{5}{6}$ при $x \to \infty$ есть величина бесконечно малая. Преобразуя эту разность, получим

$$\frac{5x+6}{6x} - \frac{5}{6} = \frac{(5x+6) - 5x}{6x} = \frac{6}{6x} = \frac{1}{x}.$$

Так как в силу формулы (6.40) величина $\frac{1}{x}$ при $x \to \infty$ является бесконечно малой, то

$$\frac{5x+6}{6x} - \frac{5}{6} = \alpha,$$

где α — бесконечно малая. Это и означает, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+6}{6x} = \frac{5}{6}.$$

5. Доказать, что

$$\lim_{x\to 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7.$$

Поскольку $x \to 3$, то $x = 3 + \alpha$, где α — бесконечно малая (см. формулу (6.38)). Подставляя это выражение для x в разность $(2x^2 - 5x + 4) - 7$ и преобразуя ее, получим

$$[2(3+\alpha)^2 - 5(3+\alpha) + 4] - 7 = 2(9 + 6\alpha + \alpha^2) - 15 - 5\alpha + 4 - $$
$$- 7 = 18 + 12\alpha + 2\alpha^2 - 15 - 5\alpha + 4 - 7 = 2\alpha^2 + 7\alpha.$$

Так как α — бесконечно малая, то величины $2\alpha^2$ и 7α и их сумма также являются бесконечно малыми, сумму эту можно обозначить через β.

Следовательно, имеем равенство

$$y - b = \beta,$$

в котором $y = 2x^2 - 5x + 4$, $b = 7$, $\beta = 2\alpha^2 + 7\alpha$.

На основании формулы (6.37) заключаем, что

$$\lim_{x \to 3} y = b,$$

т. е.

$$\lim_{x \to 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7.$$

6. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \frac{6}{x-3}$ при $x \to 3$ слева и справа.

Задача сводится к нахождению двух пределов

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{6}{x-3} \text{ и } \lim_{x \to 3+0} \frac{6}{x-3}.$$

Если $x \to 3 - 0$, т. е. x стремится к 3, оставаясь меньше 3, то величина $x - 3$ является бесконечно малой, принимающей отрицательные значения. Обратная ей величина будет бесконечно большой, принимающей также отрицательные значения, тем же свойством обладает и величина $y = \frac{6}{x-3}$, поэтому

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{6}{x-3} = -\infty.$$

Изменение переменных x, $x - 3$ и $\frac{6}{x-3}$ при $x \to 3 - 0$ можно пояснить следующей таблицей:

x	2	2,9	2,99	2,999	2,9999	2,99999	2,999999
$x-3$	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$0{,}0001$	$0{,}00001$	$-0{,}000001$
$\frac{6}{x-3}$	-6	-60	-600	-6000	-60000	-600000	-6000000

Если $x \to 3 + 0$, т. е. x стремится к 3, оставаясь больше 3, то величина $x - 3$ является положительной бесконечно малой.

Обратная ей величина $\frac{1}{x-3}$ будет бесконечно большой, принимающей положительные значения. Этим свойством обладает и величина $\frac{6}{x-3}$, поэтому

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{6}{x-3} = +\infty.$$

График функции $y = \frac{6}{x-3}$ изображен на рис. 6.22.

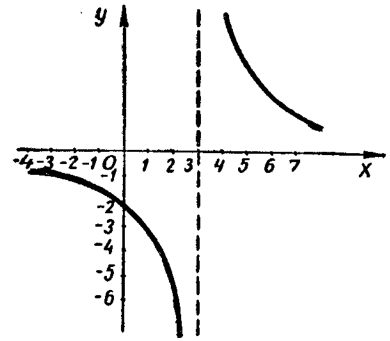

Рис. 6.22

7. Найти односторонние пределы функции $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ при $x \to 0$ слева и справа.

Пусть x стремится к 0, оставаясь меньше его, т. е. $x \to -0$, тогда x будет бесконечно малой, принимающей отрицательные значения, а величина $\frac{1}{x}$ — отрицательной бесконечно большой величиной (см. формулу (6.41)). Данную функцию можно представить следующим образом:

$$3^{\frac{1}{x}} = 3^{-\frac{1}{|x|}} = \frac{1}{3^{\left|\frac{1}{x}\right|}}.$$

Поскольку $\frac{1}{|x|}$ — бесконечно большая при $x \to 0$, то $3^{\frac{1}{|x|}}$ также бесконечно большая, а обратная ей величина, т. е. $\frac{1}{3^{\left|\frac{1}{x}\right|}}$, будет бесконечно малой (см. формулу (6.40)). Следовательно,

$$\lim_{x\to -0} 3^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to -0} 3^{-\frac{1}{|x|}} = \lim_{x\to -0} \frac{1}{3^{\frac{1}{|x|}}} = 0.$$

Пусть x стремится к 0, оставаясь больше его, т. е. $x \to +0$, тогда x будет положительной бесконечно малой величиной, а $\frac{1}{x}$ — положительной бесконечно большой, величина $3^{\frac{1}{x}}$ будет также положительной бесконечно большой, т. е.

$$\lim_{x\to +0} 3^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +0} 3^{\frac{1}{|x|}} = +\infty.$$

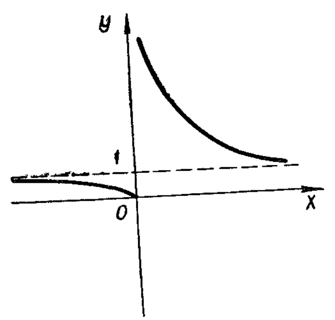

Рис. 6.23

Поскольку односторонние пределы не равны между собой, то предел функции при $x \to 0$ произвольным способом не существует.

График функции $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ изображен на рис. 6.23.

8. Найти пределы

$$\lim_{x\to 2-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x} \text{ и } \lim_{x\to 2+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x}.$$

Пусть $x \to 2$ слева, т. е. оставаясь меньше 2, тогда величина $(2-x)$ будет бесконечно малой, принимающей положительные значения, а величина $\frac{1}{2-x}$ — бесконечно большой, принимающей также положительные значения. Принимая во внимание определение функции $z = \operatorname{arctg} y$ и тот факт, что $\operatorname{tg} z \to \infty$, когда $z \to \frac{\pi}{2}$, заключаем, что

$$\lim_{x\to 2-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x} = \frac{\pi}{2}.$$

Если же $x \to 2$ справа, т. е. оставаясь больше 2, тогда величина $(2-x)$ будет отрицательной бесконечно малой, а величина $\frac{1}{2-x}$ — отрицательной бесконечно большой величиной.

Так как $\operatorname{tg} z \to -\infty$, когда $z \to -\frac{\pi}{2}$, то

$$\lim_{x\to 2+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Предел функции $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x}$ не существует при $x \to 2$ произвольным способом, так как односторонние пределы в этой точке не равны между собой.

График функции изображен на рис. 6.24.

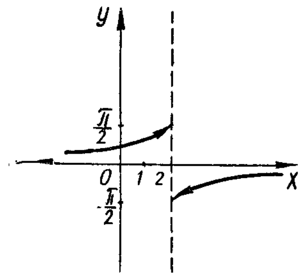

Рис. 6.24

Задачи

1. Начиная с какого номера значения каждой из последовательностей:

1) $x_n = \frac{1}{n}$; 2) $y_n = \frac{1}{n^2}$; 3) $z_n = \frac{1}{n^4}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

становятся и остаются меньше $\varepsilon = 0{,}0001$? Показать, что каждая последовательность имеет пределом нуль.

2. Доказать, что каждая из последовательностей

$$x_n = \frac{1}{2^n}, \quad y_n = -\frac{1}{2^n}, \quad z_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$$

имеет пределом нуль. Начиная с какого номера значения каждой из них по абсолютной величине остаются меньше $\varepsilon = 0{,}001$?

3. Даны три последовательности:

$$x_n = 2 - \frac{1}{4^n}; \quad y_n = -3 + \frac{1}{5^n}; \quad z_n = 7 + \frac{(-1)^n}{6^n}.$$

Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -3$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 7$.

4. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+5}{5x}=\frac{4}{5}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-7)=5$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}(5x+8)=3$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-4x+6)=10$.

5. Найти односторонние пределы при $x\to 2$ слева и справа для следующих функций:

1) $f(x)=\frac{8}{2-x}$; 2) $f(x)=\frac{4}{(x-2)^2}$;

3) $f(x)=2^{\frac{1}{x-2}}$; 4) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{2-x}$.

Ответы

1. 1) $N_1=10\,000$; 2) $N_2=100$; 3) $N_3=10$. 2. $N=10$. 5. 1) $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{8}{2-x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{8}{2-x}=-\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{4}{(x-2)^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{4}{(x-2)^3}=+\infty$.

§ 6.4. Нахождение пределов

Если переменные величины $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ имеют конечные пределы при $x\to a$, то

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]=\lim_{x\to a}f_1(x)+\lim_{x\to a}f_2(x)-\lim_{x\to a}f_3(x); \quad (6.42)$$

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)]=\lim_{x\to a}f_1(x)\cdot\lim_{x\to a}f_2(x)\cdot\lim_{x\to a}f_3(x); \quad (6.43)$$

$$\lim_{x\to a}[cf(x)]=c\lim_{x\to a}f(x)\quad (c=\text{const}); \quad (6.44)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=[\lim_{x\to a}f(x)]^n\ (n\text{ — целое число, } n>0); \quad (6.45)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a}f_2(x)}\quad (\lim_{x\to a}f_2(x)\neq 0); \quad (6.46)$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f_1(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f_1(x)}; \quad (6.47)$$

$$\lim_{x\to a}c=c\quad (c=\text{const}). \quad (6.48)$$

Если c — постоянная величина, причем $c>0$, то:

$$\lim_{x\to\infty}cx=\infty; \quad (6.49)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{c}=\infty; \quad (6.50)$$

$$\lim_{x\to -0}\frac{c}{x}=-\infty; \quad (6.51)$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{c}{x}=+\infty; \quad (6.52)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{c}{x}=\infty; \quad (6.53)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x}=0; \quad (6.54)$$

$$\lim_{x\to+\infty}c^x=\begin{cases}0, & \text{если } 0<c<1;\\ +\infty, & \text{если } c>1;\end{cases} \quad (6.55)$$

$$\lim_{x\to-\infty}c^x=\begin{cases}+\infty, & \text{если } 0<c<1;\\ 0, & \text{если } c>1.\end{cases} \quad (6.56)$$

Примеры

1. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2-6x+3)$.

Так как предел алгебраической суммы переменных равен такой же алгебраической сумме пределов этих переменных (формула (6.42)), постоянный множитель можно выносить за знак предела (формула (6.44)), предел целой положительной степени равен такой же степени предела (формула (6.45)), предел постоянной равен самой постоянной (формула (6.48)), то последовательно получим

$$\lim_{x\to 2}(4x^2-6x+3)=\lim_{x\to 2}4x^2-\lim_{x\to 2}6x+\lim_{x\to 2}3=4\lim_{x\to 2}x^2-$$
$$-6\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}3=4(\lim_{x\to 2}x)^2-6\lim_{x\to 2}x+3=4\cdot 2^2-$$
$$-6\cdot 2+3=16-12+3=7.$$

Замечание 1. Вычисление предела многочлена второй степени свелось к вычислению его значения при предельном значении аргумента.

Замечание 2. Чтобы вычислить предел многочлена n-й степени

$$P_n(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n \text{ при } x\to b,$$

достаточно найти $P_n(b)$, т. е. значение его при $x=b$. Например,

$$\lim_{x\to 1}(2x^5-4x^4+3x^3-6x^2+8x+2)=2\cdot 1^5-4\cdot 1^4+3\cdot 1^3-6\cdot 1^2+$$
$$+8\cdot 1+2=5.$$

2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}$.

Так как предел частного равен частному пределов, то на основании формулы (6.46), а также с помощью формул (6.42), (6.44), (6.45) и (6.48) последовательно получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-4x+7)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-5x+6)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3x^2-\lim\limits_{x\to 1}4x+\lim\limits_{x\to 1}7}{\lim\limits_{x\to 1}2x^2-\lim\limits_{x\to 1}5x+\lim\limits_{x\to 1}6}=$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to 1}x^2-4\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}7}{2\lim\limits_{x\to 1}x^2-5\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}6}=\frac{3\cdot 1^2-4\cdot 1+7}{2\cdot 1^2-5\cdot 1+6}=\frac{6}{3}=2.$$

Замечание 1. Вычисление предела рациональной функции (отношения двух многочленов) свелось к вычислению значения этой функции при предельном значении аргумента.

Замечание 2. Чтобы вычислить предел рациональной функции

$$R(x)=\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n}{c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_mx^m}$$

при $x\to a$, достаточно найти значение ее при $x=a$.

Например,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^5-2x^4+3x^2-6x+9}{3x^4-12x^2+7x-11}=\frac{2^5-2\cdot 2^4+3\cdot 2^2-6\cdot 2+9}{3\cdot 2^4-12\cdot 2^2+7\cdot 2-11}=\frac{9}{3}=3.$$

Замечание 3. Предел элементарной функции $f(x)$ при $x\to a$, где a принадлежит области ее определения, равен значению функции при $x=a$, т. е.

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Например,

$$1)\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-7}+\sqrt[3]{x+60}}{2x^2-5x-8}=\frac{\sqrt{4^2-7}+\sqrt[3]{4+60}}{2\cdot 4^2-5\cdot 4-8}=$$

$$=\frac{\sqrt{9}+\sqrt[3]{64}}{32-20-8}=\frac{3+4}{4}=\frac{7}{4};$$

$$2)\ \lim_{t\to 1}[\lg(t+\sqrt{t^2+80})]+t\sqrt{t^2+8}=\lg(1+\sqrt{81})+1\sqrt{1+8}=1+3=4.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$.

При $x=4$ числитель и знаменатель данной функции обращаются в нуль. Получена неопределенность $\frac{0}{0}$, которую нужно раскрыть. Преобразуем данную функцию, разлагая числитель с помощью формулы

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

Так как уравнение $x^2-6x+8=0$ имеет корни $x_1=2$, $x_2=4$, то $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$. Подставляя это выражение в данную функцию и сокращая на общий множитель $(x-4)\neq 0$, получим

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x-2)=4-2=2.$$

Замечание 1. Сокращая на общий множитель, мы предполагали, что $x-4\neq 0$. Это действительно так. Согласно определению предела функции, аргумент x стремится к своему предельному значению a, никогда с ним не совпадая, т. е. $x\neq a$ и $x-a\neq 0$. (См. формулу (6.26).)

Замечание 2. Предел функции не зависит от того, определена функция в предельной точке или нет.

4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$.

При $x=1$ числитель и знаменатель обращаются в нуль, получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем данную функцию, разлагая на множители числитель и знаменатель по формуле

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Подставляя соответствующие выражения и сокращая на общий множитель $(x-1)\neq 0$, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{4(x-1)\left(x-\frac{1}{4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}{4\left(x-\frac{1}{4}\right)}=\frac{3\left(1+\frac{2}{3}\right)}{4\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{5}{3}.$$

5. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^4+2x^3-x^2+5x+5}{x^3+1}$.

При $x=-1$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Разлагая их на множители, находим

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1),$$

$$3x^4+2x^3-x^2+5x+5=(x+1)(3x^3-x^2+5).$$

Второе равенство получено в результате непосредственного деления $3x^4+2x^3-x^2+5x+5$ на $(x+1)$. Сокращая числитель и знаменатель на $(x+1)\neq 0$ и переходя к пределу, получим

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^4+2x^3-x^2+5x+5}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{3x^3-x^2+5}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{3(-1)^3-(-1)^2+5}{(-1)^2-(-1)+1}=\frac{1}{3}.$$

Замечание. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, заданную отношением двух многочленов, надо в числителе и в знаменателе выделить критический множитель (т. е. множитель, равный нулю при предельном значении x) и сократить на него.

6. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$.

При $x\to+\infty$ числитель и знаменатель неограниченно увеличиваются $\left(\text{получаем неопределенность вида } \frac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы найти предел, преобразуем данную дробь, разделив ее числитель и знаменатель на x^2, т. е. на старшую степень x. Пользуясь свойствами пределов, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{3+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{6+0+0}{3+0-0}=2.$$

Здесь принято во внимание, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{c}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{c}{x^2}=0\ (c=\text{const}).$$

(См. формулу (6.54).)

7. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^2+6x-3}{9x^3+8x^2-2}$.

Разделив числитель и знаменатель дроби на x^3, т. е. на старшую степень, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2+6x-3}{9x^3+8x^2-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{9+\frac{8}{x}-\frac{2}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(9+\frac{8}{x}-\frac{2}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{0+0-0}{9+0-0}=\frac{0}{9}=0.$$

Замечание. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданную отношением двух многочленов, надо числитель и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень x, а затем перейти к пределу.

8. Найти предел рациональной функции

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m},$$

где $a_n\neq0$, $b_m\neq0$, при x, стремящемся к бесконечности.

Преобразуем выражение для данной функции, вынося за скобки множитель x^n в числителе и множитель x^m в знаменателе:

$$R(x)=\frac{x^n\left(\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_2}{x^{n-2}}+\ldots+a_n\right)}{x^m\left(\frac{b_0}{x^m}+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_2}{x^{m-2}}+\ldots+b_m\right)}=x^{n-m}Q(x),\qquad (A)$$

где

$$Q(x)=\frac{\left(\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_2}{x^{n-2}}+\ldots+a_n\right)}{\left(\frac{b_0}{x^m}+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_2}{x^{m-2}}+\ldots+b_m\right)}.\qquad (B)$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^k}=0\quad (k=1,2,3,\ldots),$$

то

$$\lim_{x\to\infty}Q(x)=\frac{a_n}{b_m}.\qquad (C)$$

Поскольку предел произведения равен произведению пределов (формула (6.43)), то

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\cdot\lim_{x\to\infty}Q(x).\qquad (D)$$

Предел первого множителя в правой части равенства (D) зависит от соотношения между n и m, а именно:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=\infty, && \text{если } n>m;\\ &\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=1, && \text{если } n=m;\\ &\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=0, && \text{если } n<m.\end{aligned}\qquad (E)$$

Из формулы (D) с учетом формул (C) и (E) получаем

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, & \text{если } n>m;\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{если } n=m;\\ 0, & \text{если } n<m.\end{cases}$$

Замечание. Полученный результат можно сформулировать следующим образом. Предел частного двух многочленов при $x\to\infty$ равен отношению коэффициентов при старших членах, если степени числителя и знаменателя равны; предел этот равен 0 или ∞, если степень числителя соответственно меньше или больше степени знаменателя.

Например,

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-7x^4+3x^3-4x^2+8x-9}{3x^5+5x^4-6x^3+7x^2-11x-2}=\dfrac{6}{3}=2;$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^3+6x^2-7x+12}{9x^5-8x^3+12x^2-5x-14}=0;$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-6x^2+11x-18}{5x^2-9x+24}=\infty.$

9. Найти $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$.

При $x=3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Знаменатель содержит иррациональное выражение $\sqrt{x+1}$. Избавимся от иррациональности в знаменателе, умножая числитель и знаменатель на $(\sqrt{x+1}+2)$. Получаем

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2-2^2}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4}=$$

$$=\lim_{x\to3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)=(3+3)(\sqrt{3+1}+2)=24.$$

Замечание. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, в которой числитель или знаменатель содержит иррациональность, следует соответствующим образом избавиться от иррациональности.

10. Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$.

Разлагая числитель и знаменатель на множители, сокращая на множитель $1 + \cos x \neq 0$, получим

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x} = \lim_{x\to\pi} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^3 x} = \lim_{x\to\pi} \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)} =$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x} = \frac{1-(-1)}{1-(-1)+(-1)^2} = \frac{2}{3}.$$

11. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$.

Числитель и знаменатель дроби являются суммой n членов соответствующих арифметических прогрессий. Находя эти суммы по известной формуле, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n}{\frac{1+n}{2}\cdot n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+(2n-1)}{1+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 2.$$

12. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

Используя формулу для суммы квадратов натурального ряда чисел

$$1^2+2^2+3^2+\ \ldots\ +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

13. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$.

Введем новую переменную z по формуле

$$1 + x = z^6 \qquad \text{(A)}$$

(показатель выбран так, чтобы можно было извлечь корень и второй и третьей степени).

Из равенства (A) вытекает, что $z \to 1$, когда $x \to 0$. Подставляя выражение старой переменной через новую, разлагая числитель и знаменатель на множители, получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{z\to 1} \frac{\sqrt[3]{z^6}-1}{\sqrt{z^6}-1} = \lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{z^3-1} =$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)} = \lim_{z\to 1} \frac{z+1}{z^2+z+1} = \frac{2}{3}.$$

14. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{12n+5}{\sqrt[3]{27n^3+6n^2+8}}$.

При $n \to \infty$ числитель и знаменатель также стремятся к бесконечности, получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы найти предел, разделим числитель и знаменатель на n и подведем n под знак корня:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n+5}{\sqrt[3]{27n^3+6n^2+8}} = \lim_{n\to\infty} \frac{12+\frac{5}{n}}{\sqrt[3]{27+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^3}}} = \frac{12}{\sqrt[3]{27}} = \frac{12}{3} = 4.$$

(Здесь принято во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8}{n^3} = 0$.)

Задачи

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-7x+6)$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}(3x^4-5x^3+6x^2-4x+7)$.
3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$.
4. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$.
5. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$.
6. $\lim\limits_{t\to 3}\left[2t+\sqrt{t^2-8}+\lg\left(3t+\sqrt{t^2-8}\right)-\frac{\sqrt[3]{t^2-1}+\sqrt[4]{t^3-2t^2+7}}{t^3-2t^2+t-11}\right]$.
7. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$.
8. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$.
9. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^3-6x^2+7x+5}{8-4x+3x^2-2x^3}$.
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-5x^3+7x^2+8x-9}{3x^5-6x^3+4x^2-2x+11}$.
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7+8x^6+5x^4-3x^2-12}{10x^6+7x^5-6x^3-4x+17}$.
13. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$.
14. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.
15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2-3}}{2n+1}$.
16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x-5}{1+\sqrt{x^2+3}}$.
17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2-1}$.
18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$.
19. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\operatorname{tg}x}}{\sin 2x}$.
20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{1-x^2}+3^{\frac{1}{x}}\right)$.

Ответы

1. 3. 2. 7. 3. 2. 4. 0. 5. ∞. 6. 4. 7. $\frac{4}{5}$. 8. $\frac{15}{44}$. 9. $\frac{1}{2}$. 10. -5. 11. 0. 12. ∞. 13. -40. 14. $\frac{3}{4}$. Указание. Положить $x = t^{12}$. 15. 1. 16. 6. 17. $\frac{1}{2}$. 18. $-\sqrt{2}$. 19. $-\frac{1}{2}$. 20. -1.

§ 6.5. Число e, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$

1. *Числом* e называется предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{6.57}$$

или

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \tag{6.58}$$

Число e бывает полезным при раскрытии неопределенностей вида 1^∞.

Если основание логарифмов равно числу e, то логарифмы называются *натуральными:*

$$\ln x = \log_e x.$$

2. Если угол α выражен в радианах, то

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1. \tag{6.59}$$

3. При нахождении пределов вида

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)} = C \tag{6.60}$$

нужно иметь в виду следующее:

1) если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to a}\varphi(x) = A \text{ и } \lim_{x\to a}\psi(x) = B, \tag{6.61}$$

то

$$C = A^B; \tag{6.62}$$

2) если

$$\lim_{x\to a}\varphi(x) = A \neq 1 \text{ и } \lim_{x\to a}\psi(x) = \infty,$$

то предел находится с помощью формул (6.55) и (6.56);

3) если

$$\lim_{x\to a}\varphi(x) = 1, \ \lim_{x\to a}\psi(x) = \infty,$$

то полагают $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$ и, следовательно,

$$C = \lim_{x\to a}\left\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-1]\psi(x)}. \tag{6.63}$$

Примеры

1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$.

При $x\to\infty$ выражение $\left(1+\frac{k}{x}\right)\to 1$, получаем неопределенность 1^∞.

Введем новую переменную α по формуле

$$\frac{k}{x} = \alpha,$$

откуда $x = \frac{k}{\alpha}$. Если $x\to\infty$, то $\alpha\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{k}{\alpha}} = \lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^k.$$

Пользуясь свойством (6.45), на основании формулы (6.58) находим

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^k = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^k = e^k.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k. \tag{6.64}$$

В частности, если $k = 3$, то

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = e^3,$$

при $k = -2$ получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x = e^{-2}.$$

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Так как

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

то на основании формулы (6.58) находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln e = 1.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \qquad (6.65)$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$.

Введем новую переменную z по формуле

$$a^x-1=z,$$

откуда

$$a^x=1+z.$$

Логарифмируя это равенство по основанию e, получим формулу

$$x\ln a=\ln(1+z),$$

из которой

$$x=\frac{\ln(1+z)}{\ln a}.$$

Очевидно при $x\to 0$ и $z\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\frac{\ln(1+z)}{\ln a}}=\lim_{z\to 0}\frac{\ln a}{\frac{\ln(1+z)}{z}}.$$

Принимая во внимание свойства (6.44) и (6.46) и формулу (6.65), получаем

$$\lim_{z\to 0}\frac{\ln a}{\frac{\ln(1+z)}{z}}=\ln a\cdot\frac{1}{\lim\limits_{z\to 0}\left[\frac{\ln(1+z)}{z}\right]}=\ln a.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \qquad (6.66)$$

4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x$.

Разделив числитель и знаменатель дроби на x и используя формулу (6.64) при $k=+2$ и $k=-3$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{-3}{x}}\right)^x=\frac{e^2}{e^{-3}}=e^5.$$

5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$.

Положим $ax=\alpha$, откуда $x=\frac{\alpha}{a}$. Если $x\to 0$, то и $\alpha\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{a}}=\lim_{\alpha\to 0}a\frac{\sin\alpha}{\alpha}=a\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=a\cdot 1=a.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a. \qquad (6.67)$$

В частности, при $a=2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2,$$

при $a=\frac{1}{3}$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{x}=\frac{1}{3}.$$

6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$.

Принимая во внимание, что $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ и $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$, на основании свойств пределов (6.43) и (6.46) и формулы (6.59) получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1. \qquad (6.68)$$

7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$.

Принимая во внимание формулу (6.67), на основании свойств пределов получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{3}}{x}\right)^2=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{x}\right]^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}.$$

8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$.

Разделив числитель и знаменатель на x, на основании формулы (6.67) получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{x}}{\frac{\sin bx}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{x}}=\frac{a}{b}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}.$$

9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3}$.

При $x=0$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Знаменатель содержит иррациональность. Освободимся от иррациональности и воспользуемся формулой (6.59)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{x+9}+3)}{(x+9)-9}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+9}+3)=1(3+3)=6.$$

10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^{x+2}$.

Это предел вида (6.60), где $\varphi(x)=\frac{\sin 3x}{x}$, $\psi(x)=x+2$.

Из (6.67)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3,\ \lim_{x\to 0}(x+2)=2.$$

В соответствии с формулой (6.62) получаем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^{x+2}=3^2=9.$$

11. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+4}\right)^{x^2}$.

Это также предел вида (6.60), где $\varphi(x)=\frac{2x-1}{3x+4}$, $\psi(x)=x^2$. Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{3+\frac{4}{x}}=\frac{2}{3},\ \lim_{x\to\infty}x^2=\infty,$$

то в соответствии с формулой (6.55)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+4}\right)^{x^2}=0.$$

12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

На основании формулы (6.63) получаем

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}\right\}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^1=e.$$

13. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Прибавляя и вычитая 1 из $\cos x$ и применяя соответствующую формулу, получаем

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1-(1-\cos x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=-1\cdot 0=0,$$

то

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

14. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{2\operatorname{ctg}^2 x}$.

Так как $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, то

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{2\operatorname{ctg}^2 x}=\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}\right]^2=\left[\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}\right]^2=e^2.$$

Задачи

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+n}{x+m}\right)^x$.
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{5}}{x}$.
8. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\dfrac{x}{2}}{x^3}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^3-1}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}\right)^{x+3}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{4x-3}\right)^{x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

Ответы

1. e^2. 2. e^{-3}. 3. 4 Указание. Положить $4x=\alpha$ и воспользоваться формулой (6.65). 4. 1. Указание. Положить $\dfrac{1}{x}=\alpha$. Воспользоваться формулой (6.65). 5. e^4. 6. e^{n-m}. 7. $\dfrac{1}{5}$. 8. 1. Указание. Положить $\dfrac{1}{x}=\alpha$. 9. 1. Указание. Положить $\operatorname{arctg} x=\alpha$. 10. $\dfrac{a}{b}$. 11. $\dfrac{1}{8}$. 12. 4. 13. $\dfrac{1}{3}$. 14. $-\dfrac{1}{2}$. 15. $\dfrac{1}{8}$. 16. 0. 17. $e^{-\frac{1}{2}}$. См. пример 13. 18. $e^{-\frac{1}{2}}$. Указание. Положить $\cos^2 x=\alpha$.

§ 6.6. Разные примеры на нахождение пределов

При нахождении пределов могут встретиться неопределенности вида $(\infty-\infty)$ и $0\cdot\infty$. Эти случаи путем преобразования функции приводятся к одному из двух рассмотренных случаев, т. е. к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Покажем на примерах, как находятся такие пределы.

Примеры

1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+6x+5}-x)$.

При $x\to+\infty$ данная функция представляет разность двух бесконечно больших величин, принимающих положительные значения (случай $\infty-\infty$). Умножив и разделив данную функцию на $(\sqrt{x^2+6x+5}+x)$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+6x+5}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+6x+5}-x)(\sqrt{x^2+6x+5}+x)}{\sqrt{x^2+6x+5}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+6x+5)-x^2}{\sqrt{x^2+6x+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{\sqrt{x^2+6x+5}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\dfrac{5}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1}=\frac{6}{1+1}=3.$$

2. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

Здесь также имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$ при $x\to 3$. Производим вычитание дробей и сокращение на множитель $x-3\neq 0$; переходя к пределу, находим

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+3-6}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{9}.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4\sin^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 2x}\right)$.

В данном случае также имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Применяя соответствующую тригонометрическую формулу, производя вычитание дробей и переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{4\sin^2 x\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}=-\frac{1}{4}\cdot 1=-\frac{1}{4}.$$

4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$.

При $x\to 0$ получаем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Записывая в другом виде данную функцию и применяя формулу (6.59), находим

$$\lim_{x\to 0}x\operatorname{ctg}\frac{x}{3}=\lim_{x\to 0}x\frac{\cos\dfrac{x}{3}}{\sin\dfrac{x}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\dfrac{x}{3}}\cos\frac{x}{3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{3}x}{\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}}\cdot\cos\lim_{x\to 0}\frac{x}{3}=\frac{1}{\dfrac{1}{3}}\cdot 1=3.$$

5. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}x$.

При $x \to 2$ имеем неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Полагая $x = 2 - \alpha$ и переходя к пределу, находим

$$\lim_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x = \lim_{\alpha\to 0}\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(2-\alpha) = \lim_{\alpha\to 0}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\alpha\right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\alpha = \lim_{\alpha\to 0}\alpha\frac{\cos\frac{\pi}{4}\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}\alpha}\cos\frac{\pi}{4}\alpha =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{\pi}{4}\alpha}{\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\cos\frac{\pi}{4}\alpha = \frac{1}{\frac{\pi}{4}}\cdot 1 = \frac{4}{\pi}.$$

6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Положим $\operatorname{arctg} x = \alpha$, тогда $x = \operatorname{tg}\alpha$, если $x \to +\infty$, то $\alpha \to \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}\alpha\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} =$$

$$= -\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\cdot\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = -1\cdot 1 = -1.$$

Задачи

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to-4}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{8}{16-x^2}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x - \operatorname{cosec} x)$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x$.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{3x}$.

8. $\lim\limits_{m\to\infty} m\,[\ln(m+4)-\ln m]$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 6x}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-2^n}{5+2^{n+1}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 2x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x^2-\cos x}{\sin^2 x}$.

Ответы

1. 2. 2. $-\frac{1}{8}$. 3. $\frac{1}{2}$. 4. 0. 5. $\frac{2}{\pi}$. 6. -1. Указание. Положить $x = \frac{\pi}{2}+\alpha$. 7. $-\frac{1}{3}$. 8. 4. 9. $\frac{1}{36}$. 10. $-\frac{1}{2}$. 11. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 12. $\frac{3}{2}$.

§ 6.7. Сравнение бесконечно малых величин

1. Две бесконечно малые величины α и β называются бесконечно малыми одного порядка, если предел их отношения отличен от нуля, т. е.

$$\lim\frac{\alpha}{\beta} = a \quad (a \neq 0). \tag{6.69}$$

2. Величина α называется бесконечно малой высшего порядка по сравнению с β, если предел отношения α к β равен нулю, т. е.

$$\lim\frac{\alpha}{\beta} = 0. \tag{6.70}$$

3. Величина α называется бесконечно малой низшего порядка по сравнению с β, если отношение α к β является бесконечно большой величиной, т. е.

$$\lim\frac{\alpha}{\beta} = \infty. \tag{6.71}$$

4. Бесконечно малые величины α и β называются эквивалентными, если предел их отношения равен единице, т. е.

$$\lim\frac{\alpha}{\beta} = 1. \tag{6.72}$$

Обозначение эквивалентных бесконечно малых величин α и β:

$$\alpha \sim \beta. \tag{6.73}$$

Эквивалентные бесконечно малые величины обладают следующими свойствами:

1) разность двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с каждой из них;

2) при нахождении предела отношения двух бесконечно малых можно каждую из них (или только одну) заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной, т. е. если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$, то

$$\lim\frac{\alpha}{\beta} = \lim\frac{\alpha_1}{\beta} = \lim\frac{\alpha}{\beta_1} = \lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}. \tag{6.74}$$

Замечание 1. Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с каждой из них.

Замечание 2. Чтобы сравнить между собой бесконечно малые величины, находят предел их отношения Если это отношение предела не имеет, то величины несравнимы

Примеры

1. Если $x \to 0$, то какие из бесконечно малых величин $3x$, $x^2, \sqrt{x}, x^3, \frac{1}{2}x$ являются величинами одного порядка с x, величинами высшего порядка и величинами низшего порядка по сравнению с x?

Рассмотрим пределы отношений данных величин к x.

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2},$$

то величины $3x$ и $\frac{1}{2}x$ являются бесконечно малыми одного порядка с величиной x (см. формулу (6.69)).

Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0}x^2=0,$$

то величины x^2 и x^3 являются бесконечно малыми высшего порядка по сравнению с величиной x (см. формулу (6.70)).

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty,$$

то величина $\sqrt{x}$ является бесконечно малой низшего порядка по сравнению с величиной x (см. формулу (6.71)).

2. Дана бесконечно малая величина x. Сравнить ее с бесконечно малыми $\ln(1+x)$ и $x\sin\frac{1}{x}$.

Так как по формуле (6.65)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

то $\ln(1+x)$ и x — эквивалентные бесконечно малые величины (см. формулу (6.72)).

Величина $x\sin\frac{1}{x}$ является бесконечно малой величиной как произведение бесконечно малой x на ограниченную величину $\sin\frac{1}{x}$ ($|\sin z|\leqslant 1$). Так как отношение $\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x}$ предела не имеет, то величины x и $x\sin\frac{1}{x}$ несравнимы.

3. Доказать, что при $x\to 0$ бесконечно малые $\sin cx$ и cx являются эквивалентными.

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin cx}{cx}=\lim_{cx\to 0}\frac{\sin cx}{cx}=1,$$

то из определения (см. формулу (6.72)) вытекает эквивалентность данных величин.

4. Доказать, что при $x\to 0$ бесконечно малые $\operatorname{arctg} cx$ и cx являются эквивалентными.

Положим

$$\operatorname{arctg} cx = z,$$

тогда

$$\operatorname{tg} z = cx$$

и $z\to 0$ при $x\to 0$.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} cx}{cx}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{tg} z}=1,$$

что и требовалось доказать.

5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 6x}{(\operatorname{arctg} 2x)^2}$.

Принимая во внимание, что

$$\sin cx\sim cx \text{ и } \operatorname{arctg} cx\sim cx$$

(см. примеры 3 и 4), получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 6x}{(\operatorname{arctg} 2x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}\cdot\frac{6x}{2x}=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}.$$

6. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(x^2-5x+7)}{x-3}$.

При $x\to 3$ получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, так как $x^2-5x+7\to 1$ и $\ln(x^2-5x+7)\to 0$. Выражение x^2-5x+7 можно представить так:

$$x^2-5x+7=1+(x^2-5x+6)=1+z,$$

где $(x^2-5x+6)=z\to 0$ при $x\to 3$.

Так как при $z\to 0$ $\ln(1+z)\sim z$ (см. пример 2), то

$$\ln(x^2-5x+7)\sim x^2-5x+6.$$

Применяя формулу (6.74), получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x^2-5x+7)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}=$$
$$=\lim_{x\to 3}(x-2)=1.$$

7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}$.

При $x\to 0$ величина $(1+x)^a-1$ является бесконечно малой. Положим

$$(1+x)^a-1=z.$$

Поскольку

$$z\sim\ln(1+z),$$

то

$$(1+x)^a-1\sim\ln[1+(1+x)^a-1]=\ln(1+x)^a=a\ln(1+x).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a\ln(1+x)}{x}=a.$$

Задачи

1. Сравнить бесконечно малые величины ax, cx^3, $b\sqrt[3]{x}$ с бесконечно малой x.

2. Доказать эквивалентность бесконечно малых величин:

1) $\operatorname{tg} cx$ и cx; 2) $\arcsin cx$ и cx;

3) $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x$ и x; 4) $x+2x^2$ и x.

3. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^3 ax}{\sin^3 bx}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}-1}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(3x^2+5x-21)}{x^2-6x+8}$.

Ответы

1. ax и x — бесконечно малые одного порядка; cx^3 — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с x; $b\sqrt[3]{x}$ — бесконечно малая низшего порядка по сравнению с x. 2. Указание. Воспользоваться формулой (6.72). 3. 1) $\frac{a}{b}$; 2) $\frac{a^3}{b^3}$; 3) $\frac{1}{5}$. Указание. См. пример 7; 4) $-\frac{1}{3}$; 5) a; 6) $-\frac{17}{2}$.

§ 6.8. Непрерывность функции

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_1, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_1+\Delta x)-f(x_1)]=0. \tag{6.75}$$

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_1, если при $x\to x_1$ предел функции существует и равен ее значению в точке x_1, т. е.

$$\lim_{x\to x_1}f(x)=f(x_1). \tag{6.76}$$

Эти два определения непрерывности функции в точке равносильны друг другу.

Функция называется *непрерывной в интервале*, если она непрерывна во всех точках этого интервала.

Свойства непрерывных функций

1. Сумма нескольких непрерывных функций есть функция непрерывная.
2. Произведение нескольких непрерывных функций есть функция непрерывная.
3. Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, в которых делитель отличен от нуля.
4. Если $y=f(z)$ и $z=\varphi(x)$ — непрерывные функции своих аргументов, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ также непрерывна.
5. Если функция $y=f(x)$ непрерывна и существует обратная функция $x=\varphi(y)$, то последняя также непрерывна.

Функция $y=f(x)$ называется *разрывной в точке* x_1, если она определена в сколь угодно близких точках, но в точке x_1, не удовлетворяет условию непрерывности.

Если для функции $y=f(x)$ существуют *конечные* пределы

$$\lim_{x\to x_1-0}f(x) \text{ и } \lim_{x\to x_1+0}f(x),$$

причем не все три числа $f(x_1)$, $\lim\limits_{x\to x_1-0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_1+0}f(x)$ равны между собой, то x_1 называется *точкой разрыва 1-го рода*. В частности, если

$$\lim_{x\to x_1-0}f(x)=\lim_{x\to x_1+0}f(x), \tag{6.77}$$

то x_1 называется *устранимой точкой разрыва*.

Точки разрыва функции, не являющиеся точками разрыва 1-го рода, называются *точками разрыва 2-го рода*. В таких точках хотя бы один из односторонних пределов является бесконечным или не существует.

Примеры

1. Доказать, что функция $y=x^3$ является непрерывной в промежутке $(-\infty,\ \infty)$.

Функция $y=x^3$ определена при всех x, т. е. в бесконечном интервале $(-\infty,\ \infty)$.

Покажем, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции. Фиксируем произвольную точку x, аргументу x дадим приращение Δx, приращенное значение функции определится формулой

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^3=x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3.$$

Приращение функции равно

$$\Delta y=x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-y=3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3.$$

Итак,

$$\Delta y = \Delta x (3x^2 + 3x\,\Delta x + \Delta x^2).$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2 + 3x\,\Delta x + \Delta x^2) = 0\cdot 3x^2 = 0.$$

Таким образом, условие (6.75) выполнено при любом x из $(-\infty, \infty)$, откуда и следует, что функция непрерывна при всех x.

2. Доказать, что функция $y = x^n$ (n — целое, положительное) непрерывна в промежутке $(-\infty, \infty)$.

Функция определена при всех x, т. е. в интервале $(-\infty, \infty)$. Приращенное значение функции при фиксированном x равно

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n,$$

откуда

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n = \Delta x\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}\right)$$

и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}\right) = 0.$$

3. Доказать, что функция $y = \cos x$ непрерывна при всех x.

Эта функция также определена при любом x из промежутка $(-\infty, \infty)$. Фиксируя x и давая ему приращение Δx, получим приращение функции

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Так как $|\sin\alpha| \leqslant \alpha$ и $|\sin\alpha| \leqslant 1$, то

$$|\Delta y| = 2\left|\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right|\cdot\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant 2\cdot 1\cdot\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|.$$

Следовательно,

$$|\Delta y| \leqslant |\Delta x|,$$

поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0.$$

4. Доказать, что функция $y = \cos x^2$ непрерывна при любом x.

Функция $y = \cos x^2$ является сложной или функцией от функции, а именно

$$y = \cos z,\ z = x^2.$$

Каждая из этих функций непрерывна (пример 3, пример 2 при $n = 2$). В силу свойства 4 функция $y = \cos x^2$ будет также непрерывной.

5. Показать, что для функции $f(x) = \frac{x-2}{|x-2|}$ точка $x = 2$ является точкой разрыва 1-го рода.

В точке $x = 2$ функция не определена.

По определению абсолютной величины (§ 6.1) имеем

$$f(x) = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1,\ \text{когда}\ (x-2) < 0\ \text{или}\ x < 2;$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x-2} = 1,\ \text{когда}\ x - 2 > 0\ \text{или}\ x > 2.$$

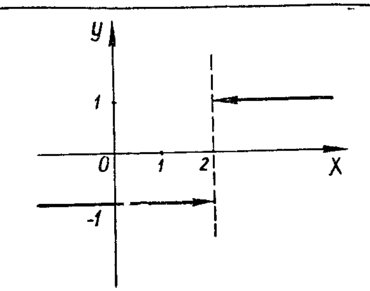

Рис. 6.25

Так как

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = -1,\ \lim_{x\to 2+0} f(x) = 1,$$

то точка $x = 2$ (рис. 6.25) является точкой разрыва 1-го рода.

Замечание. Данную функцию нельзя доопределить так, чтобы она оказалась непрерывной в точке $x = 2$.

6. Показать, что точка $x = 0$ является устранимой точкой разрыва для функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не определена при $x = 0$, но определена при всех $x \neq 0$. Односторонние пределы функции в точке $x = 0$ равны между собой

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

В силу условия (6.77) заключаем, что точка $x = 0$ является устранимой точкой разрыва (рис. 6.26).

7. Показать, что функция $f(x) = \frac{6}{(x-3)^2}$ имеет разрыв в точке $x = 3$.

Функция определена во всех точках, кроме точки $x = 3$. При $x < 3$ получаем $f(x) > 0$, при $x > 3$ $f(x) > 0$.

Имеем

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = +\infty.$$

Точка $x = 3$ является точкой разрыва (рис. 6.27).

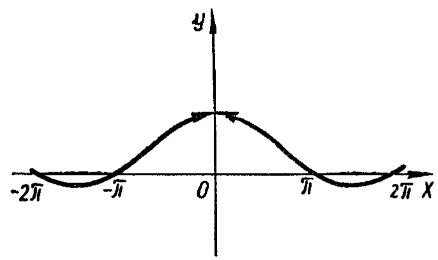

Рис. 6.26

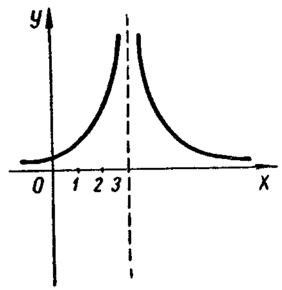

Рис. 6.27

Задачи

1. Доказать, что функция

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

непрерывна при всех x.

2. Доказать, что функция $y = \sin x$ непрерывна при всех x.

3. Доказать непрерывность функций:

1) $y = 2\cos 3x$; 2) $y = 3\sin 4x$;

3) $y = \sin x^2$; 4) $y = \cos^3 x$.

4. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{\sin(x-3)}{|x-3|}$$

имеет разрыв в точке $x = 3$.

5. Найти точку разрыва функции

$$f(x) = \frac{8}{x+4}.$$

6. Показать, что функция

$$y = \frac{x^2-9}{x-3}$$

имеет устранимый разрыв в точке $x = 3$.

7. Определить точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x+2)}.$$

Ответы

1. Указание. Воспользоваться свойствами непрерывных функций и тем, что функция $y = x^n$ непрерывна. 5. $x = -4$. 7. $x = 1$, $x = -2$.

III. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Глава 7. Производная и дифференциал

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (7.1)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (7.1')$$

Если x меняется, то предел (7.1) будет также меняться (для некоторых x он может и не существовать), следовательно, производная данной функции есть некоторая функция.

Функция, имеющая конечную производную, называется *дифференцируемой*. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Геометрическое значение производной. Производная функции $y = f(x)$ для каждого значения x равна угловому коэффициенту касательной к графику данной функции в соответствующей точке, т. е.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол, образуемый касательной к графику с положительным направлением оси Ox прямоугольной декартовой системы координат; этот угол является функцией аргумента x.

Механическое значение производной. Для функции $s = f(t)$, меняющейся со временем t, производная s' есть скорость изменения функции в данный момент t_0, т. е.

$$f'(t_0) = v(t_0),$$

где $v(t_0)$ — скорость изменения s в момент $t = t_0$.

Быстрота протекания физических, химических и других процессов выражается *с помощью производной*.

Если u, v, w — дифференцируемые функции от x, а c — постоянная величина, то имеют место следующие *основные правила дифференцирования*:

$$c' = 0 \quad (c = \text{const}); \qquad (7.2)$$

$$(u - v + w)' = u' - v' + w'; \qquad (7.3)$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \qquad (7.4)$$

$$(cv)' = cv' \quad (c = \text{const}); \qquad (7.4')$$

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}; \qquad (7.4'')$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \qquad (7.5)$$

§ 7.1. Производные степенных и тригонометрических функций

Основные формулы:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}; \qquad (7.6)$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \qquad (7.6')$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \qquad (7.6'')$$

$$x'_x = 1; \qquad (7.6''')$$

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (7.7)$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \qquad (7.8)$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad (7.9)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (7.10)$$

Замечание. Формулы (7.6′), (7.6″) и (7.6‴) получаются из формулы (7.6) соответственно при $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$.

Примеры

1. Найти производную функции $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x$.

На основании формул (7.3), (7.4′), (7.6) и (7.6‴) получаем:

$$y' = \left(\frac{1}{5}x^5\right)' - \left(\frac{2}{3}x^3\right)' + (x)' = \frac{1}{5}(x^5)' - \frac{2}{3}(x^3)' + (x)' =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot 5x^4 - \frac{2}{3}\cdot 3x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2.$$

2. Найти производную функции $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Как и в предыдущем примере, имеем

$$f'(x) = \left(2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}}\right)' = 2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - 3\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' =$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

3. Найти производную функции $y = x\cos x$.

Пользуясь формулами (7.4), (7.6‴) и (7.8), находим

$$y' = (x\cos x)' = x'\cos x + x(\cos x)' = 1\cdot\cos x + x(-\sin x) =$$
$$= \cos x - x\sin x.$$

4. Дана функция $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Вычислить $f'(-1)$ $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$.

Находим вначале производную данной функции

$$f'(x) = 2x - 3.$$

Подставляя значения аргумента x в выражение для производной, получаем:

$$f'(-1) = 2(-1) - 3 = -5; \quad f'(0) = 2\cdot 0 - 3 = -3;$$
$$f'(1) = 2\cdot 1 - 3 = -1; \quad f'(2) = 2\cdot 2 - 3 = 1.$$

5. Найти производную функции $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$.

По формуле (7.5) находим

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-2}{x^2+2}\right)' = \frac{(x^2-2)'(x^2+2) - (x^2-2)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} =$$
$$= \frac{2x(x^2+2) - (x^2-2)\,2x}{(x^2+2)^2} = \frac{8x}{(x^2+2)^2}.$$

6. Найти производную функции $r = b\cos\varphi$.

Здесь функция обозначена буквой r, аргумент — буквой φ, b — постоянная величина. Дифференцируя, находим

$$r' = (b\cos\varphi)' = b(\cos\varphi)' = b(-\sin\varphi) = -b\sin\varphi, \quad r' = -b\sin\varphi.$$

7. Найти производную функции $s = at^2 + bt + c$.

Функция обозначена буквой s, аргумент буквой t, a, b и c — постоянные. Дифференцируя, получаем

$$s = (at^2)' + (bt)' + (c)' = a(t^2)' + b(t)' + (c)' = 2at + b.$$

Задачи

Найти производные функций:

1. $y = \frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 5.$
2. $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5}.$
3. $y = 4\sqrt[4]{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x}.$
4. $y = \sin x - \cos x.$
5. $y = x^2\cos x.$
6. $y = \frac{ax - b}{ax + b}.$
7. $s = 5t^3 - t^2.$
8. $r = \varphi\sin\varphi.$
9. $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Найти $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(4)$, $f'(-2)$.
10. $r(\varphi) = \sin\varphi + \cos\varphi$. Найти $r'(0)$, $r'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $r'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $r'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Ответы

1. $y' = x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ 2. $y' = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6}$. 3. $y' = \frac{3}{\sqrt[4]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. 4. $y' = \cos x + \sin x$ 5. $y' = x(2\cos x - x\sin x)$. 6. $y' = \frac{2ab}{(ax+b)^2}$. 7. $s' = 15t^2 - 2t$. 8. $r' = \sin\varphi + \varphi\cos\varphi$. $f'(x) = 2x - 5$; $f'(0) = -5$; $f'(1) = -3$; $f'(4) = 3$.

§ 7. 2. Производная сложной функции

Если $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$ — дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции

$$y = f[\varphi(x)]$$

существует и равна произведению производной данной функции y по промежуточному аргументу z на производную промежуточного аргумента z по независимой переменной x:

$$y'_x = y'_z\cdot z'_x \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}. \qquad (7.11)$$

В частности, формулы § 7.1 примут вид:

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}\cdot z'; \quad (\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot z'; \quad (\sin z)' = \cos z\cdot z';$$

$$(\cos z)' = -\sin z\cdot z'; \quad (\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}\cdot z'; \quad (\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}\cdot z'.$$

Примеры

1. Найти производную функции $y = \sin 5x$.

Аргументом синуса здесь является не x, а $5x$. Это сложная тригонометрическая функция, которую можно представить так:

$$y = \sin z, \quad z = 5x.$$

Имеем:

$$y'_z = (\sin z)'_z = \cos z = \cos 5x; \quad z'_x = (5x)'_x = 5.$$

Подставляя выражения для y'_z и z'_x в формулу (7.11), находим:

$$y'_x = \cos 5x\cdot 5, \quad (\sin 5x)' = 5\cos 5x.$$

Тот же результат можно получить и непосредственно, не вводя явно промежуточный аргумент $z = 5x$:

$$(\sin 5x)'_x = (\sin 5x)'\cdot(5x)'_x = \cos 5x\cdot 5 = 5\cos 5x.$$

Замечание 1. В последних равенствах штрихом обозначено дифференцирование по промежуточному аргументу $z = 5x$. Штрих вверху и x внизу означают дифференцирование по x.

Замечание 2. Мы пользовались здесь тем, что производная синуса его аргументу равна косинусу того же аргумента.

2. Найти производную от функции $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$.

Это сложная степенная функция с промежуточным аргументом $z = \sin x$. Данную функцию можно представить в виде

$$y = z^2, \ z = \sin x.$$

Дифференцируя, получаем:

$$y'_z = 2z = 2\sin x; \ z'_x = (\sin x)' = \cos x.$$

Подставляя эти выражения в формулу (7.11), находим

$$y'_x = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

Тот же результат получается непосредственно:

$$(\sin^2 x)'_x = (\sin^2 x)' \cdot (\sin x)'_x = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

3. Найти производную функции $y = \cos x^3$.

Это сложная тригонометрическая функция с промежуточным аргументом $z = x^3$. Функция представляется в виде

$$y = \cos z, \ z = x^3.$$

Дифференцируя данные функции по своим аргументам и подставляя полученные выражения в формулу (7.11), находим:

$$y'_z = (\cos z)'_z = -\sin z = -\sin x^3, \ z'_x = (x^3)'_x = 3x^2;$$

$$y'_x = -\sin x^3 \cdot 3x^2 = -3x^2 \sin x^3.$$

Этот результат можно получить и не вводя явно промежуточного аргумента z:

$$(\cos x^3)'_x = (\cos x^3)' \cdot (x^3)'_x = -\sin x^3 \cdot 3x^2 = -3x^2 \sin x^3.$$

4. Найти производную функции $y = (ax - b)^4$.

Данная функция является сложной степенной функцией с промежуточным аргументом $z = ax - b$:

$$y = z^4, \ z = ax - b.$$

Дифференцируя, получаем:

$$y'_z = (z^4)' = 4z^3 = 4(ax-b)^3, \ z'_x = (ax-b)' = a,$$

$$y'_x = 4(ax-b)^3 \cdot a = 4a(ax-b)^3.$$

5. Найти производную функции $y = \sqrt{x^2 + 4x + 2}$.

Представляя данную функцию в виде

$$y = \sqrt{z}, \ z = x^2 + 4x + 2$$

и дифференцируя, находим:

$$y'_z = (\sqrt{z})'_z = \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+2}};$$

$$z'_x = (x^2 + 4x + 2)' = 2x + 4;$$

$$y'_x = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+2}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+2}}.$$

6. Найти производную функции $y = \sin^2 \frac{x}{2}$.

Это сложная степенная функция, аргумент которой является сложной тригонометрической функцией. Первый промежуточный аргумент есть $\sin \frac{x}{2}$, второй — $\frac{x}{2}$.

Здесь формулу (7.11) нужно применить дважды

$$y_x = \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)' \cdot \left(\sin \frac{x}{2}\right)'_x = \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)' \cdot \left(\sin \frac{x}{2}\right)' \cdot \left(\frac{x}{2}\right)'_x =$$

$$= 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin x.$$

7. Найти производную функции $y = x^2 \sin^2 x^2$.

Данная функция представляет собой произведение двух функций, одна из которых является сложной функцией, при дифференцировании последней формулу (7.11) нужно применить дважды (см. пример 6).

Дифференцируя данную функцию как произведение и функцию от функции, получаем

$$y' = (x^2 \sin^2 x^2)' = (x^2)' \sin^2 x^2 + x^2 (\sin^2 x^2)' = 2x \sin^2 x^2 +$$

$$+ x^2 2 \sin x^2 \cos x^2 \cdot 2x = 2x \sin^2 x^2 + 2x^3 \sin 2x^2 =$$

$$= 2x(\sin^2 x^2 + x^2 \sin 2x^2).$$

8. Найти производную функции $y = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$.

Дифференцируя ее как частное и сложную функцию, находим

$$y' = \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos^2 x)' \sin x - \cos^2 x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{2\cos x(-\sin x)\sin x - \cos^2 x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos x \sin^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\cos x\left(\frac{1}{\sin^2 x} + 1\right) = -\cos x(\operatorname{cosec}^2 x + 1).$$

Задачи

Найти производные функций:

1. $y = \sin \frac{x}{2}$.
2. $y = \cos(3 - 4x)$.
3. $y = \cos^3 x$.
4. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.
5. $y = \sqrt{x^4 + 2x + 3}$.
6. $y = (2x^2 - 7)^3$.
7. $y = (a^2 - cx^2)^3$.
8. $y = \frac{1}{(ax+b)^2}$.
9. $y = \frac{1}{(1 + \sin 2x)^3}$.
10. $y = -\operatorname{ctg}^3 x + 3\operatorname{ctg} x + 3x$.
11. $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$.
12. $y = \cos^2 x^2$.

Ответы

1. $\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$. 2. $4\sin(3-4x)$ 3. $-3\cos^2 x\sin x$. 4. $-\sin 4x$. 5. $\frac{2x^3+1}{\sqrt{x^4+2x+3}}$. 6. $12x(2x^2-7)^2$. 7. $-6cx(a^2-cx^2)^2$. 8. $-\frac{2a}{(ax+b)^3}$. 9. $\frac{-6\cos 2x}{(1+\sin 2x)^4}$. 10. $3\operatorname{ctg}^4 x$. 11. $\sin x(\sec^2 x+1)$. 12. $-2x\sin 2x^2$.

§ 7.3. Производные показательных и логарифмических функций

Основные формулы:

$$(a^x)' = a^x\ln a; \tag{7.12}$$

$$(e^x)' = e^x; \tag{7.13}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}; \tag{7.14}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{7.15}$$

Если $z=z(x)$ — дифференцируемая функция от x, то формулы примут вид:

$$(a^z)' = a^z\cdot\ln a\cdot z'; \tag{7.12'}$$

$$(e^z)' = e^z\cdot z'; \tag{7.13'}$$

$$(\log_a z)' = \frac{z'}{z\ln a}; \tag{7.14'}$$

$$(\ln z)' = \frac{z'}{z}. \tag{7.15'}$$

Примеры

1. Найти производную функции $y=4^x$.

Пользуемся формулой (7.12). В данном случае $a=4$. Получаем

$$(4^x)' = 4^x\ln 4 = 2\ln 2\cdot 4^x.$$

2. Найти производную функции $y=a^{x^2}$.

По формуле (7.12′) получаем

$$(a^{x^2})' = a^{x^2}\cdot\ln a\cdot(x^2)' = a^{x^2}\cdot\ln a\cdot 2x = 2\ln a\cdot x\cdot a^{x^2}.$$

3. Найти производную функции $y=e^{\sin^2 x}$.

По формуле (7.13′) находим

$$(e^{\sin^2 x})' = e^{\sin^2 x}\cdot(\sin^2 x)' = e^{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cdot\cos x = e^{\sin^2 x}\sin 2x.$$

4. Найти производную функции $y=\ln\sqrt{x^2+2x+3}$.

По формуле (7.15′) получаем

$$(\ln\sqrt{x^2+2x+3})' = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\cdot(\sqrt{x^2+2x+3})' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+3}}\cdot(x^2+2x+3)' =$$

$$= \frac{2x+2}{2(x^2+2x+3)} = \frac{x+1}{x^2+2x+3}.$$

Замечание. Данную функцию можно было бы записать так: $y=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)$ и продифференцировать следующим образом:

$$\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)\right]' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+2x+3)}\cdot(x^2+2x+3)' = \frac{x+1}{x^2+2x+3}.$$

5. Найти производную функции $y=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$.

$$y' = \left[\ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)\right]' =$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(1+2x)-\ln(1-2x)]' = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+2x}+\frac{2}{1-2x}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1-2x}\right) = \frac{2}{1-4x^2}.$$

Замечание. Если под знаком подлежащей дифференцированию логарифмической функции содержится выражение, поддающееся логарифмированию (произведение, частное, степень, корень), то полезно сначала выполнять логарифмирование.

6. Найти производную функции $y=\cos 2x\cdot e^{2\cos^2 x}$.

Дифференцируя произведение и пользуясь формулой (7.13′), находим

$$(\cos 2x\cdot e^{2\cos^2 x})' = (\cos 2x)'\,e^{2\cos^2 x} + \cos 2x\,(e^{2\cos^2 x})' =$$

$$= -2\sin 2x\cdot e^{2\cos^2 x} + \cos 2x\cdot e^{2\cos^2 x}\cdot 4\cos x\,(-\sin x) =$$

$$= -2\sin 2x\cdot e^{2\cos^2 x} - 2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot e^{2\cos^2 x} =$$

$$= -2e^{2\cos^2 x}\sin 2x\,(1+\cos 2x) = -4e^{2\cos^2 x}\cdot\sin 2x\cos^2 x.$$

Задачи

Найти производные функций:

1. $y=x^2\ln x$.
2. $y=\ln(x^2+5x+6)$.
3. $y=\ln\frac{x-a}{x+a}$.
4. $y=\ln\sqrt{\frac{a-bx}{a+bx}}$.
5. $y=\ln\ln x$.
6. $y=\ln^2 x$.
7. $y=4^x+x^4$.
8. $y=a^{\sin\frac{x}{4}}$.
9. $y=e^{\sin 2x}$.
10. $y=e^{\cos^2 x}$.
11. $y=\ln\frac{ae^x}{bx^2+c}$.
12. $y=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

Ответы

1. $x(2\ln x+1)$. 2. $\frac{2x+5}{x^2+5x+6}$. 3. $\frac{2a}{x^2-a^2}$. 4. $\frac{ab}{b^2x^2-a^2}$. 5. $\frac{1}{x\ln x}$. 6. $\frac{2\ln x}{x}$. 7. $4^x 2\ln 2+4x^3$. 8. $\frac{1}{4}a^{\sin\frac{x}{4}}\cdot\cos\frac{x}{4}\ln a$. 9. $2\cos 2x\, e^{\sin 2x}$. 10. $-\sin 2x e^{\cos^2 x}$. 11. $1-\frac{2bx}{bx^2+c}$. 12. $\frac{4}{e^{-2x}-e^{2x}}$.

§ 7.4. Производные обратных тригонометрических функций

Основные формулы:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{7.16}$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{7.17}$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}; \tag{7.18}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}. \tag{7.19}$$

Для сложных функций:

$$(\arcsin z)'=\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}}; \tag{7.16$'$}$$

$$(\arccos z)'=-\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}}; \tag{7.17$'$}$$

$$(\operatorname{arctg} z)'=\frac{z'}{1+z^2}; \tag{7.18$'$}$$

$$(\operatorname{arcctg} z)'=-\frac{z'}{1+z^2}. \tag{7.19$'$}$$

Примеры

1. Найти производную функции $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.
Дифференцируя, получаем

$$(\arcsin x+\sqrt{1-x^2})'=(\arcsin x)'+(\sqrt{1-x^2})'=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

2. Найти производную функции $y=\sqrt{1-x^2}\arccos x$.
Дифференцируем, используя формулы (7.4) и (7.17), находим

$$(\sqrt{1-x^2}\arccos x)'=(\sqrt{1-x^2})'\arccos x+$$
$$+\sqrt{1-x^2}(\arccos x)'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x-$$
$$-\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\right).$$

3. Найти производную функции
$$y=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2).$$
Дифференцируем почленно и используем формулу (7.18$'$):

$$\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)\right]'=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)'+\frac{1}{2}[\ln(x^2+a^2)]'=$$
$$=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\left(\frac{x}{a}\right)'+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}(x^2+a^2)'=$$
$$=\frac{a}{x^2+a^2}+\frac{x}{x^2+a^2}=\frac{x+a}{x^2+a^2}.$$

4. Найти производную функции $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{2x-1}$.
По формуле (7.19$'$) находим

$$(\operatorname{arcctg}\sqrt{2x-1})'=-\frac{(\sqrt{2x-1})'}{1+(\sqrt{2x-1})^2}=$$
$$=-\frac{1}{1+2x-1}\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}=-\frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}.$$

5. Найти производную функции $y=\arcsin\frac{1}{x}$.
С помощью формулы (7.16$'$) получаем

$$\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$
$$=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

6. Найти производную функции $y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$.
По формуле (7.18$'$) находим

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=$$
$$=\frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2}\left[\frac{-1(1+x)-1(1-x)}{(1+x)^2}\right]=\frac{-2}{2+2x^2}=$$
$$=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Задачи

Найти производные функций:

1. $y=\arcsin 2x$.
2. $y=-\arcsin\frac{1}{x^2}$.
3. $y=\arccos\sqrt{x}$.
4. $y=\arccos x^3$.

5. $y = \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}$. 6. $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

7. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$. 8. $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Ответы

1. $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. 2. $\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$. 3. $-\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. 4. $-\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$. 5. $-\frac{a}{a^2+x^2}$. 6. $\frac{1}{x^2+1}$. 7. $\frac{1}{2\sqrt{4x^3-x^2}}$. 8. $-\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$.

§ 7.5. Производные неявных функций

Функция y от аргумента x называется *неявной*, если она задана уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{7.20}$$

не разрешенным относительно зависимой переменной.

Чтобы найти производную y' от неявной функции, нужно продифференцировать по x обе части уравнения (7.20), рассматривая y как функцию x. Из полученного уравнения находится искомая производная y'.

Примеры

1. Найти производную неявной функции $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

Считая y функцией от x и дифференцируя y как сложную функцию, получаем

$$(x^2 + y^2 - a^2)' = 0, \quad 2x + 2y\cdot y' = 0,$$

откуда

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Замечание. В этом примере тот же результат можно получить и другим способом. Разрешив исходное уравнение относительно y, найдем две явные функции $y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y_2 = -\sqrt{a^2 - x^2}$. Дифференцируя эти функции, находим:

$$y_1' = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(a^2-x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{y_1}, \quad y_2' = -\frac{x}{y_2}.$$

Однако переход от неявной функции $F(x, y) = 0$ к явной $y = f(x)$ не всегда возможен.

2. Найти производную неявной функции $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Дифференцируя, получаем:

$$3x^2 + 3y^2\cdot y' - 3(x'y + xy') = 0; \quad x^2 + y^2\cdot y' - y - xy' = 0;$$
$$x^2 - y + y'(y^2 - x) = 0.$$

Из последнего уравнения находим y':

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}.$$

3. Вычислить значение производной неявной функции $xy^2 = 4$ в точке $M(1, 2)$.

Найдем вначале производную:

$$x'y^2 + x2yy' = 0, \quad y' = -\frac{y}{2x}.$$

Подставляя в правую часть последнего равенства значения $x = 1$, $y = 2$, получаем

$$y' = -\frac{2}{2\cdot 1} = -1.$$

4. Найти x_t' при $t = 1$, если $t\ln x - x\ln t = 1$.

Это уравнение определяет x как неявную функцию t. Дифференцируем по t:

$$t_t'\cdot\ln x + t\cdot\frac{1}{x}x_t' - \left(x_t'\ln t + x\cdot\frac{1}{t}\right) = 0.$$

Так как $t_t' = 1$, то

$$\ln x + \frac{t}{x}x_t' - x_t'\ln t - \frac{x}{t} = 0, \quad x_t'\left(\frac{t}{x} - \ln t\right) - \left(\frac{x}{t} - \ln x\right) = 0,$$

откуда

$$x_t' = \frac{\frac{x}{t} - \ln x}{\frac{t}{x} - \ln t}.$$

Чтобы найти x_t' при $t = 1$, необходимо определить еще значение x, соответствующее данному значению t. Подставляя $t = 1$ в исходное уравнение, получим $1\cdot\ln x - x\ln 1 = 1$, откуда $\ln x = 1$, следовательно, $x = e$.

Подставим сейчас значения t, x в формулу для производной. Получим

$$x_t' = \frac{\frac{e}{1} - 1}{\frac{1}{e} - 0} = \frac{e-1}{\frac{1}{e}} = e(e-1), \quad x_t' = e(e-1).$$

Задачи

Найти производные неявных функций:

1. $x^2 + y^2 - 4xy = 0$. 2. $xy^2 + x^2y = 2$.

3. $xy + \sin y = 0$. 4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

5. $e^y + x = y$. 6. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

7. $\ln y - 2x = 0$. 8. $y^2 + x^4 = x^2$.

9. Найти y' в точке $M(1,\ 1)$, если $\frac{y}{x}+xy=2$.

10. Найти y' при $y=0$, если $x\cos y-\sin y+\sin 2y=1$.

Ответы

1. $\frac{x-2y}{2x-y}$. 2. $-\frac{y(y+2x)}{x(x+2y)}$. 3. $-\frac{y}{x+\cos y}$. 4. $\frac{b^2x}{a^2y}$. 5. $\frac{1}{1-e^y}$. 6. $-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. 7. $2y$. 8. $\frac{x(1-2x^2)}{y}$. 9. 0. 10. -1.

§ 7.6. Производные высших порядков

Производной второго порядка или второй производной функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной $y'=f'(x)$. Она обозначается символами:

$$y''=(y')' \text{ или } f''(x)=[f'(x)]' \text{ или } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}.$$

Механический смысл второй производной. Если $x=f(t)$ — закон прямолинейного движения точки, то $x''=f''(t)$ есть ускорение этого движения.

Аналогично определяются и обозначаются производные третьего, четвертого и других порядков:

$$y'''=f'''(x)=(y'')'=\frac{d^3y}{dx^3},\quad y^{\text{IV}}=f^{\text{IV}}(x)=(y''')'=\frac{d^4y}{dx^4},\ \ldots,$$

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=(y^{(n-1)})'=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Формула Лейбница для производной n-го порядка от произведения двух функций:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots+$$
$$+nu'v^{(n-1)}+uv^{(n)}.$$

Примеры

1. Найти производную второго порядка функции $y=\sin^2x$.

Дифференцируя, получаем первую производную

$$y'=2\sin x\cos x=\sin 2x.$$

Дифференцируя еще раз, находим искомую производную второго порядка:

$$y''=(\sin 2x)'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x.$$

2. Найти производную третьего порядка функции $y=x^2+3x+2$.

Последовательно дифференцируя, получаем:

$$y'=(x^2+3x+2)'=2x+3;\quad y''=(2x+3)'=2;$$
$$y'''=(2)'=0.$$

3. Найти производную четвертого порядка функции $y=\sin x$.

Последовательно дифференцируя, определяем:

$$y'=\cos x,\ y''=-\sin x,\ y'''=-\cos x,\ y^{\text{IV}}=\sin x.$$

4. Найти $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{\text{IV}}(0)$, если $f(x)=\cos 2x$.

Находим производные первого, второго, третьего и четвертого порядков:

$$f'(x)=-2\sin 2x,\quad f''(x)=-4\cos 2x,\quad f'''(x)=8\sin 2x,$$
$$f^{\text{IV}}(x)=16\cos 2x.$$

Придавая x значение, равное нулю, находим

$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=-4,\ f'''(0)=0,\ f^{\text{IV}}(0)=16.$$

5. Найти производную десятого порядка для функции $y=e^x(x^3-2)$.

Применяя формулу Лейбница, получим

$$y^{(10)}=[e^x(x^3-2)]^{(10)}=(e^x)^{(10)}(x^3-2)+10(e^x)^{(9)}(x^3-2)'+$$
$$+\frac{10\cdot 9}{2}(e^x)^{(8)}(x^3-2)''+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3}(e^x)^{(7)}(x^3-2)'''.$$

Все последующие слагаемые равны нулю, так как все высшие производные от функции x^3-2, начиная с четвертой, обращаются в нуль. Поскольку производная любого порядка от e^x есть e^x, то

$$y^{(10)}=e^x(x^3-2)+30e^xx^2+45e^x\cdot 6x+120e^x\cdot 6,$$
$$y^{(10)}=e^x(x^3+30x^2+270x+718).$$

Задачи

Найти производные второго порядка от функций:

1. $y=(x^2-1)^2$.
2. $y=(ax^2-b)^2$.
3. $y=a^x$.
4. $y=\ln x$.
5. $y=\operatorname{tg} x$.
6. $y=\operatorname{ctg} x$.

Найти производные третьего порядка от функций:

7. $r=a(\varphi-\sin\varphi)$.
8. $r=a(1-\cos\varphi)$.
9. $s=a\sin 4t$.
10. $s=a\cos 3t$.

Ответы

1. $4(3x^2-1)$. 2. $4a(3ax^2-b)$. 3. $a^x\ln^2a$. 4. $-\frac{1}{x^2}$. 5. $\frac{2\sin x}{\cos^3x}$. 6. $\frac{2\cos x}{\sin^3x}$. 7. $a\cos\varphi$. 8. $-a\sin\varphi$. 9. $-64a\cos 4t$. 10. $27a\sin 3t$.

§ 7.7. Производные гиперболических функций и функций, заданных параметрически

Выражения $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ и их отношения называются соответственно *гиперболическим синусом; косинусом, тангенсом, котангенсом* и обозначаются:

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\ \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2};\ \operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}};$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Основные формулы для гиперболических функций:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$
$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x;$$
$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

1. Производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$
$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{7.21}$$

2. Производная y'_x функции, заданной параметрически

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t),$$

находится по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\varphi'_2}{\varphi'_1}. \tag{7.22}$$

3. Производная функции $y = u^v$, где u и v дифференцируемые функции от x, находится с помощью предварительного логарифмирования.

Примеры

1. Найти производную функции $y = \operatorname{sh}^2 x$.

Дифференцируя сложную функцию и пользуясь первой из формул (7.21), получаем

$$y' = 2\operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{sh} x)' = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x.$$

2. Найти производную функции $y = x - \operatorname{cth} x$.

Дифференцируя разность двух функций и принимая во внимание четвертую из формул (7.21), находим

$$y' = 1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x + 1}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth}^2 x.$$

3. Найти производную y'_x функции $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Находим сначала производные по t: $x'_t = -a\sin t$; $y'_t = b\cos t$. Подставляя найденные выражения в формулу (7.22), получим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

4. Найти производную y'_x функции $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$ при $t = 0$.

Функции x и y имеют следующие производные по t:

$$x'_t = e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t - \sin t);$$
$$y'_t = e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\sin t + \cos t),$$

поэтому

$$y'_x = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}.$$

При $t = 0$ получаем $y'_x = 1$.

5. Найти производную от функции $y = x^x$.

Логарифмируя по основанию e, получаем

$$\ln y = x\ln x.$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}; \quad \frac{y'}{y} = \ln x + 1,$$

откуда

$$y' = y(\ln x + 1).$$

Подставив в последнее равенство выражение $y = x^x$, получим

$$y' = x^x(\ln x + 1).$$

6. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

Логарифмируем по основанию e:

$$\ln y = \sin x\cdot\ln x.$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \cos x\cdot\ln x + \sin x\cdot\frac{1}{x},$$

откуда

$$y' = y\left(\cos x\cdot\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

и, наконец,

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Задачи

Найти производные гиперболических функций:

1. $y = \operatorname{ch}^2 x$.
2. $y = x\operatorname{ch} x$.
3. $y = \ln(\operatorname{sh} x)$.
4. $y = \operatorname{th} x - x$.
5. $y = \arcsin(\operatorname{th} x)$.
6. $y = \arccos(\operatorname{th} x)$.

Найти производные функций, заданных параметрически:

7. $x = b\cos^3 u$, $y = b\sin^3 u$.
8. $x = at\cos t$, $y = at\sin t$.
9. $x = t^2$, $y = 4t$ при $t = 1$.
10. $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$, $y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ при $t = 2$.

11. Найти производную степенно-показательной функции $y = u^v$, где u и v — дифференцируемые функции от x.

Найти производные степенно-показательных функций:

12. $y = x^{\cos x}$. **13.** $y = (\sin x)^x$.

14. $y = \sqrt[x]{x}$. **15.** $y = x^{\sqrt{x}}$.

Ответы

1. $\operatorname{sh} 2x$. 2. $\operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x$. 3. $\operatorname{cth} x$. 4. $-\operatorname{th}^2 x$. 5. $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$. 6. $-\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$. 7. $-\operatorname{tg} u$. 8. $\dfrac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t \sin t}$. 9. 2. 10. $\dfrac{5b}{3a}$. 11. $u^v\left(v' \ln u + \dfrac{v}{u} u'\right)$. Указание. Логарифмируя равенство $y = u^v$, получим $\ln y = v \ln u$. Продифференцировать последнее равенство и подставить в полученную формулу выражение $y = u^v$. 12. $x^{\cos x}\left(-\sin x \cdot \ln x + \dfrac{\cos x}{x}\right)$. 13. $(\sin x)^x (\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x)$ 14. $x^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1 - \ln x}{x^2}\right)$. 15. $x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}\left(1 + \dfrac{1}{2} \ln x\right)$.

§ 7.8. Дифференциал функции

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение ее производной на приращение независимой переменной:

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \tag{7.23}$$

В частности, при $f(x) = x$, получаем

$$dx = 1 \cdot \Delta x, \quad dx = \Delta x, \tag{7.24}$$

т. е. *дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной.*

Формулу (7.23) можно, следовательно, написать так

$$dy = f'(x)\,dx, \tag{7.25}$$

откуда

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{7.26}$$

Дифференциал функции $y = f(x)$ равен приращению LN ординаты касательной ML, проведенной к графику этой функции в точке M, когда аргумент получает приращение Δx (рис. 7.1).

Из определения производной и дифференциала вытекает, что

$$\Delta y = dy + \varepsilon \Delta x,$$

где $\varepsilon \to 0$, когда $\Delta x \to 0$, т. е. дифференциал функции отличается от приращения на бесконечно малую высшего порядка, чем $\Delta x = dx$.

При малых Δx справедлива приближенная формула

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x \tag{7.27}$$

или

$$f(x + \Delta x) \approx f'(x)\,\Delta x + f(x). \tag{7.28}$$

Если u, v, w — дифференцируемые функции от x, а c — постоянная, то верны следующие свойства дифференциалов:

$$dc = 0, \quad c = \text{const};$$
$$d(u + c) = du, \quad c = \text{const};$$
$$d(u - v + w) = du - dv + dw;$$
$$d(cu) = c\,du, \quad c = \text{const};$$
$$d(uv) = u\,dv + v\,du;$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2};$$
$$df(u) = f'(u)\,du, \quad u = \varphi(x).$$

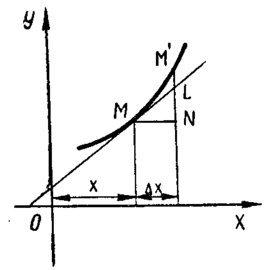

Рис. 7.1

Примеры

1. Найти дифференциал функции $y = \sin x$.

По формуле (7.25) находим

$$dy = d(\sin x) = (\sin x)'\,dx = \cos x\,dx, \quad dy = \cos x\,dx.$$

2. Найти дифференциал функции $y = x^2 + 4x + 8$.

На основании формулы (7.25) получаем

$$dy = (x^2 + 4x + 8)'\,dx = (2x + 4)\,dx = 2(x + 2)\,dx.$$

3. Найти дифференциал функции $r = a(\varphi - \cos\varphi)$.

В данном случае функция обозначена буквой r, аргумент — буквой φ. Формула (7.25) перепишется так: $dr = r'd\varphi$. На основании этой формулы находим

$$dr = [a(\varphi - \cos\varphi)]'\,d\varphi = a(1 + \sin\varphi)\,d\varphi.$$

4. Вычислить значение дифференциала функции $y = x^3 + 2x$, когда x изменяется от 1 до 1,1.

Прежде всего находим общее выражение для дифференциала этой функции:

$$dy = (3x^2 + 2)\,dx.$$

Подставляя значения $x = 1$, $dx = \Delta x = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$ в последнюю формулу, получаем искомое значение дифференциала:

$$dy = (3 \cdot 1^2 + 2)\,0{,}1 = 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5.$$

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно найти arctg 1,02.

Формула (7.28) применительно к данной функции перепишется в виде

$$\operatorname{arctg}(x+\Delta x)\approx\operatorname{arctg}x+\frac{1}{1+x^2}\Delta x.$$

В нашем случае $x+\Delta x=1{,}02$, $x=1$, $\Delta x=0{,}02$. Подставляя эти значения в формулу, получим

$$\operatorname{arctg}1{,}02\approx\operatorname{arctg}1+\frac{1}{1+1^2}\cdot 0{,}02=\frac{\pi}{4}+0{,}01\approx 0{,}795.$$

Следовательно, $\operatorname{arctg}1{,}02\approx 0{,}795$.

Задачи

Найти дифференциалы функций:

1. $y=x^4+4x^3+6x^2+4x$. 2. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

3. $y=\operatorname{tg}^2 2x$. 4. $y=\sqrt{x^3+6x^2}$.

5. $y=e^{\sin 4x}$. 6. $r=\varphi\cos\varphi-\sin\varphi$.

7. $s=b\sin^3 t$. 8. $y=x^3,\ x=t^2-1$.

9. Дана функция $y=x^4+4x$. Найти Δy и dy, сравнить их между собой, если: 1) $x=1$, $\Delta x=1$; 2) $x=1$, $\Delta x=0{,}1$.

10. Вычислить приближенно приращение функции $y=x^2+2x+3$, когда x меняется от 2 до 1,98.

11. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно найти:

1) $\operatorname{arctg}1{,}05$; 2) $e^{0{,}2}$; 3) $\ln 1{,}01$; 4) $\sin 31°$.

Ответы

1. $4(x+1)^3dx$. 2. $\dfrac{2}{x^3}\,dx$. 3. $\dfrac{4\operatorname{tg}2x}{\cos^2 2x}\,dx$. 4. $\dfrac{3x^2+12x}{2\sqrt{x^3+6x^2}}\,dx$.
5. $4e^{\sin 4x}\cos 4x\,dx$. 6. $dr=-\varphi\sin\varphi\,d\varphi$. 7. $3b\sin^2 t\cos t\,dt$. 8. $6t(t^2-1)^2\,dt$. 9. 1) $\Delta y=19$, $dy=8$; 2) $\Delta y=0{,}864$, $dy=0{,}8$. 10. $-0{,}12$. 11. 1) 0,81; 2) 1,2; 3) 0,01; 4) 0,515. Указание. Выразить $x=\operatorname{arc}30°$ и $\Delta x=\operatorname{arc}1°$ в радианной мере.

Глава 8. Приложения производной

Понятие производной находит многочисленные приложения. С помощью производной можно найти касательную к кривой в данной точке, определить скорость и ускорение неравномерного движения в данный момент времени. Производная широко применяется при исследовании функций, являющихся переменными величинами. С переменными же величинами постоянно встречаются при изучении закономерностей природы.

§ 8.1. Правило Лопиталя—Бернулли

Правило Лопиталя — Бернулли является эффективным средством нахождения предела функции в тех случаях, когда аргумент неограниченно возрастает или стремится к значению, которое не входит в область определения функции.

I. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Пусть функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ дифференцируемы при $0<|x-a|<h$, причем производная одной из них не обращается в нуль.

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — обе бесконечно малые или обе бесконечно большие при $x\to a$, т. е. если частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ представляет в точке $x=a$ неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

при условии, что предел отношения производных существует.

Последняя формула и выражает правило Лопиталя—Бернулли: *предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных, если последний существует или равен бесконечности.*

Правило это применимо и в случае, когда $a=\infty$. Если частное $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке $x=a$ вновь дает неопределенность одного из указанных типов, $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют требованиям, ранее сформулированным для $f(x)$ и $\varphi(x)$, то можно перейти к отношению вторых производных и т. д.

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Замечание 1. Предел отношения функций может существовать в то время, когда отношения производных не стремятся ни к какому пределу.

II. Раскрытие неопределенностей вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

1. Для раскрытия неопределенностей типа $0\cdot\infty$ необходимо преобразовать соответствующее произведение $f(x)\cdot\varphi(x)$, где $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, в частности

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}\ \left(\text{вид }\frac{0}{0}\right)\ \text{или}\ \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}\ \left(\text{вид }\frac{\infty}{\infty}\right).$$

2. В случае неопределенности вида $\infty-\infty$ необходимо преобразовать соответствующую разность $f(x)-\varphi(x)$, где

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, в произведение $f(x)\left[1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]$ и раскрыть сначала неопределенность $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$; если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1$, то следует привести выражение к виду

$$\frac{1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \left(\text{вид } \frac{0}{0}\right).$$

3. Неопределенности видов 1^∞, 0^0, ∞^0 раскрываются с помощью предварительного логарифмирования и нахождения предела степени $[f(x)]^{\varphi(x)}$. Эти неопределенности сводятся к случаю неопределенности $0\cdot\infty$, при этом используется тождество

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)}.$$

Замечание 2. Выражение «раскрыть неопределенность типа 0^0» означает найти предел $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ при условии $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$.

В некоторых случаях правило Лопиталя — Бернулли полезно комбинировать с нахождением пределов элементарными способами.

Примеры

1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x\, e^x - 5x}{4x^2 + 7x}$.

При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Применяя правило Лопиталя—Бернулли, находим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\, e^x - 5x}{4x^2 + 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x\, e^x - 5x)'}{(4x^2 + 7x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\, e^x + \sin x\, e^x - 5}{8x + 7} = -\frac{4}{7}.$$

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x\, e^{2x} - x}{5x^2 + x^3}$.

В данном случае правило Лопиталя—Бернулли нужно применить дважды, так как отношение первых производных снова представляет неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\, e^{2x} - x}{5x^2 + x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x\, e^{2x} - x)'}{(5x^2 + x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\, e^{2x} + 2\sin x\, e^{2x} - 1}{10x + 3x^2}.$$

При $x \to 0$ снова получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя еще раз правило Лопиталя — Бернулли, находим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x\, e^{2x} + 2\sin x\, e^{2x} - 1}{10x + 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x\, e^{2x} + 2\sin x\, e^{2x} - 1)'}{(10x + 3x^2)'} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x\, e^{2x} + 4\cos x\, e^{2x} + 4\sin x\, e^{2x}}{10 + 6x} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.

С помощью правила Лопиталя—Бернулли получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}.$$

Предел отношения первых производных — неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскрываем эту неопределенность:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-6\cos 3x \sin 3x}{-6\cos x \sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6x}{\sin 2x}.$$

Снова получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя еще раз правило Лопиталя—Бернулли, находим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6x}{\sin 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{6\cos 6x}{2\cos 2x} = \frac{6}{2} = 3.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = 3.$$

4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha}$ при $a > 1$, $\alpha > 0$.

При вычислении этого предела можно считать $x > 1$ (так как $x \to \infty$) и если n — ближайшее к α, превосходящее его целое число, то

$$\frac{a^x}{x^\alpha} > \frac{a^x}{x^n} \quad (n > 0).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} \geqslant \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n},$$

где n — целое число.

Так как $n > 0$, то предел правой части последнего неравенства можно найти с помощью правила Лопиталя—Бернулли.

Применяя n раз это правило, получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x [\ln a]^n}{n(n-1)(n-2)\dots 1} = \infty.$$

Итак, если $a > 1$ и $\alpha > 0$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0.$$

З а м е ч а н и е 1. Показательная функция a^x при $a>1$ растет быстрее любой степени x.

З а м е ч а н и е 2. Если $P(x)$ — любой многочлен

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{a^x}=0$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{|P(x)|}=\infty.$$

5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$ при $\alpha>0$, $x>0$.

Применяя правило Лопиталя—Бернулли, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0\quad\text{при } \alpha>0$$

или

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{\ln x}=\infty.$$

З а м е ч а н и е. Логарифмическая функция $\ln x$ растет медленнее любой положительной степени x.

6. Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

При $x\to0$ получаем неопределенность вида $\infty-\infty$. Раскроем эту неопределенность, приводя ее к неопределенности $\frac{0}{0}$ и применяя правило Лопиталя—Бернулли,

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0.$$

7. Найти $\lim\limits_{x\to0}[(x-\sin x)\ln x]$.

Здесь имеем неопределенность $0\cdot\infty$. Данную функцию можно представить в виде

$$(x-\sin x)\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x-\sin x}}.$$

Полученную неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ раскрываем с помощью правила Лопиталя—Бернулли:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x-\sin x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-(1-\cos x)}{(x-\sin x)^2}}=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)^2}{x(\cos x-1)}.$$

Это — неопределенность вида $\frac{0}{0}$, поэтому

$$\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)^2}{x(\cos x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{2(x-\sin x)(1-\cos x)}{\cos x-1-x\sin x}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2+(x-\sin x)\sin x}{-\sin x-\sin x-x\cos x}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{1-2\cos x+\cos^2 x+x\sin x-\sin^2 x}{-2\sin x-x\cos x}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{1-2\cos x+x\sin x+\cos 2x}{-2\sin x-x\cos x}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{2\sin x+\sin x+x\cos x-2\sin 2x}{-3\cos x+x\sin x}=0.$$

Итак,

$$\lim_{x\to0}(x-\sin x)\ln x=0.$$

8. Найти $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^{\ln x}$.

При $x\to1$ имеем неопределенность 0^0. Воспользуемся тождеством

$$[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}, \quad\quad (A)$$

которое в данном случае примет вид

$$(x-1)^{\ln x}=e^{\ln x\cdot\ln(x-1)}.$$

Имеем

$$\lim_{x\to1}(x-1)^{\ln x}=\lim_{x\to1}e^{\ln x\cdot\ln(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to1}\ln x\cdot\lim\limits_{x\to1}\ln(x-1)}.$$

Найдем сейчас $\lim\limits_{x\to1}[\ln x\cdot\ln(x-1)]$. Это неопределенность вида $0\cdot\infty$. Раскрывая эту неопределенность, получим

$$\lim_{x\to1}[\ln x\cdot\ln(x-1)]=\lim_{x\to1}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}}=$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{x(\ln x)^2}{x-1}=-\lim_{x\to1}\frac{(\ln x)^2+x\,2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to1}[(\ln x)^2+2\ln x]=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to1}(x-1)^{\ln x}=e^0=1.$$

9. Найти $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

Так как $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$, то здесь имеем неопределенность вида 1^∞.

Принимая во внимание тождество (А) (см. пример 8), с помощью правила Лопиталя—Бернулли находим

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}}.$$

Найдем $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}$, это неопределенность вида $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{1}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=-\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

При $x\to\infty$ имеем неопределенность вида ∞^0. Преобразуя данную функцию и применяя правило Лопиталя—Бернулли, получаем

$$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=1.$$

11. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Применим правило Лопиталя—Бернулли:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

В правой части последнего равенства предел не существует, поэтому правило Лопиталя—Бернулли здесь неприменимо.

Указанный предел можно найти непосредственно:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1.$$

Задачи

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$.
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$.
3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}5x}$.
4. $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)\operatorname{ctg}x$.
5. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.
6. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.
7. $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right)$.
8. $\lim\limits_{x\to0}x^x$.
9. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.
10. $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.
11. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.
12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Ответы

1. 3. 2. $\frac{\pi^2}{2}$. 3. 5. 4. 0. 5. $\frac{2}{\pi}$. 6. $\frac{1}{2}$. 7. $\frac{1}{5}$. 8. 1. Указание. Положить $x^x=y$, прологарифмировать это равенство и перейти к пределу. 9. 1. 10. 1. 11. $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$. 12. $\frac{1}{e}$.

§ 8.2. Касательная и нормаль к плоской кривой. Угол между кривыми. Кривизна плоской кривой. Скорость и ускорение

Касательной к кривой $y=f(x)$ в ее точке $M_0(x_0, y_0)$ называется предельное положение M_0T секущей MM_0, когда точка M стремится к M_0 вдоль данной кривой (рис. 8.1).

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \tag{8.1}$$

Нормалью к кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется прямая, проходящая через M_0 и перпендикулярная к касательной в данной точке.

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{8.2}$$

Кривизной кривой в ее точке M называется предел абсолютной величины отношения угла $\Delta\alpha$ между касательными

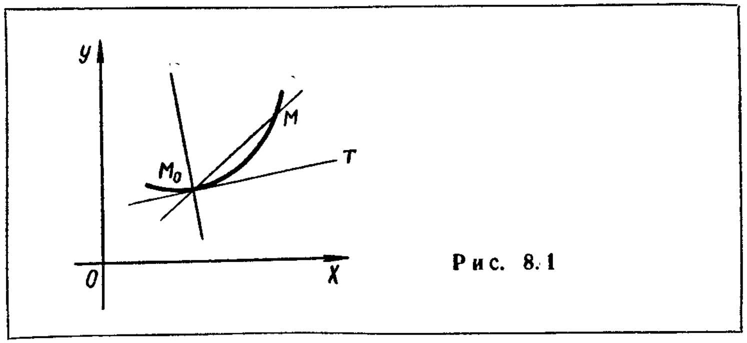

Рис. 8.1

в точках M и N кривой к длине дуги $\smile{MN} = \Delta s$, когда $N \to M$ (рис. 8.2), т. е.

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|,$$

где угол α выражен в радианах.

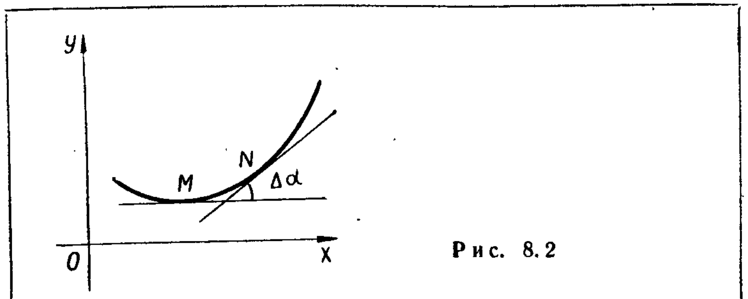

Рис. 8.2

Кривизна кривой $y = f(x)$ вычисляется по формуле

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{8.3}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то ее кривизна определяется формулой

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{8.4}$$

Радиусом кривизны кривой в точке называется величина, обратная ее кривизне в этой точке. Если радиус кривизны обозначить через R, то

$$R = \frac{1}{k}. \tag{8.5}$$

Окружностью кривизны (соприкасающейся окружностью) кривой в ее точке M называется предельное положение окружности, проходящей через точку M и две другие точки кривой L и N, когда $L \to M$ и $N \to M$.

Радиус окружности кривизны равен радиусу кривизны кривой в соответствующей точке.

Центр окружности кривизны называется *центром кривизны* кривой в данной точке M. Координаты X и Y центра кривизны кривой $y = f(x)$ вычисляются по формулам:

$$X = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}; \quad Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \tag{8.6}$$

Эволютой кривой называется геометрическое место ее центров кривизны.

Формулы (8.6) дают параметрические уравнения эволюты с параметром x или y.

Если кривая задана параметрически, то уравнения ее эволюты:

$$X = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}; \quad Y = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}. \tag{8.7}$$

Эвольвентой кривой называется такая кривая, для которой данная кривая является эволютой.

Примеры

1. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $f(x) = x^3$ в точке $M_0(2, 8)$.

Прежде всего точка M_0 лежит на кривой, так как ее координаты удовлетворяют данному уравнению.

Находим производную данной функции и ее значение при $x_0 = 2$:

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^2, \quad f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

Подставляя значения $x_0 = 2$, $y_0 = 8$, $f'(x_0) = 12$ в уравнения (8.1) и (8.2) получим соответственно:

$$y - 8 = 12(x - 2) \text{ или } 12x - y - 16 = 0 —$$

уравнение касательной;

$$y - 8 = -\frac{1}{12}(x - 2) \text{ или } x + 12y - 98 = 0 —$$

уравнение нормали.

2. Составить уравнения касательной и нормали к эллипсу

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$$

в точке $M_0(3, 2)$.

Находим производную неявной функции $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}-1=0$:

$$\frac{2x}{18}+\frac{2yy'}{8}=0,$$

откуда

$$y'(x)=-\frac{4x}{9y},\quad y'(x_0)=y'(3)=-\frac{4\cdot 3}{2\cdot 9}=-\frac{2}{3}.$$

Подставляя значения $x_0=3$, $y_0=2$, $y'(x_0)=-\frac{2}{3}$ в формулы (8.1) и (8.2), получим

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-3) \text{ или } 2x+3y-12=0 -$$

уравнение касательной;

$$y-2=\frac{3}{2}(x-3) \text{ или } 3x-2y-5=0 -$$

уравнение нормали.

3. Составить уравнения касательной и нормали к кривой, заданной параметрически,

$$x=2(t-\sin t);\quad y=2(1-\cos t):$$

1) в произвольной точке; 2) при $t=\frac{\pi}{2}$.

Уравнение касательной (8.1) можно написать в виде

$$Y-y=y'_x(x)(X-x), \tag{8.1'}$$

где $(x,\ y)$ — координаты точки кривой, $(X,\ Y)$ — координаты точки касательной.

Находим производную y'_x по формуле

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2\sin t}{2(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Подставляя выражения для x, y и y'_x в формулу (8.1′), получаем уравнение касательной к данной кривой в произвольной точке

$$Y-2(1-\cos t)=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}[X-2(t-\sin t)].$$

При $t=\frac{\pi}{2}$ из последнего уравнения находим

$$Y-2=1\cdot\left[X-2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right],\quad Y-2=X-\pi+2$$

или

$$X-Y-\pi+4=0.$$

4. Доказать, что кривизна линии $x^2+y^2=25$ является постоянной.

Искомую кривизну вычислим по формуле (8.3). Найдем сначала первую и вторую производную неявной функции $x^2+y^2-25=0$. Дифференцируя, получим:

$$2x+2yy'=0,\quad y'=-\frac{x}{y};$$

$$y''=\left(-\frac{x}{y}\right)'=-\frac{x'y-xy'}{y^2}=-\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=$$
$$=-\frac{25}{y^3}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (8.3), находим

$$k=\frac{\left|-\frac{25}{y^3}\right|}{\left[1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{25}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{25}{25^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{5},\quad k=\frac{1}{5}.$$

Следовательно, кривизна данной линии постоянна.

5. Найти радиус кривизны циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ в ее произвольной точке.

Из формул (8.4) и (8.5) вытекает, что радиус кривизны кривой, заданной параметрическими уравнениями, определяется формулой

$$R=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y''-y'x''|}.$$

Найдем первые и вторые производные функций x и y:

$$x'=a(1-\cos t);\qquad y'=a\sin t;$$
$$x''=a\sin t;\qquad y''=a\cos t.$$

Составим выражения $x'^2+y'^2$ и $(x'y''-y'x'')$:

$$x'^2+y'^2=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t=a^2(1-2\cos t+\cos^2 t+$$
$$+\sin^2 t)=a^2(1-2\cos t+1)=a^2(2-2\cos t)=2a^2(1-\cos t),$$
$$x'y''-y'x''=a(1-\cos t)a\cos t-a\sin t\,a\sin t=a^2(\cos t-$$
$$-\cos^2 t-\sin^2 t)=a^2(\cos t-1)=-a^2(1-\cos t).$$

Подставляя полученные выражения в формулу для радиуса кривизны, находим

$$R=\frac{[2a^2(1-\cos t)]^{\frac{3}{2}}}{|-a^2(1-\cos t)|}=\frac{2\sqrt{2}a^3(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}}{a^2(1-\cos t)}=$$
$$=2\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos t}.$$

Так как $\sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$, то

$$R = 4a\sin\frac{t}{2}.$$

В частности, если $t=\pi$, то $R=4a$; если $t=0$, то $R=a$.

6. Составить уравнение эволюты параболы $y=2x^2$.

Найдем первую и вторую производную данной функции: $y'=4x$, $y''=4$. Подставляя выражения для y, y', y'' в формулы (8.7), получим

$$X = x - \frac{4x(1+16x^2)}{4} = -16x^3, \quad X = -16x^3;$$

$$Y = 2x^2 + \frac{1+16x^2}{4} = \frac{1+24x^2}{4}, \quad Y = \frac{1+24x^2}{4}.$$

Исключив параметр x, найдем уравнение эволюты данной параболы

$$Y = \frac{1}{4} + 6\left(\frac{X}{16}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

7. Написать уравнение эволюты циклоиды

$$x = a(t-\sin t), \quad y = a(1-\cos t).$$

Так как

$$x'^2 + y'^2 = 2a^2(1-\cos t), \quad x'y'' - y'x'' = -a^2(1-\cos t)$$

(см пример 5), то в соответствии с формулами (8.7) получаем

$$X = x - y'\cdot\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''} = a(t-\sin t) - a(\sin t)\cdot\frac{2a^2(1-\cos t)}{-a^2(1-\cos t)} =$$
$$= at - a\sin t + 2a\sin t = at + a\sin t;$$

$$Y = y + x'\cdot\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''} = a(1-\cos t) + a(1 -$$
$$-\cos t)\cdot\frac{2a^2(1-\cos t)}{-a^2(1-\cos t)} = a(1-\cos t) - 2a(1-\cos t) =$$
$$= -a(1-\cos t).$$

Следовательно, уравнения эволюты циклоиды имеют вид:

$$X = a(t+\sin t); \quad Y = -a(1-\cos t).$$

Введем новую переменную по формуле $t=\pi+\tau$. Уравнения эволюты примут вид:

$$X = a[\pi+\tau+\sin(\pi+\tau)] = a\pi + a\tau - a\sin\tau = a(\tau-\sin\tau) + a\pi;$$
$$Y = -a[1-\cos(\pi+\tau)] = -a(1+\cos\tau) = -a - a\cos\tau =$$
$$= -2a + a - a\cos\tau = a - a\cos\tau - 2a = a(1-\cos\tau) - 2a,$$

т. е.

$$X = a(\tau-\sin\tau) + a\pi; \quad Y = a(1-\cos\tau) - 2a.$$

Эти уравнения можно записать так:

$$x = a(t'-\sin t'); \quad y = a(1-\cos t'),$$

где $x = X - a\pi$, $y = Y + 2a$, $\tau = t'$.

Следовательно, эволютой циклоиды является такая же циклоида, смещенная по оси Ox на величину πa и по оси Oy на величину $2a$ (рис. 8.3).

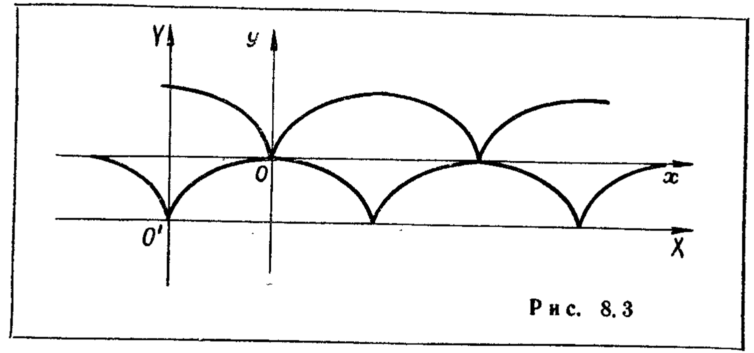

Рис. 8.3

8. Под каким углом кривая $y=e^x$ пересекает ось Oy?

Углом между кривой линией и прямой называется угол между этой прямой и касательной к кривой в точке их пересечения.

Найдем точку пересечения кривой $y=e^x$ и оси Oy. Так как ось Oy имеет уравнение $x=0$, то точка пересечения определится из системы уравнений: $y=e^x$; $x=0$, откуда $y=1$. Следовательно, $M(0, 1)$ — точка пересечения.

Угловой коэффициент касательной в данной точке равен значению производной функции в этой точке: $f'(x)=e^x$, $f'(0) = e^0 = 1$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = 45°$.

Итак, угол, образуемый касательной с осью Ox, равен 45°. Очевидно с осью Oy касательная образует такой же угол.

9. Под какими углами пересекаются кривые $y=x^2$, $y^2=x$?

Углом между двумя кривыми в точке их пересечения называют угол между касательными к кривым в этой точке.

Найдем точки пересечения данных линий. Решая систему их уравнений

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2; \\ y^2 &= x, \end{aligned}\right\}$$

получим две точки пересечения: $O(0, 0)$, $M(1, 1)$.

Уравнения касательных к кривым в произвольной точке будут соответственно:

$$Y - y = 2x(X-x),$$
$$Y - y = \pm\frac{1}{2\sqrt{x}}(X-x),$$

в частности, в точке $O(0,\ 0)$

$$Y = 0, \quad X = 0,$$

а в точке $M(1,\ 1)$

$$Y - 1 = 2(x - 1), \quad Y - 1 = \frac{1}{2}(X - 1).$$

Как видно из уравнений, касательные к кривым в точке $O(0,\ 0)$ совпадают с координатными осями, поэтому угол между кривыми равен 90°.

В точке $M(1,\ 1)$ угол между линиями определяется по формуле (1.10).

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

10. Тело движется вдоль прямой Ox по закону $x = t - \sin t$. Определить скорость и ускорение движения при $t = \frac{\pi}{2}$.

В силу механического значения первой и второй производной находим для любого момента времени t:

$$v = \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t \ \text{(скорость)},$$

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \sin t \ \text{(ускорение)}.$$

При $t = \frac{\pi}{2}$ получаем $v = 1$, $w = 1$.

Задачи

1. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 1$ в точке $M(1,\ 6)$.

2. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $x^3 + y^3 - 3xy - 13 = 0$ в точке $M(-1,\ 2)$.

3. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x = t^2$, $y = 4t$ при $t = -1$.

4. Какие углы образует кривая $y = x^2 - x$ с осью Ox в точках пересечения с этой осью?

5. Под каким углом пересекаются линии

$$x^2 + y^2 = 2, \quad y = x^2?$$

6. Найти уравнение эволюты эллипса

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

7. Найти уравнение эволюты параболы $y^2 = 2px$.

8. Вычислить кривизну кривой $y = e^x$ при $x = 0$.

9. Найти кривизну кривой $y = kx + b$ в ее произвольной точке.

10. Точка движется по прямой Ox по закону $x = t^3 - 9t^2 + 24t$. Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты времени точка меняет направление движения?

11. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x = A(1 - e^{-kt})$. Определить скорость реакции.

Ответы

1. $6x - y = 0$; $x + 6y - 37 = 0$. **2.** $x - 5y + 11 = 0$; $5x + y + 3 = 0$. **3.** $2x + y + 2 = 0$; $x - 2y - 9 = 0$. **4.** 135°, 45°. **5.** $\varphi = \operatorname{arctg} 3$. **6.** $X = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t$, $Y = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)\sin^3 t$. **7.** $Y^2 = \frac{8}{27p}(X - p)^3$. **8.** $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **9.** $k = 0$. **10.** $v = 3t^2 - 18t + 24$, $w = 6t - 18$; $t_1 = 2$, $t_2 = 4$. **11.** $k(A - x)$.

§ 8.3. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции

Функция называется *возрастающей* в некотором промежутке (рис. 8.4, *а*), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство

$$f(x_1) < f(x_2). \tag{8.8}$$

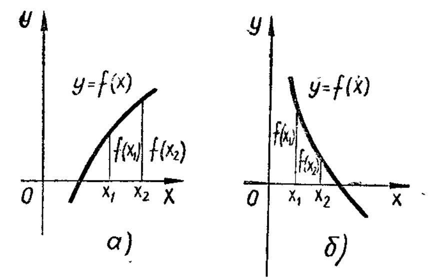

Рис. 8.4

Функция называется *убывающей* (рис. 8.4, *б*) в некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство

$$f(x_1) > f(x_2). \tag{8.9}$$

Достаточное условие возрастания (убывания) функции: если в данном промежутке производная данной функции положительна, то функция в этом промежутке возрастает; если производная данной функции в данном промежутке отрицательна, то функция в этом промежутке убывает.

Максимумом функции $y = f(x)$ называется такое ее значение $y_1 = f(x_1)$, которое больше всех других ее значений, принимаемых в точках x, достаточно близких к точке x_1 и отличных от нее (рис. 8.5), т. е.

$$f(x_1) > f(x), \qquad (8.10)$$

где x — любая точка из некоторого интервала, содержащего точку x_1.

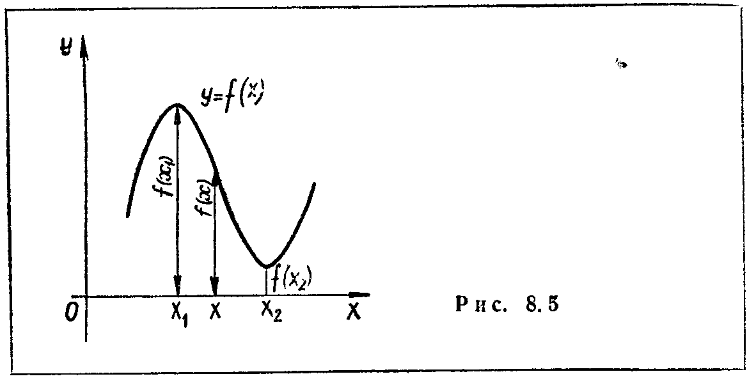

Рис. 8.5

Минимумом функции $y = f(x)$ называется такое ее значение $y_2 = f(x_2)$, которое меньше всех других ее значений, принимаемых в точках x, достаточно близких к точке x_2 и отличных от нее, т. е.

$$f(x_2) < f(x), \qquad (8.11)$$

где x — любая точка из некоторого интервала, содержащего точку x_2.

Максимум или минимум функции называется *экстремумом* функции. Точки, в которых достигается экстремум, называются *точками экстремума*.

Функция может иметь экстремум только в тех точках области ее определения, в которых производная равна нулю или не существует. Такие точки называются *критическими* точками аргумента функции.

Наименьшее и *наибольшее* значения непрерывной функции $y = f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$ достигаются или в критических точках аргумента функции или на концах отрезка $[a, b]$.

Достаточное условие экстремума. *Первое правило*. Если в точке $x = x_0$ производная функции $y = f(x)$ обращается в нуль и меняет знак при переходе через эту точку, то $f(x_0)$ — экстремум функции, причем:

1) функция имеет максимум в точке x_0, если знак производной меняется с плюса на минус (т. е. при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ $f'(x) > 0$, при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ $f'(x) < 0$);

2) функция имеет минимум в точке x_0, если знак производной меняется с минуса на плюс (т. е. $f'(x) < 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x_0) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$).

Второе правило. Если в точке $x = x_0$ первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то x_0 будет точкой экстремума, причем:

1) x_0 — точка максимума, если $f''(x_0) < 0$;

2) x_0 — точка минимума, если $f''(x_0) > 0$.

Замечание. Пусть первая из неравных нулю в точке x_0 производных функции $y = f(x)$ имеет порядок k. Тогда, если k — четное, то точка x_0 является точкой максимума, если $f^{(k)}(0) < 0$, и точкой минимума, если $f^{(k)}(x_0) > 0$. Если же k — нечетное, то точка x_0 не является точкой экстремума.

Примеры

1. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4.$$

Находим первую производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2).$$

Производная обращается в нуль, когда $x^2 - x - 2 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Эти точки делят бесконечный интервал на три интервала: $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$. Исследуем знак производной в каждом из этих интервалов.

Если $x < -1$, то $f'(x) = 3x^2 - x - 2 = 3(x+1)(x-2) > 0$, так как $(x+1) < 0$ и $(x-2) < 0$. Следовательно, функция возрастает в промежутке $(-\infty, -1)$.

Если $-1 < x < 2$, то $f'(x) = 3(x+1)(x-2) < 0$, так как $(x+1) > 0$, $(x-2) < 0$, поэтому функция убывает в промежутке $(-1, 2)$.

Аналогично убеждаемся, что функция возрастает в промежутке $(2, \infty)$.

Заметив, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, строим эскиз графика (рис. 8.6).

2. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 2\frac{2}{3}.$$

Находим первую производную:

$$f'(x) = x^2 - x - 6.$$

Производная всюду непрерывна. Найдем точки, в которых она обращается в нуль: $x^2 - x - 6 = 0$.

11*

Критическими точками аргумента функции являются точки $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

С помощью первой производной исследуем критические точки. Так как

$$f'(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3),$$

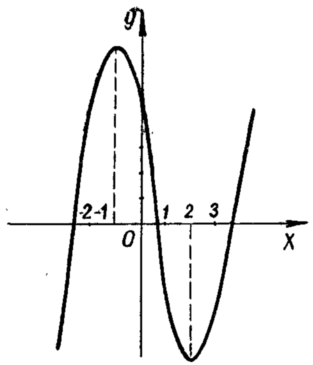

Рис. 8.6

то при $x < -2$ имеем $f'(x) > 0$ (ибо $x+2 < 0$, $x - 3 < 0$); при $-2 < x < 3$ имеем $f'(x) < 0$ (ибо $x + 2 > 0$, $x - 3 < 0$).

Таким образом, при переходе (слева направо) через значение $x_1 = -2$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, в точке $x_1 = -2$ функция имеет максимум, а именно

$$\max f(x) = f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 - 6(-2) + \frac{8}{3} = 10.$$

Исследуем вторую критическую точку $x_2 = 3$: при $-2 < x < 3$ $f'(x) < 0$; при $x > 3$ $f'(x) > 0$ (ибо $x+2>0$, $x-3>0$), значит при переходе через точку $x_2 = 3$ производная функции меняет знак с минуса на плюс. Это означает, что функция в этой точке имеет минимум, а именно

$$\min f(x) = f(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{1}{2}\cdot 3^2 - 6\cdot 3 + \frac{8}{3} = -10\frac{5}{6}.$$

На основании проведенного исследования строим график функции (рис. 8.7).

Замечание. Пользуясь первым правилом, нужно всегда иметь в виду локальный характер экстремума. Исследуя знак первой производной, нужно рассматривать точки слева и справа от критической точки и достаточно близкие к ней. Если в данном примере для $x_1 = -2$ взять достаточно удаленные точки (например, $x > 3$), то окажется $f'(x) > 0$ при $x < -2$ и $f'(x) > 0$ при $x > -2$ (к примеру при $x = 4$). Отсюда можно было бы сделать неверный вывод о том, что в точке $x_1 = -2$ экстремума нет.

3. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{4}.$$

Будем пользоваться вторым правилом достаточного условия экстремума. Находим первую и вторую производные:

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \quad f''(x) = 3x^2 - 12x + 11.$$

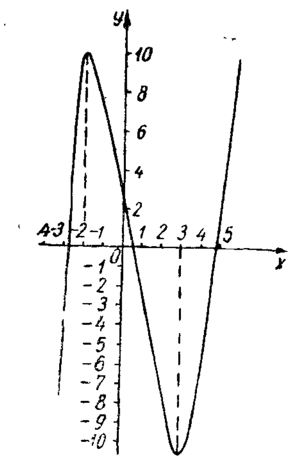

Рис. 8.7

Точки экстремума ищем среди критических точек, т. е. точек, для которых $f'(x) = 0$. Первая производная обращается в нуль, когда

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

С помощью теоремы Безу можно установить, что $x = 1$ есть корень последнего уравнения. Заметив это и разложив левую часть уравнения на множители, получим

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) =$$
$$= (x-1)(x-2)(x-3) = 0,$$

откуда

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$$

Исследуем знак второй производной при этих значениях x:

$$f''(1) = 3\cdot 1^2 - 12\cdot 1 + 11 = 2 > 0;$$
$$f''(2) = 3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 11 = -1 < 0;$$
$$f''(3) = 3\cdot 3^2 - 12\cdot 3 + 11 = 2 > 0.$$

Следовательно, $x = 2$ есть точка максимума, $x = 1$ и $x = 3$ являются точками минимума. Найдем значения экстремумов:

$$\min f(x) = f(1) = \frac{1}{4}\cdot 1^4 - 2\cdot 1^3 + \frac{11}{2}\cdot 1^2 - 6\cdot 1 + \frac{9}{4} = 0;$$

$$\max f(x) = f(2) = \frac{1}{4}\cdot 2^4 - 2\cdot 2^3 + \frac{11}{2}\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + \frac{9}{4} = \frac{1}{4};$$

$$\min f(x) = f(3) = \frac{1}{4}\cdot 3^4 - 2\cdot 3^3 + \frac{11}{2}\cdot 3^2 - 6\cdot 3 + \frac{9}{4} = 0.$$

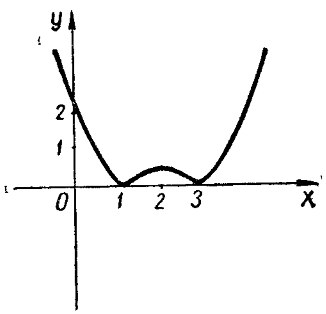

Рис. 8.8

График функции изображен на рис. 8.8.

4. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}.$$

Находим первую производную:

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Производная обращается в нуль в точке $x_1 = \frac{4}{5}$, в точке $x_2 = 0$ она не существует (обращается в бесконечность). Следовательно, критическими точками являются точки $x_1 = \frac{4}{5}$ и $x_2 = 0$.

Исследуем характер критических точек. Так как $f'(x) < 0$ при $x < \frac{4}{5}$ $(x > 0)$ и $f'(x) > 0$ при $x > \frac{4}{5}$, то $x_1 = \frac{4}{5}$ — точка минимума, причем

$$\min f(x) = f\left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{4}{5} - 2\right)\sqrt[3]{\frac{16}{25}} = -\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}.$$

Далее, поскольку $f'(x) > 0$ при $x < 0$, $f'(x) < 0$ при $x > 0$ $\left(\text{но } x < \frac{4}{5}\right)$, то при $x_2 = 0$ функция имеет максимум, причем

$$\max f(x) = f(0) = 0.$$

Заметив, что в точке $x_2 = 0$ функция непрерывна и касательная к графику совпадает с осью Oy, строим график функции (рис. 8.9).

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Находим экстремумы функции:

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1);$$
$$f'(x) = 0,\ 6(x^2-1) = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 1;$$
$$f''(x) = 12x,\ f''(-1) < 0,\ f''(1) > 0.$$

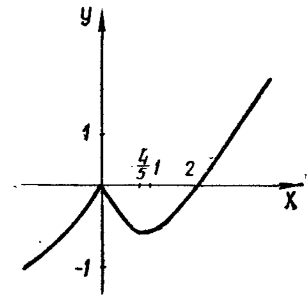

Рис. 8.9

Следовательно, в точке $x_1 = -1$ функция имеет максимум, причем

$$\max f(x) = f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) + 5 = 9,$$

в точке $x_2 = 1$ минимум, причем

$$\min f(x) = f(1) = 2\cdot 1^3 - 6\cdot 1 + 5 = 1.$$

Вычисляем значения функции на концах отрезка:

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = 2\left(-\frac{5}{2}\right)^3 - 6\left(-\frac{5}{2}\right) + 5 = -11\frac{1}{4},$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 6\cdot\frac{3}{2} + 5 = 2\frac{3}{4}.$$

Таким образом, наибольшее значение данной функции на рассматриваемом отрезке есть $f(-1) = 9$, а наименьшее $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -11\frac{1}{4}$ (рис. 8.10).

6. Данное положительное число a разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Обозначим через x первое слагаемое, тогда второе равно $a - x$. Их произведение представляет функцию от x:

$$f(x) = x(a-x) = ax - x^2.$$

Исследуем эту функцию. Найдем производные

$$f'(x) = a - 2x,\ f''(x) = -2.$$

Первая производная равна нулю, когда $a - 2x = 0$ или $x = \frac{a}{2}$.

Так как вторая производная отрицательна, то при $x = \frac{a}{2}$ функция принимает наибольшее значение. Второе слагаемое также равно $\frac{a}{2}$.

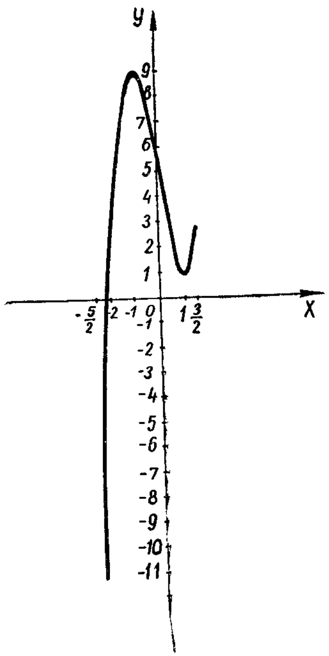

Рис. 8. 10

7. При каких размерах коробка (без крышки), изготовленная из квадратного листа картона со стороной a, имеет наибольшую вместимость?

Для изготовления коробки необходимо по углам листа вырезать квадраты и загнуть выступы получившейся крестообразной фигуры. Обозначим сторону вырезанного квадрата через x, тогда сторона основания коробки будет $a - 2x$. Объем коробки выразится функцией $V = (a - 2x)^2 x = (a^2 - 4ax + 4x^2)x = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$, которая определена в промежутке $\left[0, \frac{a}{2}\right]$.

Дифференцируя функцию V, получим:

$$V' = a^2 - 8ax + 12x^2; \; V'' = -8a + 24x.$$

$V' = 0$, когда $a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$, откуда

$$x_1 = \frac{a}{2}, \; x_2 = \frac{a}{6}.$$

Полученные значения x подставляем в выражение для второй производной:

$$V''\left(\frac{a}{2}\right) = -8a + 12a = 4a > 0;$$

$$V''\left(\frac{a}{6}\right) = -8a + 4a = -4a < 0.$$

Следовательно, наибольший объем будет при $x = \frac{a}{6}$. Основанием коробки является квадрат со стороной $\frac{2}{3}a$.

Задачи

Определить промежутки возрастания и убывания функций:

1. $y = x^2 - 4x + 4$.
2. $y = 6 - 3x^2 - x^3$.
3. $y = e^x$.
4. $y = x^4 - 2x^2$.

Исследовать на экстремум функции:

5. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$.
6. $y = \frac{(1 - x^2)^2}{4}$.
7. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$.
8. $y = \frac{\ln x}{x}$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций в промежутке $[-2, 2]$:

9. $y = -x^2$.
10. $y = -x^3$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций:

11. $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$.
12. $y = \frac{1}{1 + x^2}$.

13. Среди всех прямоугольников, имеющих данный периметр $2a$, найти тот, площадь которого наибольшая.

14. Какой из прямоугольных треугольников с заданным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

15. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны по 10 *см*. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

16. В данный эллипс вписать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными осям эллипса.

17. Открытый сосуд состоит из цилиндра, заканчивающегося снизу полусферой; толщина стенок постоянна. Каковы должны быть размеры сосуда, чтобы при данной вместимости на его изготовление пошло минимум материала?

Ответы

1. Убывает в интервале $(-\infty, 2)$, возрастает в интервале $(2, \infty)$. 2. Убывает в интервале $(-\infty, -2)$ и $(0, \infty)$, возрастает в $(-2, 0)$. 3. Возрастает в интервале $(-\infty, \infty)$. 4. Убывает в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$, возрастает в интервалах $(-1, 0)$ и $(1, \infty)$. 5. $\min f(x) = f(-1) = -2$, $\max f(x) = f(-3) = 2$. 6. $\max f(x) = f(0) = \frac{1}{4}$, $\min f(x) = f(-1) = f(1) = 0$. 7. Экстремума нет. 8. $\max f(x) = f(e) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$. 9. 0; -4. 10. 8; -8. 11. 1; 0. 12. 1; 0. 13. $x = y = \frac{a}{2}$ (квадрат) 14. Равнобедренный. 15. 20 *см*. 16. $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$, где a и b — полуоси эллипса.

§ 8.4. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба. Асимптоты кривой

График функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вверх* (или выпуклым вниз) в промежутке (a, b), если соответствующая дуга кривой расположена выше касательной в любой точке $M[x, f(x)]$ этой дуги (рис. 8.11).

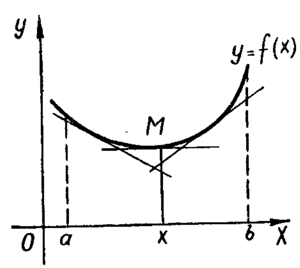

Рис. 8.11

График функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вниз* (или выпуклым вверх) в промежутке (a, b), если соответствующая дуга кривой расположена ниже касательной, проведенной в любой точке $M[x, f(x)]$ этой дуги (рис. 8.12).

Достаточное условие вогнутости (выпуклости) кривой: *если вторая производная функции $y = f(x)$ положительна внутри промежутка (a, b), то график функции вогнут вверх в данном промежутке; если вторая производная $f''(x)$ отрицательна внутри промежутка (a, b), то график функции $y = f(x)$ вогнут вниз в этом промежутке.* (Сравните эти условия со вторым правилом нахождения экстремума.)

Точкой перегиба непрерывной кривой $y = f(x)$ называется точка $M_0[x_0, f(x_0)]$, при переходе через которую кривая меняет свою вогнутость на выпуклость или наоборот (относительно, например, направления вниз). Для абсциссы точки перегиба x_0

графика функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_0)$ равна нулю или не существует. Точки, в которых $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, называются *критическими точками* 2-го рода.

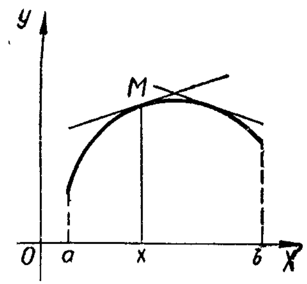

Рис. 8.12

Если вторая производная функции $y = f(x)$ при переходе через критическую точку x_0 меняет знак, то $M[x_0, f(x_0)]$ — точка перегиба.

Асимптоты кривой

1. *Асимптотой* кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат.

2. Если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \tag{8.12}$$

то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$.

3. Если существуют пределы

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1, \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - k_1 x] = b_1 \tag{8.13}$$

или

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2, \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - k_2 x] = b_2, \tag{8.14}$$

то прямая $y = k_1 x + b_1$ есть правая наклонная асимптота кривой $y = f(x)$, а прямая $y = k_2 x + b_2$ есть левая наклонная асимптота.

4. Если в правой части уравнения кривой $y = f(x)$ можно выделить линейную часть

$$y = f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{8.15}$$

где $\alpha(x) \to 0$, когда $x \to \pm\infty$, то прямая $y = kx + b$ является асимптотой.

Примеры

1. Найти интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой Гаусса $y = e^{-x^2}$.

Находим первую и вторую производные:

$$y' = -2xe^{-x^2};\ y'' = (4x^2 - 2)\, e^{-x^2}.$$

Приравняв нулю вторую производную, получим критические точки 2-го рода:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}};\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

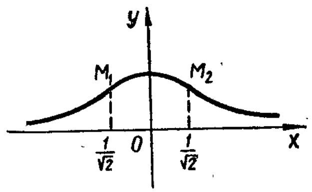

Рис. 8.13

Эти точки разбивают числовую ось на три интервала:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right).$$

Так как в первом и третьем интервалах вторая производная положительна, т. е.

$$y'' > 0 \text{ при } -\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$y'' > 0 \text{ при } x > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

то в этих интервалах кривая вогнута вверх. Поскольку $y'' < 0$ при $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то в интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ кривая вогнута вниз (рис. 8.13). Точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ и $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ являются точками перегиба.

2. Найти точку перегиба графика функции $f(x) = x^3$.

Производные функции имеют вид:

$$f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x.$$

Вторая производная равна нулю при $x = 0$ и меняет знак в этой точке: $f''(x) < 0$, если $x < 0$, $f''(x) > 0$, если $x > 0$.

Следовательно, $x = 0$ есть точка перегиба. Из двух последних неравенств вытекает также, что график функции является выпуклым вверх при $x < 0$ и выпуклым вниз при $x > 0$. Кривая изображена на рис. 6.6.

3. Найти точки перегиба графика функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Находим производные:

$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}},\ y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}.$$

Вторая производная в нуль нигде не обращается. Эта производная не существует при $x_1 = 1$ (знаменатель дроби обращается в нуль). Посмотрим, меняет ли знак y'' при переходе через точку $x_1 = 1$.

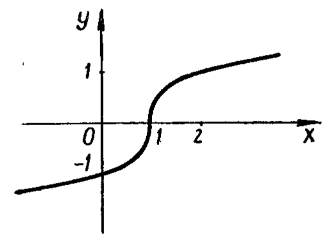

Рис. 8.14

Так как

$$y'' > 0 \text{ при } x < 1,$$
$$y'' < 0 \text{ при } x > 1,$$

то точка $M_0(1, 0)$ есть точка перегиба. Касательная в этой точке параллельна оси ординат (рис. 8.14), так как первая производная при $x = 1$ обращается в бесконечность.

4. Найти асимптоты кривой $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x} = \infty,$$

то прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой (см. формулу (8.12)).

Далее,

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} = x + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Таким образом, прямая $y = x$ (см. формулу (8.15)) будет асимптотой. Кривая изображена на рис. 8.15.

5. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^3}{1-x^2}$.

График этой функции имеет две вертикальные асимптоты $x = -1$, $x = 1$, так как

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty.$$

Выделяя целую часть функции путем непосредственного деления или с помощью следующих простых преобразований, получаем

$$y = \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{x^3 - x + x}{1-x^2} = \frac{x(x^2-1)+x}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}.$$

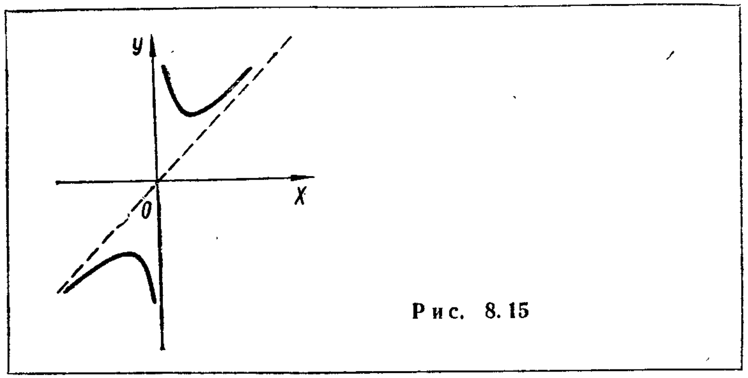

Рис. 8.15

Сравнивая с формулой (8.15), заключаем, что прямая $y = -x$ является наклонной асимптотой (рис. 8.16).

Замечание. Вертикальные асимптоты кривой следует искать там, где знаменатель функции обращается в нуль.

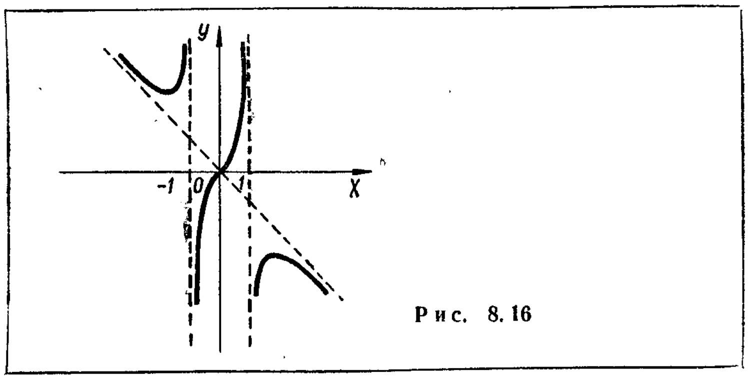

Рис. 8.16

6. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

Приравнивая знаменатель нулю, получаем две вертикальные асимптоты: $x = -1$, $x = 1$.

По формулам (8.13) и (8.14) ищем наклонные асимптоты.

Имеем:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ является правой наклонной асимптотой.

Далее,

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = -1, \quad b_1 = \lim_{x\to-\infty} (y - x) = 0,$$

поэтому $y = -x$ также будет асимптотой (рис. 8.17).

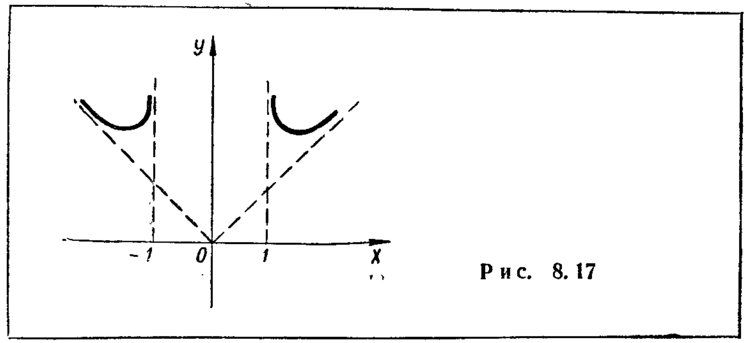

Рис. 8.17

Вторую наклонную асимптоту можно было получить, исходя из симметрии кривой относительно оси Oy.

Задачи

Найти интервалы вогнутости и точки перегиба графиков функций:

1. $y = \ln x$.
2. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.
3. $y = \frac{3}{8}x^4 - x^3 + 2$.
4. $y = x^3 + \frac{x^4}{4}$.

Найти асимптоты кривых:

5. $y = \frac{2}{x+3}$.
6. $y = \frac{6}{x^2-16}$.
7. $y = \frac{x^2+8x-6}{x}$.
8. $y = \frac{x^2}{x+4}$.
9. $y = e^{\frac{1}{x}}$.
10. $b^2x^2 + a^2y^2 = x^2y^2$.

Ответы

1. Кривая вогнута вниз. 2. В промежутке $(-\infty, 2)$ кривая вогнута вниз, в промежутке $(2, \infty)$ — вогнута вверх, $M(2, 7)$ — точка перегиба. 3. $M(0, 2)$,

$N\left(\frac{4}{3}, \frac{22}{27}\right)$ — точки перегиба. 4. $M(0, 0)$, $N(-2, -4)$. 5. $x=-3$. 6. $x=-4$, $x=4$. 7. $x=0$, $y=x+8$. 8. $x=-4$, $y=x-4$. 9. $y=1$. 10. $x=\pm a$, $y=\pm b$.

§ 8.5. Исследование функций и построение их графиков

Исследование функции можно проводить по следующей схеме:

1. Найти область существования функции.
2. Исследовать изменение функции при x, стремящемся к концам промежутков области существования.
3. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.
4. Вычислить значения экстремумов.
5. Определить интервалы выпуклости и вогнутости графика, найти точки перегиба.
6. Найти точки пересечения графика функции с координатными осями.
7. Найти асимптоты графика функции.

По результатам исследования можно построить математически грамотный эскиз ее графика.

Если исследуемая функция четная или нечетная, достаточно исследовать функцию и построить ее график для положительных значений аргумента из области определения.

Иногда порядок исследования целесообразно выбирать, исходя из конкретных особенностей данной функции.

Примеры

1. Исследовать функцию $f(x)=\frac{x^3}{x^2-3}$ и построить ее график.

Пользуемся схемой исследования функции.

1. Функция не определена лишь в точках, где знаменатель обращается в нуль, т. е. при $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$. Следовательно, область определения состоит из трех интервалов: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$.

2. Исследуем изменение функции при x, стремящемся к концам интервалов области определения:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty,\quad \lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty,\quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty.$$

3. Точки экстремума ищем среди критических точек, т. е. таких точек, где первая производная обращается в нуль. Находим производные данной функции:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-3}\right)'=\frac{3x^2(x^2-3)-2xx^3}{(x^2-3)^2}=\frac{x^4-9x^2}{(x^2-3)^2}=\frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2};$$

$$f''(x)=\left[\frac{x^4-9x^2}{(x^2-3)^2}\right]'=\frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}.$$

Первая производная обращается в нуль, когда $x^2(x^2-9)=0$, откуда $x_1=-3$, $x_2=3$, $x_3=0$. Исследуем знак второй производной при этих значениях x:

$$f''(-3)=\frac{6(-3)(9+9)}{(9-3)^3}<0,\ f''(3)=\frac{6\cdot 3(9+9)}{(9-3)^3}>0,\ f''(0)=0.$$

Таким образом, $x=-3$ является точкой максимума, $x=3$ — точкой минимума.

Поскольку $f''(0)=0$, обращаемся к первому правилу нахождения экстремума. Если x достаточно мало по абсолютному значению, то $f'(x)<0$ при $x<0$ и $x>0$, так как $x^2>0$, $(x^2-3)^2>0$, $(x^2-9)<0$. Знак первой производной при переходе через точку $x=0$ не меняется, поэтому данная точка не является точкой экстремума.

Определим интервалы возрастания и убывания функции с помощью первой производной. Так как

$$f'(x)=\frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}>0,$$

когда $|x|>3$, т. е. при $-\infty<x<-3$, $3<x<+\infty$, то функция возрастает в промежутках $(-\infty, -3)$, $(3, +\infty)$. Так как

$$f'(x)=\frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}<0,$$

когда $|x|<3$, т. е. при $-3<x<3$, то функция убывает в промежутках $(-3, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 3)$. (Заметим, что в точках $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$ производная не определена, как и сама функция.)

4. Вычисляем значения экстремумов:

$$y_{\max}=y(3)=\frac{3^3}{9-3}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2};$$

$$y_{\min}=y(-3)=\frac{(-3)^3}{9-3}=-\frac{27}{6}=-\frac{9}{2}.$$

5. Определяем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба. Вторая производная равна нулю при $x=0$ и меняет знак при переходе через эту точку. В самом

деле, при x, достаточно малых по абсолютной величине, получаем

$$f''(x) = \frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3} > 0 \text{ при } x < 0,$$

$$f''(x) = \frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3} < 0 \text{ при } x > 0,$$

так как $(x^2+9) > 0$ и $(x^2-3)^3 < 0$. Следовательно, точка $O(0, 0)$ является точкой перегиба. Так как $f'(0) = 0$, то касательная в этой точке совпадает с осью Ox.

Вторая производная не определена при $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$, т. е. в точках, в которых не определена и сама функция. Так как $f''(x) < 0$, когда $-\infty < x < -\sqrt{3}$, $0 < x < \sqrt{3}$, $f''(x) > 0$ при $-\sqrt{3} < x < 0$, $\sqrt{3} < x < \infty$, то график функции вогнут вниз в интервалах $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$ и вогнут вверх в интервалах $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, \infty)$.

6. Для нахождения точек пересечения графика функции с координатными осями необходимо решить системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^3}{x^2-3}; \\ y &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} y &= \frac{x^3}{x^2-3}; \\ x &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Обе системы имеют одно и то же решение: $x = 0$, $y = 0$. Таким образом, график функции пересекает координатные оси в начале координат.

7. Находим вертикальные асимптоты. Поскольку

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{x^2-3} = -\infty; \quad \lim_{x\to-\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{x^2-3} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{x^2-3} = -\infty; \quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{x^2-3} = +\infty,$$

то прямые $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Данную функцию путем непосредственного деления можно представить в виде

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-3} = x + \frac{3x}{x^2-3}, \text{ где } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x^2-3} = 0,$$

поэтому в соответствии с формулой (8.15) заключаем, что прямая $y = x$ является наклонной асимптотой. На основании полученных результатов можно построить график функции (рис. 8.18). Полезно предварительно результаты исследования свести в таблицу (см. стр. 339).

Замечание. Функция $y = \frac{x^3}{x^2-3}$ является нечетной, поэтому исследование ее можно провести лишь для $x > 0$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Таблица

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y	$-$	$-$	$-$	Не существует	$+$	0	$-$	Не существует	$+$	$+$	$+$
y'	$+$	0	$-$	Не существует	$-$	0	$-$	Не существует	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	Не существует	$+$	0	$-$	Не существует	$+$	$+$	$+$
Выводы	Функция возрастает, график вогнут вниз	Точка максимума $y_{\max} = -\frac{9}{2}$	Функция убывает, график вогнут вниз	Вертикальная асимптота $x = -\sqrt{3}$	Функция убывает, график вогнут вверх	Точка перегиба	Функция убывает, график вогнут вниз	Вертикальная асимптота $x = \sqrt{3}$	Функция убывает, график вогнут вверх	Точка минимума $y_{\min} = \frac{9}{2}$	Функция возрастает, график вогнут вверх

Примечания: 1. График функции имеет наклонную асимптоту $y = x$.
2. График функции пересекает координатные оси в начале координат.

2. Построить график функции $f(x) = x^3 - 3x$.

1. Функция определена при всех x, т. е. областью ее существования будет бесконечный промежуток $(-\infty, +\infty)$.

2. На концах промежутка получаем:

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3 - 3x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x) = \infty.$$

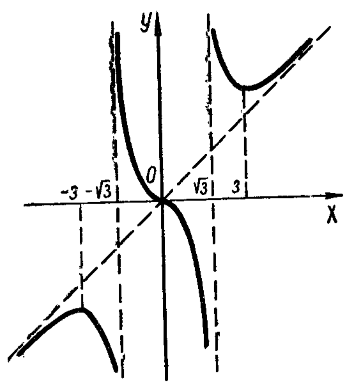

Рис. 8.18

3. С помощью производных

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x$$

находим критические точки аргумента функции и исследуем их характер. Имеем:

$$3x^2 - 3 = 0, \quad x^2 - 1 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1,$$
$$f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0, \quad f''(1) = 6 > 0.$$

Следовательно, $x = -1$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума.

4. Вычислим значения экстремумов:

$$y_{\max} = y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2;$$
$$y_{\min} = y(1) = 1^3 - 3\cdot 1 = 1 - 3 = -2.$$

5. Определим критические точки аргумента производной, решая уравнение $f''(x) = 0$. Имеем $6x = 0$ или $x = 0$. Если $x < 0$, то $f''(x) < 0$, если $x > 0$, то $f''(x) > 0$.

Таким образом, $x = 0$ — абсцисса точки перегиба.

6. Найдем точки пересечения с координатными осями. Решая систему $y = x^3 - 3x$, $y = 0$, получаем точки пересечения кривой с осью Ox: $M_1(-\sqrt{3}, 0)$, $M_2(0, 0)$, $M_3(\sqrt{3}, 0)$. Система $y = x^3 - 3x$, $x = 0$ новых точек не дает, получаем известную уже точку $M_2(0, 0)$.

7. Данная кривая асимптот не имеет (рис. 8.19).

Замечание. Функция $f(x) = x^3 - 3x$ является нечетной, поэтому ее исследование достаточно было провести для $x > 0$.

3. Построить график функции $y = 4x^2 - x^4 - 3$.

1. Функция определена для всех x, т. е. в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

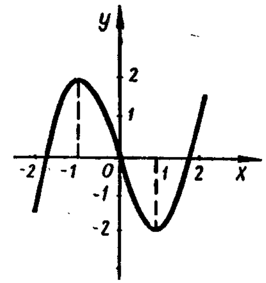

Рис. 8.19

2. На концах промежутка имеем:

$$\lim_{x\to-\infty} (4x^2 - x^4 - 3) = -\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} (4x^2 - x^4 - 3) = -\infty.$$

3. С помощью производных

$$y' = 8x - 4x^3, \quad y'' = 8 - 12x^2$$

находим критические точки и исследуем их характер.

Первая производная обращается в нуль, когда

$$8x - 4x^3 = 0 \text{ или } 4x(2 - x^2) = 0,$$

откуда

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{2}, \quad x_3 = \sqrt{2}.$$

Исследуем знак второй производной в полученных точках:

$$y''(0) = 8 > 0,$$
$$y''(-\sqrt{2}) = y''(\sqrt{2}) = 8 - 12\cdot 2 = -16 < 0.$$

Следовательно, $x_1 = 0$ — точка минимума, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$ — точки максимума.

4. Вычисляем значения экстремумов:

$$y_{\max} = y(-\sqrt{2}) = y(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^4 - 3 = 1;$$
$$y_{\min} = y(0) = -3.$$

5. Решая уравнение $f''(x) = 0$, находим критические точки аргумента производной. Получаем

$$8 - 12x^2 = 0, \quad 4(2 - 3x^2) = 0, \quad x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Принимая эти значения, вторая производная меняет знак.

В самом деле, если $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < x < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, то $f''(x) > 0$, если $x < -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ и $x > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, то $f''(x) < 0$. Следовательно, $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ — абсциссы точек перегиба. Ординаты последних находим из уравнения $y = 4x^2 - x^4 - 3$, получаем $y_1 = y_2 = -\frac{8}{9}$.

6. При $x = 0$ получаем $y = -3$, т. е. график функции пересекает ось Oy в точке $M(0, -3)$. При $y = 0$ имеем $4x^2 - x^4 - 3 = 0$. Решая это биквадратное уравнение, находим: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = \sqrt{3}$. Таким образом, точки $M_1(-\sqrt{3}, 0)$, $M_2(-1, 0)$, $M_3(1, 0)$, $M_4(\sqrt{3}, 0)$ являются точками пересечения с осью Ox.

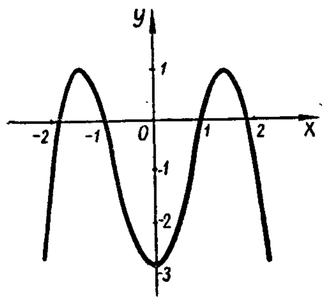

Рис. 8.20

7. Данная кривая асимптот не имеет, график ее изображен на рис. 8.20.

4. Исследовать функцию $x^2 = y^2 + x^4$ и построить ее график. Разрешая данное уравнение относительно y, получим

$$y = \pm x\sqrt{1 - x^2}.$$

Исследуем функцию $y = x\sqrt{1-x^2}$. Эта функция определена при $1 - x^2 \geqslant 0$ или $x^2 \leqslant 1$, т. е. при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, область ее существования — сегмент $[-1, 1]$. Следовательно, график функции будет целиком помещаться в полосе между прямыми $x = -1$ и $x = 1$; слева от прямой $x = -1$ и справа от прямой $x = 1$ не будет ни одной точки графика. Функция равна нулю при $x = -1$ и $x = 1$.

Находим производные функции:

$$y' = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad y'' = \frac{x(2x^2 - 3)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}.$$

Заметим, что $y' = -\infty$ при $x = 1$. Это означает, что касательная к графику в точке $x = 1$ параллельна оси Oy.

Определяем критические точки аргумента функции и исследуем их характер:

$$y' = 0, \ 1 - 2x^2 = 0, \ x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$y''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\right]}{\sqrt{\left[1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^3}} = 4 > 0,$$

$$y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\right]}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^3}} = -4 < 0.$$

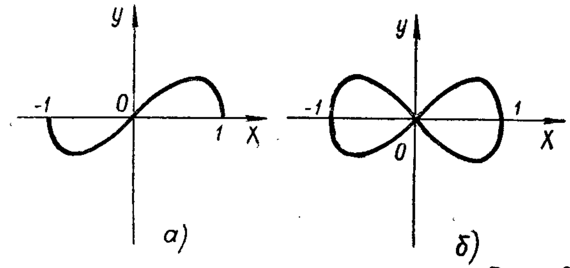

Рис. 8.21

Следовательно, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0{,}7$ — точка минимума и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ — точка максимума функции.

Вычисляем значения экстремумов:

$$y_{\min} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\frac{1}{2};$$

$$y_{\max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Решая систему уравнений $y = x\sqrt{1-x^2}$, $y = 0$, находим точки пересечения кривой с осью Ox: $M(-1, 0)$, $O(0, 0)$, $N(1, 0)$. Точка $O(0, 0)$ будет также единственной точкой пересечения с осью Oy.

График функции $y = x\sqrt{1-x^2}$ изображен на рис. 8.21, *а*, графики функций $y = \pm x\sqrt{1-x^2}$ на рис. 8.21, *б*. В точке $O(0, 0)$ кривая пересекает себя, эта точка называется *узлом*.

Замечание. Для построения графика достаточно было исследовать функцию в промежутке [0, 1], так как график симметричен относительно координатных осей (x и y входят в уравнение только в четных степенях).

5. Исследовать функцию $y = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ и построить ее график.

Функция не определена при $x = -1$ и $x = 1$. Область существования функции состоит из трех интервалов: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.

На концах интервалов области существования имеем:

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0, \quad \lim_{x\to-1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0.$$

Производная функции

$$y' = \frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{2}{x^2-1}$$

не равна нулю ни в одной точке. Производная не существует, если $x^2 - 1 = 0$, т. е. при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, но в этих точках не определена и сама функция. Следовательно, данная функция экстремумов не имеет.

При $x < -1$ $y' > 0$, при $-1 < x < 1$ $y' < 0$, при $x > 1$ $y' > 0$, откуда следует, что функция возрастает в интервале $(-\infty, -1)$, убывает в интервале $(-1, 1)$ и возрастает в интервале $(1, \infty)$.

Вторая производная

$$y'' = \left(\frac{2}{x^2-1}\right)' = \frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

обращается в нуль при $x = 0$. Если $x < 0$, то $y'' > 0$, при $x > 0$ $y'' < 0$, следовательно, $x = 0$ — абсцисса точки перегиба.

Так как

$$\lim_{x\to-1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = +\infty, \quad \lim_{x\to 1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -\infty,$$

то прямые $x = -1$, $x = 1$ являются вертикальными асимптотами.

Поскольку функцию $y = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ можно представить в виде

$$y = 0 + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \text{ где } \lim_{x\to\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0,$$

то в силу формулы (8.15) график кривой имеет и горизонтальную асимптоту $y = 0$ (рис. 8.22).

6. Построить график функции $y = \sqrt{\frac{125 - x^3}{3x}}$.

Функция принимает действительные значения, когда $\frac{125-x^3}{3x} \geqslant 0$, откуда $125 - x^3 \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ или $0 \leqslant x \leqslant 5$. Аргумент x может принимать только положительные значения, ибо при $x < 0$ подкоренное выражение будет отрицательным. При $x = 0$ функция

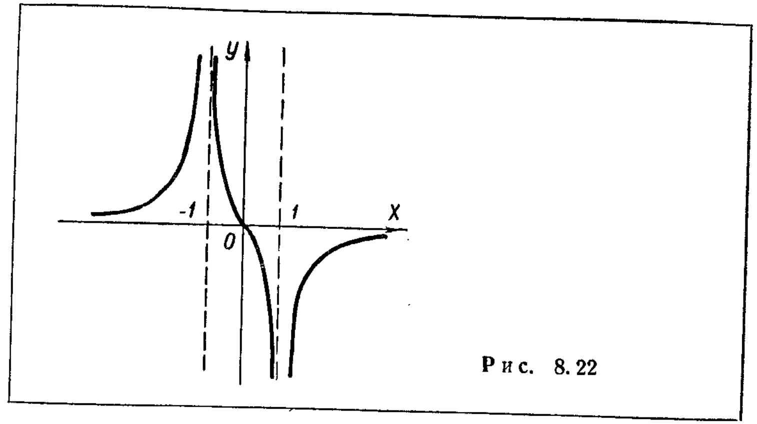

Рис. 8.22

не определена. Следовательно, областью определения является полуинтервал $(0, 5]$.

Производная

$$y' = -\frac{125 + 2x^3}{6x^2 y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

всегда отрицательна, функция убывает. При $x \to 5$ производная $y' \to -\infty$ (касательная параллельна оси Oy).

Вторая производная

$$y'' = \frac{1}{2}(y - xy')\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)$$

обращается в нуль, меняя знак, при $x = y = \frac{5}{\sqrt[3]{4}} \approx 3{,}15$ (точка перегиба), при этом $y' = -1$. График функции изображен на рис. 8.23.

7. Построить график функции $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$.

Функция определена и непрерывна при всех x. Первая производная

$$y' = \frac{12x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}} = \frac{4 - x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}}$$

существует всюду, за исключением точек $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.

Исследуем предельные значения производной при x, стремящемся к нулю слева и справа:

$$\lim_{x\to-0} \frac{4-x}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(6-x)^2}} = -\infty; \quad \lim_{x\to+0} \frac{4-x}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(6-x)^2}} = +\infty,$$

при $x<0$ $y'<0$, при $x>0$ $y'>0$, следовательно, функция имеет минимум в точке $x=0$, причем $y_{\min}=0$.

Рассмотрим критическую точку $x_2=6$. При $x \to 6-0$ $y' \to -\infty$, при $x \to 6+0$ также $y' \to -\infty$, т. е. производная отрицательна слева и справа от точки $x_2=6$, поэтому в данной точке экстремума нет. В этой точке функция убывает, касательная к кривой в точке $x_2=6$ вертикальна.

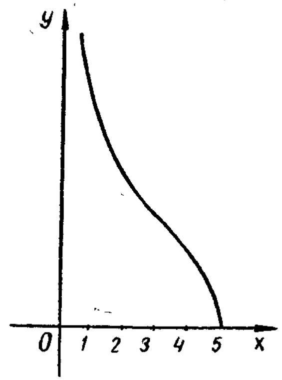

Рис. 8.23

При $x=4$ производная обращается в нуль. Так как при $x<4$ $y'>0$, при $x>4$ $y'<0$, то $x=4$ — точка максимума, причем $y_{\max}=2\sqrt[3]{4}$.

Таким образом, в промежутке $(-\infty, 0)$ функция убывает, в промежутке $(0, 4)$ — возрастает, в промежутке $(4, +\infty)$ — убывает.

Определяем точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Вторая производная $y''=-\dfrac{8}{x^{\frac{4}{3}}(6-x)^{\frac{5}{3}}}$ в нуль не обращается ни в одной точке, в точках $x=0$ и $x=6$ она не определена.

Исследуем знак второй производной вблизи этих точек. Так как $y''<0$ при $x<0$ и при $x>0$, то кривая выпукла вверх слева и справа от точки с абсциссой $x=0$ и, следовательно, точка $O(0, 0)$ не является точкой перегиба; с другой стороны, O — точка минимума (такая точка называется точкой возврата).

При $x<6$ имеем $y''<0$, при $x>6$ $y''>0$, поэтому точка $(6, 0)$ является точкой перегиба.

Определим асимптоты кривой:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{6x^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{6}{x}-1}=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[y-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}[\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x]=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(6x^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x^2}=2.$$

Следовательно, прямая $y=-x+2$ является асимптотой кривой $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$ (рис. 8.24).

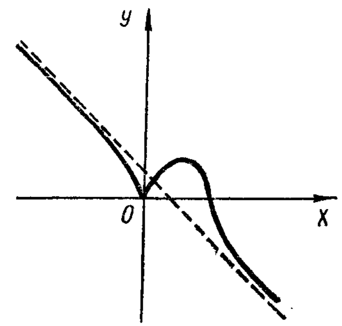

Рис. 8.24

Задачи

Исследовать функции и построить их графики

1. $y=x^3-12x$.
2. $y=x^4-4x^2+5$.
3. $y=\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right|$, $a>0$.
4. $y^2=x^2+y^4$.
5. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.
6. $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.
7. $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.
8. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.
9. $y=\sin^3 x+\cos^3 x$.
10. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.
11. $y^2=x^3$.
12. $y^2=x(x-3)^2$.
13. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.
14. $x^3+y^3-3axy=0$.
15. $y=8x^2e^{-x^2}$.
16. $y=\dfrac{x^2}{x^2-9}$.

Ответы

1. Функция определена при всех x; $x=-2$ — точка максимума, $y_{\max}=y(-2)=16$; $x=2$ — точка минимума, $y_{\min}=y(2)=-16$. 2. Функция определена в бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$; $y_{\min}=y(-\sqrt{2})=y(\sqrt{2})=1$, $y_{\max}=y(0)=5$. 3. Область определения состоит из трех интервалов: $(-\infty, -a)$, $(-a, a)$, (a, ∞). В первом и третьем интервале фуикция убывает, во втором возрастает. Асимптоты: $x=\pm a$, $y=0$; $O(0, 0)$ — точка перегиба. 4. Область определения — $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Кривая пересекает ось Oy в точках: $M_1(0, -1)$, $M_2(0, 1)$, $O(0, 0)$, последняя точка является точкой самопересечения (узел). 5. $y_{max} = y(1) = \frac{1}{2}$, $y_{min} = y(-1) = -\frac{1}{2}$. Асимптота: $y = 0$. 6. $y_{min} = y(0) = 0$. Асимптота: $y = 1$. Точки перегиба: $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$. Кривая симметрична относительно оси Oy. 7. Функция возрастает в промежутке $(-\infty, \infty)$. Точка перегиба: $O(0, 0)$ (см. приложение). 8. Область определения $(-\infty, \infty)$; $y_{min} = y(0) = 1$. Кривая симметрична относительно оси Oy (см. приложение). 9. $y_{max} = y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y(2\pi) = 1$, $y_{max} = y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx$

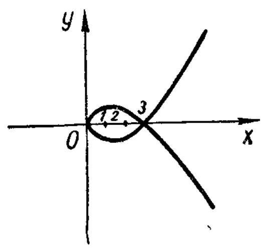

Рис. 8.25

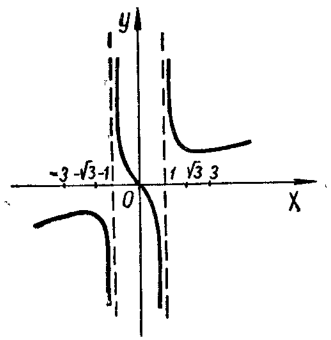

Рис. 8.26

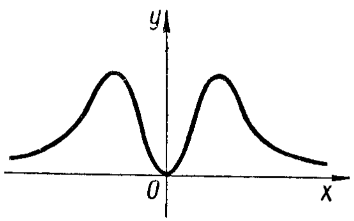

Рис. 8.27

$\approx 0{,}71$; $y_{min} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$. $y_{min} = y(\pi) = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$. 10. Область определения: $0 < x < \infty$; $y_{max} = y(e) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$. Точка перегиба: $M\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$. Асимптоты: $x = 0$, $y = 0$. 11. Область определения: $0 \leqslant x < \infty$. Кривая симметрична относительно оси Ox, состоит из двух ветвей, расположенных по разные стороны от оси Ox и касающихся ее в начале координат. Линия эта называется полукубической параболой. 12. Область определения: $0 \leqslant x < \infty$. Кривая симметрична относительно оси Ox, касается оси Oy в начале координат. Через точку $M(3, 0)$ кривая проходит дважды (такая точка называется узлом). При $x = 1$ $y_{max} = 2$ и $y_{min} = -2$ (рис. 8.25). 13. Область определения: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$. Кривая симметрична относительно начала координат (рис. 8.26). Асимптоты: $x = -1$, $x = 1$; $y_{min} = y(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1{,}37$. 14. Кривая $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ называется декартовым листом. Начало координат является узлом; асимптота: $y = -x - a$. Указание. Коэффициенты k и b уравнения асимптоты $y = kx + b$ находятся следующим образом: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = k = -1$ определяется из соотношения $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3a\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x^2} = 0$ (получено из уравнения кривой путем деления на x^3); $\lim\limits_{x\to\infty}(y - kx) = b$ находится как $\lim\limits_{x\to\infty}(y + x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2} = -a$ (см. приложение). 15. Функция определена при всех x. Кривая симметрична относительно оси Oy; $y_{max} = y(-1) = y(1) = 8e^{-1} \approx 2{,}91$; $y_{min} = y(0) = 0$; асимптота: $y = 0$. Точки перегиба имеют абсциссы: $x_1 = -\frac{5 + \sqrt{17}}{2} \approx -1{,}51$; $x_2 = -\frac{5 - \sqrt{17}}{2} \approx -0{,}47$; $x_3 \approx 0{,}47$; $x_4 \approx 1{,}51$ (рис. 8.27). 16. Область определения: $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$, $(3, \infty)$; асимптоты: $y = 1$, $x = -3$, $x = 3$; $y_{max} = y(0) = 0$.

IV. Интегральное исчисление функций одной переменной

Глава 9. Неопределенный интеграл

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна данной функции, т. е.

$$F'(x) = f(x).$$

Неопределенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ или от дифференциального выражения $f(x)\,dx$ называется общее выражение для всех первообразных функции $f(x)$.

Обозначение:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{9.1}$$

где $F'(x) = f(x)$. Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а выражение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*.

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$[\int f(x)\,dx]' = f(x), \quad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{9.2}$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C. \tag{9.3}$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \quad (c = \text{const}). \tag{9.4}$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых:

$$\int [f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx + \int f_3(x)dx.$$

Таблица простейших неопределенных интегралов

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C\,(m \neq -1). \tag{9.5}$$

$$\int 0 \cdot dx = C. \tag{9.5а}$$

$$\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C. \tag{9.5б}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \tag{9.6}$$

$$\int e^x dx = e^x + C. \tag{9.7}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \tag{9.8}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C. \tag{9.9}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C. \tag{9.10}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \tag{9.11}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \tag{9.12}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C. \tag{9.13}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C. \tag{9.14}$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C. \tag{9.15}$$

§ 9.1. Интегрирование разложением

Метод разложения основан на свойстве 4 неопределенного интеграла. Если

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x),$$

то

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx + \int f_3(x)\,dx.$$

Примеры

1. Найти интеграл $\int x^3 dx$.

Применяем формулу (9.5) для случая $m = 3$. В соответствии с этой формулой получаем

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$$

2. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2}\,dx$.

Разделив почленно числитель на знаменатель, пользуясь свойствами 3 и 4 и формулой (9.5), находим

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2}\,dx = \int (x^2 - 2x + 3)\,dx = \int x^2 dx - 2\int x\,dx + 3\int dx =$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\,\frac{x^{1+1}}{1+1} + 3x + C = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C.$$

3. Найти интеграл $\displaystyle\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$.

Раскрывая скобки и пользуясь формулой (9.5) для случая, когда m — отрицательное число, находим

$$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 dx=\int\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\int dx-2\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x^4}=$$
$$=\int dx-2\int x^{-2}dx+\int x^{-4}dx=x-2\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C=$$
$$=x+2x^{-1}-\frac{1}{3}x^{-3}+C=x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+C.$$

4. Найти интеграл $\int\sqrt{x}\,dx$.

$$\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

5. Найти интеграл $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

$$\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx=\int(\operatorname{cosec}^2 x-1)\,dx=\int\operatorname{cosec}^2 x\,dx-\int dx=$$
$$=\int\frac{1}{\sin^2 x}dx-\int dx=-\operatorname{ctg}x-x+C.$$

6. Найти интеграл $\int(ax^3+bx^2+cx+p)\,dx$.

$$\int(ax^3+bx^2+cx+p)\,dx=a\int x^3dx+b\int x^2dx+c\int x\,dx+$$
$$+p\int dx=\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+px+C.$$

7. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=$$
$$=-\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x+C.$$

8. Найти интеграл $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$.

Прибавляя и вычитая единицу из x^4, получаем

$$\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=\int\frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}dx=\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{1+x^2}dx+\int\frac{dx}{1+x^2}=$$
$$=\int(x^2-1)\,dx+\int\frac{dx}{1+x^2}=\int x^2dx-\int dx+\int\frac{dx}{1+x^2}=$$
$$=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C.$$

9. Найти интеграл $\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx$.

Так как

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos x),$$

то

$$\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos x\,dx=\frac{1}{2}x-$$
$$-\frac{1}{2}\sin x+C.$$

Задачи

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int\frac{x^4-3x^3+4x^2+6x-8}{x^2}dx$. 2. $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

3. $\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx$. 4. $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$.

5. $\int\frac{3-4\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$. 6. $\int(ax-b)^3\,dx$.

7. $\int\frac{(1-x^n)^2}{\sqrt{x}}dx$. 8. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$.

9. $\int\left(\frac{4}{1+x^2}-\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$. 10. $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$.

Ответы

1. $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+4x+6\ln x+\frac{8}{x}+C$. 2. $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$. 3. $\frac{1}{2}x+$ $+\frac{1}{2}\sin x+C$. 4. $x-\cos x+C$. 5. $3\operatorname{tg}x-4\sin x+C$. 6. $\frac{a^3}{4}x^4-a^2bx^3+$ $+\frac{3}{2}ab^2x^2-b^3x+C$. 7. $\sqrt{x}\left(2-\frac{4x^n}{2n+1}+\frac{2x^{2n}}{4n+1}\right)+C$. 8. $e^x-\frac{1}{2x^2}+C$. 9. $4\operatorname{arctg}x+5\arccos x+C$. 10. $x-\operatorname{arctg}x+C$.

§ 9.2. Независимость вида неопределенного интеграла от выбора аргумента функции

Если

$$F(x)=\int f(x)\,dx,\quad F'(x)=f(x), \tag{9.16}$$

то

$$F(u)=\int f(u)\,du, \tag{9.17}$$

где $u=\varphi(x)$ — любая дифференцируемая функция от x. Формула (9.17) получается из формулы (9.16) путем формальной замены x на u, она дает возможность значительно расширить таблицу простейших интегралов. На ее основании получаем:

$$\int u^\alpha du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1). \tag{9.5′}$$

$$\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C. \tag{9.6′}$$

$$\int e^u du=e^u+C. \tag{9.7′}$$

$$\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C. \tag{9.8′}$$

$$\int\cos u\,du=\sin u+C. \tag{9.9′}$$

$$\int\sin u\,du=-\cos u+C. \tag{9.10′}$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C. \qquad (9.11')$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C. \qquad (9.12')$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = -\arccos u + C. \qquad (9.13')$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C = -\operatorname{arcctg} u + C. \qquad (9.14')$$

$$\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C. \qquad (9.15')$$

При пользовании формулами (9.5′) — (9.15′) необходимо иметь в виду простейшие преобразования дифференциала:

1. $dx = d(x+b)$, где b — постоянная величина.
2. $dx = \frac{1}{a}d(ax)$, где постоянная $a \neq 0$.
3. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$, где постоянная $a \neq 0$.
4. $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$.
5. $xdx = \frac{1}{2}d(x^2+b)$.
6. $\sin xdx = -d(\cos x)$.
7. $\cos xdx = d\sin x$.

В общем случае

$$\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x).$$

Примеры

1. Найти неопределенный интеграл $\int(2x+3)^2dx$.

На основании преобразования 3 дифференциала имеем

$$dx = \frac{1}{2}d(2x+3).$$

Применяя формулу (9.5′) для случая, когда $u = 2x+3$, $\alpha = 2$, находим

$$\int(2x+3)^2dx = \int(2x+3)^2\frac{1}{2}d(2x+3) = \frac{1}{2}\int(2x+3)^2d(2x+3) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(2x+3)^3}{3} + C = \frac{1}{6}(2x+3)^3 + C.$$

2. Найти интеграл $\int\sqrt{x+4}\;dx$.

Согласно преобразованию 1,

$$dx = d(x+4).$$

Применяя формулу (9.5′) для случая, когда $u = x+4$ и $\alpha = \frac{1}{2}$, получим

$$\int\sqrt{x+4}\,dx = \int(x+4)^{\frac{1}{2}}d(x+4) = \frac{(x+4)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4} + C.$$

3. Найти интеграл $\int\frac{dx}{ax+b}$.

$$\int\frac{dx}{ax+b} = \int\frac{\frac{1}{a}d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

4. Найти интеграл $\int\frac{x\,dx}{x^2+2}$.

$$\int\frac{xdx}{x^2+2} = \int\frac{\frac{1}{2}d(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C.$$

5. Найти интеграл $\int\operatorname{tg}x\,dx$.

$$\int\operatorname{tg}x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int\frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

6. Найти интеграл $\int\frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx$.

Так как

$$d(x^2+3x+5) = (x^2+3x+5)'\,dx = (2x+3)\,dx,$$

то

$$\int\frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx = \int\frac{d(x^2+3x+5)}{x^2+3x+5} = \ln(x^2+3x+5) + C.$$

7. Найти интеграл $\int e^{\frac{x}{2}}dx$.

$$\int e^{\frac{x}{2}}dx = \int e^{\frac{x}{2}}2d\left(\frac{x}{2}\right) = 2\int e^{\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right) = 2e^{\frac{x}{2}} + C.$$

8. Найти интеграл $\int\cos\frac{x}{4}dx$.

$$\int\cos\frac{x}{4}dx = \int\cos\frac{x}{4}4d\left(\frac{x}{4}\right) = 4\int\cos\frac{x}{4}d\left(\frac{x}{4}\right) = 4\sin\frac{x}{4} + C.$$

9. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 3x} = \int\frac{\frac{1}{3}d(3x)}{\sin^2 3x} = \frac{1}{3}\int\frac{d(3x)}{\sin^2 3x} = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2 3x + C.$$

10. Найти интеграл $\int\frac{dx}{1+4x^2}$.

12*

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \int \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C.$$

11. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin 3x + C.$$

Задачи

Применяя простейшие преобразования дифференциала и таблицу интегралов (9.5′) — (9.15′), найти неопределенные интегралы:

1. $\int (3x-5)^2 dx$.
2. $\int \sqrt{2x+3}\, dx$.
3. $\sqrt{x^2-4}\, x dx$.
4. $\int e^{-\frac{x}{3}} dx$.
5. $\int \left(\sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3}\right) dx$.
6. $\int \frac{x dx}{x^2+1}$.
7. $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}}$.
8. $\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{4}}$.
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}$.
10. $\int \frac{dx}{4x^2-1}$.
11. $\int \operatorname{ctg} x dx$.
12. $\int \frac{2x+6}{x^2+6x+14} dx$.

Ответы

1. $\frac{1}{9}(3x-5)^3 + C$. 2. $\frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}} + C$. 3. $\frac{1}{3}(x^2-4)^{\frac{3}{2}} + C$. 4. $-3e^{-\frac{x}{3}} + C$. 5. $3\left(\sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3}\right) + C$. 6. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$. 7. $-2\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C$. 8. $2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$. 9. $3\arcsin\frac{x}{3} + C$. 10. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| + C$. 11. $\ln|\sin x| + C$. 12. $\ln(x^2+6x+14) + C$.

§ 9.3. Метод подстановки

Интегрирование путем введения новой переменной (метод подстановки) основано на формуле

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt,$$

где $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая функция переменной t.

Примеры

1. Найти интеграл $\int xe^{x^2} dx$.

Положим $x^2 = t$, тогда $2xdx = dt$, $xdx = \frac{dt}{2}$. Подставляя полученные значения в подынтегральное выражение, получим

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} x dx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Этот пример можно решить и по-другому (см. § 9.2):

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} x dx = \int e^{x^2} \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

2. Найти интеграл $\int x\sqrt{x-2}\, dx$.

Чтобы избавиться от корня, положим

$$\sqrt{x-2} = t.$$

Возводя в квадрат это равенство, найдем x:

$$x = t^2 + 2,$$

откуда

$$dx = 2t dt.$$

Подставляя полученные равенства в подынтегральное выражение, находим

$$\int x\sqrt{x-2}\, dx = \int (t^2+2)\, t\, 2t dt = \int (2t^4 + 4t^2)\, dt = 2\int t^4 dt + 4\int t^2 dt =$$
$$= 2\frac{t^5}{5} + 4\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

3. Найти интеграл $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}} dx$.

Положим

$$\sqrt{1+4\sin x} = t,$$

откуда

$$1 + 4\sin x = t^2,\quad 4\cos x\, dx = 2t\, dt,\quad \cos x\, dx = \frac{1}{2} t dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}} dx = \int \frac{\frac{1}{2} t dt}{t} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\sqrt{1+4\sin x} + C.$$

4. Найти интеграл $\int \cos^2 x \sin x\, dx$.

Положим $\cos x = u$,

откуда

$$-\sin x\, dx = du,\quad \sin x\, dx = -du.$$

Таким образом,

$$\int \cos^2 x \sin x dx = \int u^2(-du) = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C =$$
$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Тот же результат можно получить непосредственно (см. § 9.2):

$$\int \cos^2 x \sin x dx = \int \cos^2 x d(-\cos x) = -\int \cos^2 x d(\cos x) =$$
$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

5. Найти интеграл $\int e^{\sin x}\cos x dx$.

Положим
$$\sin x = u,$$
откуда
$$\cos x dx = du.$$
Таким образом,
$$\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^u du = e^u + C = e^{\sin x} + C.$$
Тот же результат получается и непосредственно:
$$\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

6. Найти интеграл $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Пусть
$$\ln x = t,$$
тогда
$$\frac{1}{x} dx = dt.$$
Следовательно,
$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \frac{1}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

7. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

Разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x$, получим
$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}.$$
Положим
$$\operatorname{tg} x = t,$$
тогда
$$\frac{1}{\cos^2 x} dx = dt$$
Таким образом,
$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

8. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Полагая $\frac{x}{2} = t$, получаем
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dt}{\sin t\cos t} =$$
$$= \ln|\operatorname{tg} t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

9. Найти интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $(a > 0)$.

Применим тригонометрическую подстановку
$$x = a\cos t.$$
Имеем
$$dx = -a\sin t dt.$$
Следовательно,
$$\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int\sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t}\,(-a\sin t)\,dt =$$
$$= -a^2\int\sqrt{1-\cos^2 t}\sin t dt = -a^2\int\sin^2 t dt = -a^2\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$
$$= -\frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int\cos 2t dt = -\frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$
Возвращаемся к исходной переменной x. Так как $x = a\cos t$, то
$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad t = \arccos\frac{x}{a}.$$
Далее,
$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sqrt{1-\cos^2 t}\cos t =$$
$$= 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{x}{a} = 2\frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}.$$
Таким образом, окончательно получим
$$\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C =$$
$$= -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\cdot\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2} + C =$$
$$= -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

10. Найти интеграл
$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}.$$
Применим тригонометрическую подстановку
$$x = a\sec t.$$
Имеем:
$$dx = \frac{a\sin t dt}{\cos^2 t} = \frac{a\operatorname{tg} t dt}{\cos t},$$
$$\sqrt{(x^2 - a^2)^3} = \sqrt{(a^2\sec^2 t - a^2)^3} = \sqrt{a^6\left(\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\right)^3} =$$
$$= \sqrt{a^6\operatorname{tg}^6 t} = a^3\operatorname{tg}^3 t;$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = \int\frac{1}{a^3\operatorname{tg}^3 t}\cdot\frac{a\operatorname{tg} t dt}{\cos t} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\operatorname{tg}^2 t\cos t} =$$
$$= \frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{a^2}\int(\sin t)^{-2} d(\sin t) = \frac{1}{a^2}\frac{(\sin t)^{-1}}{-1} + C =$$
$$= -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{1}{a^2\sin t} + C.$$

Возвращаемся к переменной x. Так как

$$x = a\sec t,$$

то

$$\sec t = \frac{x}{a},\ \frac{1}{\cos t} = \frac{x}{a},\ \cos t = \frac{a}{x}.$$

Находим $\sin t$:

$$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{1}{a^2\sin t} + C = -\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + C.$$

11. Показать, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C, \text{ где } a = \text{const}.$$

Применим так называемую подстановку Эйлера

$$\sqrt{x^2+a} = t - x,$$

где t — новая переменная. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$x^2 + a = t^2 - 2tx + x^2$$

или

$$a = t^2 - 2tx.$$

Находим дифференциалы от обеих частей последнего равенства:

$$0 = 2tdt - (2xdt + 2tdx)$$

или

$$tdx = (t-x)\,dt,$$

откуда

$$\frac{dx}{t-x} = \frac{dt}{t},$$

т. е.

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt}{t}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} + \ln|t| + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C.$$

Задачи

Методом подстановки найти интегралы:

1. $\int \sqrt{2x-3}\,dx$.
2. $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$.
3. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+6\cos x}}$.
4. $\int \sin^3 x \cos x dx$.
5. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$.
6. $\int x^2 e^{x^3} dx$.
7. $\int \frac{dx}{4-5x}$.
8. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.
9. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx$.
10. $\int \frac{dx}{\cos x}$.
11. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$.

Ответы

1. $\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}} + C$. 2. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} - 8\sqrt{x+4} + C$.
3. $-\frac{1}{3}\sqrt{1+6\cos x} + C$. 4. $\frac{\sin^4 x}{4} + C$. 5. $\frac{1}{\cos x} + C$. 6. $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$.
7. $-\frac{1}{5}\ln|4-5x| + C$. 8. $\ln(\ln x) + C$. 9. $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C$. Подстановка $\cos x = t$. 10. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$. 11. $-\sqrt{1-x^2} + C$.
12. $-\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + C$.

§ 9.4. Метод интегрирования по частям

Если $u = \varphi_1(x)$, $v = \varphi_2(x)$ — дифференцируемые функции от x, то из формулы для дифференциала произведения двух функций

$$d(uv) = udv + vdu$$

получается формула интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int v\,du. \tag{9.18}$$

Эта формула применяется в случае, когда подынтегральная функция представляет произведение алгебраической и трансцендентной функции.

В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv — оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить v путем интегрирования.

В некоторых случаях для сведения данного интеграла к табличному формула (9.18) применяется несколько раз. Иногда искомый интеграл определяется из алгебраического уравнения, получающегося с помощью интегрирования по частям.

Примеры

1. Найти $\int x \sin x dx$.

Обозначим: $x = u$, $\sin x dx = dv$.

Для применения формулы (9.18) необходимо знать еще v и du. Дифференцируя равенство $x = u$, получаем $dx = du$. Интегрируя равенство $dv = \sin x\, dx = d(-\cos x)$, определяем $v = -\cos x$.

Подставляя значения u, v, du, dv в формулу (9.18), находим

$$\int x \sin x\, dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)\, dx = -x \cos x + \sin x + C = \sin x - x\cos x + C.$$

2. Найти $\int x \ln x dx$.

Полагая

$$\ln x = u, \quad x dx = dv,$$

получаем

$$\frac{1}{x} dx = du, \quad \frac{x^2}{2} = v.$$

По формуле (9.18) находим

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

3. Найти $\int \arcsin x dx$.

Полагая

$$u = \arcsin x, \quad dv = dx,$$

определяем

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad v = x.$$

Следовательно,

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = x \arcsin x +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

4. Найти $\int x^2 \cos x dx$.

Полагая

$$u = x^2, \quad dv = \cos x dx = d(\sin x),$$

получаем

$$du = 2x dx, \quad v = \sin x.$$

Следовательно,

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx. \quad (A)$$

Полученный интеграл снова находится интегрированием по частям (пример 1). Его можно найти и не вводя явно u и v. Имеем

$$\int x \sin x dx = \int x d(-\cos x) = x(-\cos x) - \int(-\cos x) dx = -x\cos x + \sin x + C_1.$$

Подставляя это выражение для интеграла в формулу (A), находим

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x + C_1) = x^2 \sin x + 2(x \cos x - \sin x) + C,$$

где $C = -2C_1$.

5. Найти $\int e^x \sin x dx$.

Положим

$$u = e^x, \quad dv = \sin x dx,$$

отсюда

$$du = e^x dx, \quad v = -\cos x.$$

Применяя формулу (9.18), получаем

$$\int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x) - \int(-\cos x) e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx. \quad (B)$$

К интегралу в правой части снова применяем формулу интегрирования по частям, не вводя явно u и v. Имеем

$$\int e^x \cos x dx = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Подставляя найденное выражение в формулу (B), находим

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx;$$

$$\int e^x \sin x dx + \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x,$$

откуда

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x).$$

Следовательно,

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$$

6. Показать, что

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|] + C.$$

Положим

$$\sqrt{x^2+a} = u, \quad dx = dv,$$

отсюда

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a}} dx = du, \quad v = x.$$

По формуле (9.18) получаем

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int x \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx.$$

Преобразуем интеграл в правой части:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} =$$

$$= \int \sqrt{x^2+a}\,dx - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

откуда

$$2\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\right].$$

Так как (см. пример 11, § 9.3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C_1,$$

то

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right] + C.$$

Задачи

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы:

1. $\int xe^x dx$.
2. $\int \ln^2 x dx$.
3. $\int \operatorname{arctg} x dx$.
4. $\int x \arcsin x dx$.
5. $\int x^2 \sin x dx$.
6. $\int x^2 \ln x dx$.
7. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.
8. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}\,dx$.

Ответы

1. $e^x(x-1)+C$. 2. $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$. 3. $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$. 4. $\frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$. 5. $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$. 6. $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$. 7. $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$. 8. $-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2+4x+8)+C$.

§ 9.5. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

Интеграл вида

$$\int \frac{dx}{px^2+qx+r}$$

путем дополнения квадратного трехчлена до полного квадрата по формуле

$$px^2+qx+r = p\left[(x+\alpha)^2 \pm a^2\right]$$

сводится к одному из двух интегралов:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C; \qquad (9.19)$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, \qquad (9.20)$$

где

$$u = x+\alpha.$$

Интеграл

$$\int \frac{mx+n}{px^2+qx+r}\,dx \qquad (9.21)$$

сводится к интегралу (9.19) или (9.20) и интегралу

$$\int \frac{u\,du}{u^2 \pm c^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(u^2 \pm a^2)}{u^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln\left|u^2 \pm a^2\right| + C. \qquad (9.22)$$

Интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{px^2+qx+r}}$$

сводится к одному из интегралов:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C; \qquad (9.23)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a}\right| + C. \qquad (9.24)$$

Интеграл

$$\int \sqrt{px^2+qx+r}\,dx \qquad (9.25)$$

сводится к одному из двух интегралов:

$$\int \sqrt{u^2 \pm \alpha}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm \alpha} \pm \frac{\alpha}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm \alpha}\right| + C; \qquad (9.26)$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C. \qquad (9.27)$$

Примеры

1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

Дополняя квадратный трехчлен до полного квадрата и интегрируя на основании формулы (9.19) для случая, когда $u = x+2$, $a=3$, получаем

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x^2+4x+4)+9} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} =$$
$$= \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C.$$

2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-6x-16}$.

Дополняя квадратный трехчлен до полного квадрата и интегрируя на основании формулы (9.20) для случая, когда $u = x-3$, $a=5$, получаем

$$\int \frac{dx}{x^2-6x-16} = \int \frac{dx}{(x^2-6x+9)-9-16} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-25} =$$
$$= \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2-5^2} = \frac{1}{2\cdot 5}\ln\left|\frac{(x-3)-5}{(x-3)+5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-8}{x+2}\right| + C.$$

3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3x^2+4x+1}$.

Как и в примере 2, получаем

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x+1} = \int \frac{dx}{3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)} =$$
$$= \int \frac{dx}{3\left[\left(x^2+2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\right]} = \int \frac{dx}{3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right]} =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{3}}\ln\left|\frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{3}}{\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1}{3x+3}\right| + C.$$

4. Найти интеграл $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx$.

Это интеграл вида (9.21). Преобразуя квадратный трехчлен и переходя к новой переменной $x+1=t$, находим

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{x+2}{(x^2+2x+1)+4}\,dx = \int \frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+4}\,dx =$$

$$= \int \frac{x+1}{(x+1)^2+2^2}\,d(x+1) + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d[(x+1)^2+2^2]}{(x+1)^2+2^2} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}\ln[(x+1)^2+2^2] +$$
$$+ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

Дополняя квадратный трехчлен до полного квадрата и используя формулу (9.23), находим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+4x+4-4-5)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x+2)^2+9}} =$$
$$= \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}} = \arcsin\frac{x+2}{3} + C.$$

6. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}$.

Как и в примере 5, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2(x^2+2x-3)}} =$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-2[(x^2+2x+1)-1-3]}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{-[(x+1)^2-4]}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{2^2-(x+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

7. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}$.

Преобразуя квадратный трехчлен и применяя формулу (9.24), находим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-6x+9)-9+3}} = \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2-6}} =$$
$$= \ln\left|(x-3)+\sqrt{(x-3)^2-6}\right| + C =$$
$$= \ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+3}\right| + C.$$

8. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+9}}$.

Как и в примере 7, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3(x^2-2x+3)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+1)+2}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|(x-1)+\sqrt{(x-1)^2+2}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right| + C.$$

9. Найти интеграл $\int\sqrt{x^2+8x+25}\,dx$.

Это интеграл вида (9.25). Преобразуя квадратный трехчлен и применяя формулу (9.26), находим

$$\int\sqrt{x^2+8x+25}\,dx=\int\sqrt{(x^2+8x+16)-16+25}\,dx=$$
$$=\int\sqrt{(x+4)^2+9}\,d(x+4)=\frac{x+4}{2}\sqrt{(x+4)^2+9}+$$
$$+\frac{9}{2}\ln|(x+4)+\sqrt{(x+4)^2+9}|+C=$$
$$=\frac{x+4}{2}\sqrt{x^2+8x+25}+\frac{9}{2}|x+4+\sqrt{x^2+8x+25}|+C.$$

10. Найти интеграл $\int\sqrt{8+2x-x^2}\,dx$.

Это также интеграл вида (9.25). Преобразуя квадратный трехчлен и применяя формулу (9.27), получаем

$$\int\sqrt{8+2x-x^2}dx=\int\sqrt{-(x^2-2x-8)}=$$
$$=\int\sqrt{-(x^2-2x+1-1-8)}\,dx=\int\sqrt{-(x^2-2x+1)+9}\,dx=$$
$$=\int\sqrt{3^2-(x-1)^2}\,d(x-1)=\frac{x-1}{2}\sqrt{3^2-(x-1)^2}+$$
$$+\frac{3^2}{2}\arcsin\frac{x-1}{3}+C=\frac{x-1}{2}\sqrt{8+2x-x^2}+$$
$$+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-1}{3}+C.$$

Задачи

Найти интегралы:

1. $\int\frac{dx}{x^2+36}$.
2. $\int\frac{dx}{2x^2+17}$.
3. $\int\frac{dx}{3x^2-10}$.
4. $\int\frac{dx}{4x^2+10x-24}$.
5. $\int\frac{dx}{4x^2-5x+2}$.
6. $\int\frac{dx}{x^2-x-1}$.
7. $\int\frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx$.
8. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+12}}$.
9. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.
10. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$.
11. $\int\sqrt{x^2+4x+13}\,dx$.
12. $\int\sqrt{5+4x-x^2}\,dx$.

Ответы

1. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{6}+C$. 2. $\frac{1}{\sqrt{34}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{17}}x+C$.
3. $\frac{1}{2\sqrt{30}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{10}}{\sqrt{3}x+\sqrt{10}}\right|+C$. 4. $\frac{1}{22}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+8}\right|+C$.
5. $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{8x-5}{\sqrt{7}}+C$. 6. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$.

7. $\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$. 8. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+4}|+C$. 9. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$. 10. $\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|+C$. 11. $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+13}+\frac{9}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+13}\right|$.
12. $\frac{x-2}{2}\sqrt{5+4x-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-2}{3}+C$.

§ 9.6. Интегрирование рациональных функций

Неопределенный интеграл от *целой рациональной функции* (многочлена) находится непосредственно:

$$\int(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)\,dx=a_0\int dx+a_1\int xdx+\ldots+a_n\int x^ndx.$$

Интегрирование *дробной рациональной функции* после выделения целой части сводится к интегрированию *правильной рациональной дроби*

$$\frac{P(x)}{Q(x)},\tag{9.28}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем степень $P(x)$ ниже степени $Q(x)$.

Если многочлен $Q(x)$ имеет действительные различные корни $a, b, \ldots, l$ соответственно кратности $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ и комплексные попарно сопряженные корни $\alpha_k\pm i\beta_k$ $(k=1, 2, \ldots, s)$ соответственно кратности $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$, т. е. $Q(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\nu_2}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\nu_s}$,

то справедливо следующее разложение дроби (9.28) на простейшие дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+$$
$$+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\ldots+\frac{L_1}{(x-l)}+\frac{L_2}{(x-l)^2}+\ldots+\frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+$$
$$+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{C_{\nu_1}x+D_{\nu_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1}}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_sx+q_s}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_sx+q_s)^2}+\ldots+\frac{M_{\nu_s}x+N_{\nu_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\nu_s}}.\tag{9.29}$$

Постоянные $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, \ldots, B_\beta, L_1, \ldots, L_\lambda, C_1, D_1, \ldots, M_{\nu_s}, N_{\nu_s}$ находятся *методом неопределенных коэффициентов*.

После разложения на простейшие слагаемые интегрирование правильной рациональной дроби сводится к нахождению интегралов вида:

$$I_1=\int\frac{dx}{(x-a)^n};\tag{9.30}$$

$$I_2 = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx. \qquad (9.31)$$

Интеграл (9.30) находится по формуле (9.5′), если $n = 2,3, \dots$, или по формуле (9.6′), если $n = 1$.

Интеграл (9.31) при $m = 1$ является интегралом вида (9.21), при $m > 1$ применяется метод понижения (см. пример 5 § 9.6).

Замечание 1. Если многочлен $Q(x)$ имеет действительный корень b кратности β, то в формуле (9.29) ему соответствует β простейших слагаемых $\frac{A_\mu}{(x-b)^\mu}$ ($\mu = 1, 2, \dots, \beta$), каждое из которых равно дроби, числитель которой—постоянная, а знаменатель—соответствующая степень разности $(x-b)$, причем берутся все степени от 1 до β.

Замечание 2. Если многочлен $Q(x)$ имеет комплексные попарно сопряженные корни $a_k \pm ib_k$ кратности ν_k, то в разложении (9.29) им соответствует ν_k элементарных дробей вида

$$\frac{M_\mu x + N_\mu}{(x^2+p_kx+q_k)^\mu} \quad (\mu = 1,2, \dots, \nu_k),$$

числитель каждой из которых есть линейная функция (не постоянная, как в предыдущем случае), а знаменатель—степень соответствующего трехчлена, т. е. трехчлена

$$x^2+p_kx+q_k = [x-(a_k+ib_k)]\,[x-(a_k-ib_k)],$$

причем берутся все степени от 1 до ν_k.

Замечание 3. Коэффициенты разложения (9.29) можно получить, полагая в тождестве (9.29) или ему равносильном x равным надлежащим образом выбранным числам (метод произвольных значений).

Примеры

1. Найти интеграл $\int \frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx$.

Разложим сначала правильную рациональную дробь

$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}$$

на простейшие дроби, для чего нужно найти корни ее знаменателя, т. е. корни уравнения

$$x^3-6x^2+11x-6=0.$$

Один корень усматривается непосредственно, это $x_1 = 1$. Так как

$$(x^3-6x^2+11x-6):(x-1) = x^2-5x+6,$$

то

$$x^3-6x^2+11x-6 = (x-1)(x^2-5x+6) = (x-1)(x-2)(x-3),$$

поэтому получаем также

$$x_2 = 2,\ x_3 = 3.$$

Итак, многочлен имеет действительные простые корни

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$$

В соответствии с формулой (9.29) ищем разложение данной дроби на простейшие

$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}. \qquad (A)$$

(Слагаемых вида $\frac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}$ разложение не содержит, так как комплексных корней нет.) Приводя дроби в правой части к общему знаменателю, получаем

$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Сравниваем числители

$$9-5x = A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2). \qquad (B)$$

Раскрывая скобки в правой части равенства (B) и группируя члены, находим

$$9-5x = (A+B+C)x^2-(5A+4B+3C)x+(6A+3B+2C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, получим три уравнения для определения неизвестных коэффициентов A, B, C:

$$A+B+C=0;$$
$$5A+4B+3C=5;$$
$$6A+3B+2C=9.$$

Решая эту систему, находим: $A = 2$, $B = 1$, $C = -3$. Следовательно,

$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x-3}$$

и поэтому

$$\int \frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx = \int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x-3}\right)dx =$$
$$= 2\int\frac{1}{x-1}\,dx + \int\frac{1}{x-2}\,dx - 3\int\frac{1}{x-3}\,dx =$$
$$= 2\int\frac{d(x-1)}{x-1} + \int\frac{d(x-2)}{x-2} - 3\int\frac{d(x-3)}{x-3} =$$
$$= 2\ln|x-1| + \ln|x-2| - 3\ln|x-3| + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx = \ln\left|\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-3)^3}\right| + C.$$

Замечание. Коэффициенты разложения (A) можно было бы найти, полагая в равенстве (B) $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Действительно, при $x = 1$ имеем $9-5 = A(-1)(-2)$, $4 = 2A$, откуда $A = 2$. Аналогично получаем $B = 1$, $C = -3$.

2. Найти интеграл $\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)(x-1)^2}$.

Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, знаменатель которой $Q(x)=(x+2)(x-1)^2$ имеет простой корень $x_1=-2$ и кратный корень $x_2=1$ (кратности 2).

В соответствии с формулой (9.29) разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

откуда

$$x^2=A(x-1)^2+B(x-1)(x+2)+C(x+2).$$

Полагая $x=1$, получим $1=C(1+2)$, откуда $C=\frac{1}{3}$.

При $x=-2$ находим $(-2)^2=A(-2-1)^2$ или $4=9A$, откуда $A=\frac{4}{9}$.

Полагая $x=0$, получаем $0=A(0-1)^2+B(0-1)(0+2)+C(0+2)$ или $A-2B+2C=0$. Принимая во внимание значения A и C, из последнего уравнения находим $B=\frac{5}{9}$.

Следовательно,

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{\frac{4}{9}}{x+2}+\frac{\frac{5}{9}}{x-1}+\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2},$$

поэтому

$$\int\frac{x^2dx}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{4}{9}\int\frac{d(x+2)}{x+2}+\frac{5}{9}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{4}{9}\ln|x+2|+\frac{5}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}+C.$$

Итак,

$$\int\frac{x^2\,dx}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{1}{9}\ln|(x+2)^4(x-1)^5|-\frac{1}{3(x-1)}+C.$$

3. Найти интеграл $\int\frac{x}{x^3+1}\,dx$.

В данном случае

$$Q(x)=x^3+1=(x+1)(x^2-x+1),$$

причем второй множитель на действительные множители не разлагается.

На основании формулы (9.29) разложение данной дроби имеет вид

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

откуда

$$x=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1).$$

Полагая последовательно $x=-1$, $x=0$, $x=1$, получим

$$-1=A[1-(-1)+1] \text{ или } -1=3A;$$
$$0=A(0-0+1)+(B\cdot 0+C)(0+1) \text{ или } 0=A+C;$$
$$1=A(1-1+1)+(B+C)(1+1) \text{ или } 1=A+2B+2C.$$

Из системы уравнений

$$-1=3A;\quad A+C=0;\quad A+2B+2C=1$$

находим

$$A=-\frac{1}{3},\quad C=\frac{1}{3},\quad B=\frac{1}{3}.$$

Итак,

$$\frac{x}{x^3+1}=-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x^2-x+1}.$$

Интегрируем

$$\int\frac{x}{x^3+1}\,dx=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx. \qquad \text{(A)}$$

Рассмотрим второй интеграл в правой части равенства (A):

$$\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1}\,dx=$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(x-\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{3}\int\frac{\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}\,d\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$
$$=\frac{1}{6}\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C. \qquad \text{(B)}$$

Далее, поскольку

$$-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}=-\frac{1}{3}\ln|x+1|, \qquad \text{(C)}$$

то равенство (A) с учетом (B) и (C) примет вид

$$\int \frac{x}{x^3+1}\,dx = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \\ + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

4. Найти интеграл $\int \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}\,dx$.

Разложим подынтегральную функцию на элементарные дроби. Так как знаменатель имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ кратности 2 и простой корень $x_3 = 0$, то разложение примет вид

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{C_1}{x+1} + \frac{C_2}{(x+1)^2},$$

откуда

$$x^3+x^2+2 = A(x-1)^2(x+1)^2 + B_1x(x-1)(x+1)^2 + \\ + B_2x(x+1)^2 + C_1x(x+1)(x-1)^2 + C_2x(x-1)^2;$$

$$x^3+x^2+2 = x^4(A+B_1+C_1) + x^3(B_1+B_2-C_1+C_2) + \\ + x^2(2B_2-2A-B_1-2C_2-C_1) + x(B_2-B_1+C_2+C_1) + A.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим пять уравнений для определения пяти неизвестных:

$$\left.\begin{array}{c} A+B_1+C_1=0; \\ B_1+B_2-C_1+C_2=1; \\ 2B_2-2A-B_1-2C_2-C_1=1; \\ B_2-B_1+C_2+C_1=0; \\ A=2. \end{array}\right\}$$

Решая полученную систему, находим

$$A=2,\quad B_1 = -\frac{3}{4},\ B_2 = 1,\ C_1 = -\frac{5}{4},\ C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, подынтегральная функция разлагается на элементарные дроби следующим образом:

$$\frac{x^3+x+2}{x(x^2-1)^2} = \frac{2}{x} - \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{5}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x+1)^2}.$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{x^3+x+2}{x(x^2-1)^2}\,dx = 2\int\frac{dx}{x} - \frac{3}{4}\int\frac{d(x-1)}{x-1} + \int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2} - \\ - \frac{5}{4}\int\frac{d(x+1)}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = \\ = 2\ln x - \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{5}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2(x+1)} + C = \\ = \frac{x+3}{2(1-x^2)} + \ln\frac{x^2}{\sqrt[4]{|x-1|^3|x+1|^5}} + C.$$

5. Найти интеграл $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$ $(m = 2, 3, \ldots)$.

Выделим из выражения x^2+px+q полный квадрат двучлена

$$x^2+px+q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] = \\ = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Мы предполагаем, что трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $q - \frac{p^2}{4} > 0$, поэтому можно положить

$$q - \frac{p^2}{4} = a^2,\quad a = +\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Вводя новую переменную

$$x + \frac{p}{2} = t,$$

находим

$$dx = dt,\quad x^2+px+q = t^2+a^2,\quad Mx+N = Mt + \\ + \left(N - \frac{Mp}{2}\right).$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m}\,dt = \\ = \frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}. \qquad \text{(A)}$$

Первый из интегралов вычисляется подстановкой

$$t^2 + a^2 = u,\quad 2t\,dt = du,$$

$$\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^m} = \int\frac{du}{u^m} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{u^{m-1}} + C = \\ = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}} + C. \qquad \text{(B)}$$

Второй интеграл можно найти по рекуррентной формуле

$$I_{m+1} = \frac{1}{2ma^2}\cdot\frac{z}{(z^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{1}{a^2}I_m, \qquad \text{(C)}$$

где

$$I_m = \int\frac{dz}{(z^2+a^2)^m}\ (m = 1, 2, 3, \ldots). \qquad \text{(D)}$$

Формула (C) получается с помощью метода интегрирования по частям. В самом деле, положим

$$\frac{1}{(z^2+a^2)^m}=u,\ dz=dv,$$

тогда

$$du=-\frac{2mz\,dz}{(z^2+a^2)^{m+1}},\ v=z.$$

На основании формулы (9.18) имеем

$$I_m=\frac{z}{(z^2+a^2)^m}+2m\int\frac{z^2}{(z^2+a^2)^{m+1}}\,dz. \tag{E}$$

Преобразуем последний интеграл

$$\int\frac{z^2}{(z^2+a^2)^{m+1}}\,dz=\int\frac{(z^2+a^2)-a^2}{(z^2+a^2)^{m+1}}\,dz=\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^m}-$$
$$-\int\frac{a^2dz}{(z^2+a^2)^{m+1}}=I_m-a^2I_{m+1}. \tag{F}$$

Подставляя выражение (F) в (E), получим

$$I_m=\frac{z}{(z^2+a^2)^m}+2mI_m-2ma^2I_{m+1}, \tag{G}$$

откуда и получается формула (C).

Формула (C) сводит вычисление интеграла I_{m+1} к вычислению интеграла I_m.

Зная интеграл

$$I_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{z}{a}$$

(мы берем одно из его значений), по этой формуле при $m=1$ находим

$$I_2=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{z}{z^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{a}. \tag{H}$$

Полагая в формуле (C) $m=2$, получим

$$I_3=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{z}{(z^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}I_2=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{z}{(z^2+a^2)^2}+$$
$$+\frac{3}{8a^4}\cdot\frac{z}{z^2+a^2}+\frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} \tag{K}$$

и т. д. Таким путем можно вычислить интеграл I_m для любого натурального m.

6. Найти интеграл $\int\frac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3}\,dx$.

Знаменатель дроби $Q(x)=(1+x^2)^3$ имеет два мнимых корня $x=\pm i$ кратности 3. Функция разлагается на следующие простейшие дроби:

$$\frac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3}=\frac{M_1x+N_1}{1+x^2}+\frac{M_2x+N_2}{(1+x^2)^2}+\frac{M_3x+N_3}{(1+x^2)^3}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и сравнивая числители, получим

$$x^4+2x^2+4=M_3x+N_3+(M_2x+N_2)(1+x^2)+$$
$$+(M_1x+N_1)(1+x^2)^2. \tag{A}$$

Для определения постоянных M_k, N_k $(k=1, 2, 3)$ применим смешанный метод.

Положим $x=\sqrt{-1}=i$; следовательно, $x^2=-1$. Подставляя это значение в тождество (A), получим

$$(-1)^2+2(-1)+4=M_3i+N_3 \text{ или } M_3i+N_3=3,$$

откуда

$$M_3=0,\ N_3=3.$$

Подставим в (A) значения M_3 и N_3:

$$x^4+2x^2+4=3+(M_2x+N_2)(1+x^2)+$$
$$+(M_1x+N_1)(1+x^2)^2.$$

Переносим 3 в левую часть:

$$(x^2+1)^2=(M_2x+N_2)(1+x^2)+(M_1x+N_1)(1+x^2)^2$$

и сокращаем на $1+x^2$:

$$x^2+1=M_2x+N_2+(M_1x+N_1)(1+x^2). \tag{B}$$

2) Снова полагая $x=i$, получим $0=M_2i+N_2$, откуда $M_2=0$, $N_2=0$.

Подставим эти значения в тождество (B):

$$1+x^2=(M_1x+N_1)(1+x^2).$$

Следовательно,

$$1=M_1x+N_1,$$

откуда $M_1=0$, $N_1=1$.

Итак, разложение имеет вид

$$\frac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3}=\frac{1}{1+x^2}+\frac{3}{(1+x^2)^3}.$$

Интегрируем:

$$\int\frac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3}\,dx=\int\frac{1}{1+x^2}\,dx+3\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}=$$
$$=\operatorname{arctg}x+3\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}. \tag{C}$$

Интеграл в правой части равенства (C) получается по формуле (K) примера 5 при $a=1$ и $z=x$:

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x}{x^2+1}+$$
$$+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C. \tag{D}$$

Из равенств (C) и (D) имеем

$$\int \frac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3}\,dx = \frac{11}{8}\operatorname{arctg} x + \frac{3}{4}\,\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{9}{8}\,\frac{x}{1+x^2} + C.$$

Задачи

Найти интегралы от рациональных функций:

1. $\int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}\,dx.$ 2. $\int \frac{2x\,dx}{x^2+3x-4}.$

3. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}.$ 4. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+1)}.$

5. $\int \frac{x^3-x+2}{x^4-5x^2+4}\,dx.$ 6. $\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx.$

7. $\int \frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}\,dx.$ 8. $\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}\,dx.$

Ответы

1. $\ln\left|\frac{(x-1)(x+2)}{x}\right| + C.$ 2. $\ln\sqrt[5]{(x-1)^2(x+4)^8} + C.$ 3. $-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$ 4. $\ln|x+1| + \frac{4}{x+2} + C.$

5. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x+1)^2)(x-2)}{(x-1)(x+2)^2}\right| + C.$ 6. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right| + C.$

7. $\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{3}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

8. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{3x+1}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$

§ 9.7. Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида

$$\int \sin ax\cos bx\,dx,\quad \int \sin ax\sin bx\,dx,\quad \int \cos ax\cos bx\,dx$$

находятся с помощью тригонометрических формул:

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)];$$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)];$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

2. Интегралы вида

$$I_{n,\,m} = \int \sin^n x\cos^m x\,dx,$$

где n и m — четные числа, находятся с помощью формул:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);\quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x);$$

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Если хотя бы одно из чисел m или n — нечетное, то интеграл находим непосредственно, отделяя от нечетной степени один множитель и вводя новую переменную. В частности, если $m = 2k+1$, то $I_{n,\,m} = \int \sin^n x\cos^{2k+1}x\,dx = \int \sin^n x\cos^{2k}x\cos x\,dx = \int \sin^n x(1-\sin^2 x)^k\,d(\sin x).$

3. Интегралы вида

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx,$$

где R — рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной с помощью подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,$$

при этом

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Если

$$R(-\sin x,\ -\cos x) \equiv R(\sin x,\ \cos x),$$

то целесообразно применить подстановку $\operatorname{tg} x = t$, при этом

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad x = \operatorname{arctg} t,\quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Примеры

1. Найти интеграл $\int \cos x\sin^2 x\,dx.$

Так как $\cos x\,dx = d(\sin x)$, то на основании формулы (9.5′) при $u = \sin x$ получаем

$$\int \cos x\sin^2 x\,dx = \int \sin^2 x\,d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

2. Найти интеграл $\int \cos^3 x\,\sin^2 x\,dx.$

В данном случае $m = 3$, $n = 2$. Получаем

$$\int \cos^3 x\sin^2 x\,dx = \int \cos^2 x\sin^2 x\cos x\,dx =$$
$$= \int (1-\sin^2 x)\sin^2 x\,d(\sin x) = \int (\sin^2 x - \sin^4 x)\,d(\sin x) =$$
$$= \int \sin^2 x\,d(\sin x) - \int \sin^4 x\,d(\sin x) =$$
$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

3. Найти интеграл $\int \sin^4 x\,dx.$

Здесь $n=4$, $m=0$. Преобразуя подынтегральную функцию с помощью соответствующих формул, находим

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) +$$

$$+ \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) +$$

$$+ \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8\cdot 4}\int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x +$$

$$+ \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x +$$

$$+ \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

4. Найти интеграл $\int \cos^5 x dx$.

В данном случае $n=0$, $m=5$. Отделяем множитель первой степени и выражаем $\cos^2 x$ через $\sin^2 x$:

$$\cos^5 x = \cos^4 x \cos x = (\cos^2 x)^2 \cos x = (1-\sin^2 x)^2 \cos x.$$

Вводя новую переменную t по формуле $\sin x = t$, получим

$$\int \cos^5 x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx = \int (1-t^2)^2\, dt =$$

$$= \int (1 - 2t^2 + t^4)\,dt = \int dt - 2\int t^2 dt + \int t^4 dt = t -$$

$$- \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной x, находим

$$\int \cos^5 x dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

5. Найти интеграл $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \times$$

$$\times \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx -$$

$$- \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \times$$

$$\times \frac{1}{2} d(\sin 2x) = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx -$$

$$- \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

6. Найти интеграл $\int \sin 7x \sin 3x dx$.

Так как

$$\sin 3x \sin 7x = \frac{1}{2}[\cos(7-3)x - \cos(7+3)x] =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x),$$

то

$$\int \sin 7x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int [\cos 4x - \cos 10x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 4x dx - \frac{1}{2}\int \cos 10x dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$$

7. Найти интеграл $\int \cos 3x \cos x dx$.

Преобразуя подынтегральную функцию, находим

$$\int \cos 3x \cos x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 4x dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

8. Найти интеграл $\int \sin 5x \cos 3x dx$.

Преобразуя подынтегральную функцию, получаем

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin 2x) dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

9. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3+\sin x + \cos x}$.

Подынтегральная функция является рациональной функцией от $\sin x$ и $\cos x$. Применяем подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

Так как при этом

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

то

$$\frac{1}{3+\sin x+\cos x} = \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{2(t^2+t+2)}$$

и

$$\frac{dx}{3+\sin x + \cos x} = \frac{dt}{t^2+t+2}.$$

Интегрируем

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} = \int \frac{dt}{t^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2} =$$

$$\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}} + C.$$

10. Найти интеграл $\int \frac{dx}{5\cos^2 x + 9\sin^2 x}$.

Подынтегральная функция не меняется от замены $\sin x$ на $(-\sin x)$, $\cos x$ на $-(\cos x)$, т. е. $R(-\sin x, -\cos x) \equiv \equiv R(\sin x, \cos x)$. Применяем подстановку $\operatorname{tg} x = t$. Так как при этом

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

то

$$\frac{1}{5\cos^2 x + 9\sin^2 x} = \frac{1+t^2}{5+9t^2}, \quad \frac{dx}{5\cos^2 x + 9\sin^2 x} = \frac{dt}{5+9t^2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{5\cos^2 x + 9\sin^2 x} = \int \frac{dt}{5+9t^2} = \int \frac{\frac{1}{3}d(3t)}{(\sqrt{5})^2 + (3t)^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.$$

Задачи

Найти интегралы:

1. $\int \sin x \cos^4 x dx$.
2. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$.
3. $\int \sin^2 5x dx$.
4. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.
5. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$.
6. $\int \sin x \sin 3x dx$.
7. $\int \cos 4x \cos 2x dx$.
8. $\int \sin 3x \cos 2x dx$.
9. $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$.
10. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}$.

Ответы

1. $-\frac{\cos^5 x}{5} + C$. 2. $-\frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^6 x}{6} + C$. 3. $\frac{x}{2} - \frac{\sin 10x}{20} + C$. 4. $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$. 5. $-\frac{1}{\sin x} - 2\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$. 6. $\frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + C$. 7. $\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$. 8. $-\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C$. 9. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$. 10. $\frac{1}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4\operatorname{tg} x}{\sqrt{7}} + C$.

§ 9. 8. Интегрирование некоторых иррациональных функций

1. Интегралы вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right] dx, \qquad (9.32)$$

где R — рациональная функция и $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k$ — целые числа, находятся с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

где n — наименьшее общее кратное чисел $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

2. Интеграл от дифференциального бинома, т. е. интеграл

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx, \qquad (9.33)$$

где m, n, p — рациональные числа, a и b — постоянные, отличные от нуля, сводится к интегралу от рациональной функции в трех случаях:

1) когда p — целое число, — разложением на слагаемые по формулам бинома Ньютона;

2) когда $\frac{m+1}{n}$ — целое число, — подстановкой $a+bx^n = t^s$, где s — знаменатель дроби p;

3) когда $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число, — подстановкой $ax^{-n} + b = t^s$.

Примеры

1. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx$.

Это интеграл вида (9. 32), для которого $\frac{ax+b}{cx+d} = x+9$ (т. е. $a=1$, $b=9$, $c=0$, $d=1$), $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}$.

Применим подстановку

$$x + 9 = t^2,$$

откуда

$$x = t^2 - 9, \quad dx = 2t dt$$

и

$$\int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx = \int \frac{t}{t^2-9} 2t dt = 2\int \frac{t^2}{t^2-9} dt = 2\int \frac{(t^2-9)+9}{t^2-9} dt =$$

$$= 2\int dt + 18\int \frac{dt}{t^2-9} = 2t + \frac{18}{2\cdot 3} \ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x+9} + 3\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right| + C.$$

2. Найти интеграл $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{1}{(2-x)^2} dx$.

Это интеграл вида (9. 32), для которого $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{2-x}{2+x}$, $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{3}$.

Применим подстановку

$$\frac{2-x}{2+x}=t^3.$$

Выразим x, $2-x$ и dx через новую переменную t:

$$2-x=t^3(2+x),\ 2-2t^3=x+xt^3,\ 2-2t^3=x(1+t^3),$$

$$x=\frac{2-2t^3}{1+t^3},\ 2-x=2-\frac{2-2t^3}{1+t^3}=\frac{4t^3}{1+t^3},\ \frac{1}{(2-x)^2}=\frac{(1+t^3)^2}{16t^6};$$

$$dx=\frac{-6t^2(1+t^3)-3t^2(2-2t^3)}{(1+t^3)^2}\,dt=\frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}\,dt.$$

Подставляя найденные выражения в интеграл, получим

$$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{1}{(2-x)^2}\,dx=\int t\cdot\frac{(1+t^3)^2}{16t^6}\cdot\frac{(-12t^2)}{(1+t^3)^2}\,dt=-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3}=$$

$$=\frac{3}{8t^2}+C=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

3. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$.

Здесь $\frac{ax+b}{cx+d}=x+1$, $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{2}$. Положим

$$x+1=t^2,$$

тогда

$$dx=2tdt,$$

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx=2\int\frac{t+2}{t^4-t}\,tdt=2\int\frac{t+2}{t^3-1}\,dt.$$

Разлагая подынтегральную функцию на элементарные дроби, получим

$$\frac{t+2}{t^3-1}=\frac{1}{t-1}-\frac{t+1}{t^2+t+1}.$$

Следовательно,

$$2\int\frac{t+2}{t^3-1}\,dt=2\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t+1}{t^2+t+1}\right)dt=2\int\frac{dt}{t-1}-$$

$$-2\int\frac{t+1}{t^2+2\cdot\frac{1}{2}\,t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}\,dt=2\int\frac{d(t-1)}{t-1}-$$

$$-2\int\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}+1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(t+\frac{1}{2}\right)=2\int\frac{d(t-1)}{t-1}-$$

$$-2\int\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=2\ln|t-1|-$$

$$-\ln\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\ln(t-1)^2-$$

$$-\ln(t^2+t+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

4. Найти интеграл $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$.

Это также интеграл типа (9. 32), для которого $\frac{ax+b}{cx+d}=x$ (т. е. $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$), $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{3}$, $\frac{p_2}{q_2}=\frac{2}{3}$, $\frac{p_3}{q_3}=\frac{1}{6}$, общий знаменатель всех дробей равен 6, поэтому применяем подстановку $x=t^6$ (она дает возможность освободиться от всех радикалов).

Поскольку

$$x=t^6,$$

то

$$dx=6t^5dt,\ \sqrt[6]{x}=t,\ \sqrt[3]{x^2}=t^4.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx=\int\frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}\,6t^5dt=6\int\frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}\,dt=$$

$$=6\int\frac{t^3(t^2+1)+1}{1+t^2}\,dt=6\int t^3dt+6\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{3}{2}t^4+6\operatorname{arctg}t+$$

$$+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

5. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Переписав интеграл в виде

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

и сравнив его с интегралом (9.33), заключаем, что $m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=\frac{1}{2}$.

Так как

$$\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=1$$

есть целое число, то мы имеем второй случай интегрируемости дифференциального бинома.

Подстановка $a+bx^n=t^s$ в данном случае примет вид

$$\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)=t^2,$$

откуда

$$x^{\frac{1}{3}}=t^2-1, \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx=2tdt,\ x^{-\frac{2}{3}}dx=6tdt.$$

Подставив эти выражения в интеграл, получим

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx=\int\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{2}{3}}dx=\int t\cdot 6tdt=$$

$$=6\int t^2dt=6\cdot\frac{t^3}{3}+C=2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

6. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Переписав интеграл в виде

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx,$$

заключаем, что $m=0,\ n=4,\ p=-\frac{1}{4}$. Так как $\frac{m+1}{n}+p=$ $=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$ (целое число), то имеем третий случай интегрируемости.

Подстановка

$$ax^{-n}+b=t^s,$$

где s — знаменатель числа p, в данном случае примет вид

$$x^{-4}+1=t^4,$$

откуда

$$x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}},\ dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt,$$

$$\sqrt[4]{1+x^4}=tx=t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Задачи

Найти интегралы:

1. $\int\frac{\sqrt[6]{2x-1}+1}{(2x-1)(\sqrt[3]{2x-1}-1)}dx.$
2. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$
3. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}.$
4. $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1-\sqrt[3]{x})}dx.$
5. $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}.$
6. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt{x})^2}.$
7. $\int x^{-6}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx.$
8. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}.$

Ответы

1. $3\ln\left|\sqrt[6]{2x-1}-1\right|-3\ln\sqrt[6]{2x-1}+C$. 2. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C$. Указание. Преобразовать вначале подынтегральную функцию $\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}=$ $=(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$ 3. $\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, где $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. 4. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. 5. $\frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+$ $+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,\ t=\sqrt[3]{1+x^5}$. 6. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}+C$. 7. $-\frac{1}{5}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}+C$. 8. $3\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}+C$.

§ 9.9. Интегрирование гиперболических функций

Интегрирование гиперболических функций основано на формулах:

$$\int\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C; \tag{9.34}$$

$$\int\operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C; \tag{9.35}$$

$$\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2x}=\operatorname{th}x+C; \tag{9.36}$$

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2x}=-\operatorname{cth}x+C. \tag{9.37}$$

Интегралы от четных степеней $\operatorname{ch}x$ и $\operatorname{sh}x$ находятся с помощью формул:

$$\operatorname{ch}^2x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x+1);\ \operatorname{sh}^2x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x-1);\ \operatorname{sh}x\operatorname{ch}x=\frac{\operatorname{sh}2x}{2}.$$

Интегралы от нечетных степеней $\operatorname{sh}x$ и $\operatorname{ch}x$ находятся отделением множителя первой степени и введением новой переменной.

Примеры

1. Найти интеграл $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx$.

Так как

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1),$$

то

$$\int \operatorname{sh}^2 x dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch} 2x - 1)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2x dx - \frac{1}{2}\int dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \operatorname{ch} 2x d(2x) - \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x - \frac{1}{2}x + C.$$

2. Найти интеграл $\int \operatorname{sh}^3 x dx$.

Представляя подынтегральную функцию в виде

$$\operatorname{sh}^3 x = \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh} x$$

и принимая во внимание, что

$$\operatorname{sh} x dx = d(\operatorname{ch} x),\ \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1,$$

получаем

$$\int \operatorname{sh}^3 x dx = \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh} x dx = \int \operatorname{sh}^2 x d(\operatorname{ch} x) = \int (\operatorname{ch}^2 x - 1)\,d(\operatorname{ch} x) =$$

$$= \int \operatorname{ch}^2 x d(\operatorname{ch} x) - \int d(\operatorname{ch} x) = \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x + C.$$

3. Найти интеграл $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx$.

$$\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx = \int (\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \operatorname{sh}^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{ch} 4x - 1}{2}\,dx = \frac{1}{8}\int \operatorname{ch} 4x dx - \frac{1}{8}\int dx =$$

$$= \frac{1}{32}\int \operatorname{ch} 4x d(4x) - \frac{1}{8}\int dx = \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x - \frac{1}{8}x + C.$$

4. Найти интеграл $\int \operatorname{cth}^2 x dx$.

$$\int \operatorname{cth}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \int \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} + \int dx =$$

$$= -\operatorname{cth} x + x + C = x - \operatorname{cth} x + C.$$

5. Найти интеграл $\int \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x dx$.

$$\int \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x dx = \int \operatorname{ch}^3 x d(\operatorname{ch} x) = \frac{\operatorname{ch}^4 x}{4} + C.$$

Задачи

Найти интегралы от гиперболических функций:

1. $\int \operatorname{ch}^2 x dx$.
2. $\int \operatorname{ch}^3 x dx$.
3. $\int \operatorname{sh}^3 4x \operatorname{ch} 4x\ dx$.
4. $\int \operatorname{th}^2 x dx$.
5. $\int \operatorname{ch}^4 x \operatorname{sh} x dx$.
6. $\int \operatorname{sh}^5 x \operatorname{ch} x dx$.
7. $\int \frac{1 + 2\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx$.
8. $\int \frac{1 + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx$.

Ответы

1. $\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{2}x + C$. 2. $\operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + C$. 3. $\frac{\operatorname{sh}^4 4x}{16} + C$.
4. $\operatorname{th} x + x + C$. 5. $\frac{\operatorname{ch}^5 x}{5} + C$. 6. $\frac{\operatorname{sh}^6 x}{6} + C$. 7. $-\frac{\operatorname{ch} x + 2}{\operatorname{sh} x} + C$.
8. $\frac{\operatorname{sh} x - 1}{\operatorname{ch} x} + C$.

Глава 10. Определенный интеграл и его приложения

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $y = f(x)$. Отрезок $[a, b]$ разобьем на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. В каждом из элементарных отрезков длины $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ произвольным образом выберем точку z_i и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i = f(z_1)\,\Delta x_1 + f(z_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(z_n)\,\Delta x_n. \quad (10.1)$$

Сумма эта называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ в промежутке $[a, b]$.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ в промежутке $[a, b]$ называется предел ее интегральной суммы, когда число элементарных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i. \quad (10.2)$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна, то предел (10. 2) существует и конечен.

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

5. $\int_a^b [f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_a^b f_3(x)\,dx$.

6. $\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

7. $[\int\limits_a^x f(x)\,dx]' = f(x)$.

§ 10.1. Вычисление определенного интеграла

1. Теорема Ньютона—Лейбница. *Определенный интеграл от непрерывной функции в данном промежутке равен разности значений любой первообразной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (10.\ 3)$$

где

$$F'(x) = f(x).$$

2. Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по формуле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \qquad (10.\ 4)$$

где $x=\varphi(t)$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$; t — новая переменная; α, β — новые пределы интегрирования.

3. Интегрирование по частям в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b u(x)\,d\,v(x) = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\,d\,u(x) \qquad (10.\ 5)$$

или

$$\int\limits_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int\limits_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \qquad (10.\ 6)$$

4. Теорема о среднем значении. *Если $f(x) \leqslant \Phi(x)$, при $a \leqslant x \leqslant b$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b \Phi(x)\,dx. \qquad (10.\ 7)$$

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$ и $\varphi(x) \geqslant 0$, то

$$m\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqslant M\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad (10.\ 8)$$

где m — наименьшее, а M — наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$.

В частности, если $\varphi(x) \equiv 1$, то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \qquad (10.\ 9)$$

Неравенства (10. 8) и (10. 9) можно заменить соответственно эквивалентными им равенствами:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (10.\ 10)$$

и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(d)\,(b-a), \qquad (10.\ 11)$$

где c и d — некоторые числа, лежащие между a и b.

Число

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad (10.\ 12)$$

называется *средним значением* функции $y=f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

Примеры

1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^4 x^2 dx$.

По формуле (10. 3) имеем

$$\int\limits_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21.$$

Замечание. В соответствии с теоремой Ньютона—Лейбница можно брать любую первообразную подынтегральной функции. В данном случае вместо $\frac{x^3}{3}$ можно было бы взять $\frac{x^3}{3}+5$, которая также будет первообразной для функции $y=x^2$: $\int\limits_1^4 x^2dx = \left(\frac{x^3}{3}+5\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{4^3}{3}+5\right) - \left(\frac{1^3}{3}+5\right) = \frac{64}{3} + 5 - \frac{1}{3} - 5 = \frac{63}{3} = 21.$

Тот же результат получается и в общем случае:

$$\int\limits_1^4 x^2dx = \left(\frac{x^3}{3}+C\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{4^3}{3}+C\right) - \left(\frac{1^3}{3}+C\right) = \frac{64}{3} + C - \frac{1}{3} - C = 21.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь ту первообразную, для которой постоянное слагаемое равно нулю.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

3. Вычислить $\int\limits_4^9\left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$.

На основании свойств 5 и 6 определенного интеграла и формулы (10. 3) получаем

$$\int\limits_4^9\left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\frac{2}{5}\int\limits_4^9 xdx+\int\limits_4^9\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\frac{2}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_4^9+$$

$$+\sqrt{x}\Big|_4^9=\frac{1}{5}(9^2-4^2)+(\sqrt{9}-\sqrt{4})=\frac{1}{5}\cdot 65+1=14.$$

4. Вычислить $\int\limits_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx$.

Введем новую переменную по формуле $\sqrt{x+4}=t$. Определим x и dx. Возводя в квадрат обе части равенства $\sqrt{x+4}=t$, получим $x+4=t^2$, откуда $x=t^2-4$ и $dx=2t\,dt$. Находим новые пределы интегрирования. Подставляя старые пределы в формулу $\sqrt{x+4}=t$, получаем: $\sqrt{0+4}=t$, откуда $t=2$ и $\alpha=2$; $\sqrt{5+4}=t$, откуда $t=3$, $\beta=3$.

Таким образом,

$$\int\limits_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx=\int\limits_2^3(t^2-4)\,t2\,tdt=\int\limits_2^3(2t^4-8t^2)\,dt=2\int\limits_2^3 t^4dt-$$

$$-8\int\limits_2^3 t^2dt=2\cdot\frac{t^5}{5}\Big|_2^3-8\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_2^3=\frac{2}{5}(3^5-2^5)-\frac{8}{3}(3^3-2^3)=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot 211-\frac{8}{3}\cdot 19=\frac{506}{15}=33\frac{11}{15}.$$

5. Вычислить $\int\limits_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Положим $\sqrt{x}=t$, тогда $x=t^2$ и $dx=2tdt$. Подставляя старые пределы интегрирования в формулу $\sqrt{x}=t$, получаем $\alpha=0$, $\beta=2$.

Следовательно,

$$\int\limits_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\int\limits_0^2\frac{2tdt}{t+1}=2\int\limits_0^2\frac{(t+1)-1}{t+1}\,dt=2\int\limits_0^2 dt-2\int\limits_0^2\frac{d(t+1)}{t+1}=$$

$$=2t\Big|_0^2-2\ln|t+1|\,\Big|_0^2=2(2-0)-2[\ln(2+1)-\ln(0+1)]=$$

$$=4-2\ln 3\approx 1,\ 803.$$

6. Вычислить $\int\limits_1^e \ln xdx$.

Применяем формулу интегрирования по частям (10. 5). Полагая $u=\ln x$, $dv=dx$, определяем $du=\frac{1}{x}dx$, $v=x$.

Следовательно,

$$\int\limits_1^e\ln xdx=x\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e\frac{1}{x}\,xdx=x\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e dx=x\ln x\Big|_1^e-x\Big|_1^e=$$

$$=e\ln e-1\cdot\ln 1-(e-1)=e-0-e+1=1.$$

7. Вычислить $\int\limits_0^\pi x\sin xdx$.

Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_0^\pi x\sin xdx=\int\limits_0^\pi xd(-\cos x)=x(-\cos x)\Big|_0^\pi-\int\limits_0^\pi(-\cos x)\,dx=$$

$(-\pi\cos\pi+\sin\pi)$ 0

$$=-x\cos x\Big|_0^\pi+\sin x\Big|_0^\pi=-(\pi\cos\pi-0\cdot\cos 0)+(\sin\pi-\sin 0)=\pi.$$

8. Определить площадь, ограниченную дугой косинусоиды в пределах от $x=-\frac{\pi}{2}$ до $x=\frac{\pi}{2}$ и осью Ox.

Исходя из геометрического смысла определенного интеграла, заключаем, что искомая площадь выразится интегралом

$$S=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx.$$

Вычисляя этот интеграл, получим

$$S=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1-$$

$$-(-1)=2\ (\text{кв. ед.}).$$

9. Оценить интеграл $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}\,dx$.

Так как $0\leqslant\cos^2 x\leqslant 1$, то по формуле (10. 9) находим

$$\frac{\pi}{2}<I<\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

т. е. $1,\ 57<I<1,\ 91$.

Задачи

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_2^4 (x^3 + x)\,dx.$

2. $\int\limits_1^e \frac{1}{x}\,dx.$

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}.$

4. $\int\limits_4^9 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx.$

5. $\int\limits_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 4x - 21}.$

6. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}.$

7. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}.$

8. $\int\limits_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}\,dx.$

9. $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx.$

10. $\int\limits_\pi^0 x\cos x\,dx.$

Оценить интегралы:

11. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{8 + x^3}.$

12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10 + 3\cos x}$

Ответы

1. 66. 2. 1. 3. 1. 4. 40. 5. $-0{,}2\ln 2$. 6. $\ln 3$. 7. $\arcsin\frac{1}{3}$. 8. $\frac{20}{3}$. 9. π. 10. 2. 11. $\frac{2}{9} < I < \frac{2}{7}$. 12. $\frac{2}{13}\pi < I < \frac{2}{7}\pi$.

§ 10. 2. Площадь криволинейной фигуры в декартовых и полярных координатах

Площадь криволинейной трапеции $AabB$ (рис. 10. 1), ограниченной сверху графиком кривой $y = f(x)$, слева и справа — соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, снизу — осью Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx \text{ или } S = \int\limits_a^b y\,dx. \qquad (10.\ 13)$$

Дифференциал переменной площади $AaxX$ (рис. 10. 1) равен

$$dS = y\,dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = f(t),\ y = \varphi(t),$$

то

$$dS = \varphi(t) f'(t)\,dt$$

и

$$S = \int\limits_\alpha^\beta \varphi(t)\, f'(t)\,dt. \qquad (10.\ 14)$$

Площадь криволинейной фигуры $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 10. 2), ограниченной сверху и снизу соответственно кривыми $y_1 = f_1(x)$,

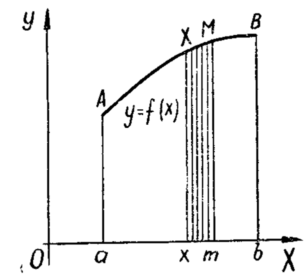

Рис. 10. 1

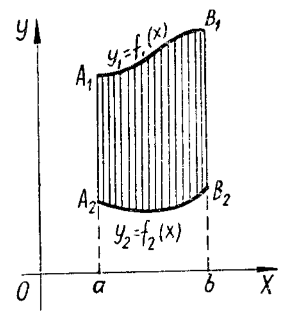

Рис. 10. 2

$y_2 = f_2(x)$, слева и справа — прямыми $x = a$ и $x = b$, определяется формулой

$$S = \int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx \text{ или } S = \int\limits_a^b (y_1 - y_2)\,dx. \qquad (10.\ 15)$$

Площадь криволинейной трапеции $CcdD$ (рис. 10.3), прилежащей к оси Oy, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_c^d \varphi(y)\,dy \text{ или } S = \int\limits_c^d x\,dy. \qquad (10.\ 16)$$

Площадь сектора OAB (рис. 10. 4) кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\varphi. \qquad (10.\ 17)$$

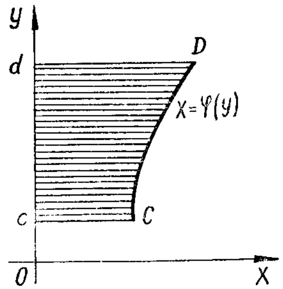

Рис. 10. 3

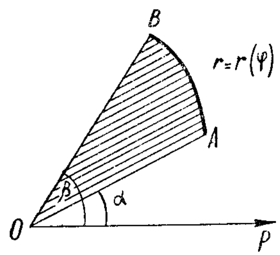

Рис. 10. 4

Примеры

1. Определить площадь, ограниченную линиями $xy = 6$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ (рис. 10. 5).

Определяя y из уравнения гиперболы $xy = 6$, получим $y = \frac{6}{x}$. Из условия вытекает, что $a = 1$, $b = e$. Подставляя значения a, b и $\frac{6}{x}$ (выражение для y) в формулу (10. 13), находим:

$$S = \int_1^e \frac{6}{x}\,dx = 6\int_1^e \frac{dx}{x} = 6\ln x\Big|_1^e = 6(\ln e - \ln 1) = 6(1-0) = 6.$$

2. Вычислить площадь, ограниченную кривой $y = 6x - x^2 - 5$ и осью Ox.

Чтобы определить пределы интегрирования, найдем точки пересечения кривой (параболы) с осью Ox (рис. 10. 6). Решая систему $y = 6x - x^2 - 5$, $y = 0$, получим $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, следовательно, $a = 1$, $b = 5$.

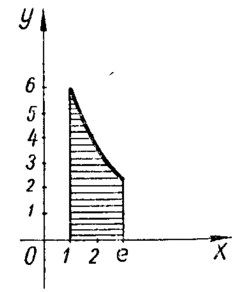

Рис. 10. 5

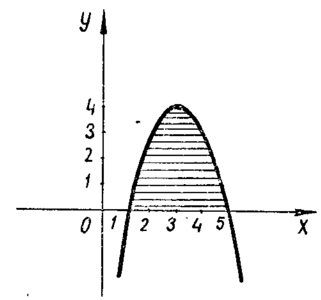

Рис. 10. 6

Таким образом, искомая площадь равна

$$S = \int_1^5 y\,dx = \int_1^5 (6x - x^2 - 5)\,dx = 6\int_1^5 x\,dx - \int_1^5 x^2dx - 5\int_1^5 dx =$$
$$= 6\,\frac{x^2}{2}\Big|_1^5 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^5 - 5x\Big|_1^5 = 3(5^2 - 1^2) - \frac{1}{3}(5^3 - 1^3) -$$
$$- 5(5-1) = 3\cdot 24 - \frac{1}{3}\cdot 124 - 5\cdot 4 = \frac{216 - 124 - 60}{3} =$$
$$= \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

3. Определить площадь, ограниченную параболой $y = x^2 - 5x + 6$ и координатными осями (и прилегающую к обеим осям).

Найдем пределы интегрирования. Так как фигура ограничена слева осью Oy, то нижний предел интегрирования $a = 0$.

Кривая $y = x^2 - 5x + 6$ пересекает ось Ox в двух точках: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ (рис. 10. 7), следовательно, верхний предел $b = 2$. Таким образом,

$$S = \int_0^2 (x^2 - 5x + 6)\,dx = \int_0^2 x^2 dx - 5\int_0^2 x dx + 6\int_0^2 dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - 5\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 6x\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - 5\cdot\frac{2^2}{2} + 6\cdot 2 =$$

$$= \frac{8}{3} - 10 + 12 = \frac{14}{3} = 4\,\frac{2}{3}.$$

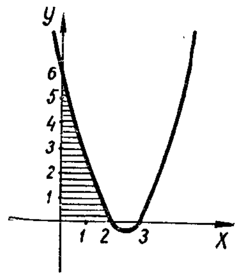

Рис. 10. 7

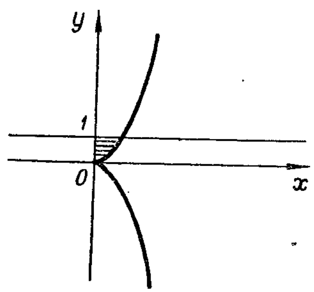

Рис. 10. 8

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = x^3$, прямой $y = 1$ и осью Oy (рис. 10. 8).

Искомую площадь определим по формуле (10. 16). Подставляя в нее значения $c = 0$, $d = 1$ и выражение $x = y^{\frac{2}{3}}$, получим

$$S = \int_0^1 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{5}\,y^{\frac{5}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

5. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями:

$$y = x^2,\ \ y^2 = x.$$

Решая совместно систему уравнений $y = x^2$, $y^2 = x$, находим абсциссы точек пересечения данных кривых: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Следовательно, пределы интегрирования будут: $a = 0$, $b = 1$ (рис. 10. 9). Искомую площадь вычисляем по формуле (10. 15).

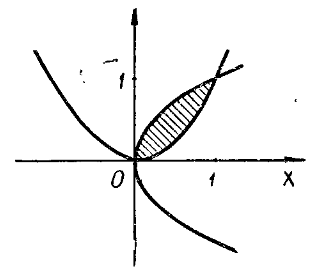

Рис. 10. 9

Заметим вначале, что $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = x^2$ (получено из уравнений линий).

Таким образом,

$$S = \int_0^1 (y_1 - y_2)\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2\,dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

6. Вычислить площадь, ограниченную параболой $x = 8y - y^2 - 7$ и осью Oy.

Для определения пределов интегрирования найдем точки пересечения кривой с осью Oy.

Решая систему уравнений $x = 8y - y^2 - 7$, $x = 0$, получаем $y_1 = 1$, $y_2 = 7$ (рис. 10. 10). По формуле (10.16) находим

$$S = \int_1^7 (8y - y^2 - 7)\,dy = 8\int_1^7 y dy - \int_1^7 y^2 dy - 7\int_1^7 dy =$$

$$= 8\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_1^7 - \frac{y^3}{3}\Big|_1^7 - 7y\Big|_1^7 = 4\,(49 - 1) - \frac{1}{3}(343 - 1) -$$

$$- 7\,(7 - 1) = 192 - 114 - 42 = 36.$$

7. Определить площадь, ограниченную одной аркой циклоиды $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ и осью Ox (см. рис. 1.35).

По формуле (10. 14) получаем:

$$S=\int\limits_0^{2\pi a} y\,dx=\int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-2\cos t+$$

$$+\cos^2 t)\,dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=\frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}dt-2a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos t\,dt+\frac{1}{4}a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos 2t\,d(2t)=$$

$$=\frac{3}{2}a^2 t\Big|_0^{2\pi}-2a^2\sin t\Big|_0^{2\pi}+\frac{a^2}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

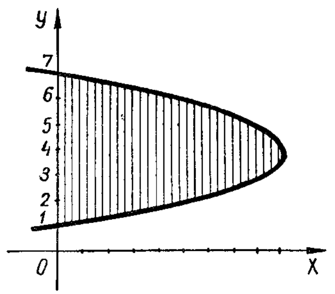

Рис. 10.10

8. Вычислить площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

Кривая симметрична относительно координатных осей (см. рис. 1. 30), поэтому достаточно определить одну четвертую искомой площади по формуле (10. 17):

$$\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi\,d\varphi=\frac{a^2}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d(2\varphi)=\frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{4}.$$

Таким образом, $S=a^2$. В частности, при $a=2$ получим $S=4$.

Задачи

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1. $y=x^2-6x+8$, $y=0$.
2. $x=4-y^2$, $x=0$.
3. $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$.
4. $y^3=x^2$, $y=1$.
5. $y^2=2px$, $x^2=2py$.
6. $y=2-x^2$, $y^3=x^2$.

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

7. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ (астроида).
8. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ (эллипс).
9. Одним витком спирали Архимеда $r=a\varphi$.
10. $x^2+y^4=y^2$.

Вычислить площади, ограниченные петлей кривой:

11. $y^2(2a-x)=x(x-a)^2$ (строфоида).
12. $x^3+y^3-3axy=0$ (декартов лист).

Ответы

1. $\frac{4}{3}$. 2. $\frac{32}{3}$. 3. 1. 4. $\frac{4}{5}$. 5. $\frac{4}{3}p^2$. 6. $2\frac{2}{15}$. 7. $\frac{3\pi a^2}{8}$. 8. πab. 9 $\frac{4}{3}\pi^3a^2$. 10. $\frac{4}{3}$. 11. $\frac{4-\pi}{2}a^2$. 12. $\frac{3a^2}{2}$. Указание. Переходя к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим:

$$\rho=\frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi};\qquad S=\frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}\,d\varphi.$$

Так как $\sin\varphi=\operatorname{tg}\varphi\cdot\cos\varphi$, то подынтегральное выражение сводится к виду $\frac{\operatorname{tg}^2\varphi\,d(\operatorname{tg}\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}$, откуда сразу находится первообразная: $-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\varphi}$.

§ 10.3. Длина дуги кривой

Длина дуги кривой $y=f(x)$, где $a\leqslant x\leqslant b$, вычисляется по формуле

$$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx \text{ или } l=\int\limits_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (10.18)$$

Длина дуги кривой, заданной параметрически

$$x=\varphi_1(t),\ y=\varphi_2(t)\qquad (t_1\leqslant t\leqslant t_2),$$

определяется формулой

$$l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt \text{ или } l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi_1'^2(t)+\varphi_2'^2(t)}\,dt. \qquad (10.19)$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r=r(\varphi)$ $(\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta)$, то

$$l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi. \qquad (10.20)$$

Примеры

1. Найти длину дуги астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. Чему равна длина астроиды при $a=1$, $a=\frac{2}{3}$?

Поскольку астроида симметрична относительно координатных осей (см. рис. 1.36), нам достаточно вычислить длину дуги AB и полученный результат умножить на 4.

Дифференцируя функцию $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ как неявную, получим

$$\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} y' = 0, \quad y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Найдем выражение для подынтегральной функции, входящей в формулу (10.18). Имеем

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

По формуле (10.18) находим

$$\frac{1}{4} l = \int_0^a \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}}\,dx =$$

$$= a^{\frac{1}{3}} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \Bigg|_0^a = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} \Bigg|_0^a = \frac{3}{2} a, \quad l = 6a.$$

При $a = 1$ получаем $l = 6$, при $a = \frac{2}{3}$ $l = 4$.

2. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, отсекаемой прямой $x = 5$.

Указанная дуга состоит из двух частей, симметричных относительно оси Ox (см. рис. 10.8).

Вычислим длину одной из них. Находя производную функции $y^2 = x^3$ и подставляя ее в формулу (10.18), получим

$$\frac{1}{2} l = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^5 \sqrt{4+9x}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \int_0^5 (4+9x)^{\frac{1}{2}} d(4+9x) =$$

$$= \frac{1}{18} \frac{(4+9x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^5 = \frac{1}{27} (4+9x) \sqrt{4+9x} \Bigg|_0^5 = \frac{1}{27} (49 \cdot 7 - 4 \cdot 2) = \frac{335}{27},$$

$$l = \frac{670}{27} = 24 \frac{22}{27}.$$

3. Найти длину дуги одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Движущаяся точка описывает одну арку циклоиды (рис. 1.35), когда t меняется от 0 до 2π. Следовательно, в формуле (10.19) $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

Найдем выражение для подынтегральной функции в формуле (10.19). Дифференцируя уравнения циклоиды, получим:

$$x_t' = a(1 - \cos t); \quad y_t' = a \sin t.$$

Таким образом,

$$x_t'^2 + y_t'^2 = a^2 (1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t =$$

$$= a^2 (1 - 2\cos t + 1) = 2a^2 (1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (10.19), находим

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2}\,dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a \cos \frac{t}{2} \Bigg|_0^{2\pi} = -4a (\cos \pi - \cos 0) =$$

$$= -4a(-1 - 1) = 8a.$$

Итак, $l = 8a$. Например, при $a = \frac{1}{2}$ $l = 4$, при $a = 1$ $l = 8$.

4. Найти длину дуги эвольвенты (развертки) окружности: $x = a(t \sin t + \cos t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ от точки $A(t = 0)$ до произвольной точки $M(t)$.

По формуле (10.19) получаем

$$l = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = a \int_0^t \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2}\,dt = a \int_0^t t\,dt = \frac{at^2}{2}.$$

Развертка окружности изображена на рис. 1.37 (см. § 1.7).

5. Найти длину дуги спирали Архимеда $r = a\varphi$ от полюса O до любой точки M (см. рис. 1.23; § 1.6, пример 2).

По формуле (10.20) получаем

$$l = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 + \varphi^2}\,d\varphi.$$

Так как

$$\int \sqrt{x^2 + b}\,dx = \frac{1}{2} [x \sqrt{x^2 + b} + b \ln (x + \sqrt{x^2 + b})] + C,$$

то

$$l = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 + \varphi^2}\,d\varphi = \frac{a}{2} [\varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} + \ln (\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1})] \Bigg|_0^{\varphi} =$$

$$= \frac{a}{2} [\varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} + \ln (\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1})].$$

6. Вычислить длину кривой $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Вся кривая описывается точкой при изменении φ от 0 до 3π (рис. 10.11).

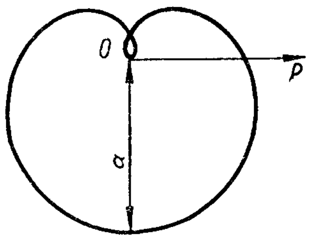

Рис. 10.11

Так как $r' = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$, то на основании формулы (10.20) находим

$$l = \int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi = a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi =$$

$$= a\int_0^{3\pi}\frac{1-\cos\frac{2\varphi}{3}}{2}\,d\varphi = \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}d\varphi - \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\cos\frac{2\varphi}{3}\,d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2}\varphi\Big|_0^{3\pi} - \frac{a}{2}\cdot\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\Big|_0^{3\pi} = \frac{a}{2}3\pi,\quad l = \frac{3\pi a}{2}.$$

Задачи

Найти длину дуги кривой:

1. $y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$, отсеченной осью Ox.

2. $y = 2\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

3. $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ между прямыми $x = \pm a$.

4. $x = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ от $y = 0$ до $y = 3$.

5. $x = e^t\sin t$, $y = e^t\cos t$ от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

Вычислить длину всей кривой:

6. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

7. $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

8. $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$ $(c^2 = a^2 - b^2)$.

9. $r = a(1 + \cos\varphi)$.

10. Найти длину петли кривой: $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3}t^3$.

11. Вычислить длину дуги гиперболической спирали $r\varphi = 1$ от точки $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$ до $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

12. Найти длину дуги логарифмической спирали $r = ae^{\varphi}$, находящейся внутри круга радиуса $r = a$.

Ответы

1. $2\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$. Указание. $\int\sqrt{1 + x^2}\,dx$ вычисляется интегрированием по частям (см. пример 6, § 9.4). 2. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$. Указание. При вычислении интеграла $\int_0^1\sqrt{\frac{1+x}{x}}$ применить подстановку $x = \mathrm{sh}^2 t$. 3. $2a\,\mathrm{sh}\,1 \approx 2{,}35a$ 4. $9\frac{1}{3}$. Указание. Длина дуги кривой $x = \varphi(y)$ вычисляется по формуле $l = \int_c^d\sqrt{1 + x'^2}\,dy$. 5. $\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$. Кривая называется *логарифмической спиралью* (рис. 1.20), ее уравнение в полярных координатах: $r = e^{\varphi}$. 6. $2\pi a$ 7. $16a$. 8. $\frac{4(a^3 - b^3)}{ab}$. 9. $8a$. 10. $4\sqrt{3}$. Указание. Пределы интегрирования определяются из уравнения $t - \frac{1}{3}t^3 = 0$. 12. $a\sqrt{2}$.

§ 10.4. Объем тела вращения

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $AabB$ (рис. 10.12), где AB — дуга кривой $y = f(x)$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi\int_a^b y^2\,dx \quad\text{или}\quad V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (10.21)$$

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $CcdD$ (рис. 10.13), где CD — дуга кривой $x = \varphi(y)$, определяется по формуле

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy \quad\text{или}\quad V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy. \qquad (10.22)$$

Примеры

1. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y^2 = 2x$, прямой $x = 3$ и осью Ox.

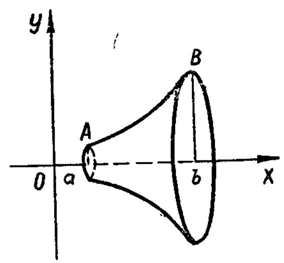

Рис. 10.12

В соответствии с условием задачи определяем пределы интегрирования $a = 0$, $b = 3$ (рис. 10.14).

По формуле (10.21) находим

$$V_x = \pi \int_0^3 y^2\,dx = \pi \int_0^3 2x\,dx = \pi x^2 \Big|_0^3 = 9\pi.$$

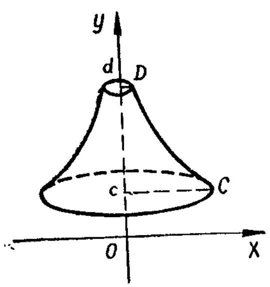

Рис. 10.13

2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 4$, прямыми $x = 1$, $x = 4$ и осью Ox (рис. 10.15).

Из условия вытекает, что $a = 1$, $b = 4$. Из уравнения кривой $xy = 4$ находим $y = \frac{4}{x}$, откуда $y^2 = \frac{16}{x^2}$. Следовательно,

$$V_x = \pi \int_1^4 y^2\,dx = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2}\,dx = 16\pi \int_1^4 \frac{dx}{x^2} = -16\pi \frac{1}{x}\Big|_1^4 =$$

$$= -16\pi\left(\frac{1}{4} - 1\right) = 12\pi.$$

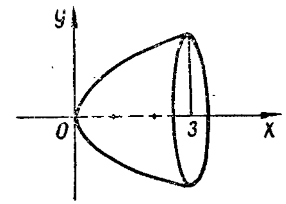

Рис. 10.14

3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и прямыми $y = \pm 2b$.

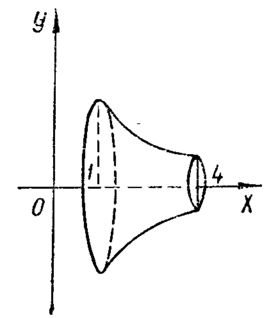

Рис. 10.15

Искомый объем определяем по формуле (10.22). Из условия вытекает, что пределы интегрирования будут: $c = -2b$, $d = 2b$. Выражение для x^2, входящее в эту формулу, определяется из уравнения гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}, \quad x^2 = a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Подставляя эти выражения в формулу (10.22), получаем

$$V_y = \pi \int_c^d x^2\,dy = \pi \int_{-2b}^{2b} a^2 \left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \pi a^2 \int_{-2b}^{2b} dy + \frac{\pi a^2}{b^2} \int_{-2b}^{2b} y^2\,dy =$$

$$= \pi a^2 y \Bigg|_{-2b}^{2b} + \pi \frac{a^2}{b^2} \frac{y^3}{3} \Bigg|_{-2b}^{2b} = \pi a^2 [2b - (-2b)] +$$

$$+ \frac{\pi a^2}{3b^2} [(2b)^3 - (-2b)^3] = \pi a^2 4b + \frac{16}{3} \pi a^2 b = \frac{28}{3} \pi a^2 b, \; V = \frac{28}{3} \pi a^2 b.$$

4. Вычислить объем тела, полученного вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вокруг оси Oy. (Тело это называется *эллипсоидом вращения*, рис. 10.16.)

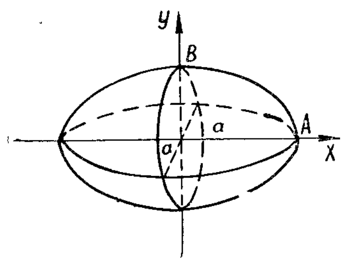

Рис. 10.16

Так как в данном случае $c = -b$, $d = b$,

$$x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

то по формуле (10.22) определяем

$$V_y = \pi \int_{-b}^{b} a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \pi a^2 \int_{-b}^{b} dy - \pi \frac{a^2}{b^2} \int_{-b}^{b} y^2\, dy =$$

$$= \pi a^2 y \Bigg|_{-b}^{b} - \frac{\pi a^2}{3b^2} y^3 \Bigg|_{-b}^{b} = \pi a^2 [b - (-b)] - \frac{\pi a^2}{3b^2} [b^3 - (-b)^3] =$$

$$= 2\pi a^2 b - \frac{2}{3} \pi a^2 b = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

Итак, $V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$. При $a = b = R$ получаем $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ — объем шара.

5. Найти объем тела, полученного вращением одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t)$$

вокруг оси Ox.

Движущаяся точка описывает одну арку циклоиды, когда t меняется от 0 до 2π (см. рис. 1.35), при этом x изменяется от 0 до $2\pi a$. Так как $x = a\,(t - \sin t)$, то

$$dx = a\,(t - \sin t)' dt = a\,(1 - \cos t)\, dt.$$

Следовательно,

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi a} y^2\, dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a\,(1 - \cos t)\, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos t + 3\left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) - (1 - \sin^2 t)\cos t\right] dt =$$

$$= \pi a^3 \left[\int_0^{2\pi} \frac{5}{2}\, dt - 4\int_0^{2\pi} \cos t\, dt + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos 2t\, d(2t) + \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, d(\sin t)\right] =$$

$$= \pi a^3 \left[\frac{5}{2} t \Bigg|_0^{2\pi} - 4\sin t \Bigg|_0^{2\pi} + \frac{3}{4} \sin 2t \Bigg|_0^{2\pi} + \frac{\sin^3 t}{3} \Bigg|_0^{2\pi} = \pi a^3 \cdot \frac{5}{2} \cdot 2\pi.\right.$$

Таким образом,

$$V = 5\pi^2 a^3.$$

Задачи

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

1. $2y^2 = x^3$, $x = 4$. **2.** $y^2 = 2px$, $x = p$.
3. $y = \sin x$ (одной полуволной), $y = 0$.
4. $y^2 + x^4 = x^2$. **5.** $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $x = \pm a$, $y = 0$.
6. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = \pm 2a$. **7.** $x = a\cos t$, $y = b \sin t$.
8. $x = t^3$, $y = t^2$, $x = \pm 1$.

Вычислим объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

9. $y^3 = 4x^2$, $y = 2$. **10.** $x^2 + y^4 = y^2$.
11. $x^2 + y^2 = a^2$. **12.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
13. $y^2 = 4 - x$. **14.** $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$.
15. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. **16.** $x = t$, $y = t^2$, $y = 4$.

Ответы

1. 32π. 2. πp^3. 3. $\frac{\pi^2}{2}$. 4. $\frac{4\pi}{15}$. Указание. Пределы интегрирования $a=-1$, $b=1$ находятся из уравнения кривой $y^2 = x^2(1-x^2)$. 5. $\pi a^3\left(\frac{\operatorname{sh}^2 x}{2}+1\right)$. 6. $\frac{8\pi a^3}{3}$. 7. $\frac{4}{3}\pi ab^2$. 8. $\frac{6\pi}{7}$. 9. π. 10. $\frac{4\pi}{15}$. 11. $\frac{4}{3}\pi a^3$. 12. $\frac{32\pi a^3}{105}$. 13. $\frac{512}{15}\pi$. 14. $19{,}2\pi$. 15. $6\pi^3a^3$. 16. 8π.

§ 10.5. Приложения определенных интегралов к решению простейших физических задач

1. Если точка движется по некоторой кривой и абсолютная величина скорости ее $v = f(t)$ есть известная функция времени t, то путь, пройденный точкой за промежуток времени $[a, b]$, равен

$$s = \int_a^b f(t)\,dt. \qquad (10.23)$$

2. Работа переменной силы $X = F(x)$, действующей в направлении оси Ox, на отрезке $[a, b]$ определяется формулой

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (10.24)$$

3. Сила давления P жидкости удельного веса γ на вертикальную пластинку, погруженную в жидкость, вычисляется по формуле

$$P = \gamma\int_a^b xy\,dx, \qquad (10.25)$$

где $y = f(x)$ — известная функция, зависящая от формы пластинки.

Примеры

1. Скорость точки $v = 0{,}1t^3$ *м/сек*. Найти путь s, пройденный точкой за промежуток времени $T = 10$ *сек*, протекший от начала движения. Чему равна средняя скорость движения точки за этот промежуток?

По формуле (10.23) получаем

$$s = \int_0^{10} 0{,}1t^3 dt = 0{,}1\cdot\frac{t^4}{4}\Big|_0^{10} = 250 \text{ м}.$$

Следовательно,

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{T} = 25 \text{ м/сек}.$$

2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,06 *м*, если сила 1 *н* растягивает ее на 0,01 *м*?

Согласно закону Гука, сила X *н*, растягивающая пружину на x *м*, равна $X = kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Полагая $x = 0{,}01$ *м* и $X = 1$ *н*, получим $k = 100$, следовательно, $X = kx = 100x$. Искомую работу определяем по формуле (10.24):

$$A = \int_0^{0{,}06} 100x\,dx = 50x^2\Big|_0^{0{,}06} = 0{,}18 \text{ (дж)}.$$

3. Вычислить силу давления P воды на погруженную в нее вертикально пластинку, имеющую форму треугольника ABC

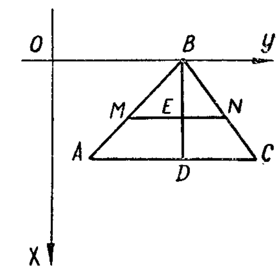

Рис. 10.17

с основанием $AC = b$ и высотой $BD = h$, предполагая, что вершина B этого треугольника лежит на свободной поверхности жидкости, а основание AC параллельно ей (рис. 10.17).

Пусть MN — ширина пластинки на уровне $BE = x$. Из подобия треугольников MBN и ABC находим

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BE}{BD} \text{ или } \frac{y}{b} = \frac{x}{h},$$

отсюда

$$y = \frac{bx}{h}.$$

На основании формулы (10.25) получаем

$$P = \gamma\int_0^h x\,\frac{bx}{h}\,dx = \frac{\gamma b}{h}\int_0^h x^2 dx = \frac{\gamma b}{h}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{\gamma b}{h}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{\gamma bh^2}{3}.$$

Известно, что вес кубического метра воды равен 1000 *кг*. Следовательно, если b и h выражены в метрах, то $\gamma = 9{,}80665\cdot 10^3$ *н* и $P = 9{,}80665\cdot 10^3\,\frac{bh^2}{3}$.

Например, если $b = 6$ *м* и $h = 2$ *м*, то $P = 78\,453{,}2$ *н*.

Задачи

1. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, без учета сопротивления воздуха определяется по формуле

$$v = v_0 - gt,$$

где t — протекшее время; g — ускорение силы тяжести. На каком расстоянии от начального положения будет находиться тело через t *сек* после броска?

2. Скорость движения точки $v = te^{-0{,}01t}$ *м/сек*. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

3. Ракетный снаряд поднимается вертикально вверх. Считая, что при постоянной силе тяги ускорение ракеты за счет уменьшения ее веса растет по закону $y = \frac{A}{a - bt}$ $(a - bt > 0)$, найти скорость в любой момент времени t, если начальная скорость равна нулю. Найти также высоту, достигнутую ракетой к моменту времени $t = t_1$.

4. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из вертикальной цилиндрической бочки, имеющей радиус основания R и высоту H.

5. Какую работу нужно затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности земли радиуса R на высоту h?

6. Вычислить кинетическую энергию диска массы M и радиуса R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости.

7. Какую работу надо затратить, чтобы остановить железный шар радиуса $R = 2$ *м*, вращающийся с угловой скоростью $\omega = \frac{100}{3}\pi$ *рад/сек* вокруг своего диаметра (удельный вес железа $\gamma = 7{,}8 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3})?

8. Вертикальная плотина имеет форму трапеции. Вычислить силу давления воды на плотину, если известно, что верхнее основание плотины $a = 80$ *м*, нижнее основание $b = 50$ *м*, а высота плотины $h = 20$ *м*.

9. Найти силу давления жидкости, удельный вес которой γ, на вертикальный эллипс с осями $2a$ и $2b$, центр которого погружен в жидкость на уровень h, причем большая ось $2a$ эллипса параллельна уровню жидкости $(h \geqslant b)$.

Ответы

1. $v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. 2. $s = 10^4$ *м*. 3. $v = \frac{A}{b}\ln\left(\frac{a}{a - bt}\right)$, $h = \frac{A}{b^2}\left[bt_1 - (a - bt_1)\ln\frac{a}{a - bt_1}\right]$. 4. $A = \frac{\pi\gamma}{2}R^2H^2$. Указание. Элементарная сила (сила тяжести) равна весу воды в объеме слоя толщиной dx, т. е. $dF = \pi\gamma R^2 dx$, где γ — вес единицы объема воды. Следовательно, элементарная работа силы $dA = \gamma\pi R^2(H - x)\,dx$, где x — уровень воды. 5. $A = \frac{mgh}{1 + \frac{h}{2}}$. Сила, действующая на тело массы m, равна $F = k\frac{mM}{r^2}$, где r — расстояние от центра земли. Так как при $r = R$ имеем $F = mg$, то $kM = gR^2$. Искомая работа будет $A = \int\limits_R^{R+h} k\frac{mM}{r^2}\,dr = kmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{mgh}{1 + \frac{h}{R}}$. 6. $\frac{1}{4}MR^2\omega^2$. Решение. Кинетическая энергия частицы диска $dk = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho r^2\omega^2}{2}\,d\sigma$, где σ — элемент площади; r — расстояние его от оси вращения; ρ — поверхностная плотность, $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$. Таким образом, $dk = \frac{M\omega^2}{2\pi R^2}r^2 d\sigma$. Отсюда $k = \frac{M\omega^2}{R^2}\int\limits_0^R r^3 dr = \frac{MR^2\omega^2}{4}$. 7. $k = \frac{M}{5}R^2\omega^2 = 22{,}5 \cdot 10^8$ *дж*. Указание. Количество необходимой работы равно запасу кинетической энергии. 8. $P = \frac{(a + 2b)h^2}{b} \approx 117\,679{,}8 \cdot 10^3$ *н*. 9. $p = ab\gamma\pi h$.

§ 10.6. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций называются *несобственными интегралами*.

Интегралы с бесконечными пределами. По определению имеем

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty}[F(b) - F(a)], \qquad (10.26)$$

где

$$F'(x) = f(x).$$

Если существует конечный предел в правой части равенства (10.26), то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Если $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ сходится, то и интеграл (10.26) также сходится (*признак сравнения*).

Аналогично определяются:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx; \qquad (10.27)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty}\int\limits_a^c f(x)\,dx + \lim_{b \to \infty}\int\limits_c^b f(x)\,dx. \qquad (10.28)$$

Интегралы от неограниченных функций. Если функция $f(x)$ не ограничена в любой окрестности точки c отрезка $[a, b]$

и непрерывна при $a \leqslant x < c$ и $c < x \leqslant b$, то по определению имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta \to 0} \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx, \tag{10.29}$$

где ε и η изменяются независимо друг от друга. В случае $c = b$ или $c = a$ получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{10.30}$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx. \tag{10.31}$$

Несобственный интеграл (10.29) называется *сходящимся* или *расходящимся* в зависимости от того, существуют или нет определяющие его пределы соответствующих определенных (собственных) интегралов.

Если существует непрерывная на $[a, b]$ функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$ при $x \neq c$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{10.32}$$

Примеры

1. Показать, что несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится.

По определению

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}.$$

Так как

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

то интеграл сходится.

2. Показать, что несобственные интегралы $\int_0^{+\infty} x\,dx$, $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ расходятся.

Так как

$$\int_0^{+\infty} x\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b x\,dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_0^b = \frac{1}{2} \lim_{b \to +\infty} b^2 = +\infty,$$

то интеграл расходится.

Рассмотрим второй интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \sin x\,dx = \lim_{b \to +\infty} (-\cos x)\Big|_0^b = -\lim_{b \to +\infty} (\cos b).$$

Так как $\lim\limits_{b \to +\infty} \cos b$ не существует, то интеграл расходится.

3. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (\alpha \neq -1).$$

По определению

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right).$$

Существование последнего предела зависит от величины α.

Если $\alpha > 1$, то

$$\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right) = \frac{1}{\alpha - 1},$$

интеграл сходится.

Если $\alpha < 1$, то

$$\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right) = +\infty,$$

интеграл расходится.

При $\alpha = 1$ интеграл также расходится, ибо

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

4. С помощью признака сравнения показать, что интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ сходится.

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{x^4\left(\frac{1}{x^4}+1\right)}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}.$$

Так как при $x \to \infty$

$$\frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} < \frac{1}{x^2}$$

и $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ сходится (см. пример 3), то на основании признака сравнения заключаем, что интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

также сходится.

5. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Это интеграл от неограниченной функции (подынтегральная функция не определена в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, при $x \to -1$ и $x \to 1$ функция неограниченно возрастает).

По определению имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin x \Big|_{-1+\varepsilon}^{0} + \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin x \Big|_{0}^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} [-\arcsin(-1+\varepsilon)] + \lim_{\varepsilon\to 0} [\arcsin(1-\varepsilon)] =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

6. Исследовать, при каких значениях $\alpha > 0$ сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ $(b > a)$.

Если $\alpha \neq 1$, то интеграл

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left[(b-a)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}\right]$$

при $\varepsilon \to 0$ имеет пределом ∞ или конечное число $\frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}$ в зависимости от того, будет ли $\alpha > 1$ или $\alpha < 1$.

Если $\alpha = 1$, то

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x-a} = [\ln(b-a) - \ln\varepsilon] \to \infty \ (\text{при } \varepsilon \to 0).$$

Следовательно, данный интеграл сходится при $\alpha < 1$.

7. Показать, что интеграл $\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится.

Подынтегральная функция не ограничена в любой окрестности точки $x = 0$ и непрерывна при $-1 \leqslant x < 0$, $0 < x \leqslant 8$.

Так как первообразная функция $\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}$ непрерывна в точке $x = 0$, то на основании формулы (10.32) получаем

$$\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-1}^{8} = \frac{9}{2}.$$

Задачи

Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.
2. $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x}\,dx$.
3. $\int\limits_0^\infty \cos x\,dx$.
4. $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ $(b > a,\ \lambda > 0)$.
5. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{2x\,dx}{x^2-4}$.
6. $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$.
7. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

Ответы

1. π. 2. 1. 3. Расходится. 5. Расходится. 6. -1. 7. Расходится.

V. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Глава 11. Функции нескольких переменных

Переменная величина z называется *функцией двух переменных* величин x и y, если каждой паре допустимых значений x и y соответствует единственное значение z. Функция двух переменных обозначается одним из символов:

$$z=f(x,\ y),\ z=\varphi(x,\ y),\ z=F(x,\ y),\ z=z(x,\ y) \text{ и т. п.}$$

Систему значений x и y называют точкой $M(x,\ y)$, а функцию двух переменных — функцией точки $z=f(M)$.

Геометрическим изображением функции двух переменных является некоторая поверхность в пространстве.

Значение функции $z=f(x,\ y)$ при $x=a,\ y=b$ обозначается через $f(a,\ b)$.

Переменная величина u называется *функцией трех переменных* величин $x,\ y,\ z$, если каждой тройке значений $x,\ y,\ z$ соответствует единственное значение u. Обозначение:

$$u=f(x,\ y,\ z),\ u=\varphi(x,\ y,\ z) \text{ и т. п.}$$

Функцию $u=f(x,\ y,\ z)$ называют функцией точки $u=f(M)$, где $M(x,\ y,\ z)$.

Аналогично определяется функция n переменных $x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t$:

$$u=f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t).$$

Совокупность значений $x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t$ называется точкой $M(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)$ n-мерного пространства, а функцию n переменных — функцией точки $u=f(M)$.

§ 11. 1. Область определения функции двух и трех переменных. Частное и полное приращение

Совокупность всех точек, в которых определена функция нескольких переменных, называется *областью существования* или *областью определения* функции.

Для функции двух переменных областью определения является некоторая часть координатной плоскости, ограниченная одной или несколькими линиями (или вся плоскость), для функции трех переменных — часть пространства (или все пространство).

Частные приращения функции $z=f(x,\ y)$ определяются формулами:

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y); \qquad (11.1)$$

$$\Delta_y z=f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y). \qquad (11.2)$$

Полное приращение функции $z=f(x,\ y)$.

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y). \qquad (11.3)$$

Частные приращения функции $u=f(x,\ y,\ z)$ определяются формулами:

$$\Delta_x u=f(x+\Delta x,\ y,\ z)-f(x,\ y,\ z); \qquad (11.4)$$

$$\Delta_y u=f(x,\ y+\Delta y,\ z)-f(x,\ y,\ z); \qquad (11.5)$$

$$\Delta_z u=f(x,\ y,\ z+\Delta z)-f(x,\ y,\ z). \qquad (11.6)$$

Полное приращение функции $u=f(x,\ y,\ z)$:

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-f(x,\ y,\ z). \qquad (11.7)$$

Аналогично определяются частные приращения функции n переменных. Например,

$$\Delta_x u=f(x+\Delta x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)-f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t). \qquad (11.8)$$

Полное приращение функции n переменных:

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z,\ \ldots,\ t+\Delta t)-$$
$$-f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t). \qquad (11.9)$$

Примеры

1. Функция двух переменных $z=Ax+By$ определена при всех x и y. Следовательно, ее областью существования будет вся плоскость Oxy. (Геометрическим изображением этой функции является плоскость в пространстве.)

2. Найти область определения функции $x^2+y^2+z^2=9$.

Разрешив это уравнение относительно z, получим

$$z=\pm\sqrt{9-x^2-y^2}.$$

Функция определена, когда подкоренное выражение неотрицательно, т. е.

$$9-x^2-y^2\geqslant 0 \text{ или } x^2+y^2\leqslant 9.$$

Последнему неравенству удовлетворяют координаты всех точек, лежащих внутри и на границе круга радиуса $R=3$ с центром в начале координат. Таким образом, областью существования этой функции будет круг радиуса $R=3$. (Сама функция изображает сферу радиуса $R=3$ с центром в начале координат.)

3. Найти область определения функции $z=\sqrt{xy}$.

Данная функция определена, когда подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $xy\geqslant 0$. Это возможно в двух случаях: 1) $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$; 2) $x\leqslant 0,\ y\leqslant 0$. Первому условию удовлетворяют координаты всех точек, лежащих в первой четверти и на координатных осях, второму — координаты точек, лежащих в третьей четверти и на координатных осях. Следовательно, область определения — совокупность точек, расположенных в первом и третьем координатных углах и на координатных осях.

4. Найти область существования функции

$$z = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Функция определена, когда подкоренное выражение положительно (в отличие от предыдущего примера равенство нулю здесь исключается), т. е.

$$9 - x^2 - y^2 > 0 \text{ или } x^2 + y^2 < 9.$$

Последнему неравенству удовлетворяют точки, лежащие внутри круга радиуса $R = 3$ (граничные точки исключаются). Область определения функции — совокупность точек, лежащих внутри круга радиуса $R = 3$ с центром в начале координат.

5. Определить приращения функции $z = xy$, когда x и y изменяются от точки M_0 (1, 2) до точек: M_1(1,1; 2), M_2(1; 1,9), M_3(1,1; 2,2).

1. При изменении x и y от точки M_0 (1, 2) до точки M_1(1,1; 2) приращение получает только аргумент x, причем $\Delta x = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$. Частное приращение функции по x определится формулой (11.1):

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)\, y - xy = xy + \Delta xy - xy = y\Delta x,$$
$$\Delta_x z = y\Delta x, \quad \Delta_x z = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2.$$

2. Когда x и y меняются от точки M_0(1, 2) до точки M_2(1; 1, 9) приращение получает лишь аргумент y, причем $\Delta y = 1{,}9 - 2 = -0{,}1$.

Частное приращение функции по y вычисляется с помощью формулы (11.2):

$$\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = xy + x\Delta y - xy = x\Delta y;$$
$$\Delta_y z = x\Delta y, \quad \Delta_y z = 1(-0{,}1) = -0{,}1.$$

3. В последнем случае (при изменении от M_0 до M_3) приращения получают оба аргумента, причем $\Delta x = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$; $\Delta y = 2{,}2 - 2 = 0{,}2$.

Полное приращение функции определяется формулой (11.3):

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - xy =$$
$$= x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y, \; \Delta z = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}42.$$

Замечание. Из формул $\Delta_x z = y\Delta x$, $\Delta_y z = x\Delta y$, $\Delta z = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$ видно, что $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

6. Найти линии уровня функции $z = xy$.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется геометрическое место точек плоскости Oxy, для которых данная функция имеет одно и то же значение: уравнение линии уровня есть

$$f(x, y) = c.$$

В данном случае имеем $xy = c$. Линии уровня являются гиперболами.

7. Найти поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Поверхностью уровня функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ называется геометрическое место точек пространства $Oxyz$, для которых данная функция имеет одно и то же значение, т. е.

$$f(x, y, z) = c.$$

Поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ даются уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = c,$$

которое определяет совокупность сфер радиусов $R = \sqrt{c}$ с центром в начале координат.

8. Дана функция $f(x, y) = \frac{2x + y}{x + 2y}$. Доказать, что: 1) $f(1, 2) = \frac{1}{f(2, 1)}$; 2) $f(c, c) = -f(-c, c)$.

Так как

$$f(1, 2) = \frac{2 \cdot 1 + 2}{1 + 2 \cdot 2} = \frac{4}{5}, \quad f(2, 1) = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 + 2 \cdot 1} = \frac{5}{4},$$

то

$$f(1, 2) \cdot f(2, 1) = 1, \quad f(1, 2) = \frac{1}{f(2, 1)}.$$

Так как

$$f(c, c) = \frac{2c + c}{c + 2c} = \frac{3c}{3c} = 1, \quad f(-c, c) = \frac{2(-c) + c}{-c + 2c} =$$
$$= \frac{-c}{c} = -1,$$

то

$$f(c, c) = -f(-c, c).$$

Задачи

Найти области существования функций:

1. $z = x^2 + y^2$. **2.** $z = \ln(y + x)$.

3. $z = \frac{y}{y - x}$. **4.** $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$.

5. $z = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$. **6.** $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(25 - x^2 - y^2)}$.

Построить линии уровня функций:

7. $z = x + y$. **8.** $z = x^2 - y^2$.

9. $z = \frac{y}{x^2}$. **10.** $z = \frac{2x}{x^2+y^2}$.

Найти поверхности уровня функций трех переменных:

11. $u = x + y + z$. **12.** $u = x^2 + y^2 - z^2$.

13. Дан периметр $2p$ треугольника. Выразить площадь S треугольника как функцию двух его сторон x и y. Определить и построить область возможных значений x и y.

14. Определить объем V правильной четырехугольной пирамиды как функцию ее высоты x и бокового ребра y.

15. Дана функция $F(x, y) = \frac{x^2+y}{y^2+x}$. Вычислить $F(0, 1)$, $F(0, -1)$, $F(1, 1)$, $F(2, -2)$, $F(a, a)$, $F(a, -a)$.

16. Доказать, что для функции $z = x^3 + xy^2 - 2y^3$ выполняется равенство $F(tx, ty) = t^3F(x, y)$.

17. Определить $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ и Δz для функции $z = x^2 - xy + y^2$. Вычислить $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz, если x изменяется от 2 до 2,1, а y изменяется от 2 до 1,9.

Ответы

1. Вся плоскость Oxy. 2. Полуплоскость, расположенная над прямой $x + y = 0$ $(x + y > 0)$. 3. Две полуплоскости, определяемые прямой $y - x = 0$. 4. Круг радиуса $R = a$, включая граничные точки. 5. Круг радиуса $R = a$, исключая точки окружности $x^2 + y^2 = a^2$. 6. Кольцо между окружностями радиусов $R_1 = 2$, $R_2 = 5$. 7. $x + y = c$; прямые, параллельные прямой $x + y = 0$. 8. $x^2 - y^2 = c$; равносторонние гиперболы. 9. $y = cx^2$; параболы. 10. $c(x^2 + y^2) = 2x$; окружности. 11. $x + y + z = c$. 12. $x^2 + y^2 - z = c$. 13. $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$. Область существования функции: $0 < x < p$, $0 < y < p$, $x + y > p$, т. е. множество точек внутри треугольника, ограниченного линиями: $x = p$, $y = p$, $x + y = p$. 14. $V = \frac{2}{3}(y^2 - x^2)\,x$. 15. 1; -1; 1; $\frac{1}{3}$; 1; $\frac{a^2-a}{a^2+a} = \frac{a-1}{a+1}$. 17. $\Delta_x z = (2x - y + \Delta x)\,\Delta x = 0{,}21$; $\Delta_y z = (2y - x + \Delta y)\,\Delta y = -0{,}19$; $\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z - \Delta x \Delta y = 0{,}03$.

§ 11.2. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность

Число A называется *пределом* функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если при любом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M(x, y)$, отстоящих от M_0 меньше чем на δ, выполняется неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon. \tag{11.10}$$

Обозначения предела функции:

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = A; \tag{11.11}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A. \tag{11.12}$$

Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если выполняется равенство

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \tag{11.13}$$

причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Если обозначить $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то равенство (11.13) можно переписать так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \tag{11.14}$$

или

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0. \tag{11.15}$$

Принимая во внимание формулу (11.13), равенству (11.15) можно придать вид

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta z = 0, \tag{11.16}$$

где $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ — расстояние между точками $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*.

Если в некоторой точке $N(x_0, y_0)$ не выполняется условие (11.16), то точка N_0 называется *точкой разрыва* функции $z = f(x, y)$.

Нарушение условий непрерывности функции $z = f(x, y)$ может происходить как в отдельных точках, так и в точках, образующих одну или несколько линий (линии разрыва).

Примеры

1. Найти $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y}$.

В точке $M(2, 0)$ функция $z = \frac{\sin xy}{y}$ не определена. Умножив и разделив данную функцию на $x \neq 0$, получим

$$\frac{\sin xy}{y} = \frac{x \sin xy}{xy} = x\,\frac{\sin xy}{xy}.$$

Переходя к пределу в последнем равенстве, получаем

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} x \cdot \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} x \cdot \lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 2 \cdot 1 = 2,$$

так как $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

2. Дана функция

$$f(x,\ y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\qquad (x^2+y^2\neq 0),\quad f(0,\ y)=0,$$

$f(x,\ 0)=0$, найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

Возьмем $\varepsilon>0$, тогда при $|x|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|y|<\frac{\varepsilon}{2}$ получим $\rho=$ $=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon$. Составим разность $f(x,\ y)-0$ и оценим ее:

$$|f(x,\ y)-0|\leqslant|x|\cdot\left|\sin\frac{1}{y}\right|+|y|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|+$$
$$+|y|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Таким образом,

$$|f(x,\ y)-0|<\varepsilon.$$

На основании формулы (11.10) заключаем, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\ y)=0.$$

3. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Данную функцию можно представить так:

$$f(x,\ y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\frac{xy}{x^2+y^2}\,x.$$

Поскольку

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

(это можно получить из соотношения $(x-y)^2\geqslant 0$: x^2-2xy+ $+y^2\geqslant 0$, $x^2+y^2\geqslant 2xy$, $\frac{1}{2}\geqslant\frac{xy}{x^2+y^2}\Big)$, то

$$|f(x,\ y)|=\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\cdot|x|\leqslant\frac{1}{2}|x|.$$

Если задано $\varepsilon>0$, то при $|x|<\delta$ и $\delta=2\varepsilon$ получим

$$|f(x,\ y)-0|\leqslant\frac{1}{2}|x|<\frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon=\varepsilon,$$

т. е.

$$|f(x,\ y)-0|<\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

4. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Разделив числитель и знаменатель на x^2, получим

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Так как при $x\to 0$ и $y\to 0$ произвольным образом отношение $\frac{y}{x}$ не имеет предела, то данная функция также не имеет предела.

Если положить, что $x\to 0$ и $y\to 0$ вдоль прямой $y=kx$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Предел зависит от коэффициента k, для каждой прямой $y=kx$ он будет своим.

5. Дана функция $f(x,\ y,\ z)=\frac{xy+z}{xy-z}$ $(x^2+y^2\neq 0,\ xy-$ $-z\neq 0)$. Показать, что при $x\to 0$, $y\to 0$ функция не имеет предела.

Предположим сначала, что $M(x,\ y,\ z)\to M_0(0,\ 0,\ 0)$ вдоль прямой, не лежащей в плоскости Oxy. Уравнения этой прямой можно написать так:

$$x=at,\ y=bt,\ z=ct.$$

На этой прямой данная функция является функцией одной переменной t, а именно:

$$f(x,\ y,\ z)=\varphi(t)=\frac{abt^2+ct}{abt^2-ct}=\frac{abt+c}{abt-c}.$$

Следовательно,

$$\lim_{M\to M_0} f(x,\ y,\ z)=\lim_{t\to 0}\varphi(t)=-1.$$

Пусть теперь $M\to M_0$, оставаясь в плоскости Oxy. Для любой точки этой плоскости $z=0$, поэтому

$$f(x,\ y,\ z)=\frac{xy}{xy}=1$$

и

$$\lim_{M\to M_0} f(x,\ y,\ z)=1.$$

Сравнивая полученные результаты, заключаем, что данная функция не имеет предела в начале координат, ибо предел не должен зависеть от способа стремления точки M к предельной точке M_0.

6. Показать, что функция $z = xy$ непрерывна в любой точке плоскости Oxy.

Прежде всего функция $z = xy$ определена при всех x и y, т. е. во всех точках плоскости Oxy. Полное приращение функции определяется формулой

$$\Delta z = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, получаем

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0,$$

т. е. функция $z = xy$ непрерывна в любой точке $M(x, y)$.

7. Найти точки разрыва функции

$$f(x, y) = \frac{3}{4 - x^2 - y^2}.$$

Функция не определена там, где знаменатель обращается в нуль, т. е. в точках, для которых $4 - x^2 - y^2 = 0$. Эта функция разрывна в каждой точке окружности $x^2 + y^2 = 4$. Следовательно, линией разрыва является окружность $x^2 + y^2 = 4$.

Задачи

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 4}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{x}$. **2.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

3. $\lim \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$. **4.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y}{x + y}$.

Доказать непрерывность функций:

5. $z = x - y$. **6.** $z = x^2 + y^2$.

7. $u = x + y + z$. **8.** $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Найти точки разрыва функций:

9. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$. **10.** $f(x, y) = \frac{y^2 x}{x^2 + y^4}$, $f(0, 0) = 0$.

11. $z = \frac{y^2 + x^2}{y^2 - x^2}$. **12.** $z = \frac{6}{x^2 - y^2 - 2}$.

13. $u = \frac{x + y + z}{z - xy}$. **14.** $u = \frac{4}{z^2 - x^2 - y^2}$.

Ответы

1. 4. **2.** 0. **3.** Не существует. **4.** Не существует. **9.** $O(0, 0)$. **10.** $O(0, 0)$. **11.** Прямые $y = \pm x$. **12.** Гипербола $x^2 - y^2 = 2$. **13.** Гиперболический параболоид $z = xy$. **14.** Конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Глава 12. Производные и дифференциалы

§ 12.1. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ по определению имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x,\ y) - f(x, y)}{\Delta x} \text{ (частная производная по } x\text{)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \text{ (частная производная по } y\text{)}.$$

При нахождении частной производной пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все другие аргументы постоянными.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy.

Разность между полным приращением Δz и полным дифференциалом dz есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, т. е.

$$\Delta z - dz = \varepsilon \cdot \rho, \quad \varepsilon \to 0, \text{ когда } \rho \to 0, \tag{12.1}$$

где

$$dz = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y. \tag{12.2}$$

Функция, обладающая непрерывными частными производными, заведомо имеет полный дифференциал. Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{12.3}$$

Функция, имеющая полный дифференциал, называется *дифференцируемой*.

Из формулы (12.1) следует, что

$$\Delta z \approx dz \tag{12.4}$$

или

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y) \approx \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{12.5}$$

формулу (12.5) можно переписать так:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\approx f(x,\ y)+\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (12.6)$$

Полный дифференциал функции трех переменных вычисляется по формуле

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz. \qquad (12.7)$$

Примеры

1. Найти частные производные функции $z=x^2+2xy+y^2$.

Считая y постоянной и дифференцируя z как функцию x, получаем частную производную по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^2)'_x+(2xy)_x+(y^2)'_x=2x+2y+0=2(x+y).$$

Считая x постоянной и дифференцируя z как функцию y, находим частную производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2)'_y+(2xy)'_y+(y^2)'_y=0+2x+2y=2(x+y).$$

2. Найти частные производные функции

$$u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}.$$

Пользуясь правилами нахождения частных производных, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)'_x=\frac{x'(x^2+y^2+z^2)-(x^2+y^2+z^2)'_x x}{(x^2+y^2+z^2)^2}=$$
$$=\frac{x^2+y^2+z^2-2xx}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)'_y=\frac{x'_y(x^2+y^2+z^2)-(x^2+y^2+z^2)'_y x}{(x^2+y^2+z^2)^2}=$$
$$=\frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)'_z=\frac{x'_z(x^2+y^2+z^2)-(x^2+y^2+z^2)'_z x}{(x^2+y^2+z^2)^2}=$$
$$=\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

3. Найти полный дифференциал функции

$$u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2},$$

то по формуле (12.3) находим

$$du=\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}.$$

4. Найти полный дифференциал функции

$$u=x^2+y^2+z^2.$$

Определяя частные производные функции

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z$$

и подставляя их в формулу (12.7), находим

$$du=2xdx+2ydy+2zdz.$$

5. Как изменится объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями $a=8$ *м*, $b=6$ *м*, $c=3$ *м*, когда его длина и ширина увеличатся соответственно на 10 *см* и 5 *см*, а высота уменьшится на 15 *см*.

Объем параллелепипеда выражается формулой $V=xyz$, где $x,\ y,\ z$ — его измерения. Приращение объема можно приближенно подсчитать по формуле

$$\Delta V\approx dV,\ \text{где}\ dV=yzdx+xzdy+xydz.$$

Так как по условию $x=8,\ y=6,\ z=3,\ dx=0{,}1,\ dy=0{,}05,\ dz=-0{,}15$, то

$$dV=6\cdot3\cdot0{,}1+8\cdot3\cdot0{,}05+8\cdot6\,(-0{,}15)=1{,}8+1{,}2-7{,}2=$$
$$=-4{,}2.$$

Итак, объем уменьшится на 4,2 $м^3$.

6. Вычислить приближенно $1{,}02^{3{,}01}$.

Рассмотрим функцию $z=x^y$. Искомое число можно считать приращенным значением этой функции при $x=1,\ y=3,\ \Delta x=0{,}02,\ \Delta y=0{,}01$.

Первоначальное значение функции $z=1^3=1$. На основании формул (12.4) и (12.5) получаем

$$\Delta z\approx dz=yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\,\Delta y=3\cdot1\cdot0{,}02+1\cdot\ln1\cdot0{,}01=$$
$$=0{,}06.$$

По формуле (12.6) находим

$$1{,}02^{3{,}01}\approx1+0{,}06=1{,}06.$$

Задачи

Найти полные дифференциалы функций:

1. $z=\sin^2 y+\cos^2 x$. **2.** $z=\dfrac{x+y}{xy}$.

3. $r=e^{\frac{t}{s}}$. **4.** $u=r^2\cos^2\varphi$.

5. $u=x^2yz$. **6.** $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$.

Вычислить значения полных дифференциалов функций:

7. $z=\dfrac{y}{x}$ при $x=2,\ y=1,\ dx=0{,}1,\ dy=0{,}2$.

8. $z=e^{xy}$ при $x=1,\ y=2,\ dx=-0{,}1,\ dy=0{,}1$.

Подсчитать приближенно изменения функций:

9. $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, x изменяется от 2 до 2,1; y — от 3 до 2,5.

10. $\varphi = \arcsin\frac{y}{x}$, x изменяется от 5 до 4,5; y — от 3 до 3,3.

Вычислить приближенно:

11. $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$. **12.** $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$.

13. Как изменится диагональ l прямоугольника со сторонами $a = 10$ *см*, $b = 24$ *см*, если сторону a удлинить на 4 *мм*, а сторону b укоротить на 1 *мм*? Найти приближенную величину изменения и сравнить с точной.

Ответы

1. $dz = \sin 2y dy - \sin 2x dx$. 2. $dz = -\left(\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2}\right)$. 3. $dr = e^{\frac{t}{s}}\left(\frac{1}{s}\,dt - \frac{t}{s^2}\,ds\right)$. 4. $du = 2r\,(\cos 2\varphi dr - r\sin 2\varphi\, d\varphi)$. 5. $du = x\,(2zydx + xzdy + xydz)$. 6. $du = \frac{2}{x^2+y^2+z^2}(xdx + ydy + zdz)$. 7. 0,075. 8. $-0{,}1e^2 \approx -0{,}739$. 9. $-0{,}1$. 10. 0,15. 11. 1,00. 12. 4,998. 13. $dl = 0{,}062$ *см*; $\Delta l = 0{,}065$ *см*.

§ 12.2. Производные и дифференциалы высших порядков

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\\ &\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{12.8}$$

Употребляются и другие обозначения:

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right). \tag{12.9}$$

Если смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны, то результаты дифференцирования не зависят от порядка дифференцирования, т. е.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}. \tag{12.10}$$

Аналогично определяются частные производные более высокого порядка. Например, для функции $z = f(x, y)$ частные производные третьего порядка определяются формулами:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right);$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Частные производные третьего и высших порядков, отличающиеся только последовательностью дифференцирования, равны, если они непрерывны. Например,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}.$$

Дифференциалы второго, третьего и более высоких порядков функции $z = f(x, y)$ определяются формулами $d^2z = d(dz)$, $d^3z = d(d^2z)$ и т. д. Они выражаются через частные производные следующим образом:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2; \tag{12.11}$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \tag{12.12}$$

Вообще справедлива символическая формула

$$d^nz = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z, \tag{12.13}$$

которая формально раскрывается по биномиальному закону.

Примеры

1. Найти частные производные второго порядка функции $z = (x^2 + y^2)^2$.

Находим сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x^2+y^2)(x^2+y^2)'_x = 2(x^2+y^2)\,2x = 4x^3 + 4xy^2;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2+y^2)(x^2+y^2)'_y = 2(x^2+y^2)\,2y = 4x^2y + 4y^3.$$

Дифференцируя каждую из полученных функций по x и по y, получим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3 + 4xy^2) = (4x^3 + 4xy^2)'_x = 12x^2 + 4y^2;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (4x^2y + 4y^3)'_y = 4x^2 + 12y^2;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (4x^3 + 4xy^2)'_y = 8xy;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (4x^2y + 4y^3)'_x = 8xy.$$

Как и следовало ожидать,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

2. Дана функция $u = x^2 y^3$. Найти ее частные производные третьего порядка.

Дифференцируя, находим:

$$u'_x = 2xy^3, \quad u'_y = 3x^2y^2, \quad u''_{xx} = 2y^3, \quad u''_{xy} = 6xy^2,$$

$$u''_{yx} = 6xy^2, \quad u''_{yy} = 6x^2y, \quad u'''_{xxx} = 0, \quad u'''_{xyx} = 6y^2, \quad u'''_{yxx} = 6y^2,$$

$$u'''_{yyx} = 12xy, \quad u'''_{yyy} = 6x^2, \quad u'''_{xxy} = 6y^2, \quad u'''_{xyy} = 12xy,$$

$$u'''_{yxy} = 12xy.$$

3. Доказать, что функция

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Найдем сначала частные производные данной функции $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Сложив вторые производные, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

4. Найти дифференциалы второго и третьего порядка функции $u = x^2 y^3$.

Принимая во внимание результаты примера 2, по формулам (12.11) и (12.12) находим:

$$d^2 z = 2y^3 dx^2 + 12xy^2\, dx dy + 6x^2 y dy^2;$$

$$d^3 z = 3 \cdot 6y^2 dx^2 dy + 3 \cdot 12xy dx dy^2 + 6x^2 dy^3.$$

Задачи

Найти частные производные второго порядка следующих функций:

1. $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. **2.** $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

3. $u = xz^2 + \sin \frac{x}{y}$.

4. Дана функция $y = f(x + at) + \varphi(x - at)$, где $a = \text{const}$, а $f(w)$ и $\varphi(w)$ — две произвольные функции, имеющие первую и вторую производные. Показать, что y удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

5. Найти дифференциалы второго и третьего порядков функции $u = x^4 y^2$.

Ответы

1. $z''_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$; $z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$; $z''_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.
3. $u''_{xx} = -\left(\frac{1}{y}\right)^2 \sin \frac{x}{y}$; $u''_{xy} = -\frac{1}{y^2}\left(\cos \frac{x}{y} - \frac{x}{y} \sin \frac{x}{y}\right)$; $u''_{xz} = 2z$; $u''_{yy} = \frac{2x}{y^3} \cos \frac{x}{y} - \frac{x^2}{y^4} \sin \frac{x}{y}$; $u''_{yz} = 0$; $u''_{zz} = 2x$.

§ 12.3. Дифференцирование неявных функций

Функция n переменных $x, y, z, \ldots, t, u$ называется *неявной*, если она задана уравнением

$$F(x, y, z, \ldots, t, u) = 0, \tag{12.14}$$

не разрешенным относительно u.

Если функция $F(x, y, z, \ldots, t, u) = 0$ и ее частные производные $F'_x, F'_y, F'_z, \ldots, F'_t, F'_u$ определены и непрерывны в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0, u_0)$ и в ее окрестности и если $F(M_0) = 0$, но $F'_u(M_0) \neq 0$, то уравнение $F(x, y, z, \ldots, t, u) = 0$ вблизи точки $M_0(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0, u_0)$ и в самой точке определяет u как непрерывную и дифференцируемую функцию от $x, y, z, \ldots, t$.

При соблюдении указанных условий производные неявной функции u, заданной уравнением $F(x, y, z, \ldots, t, u) = 0$, находятся по формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_u}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{F'_z}{F'_u}, \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{F'_t}{F'_u}. \tag{12.15}$$

В частности, если y — неявная функция одной переменной x, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, то

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' = -\frac{F'_x}{F'_y}; \qquad (12.16)$$

для функции двух переменных, определяемой уравнением $F(x, y, z) = 0$, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \qquad (12.17)$$

Примеры

1. Найти первую и вторую производную неявной функции

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0.$$

В данном случае $F(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Производная ее определяется формулой (12.16). Находим частные производные этой функции по x и по y:

$$F'_x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]'_x = \frac{1\cdot 2x}{2(x^2+y^2)} - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \times$$

$$\times\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x+y}{x^2+y^2};$$

$$F'_y = \frac{1}{2(x^2+y^2)}\cdot 2y - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{y-x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right):\left(\frac{y-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x+y}{x-y}.$$

Находим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = \frac{(x+y)'(x-y)-(x-y)'(x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{x+y}{x-y}\right)(x-y) - \left(1-\frac{x+y}{x-y}\right)(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

2. Найти полный дифференциал функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением $e^{xyz} - \operatorname{arctg}\frac{xy}{z} = 0$.

В данном случае $F(x, y, z) = e^{xyz} - \operatorname{arctg}\frac{xy}{z}$. Находим сначала частные производные функции $F(x, y, z)$:

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x} = yze^{xyz} - \frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^2}}\cdot\frac{y}{z} = yz\left(e^{xyz} - \frac{1}{x^2y^2+z^2}\right);$$

$$F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} = xze^{xyz} - \frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^2}}\cdot\frac{x}{z} = xz\left(e^{xyz} - \frac{1}{x^2y^2+z^2}\right);$$

$$F'_z = \frac{\partial F}{\partial z} = xye^{xyz} - \frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^2}}\cdot\left(\frac{-xy}{z^2}\right) = xy\left(e^{xyz} + \frac{1}{x^2y^2+z^2}\right).$$

По формулам (12.17) получаем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz\left(e^{xyz} - \frac{1}{x^2y^2+z^2}\right)}{xy\left(e^{xyz} + \frac{1}{x^2y^2+z^2}\right)} = \frac{z[1-(x^2y^2+z^2)e^{xyz}]}{x[1+(x^2y^2+z^2)e^{xyz}]};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz\left(e^{xyz} - \frac{1}{x^2y^2+z^2}\right)}{xy\left(e^{xyz} + \frac{1}{x^2y^2+z^2}\right)} = \frac{z[1-(x^2y^2+z^2)e^{xyz}]}{y[1+(x^2y^2+z^2)e^{xyz}]}.$$

Следовательно,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{1-(x^2y^2+z^2)e^{xyz}}{1+(x^2y^2+z^2)e^{xyz}}\cdot\frac{z}{xy}(ydx + xdy).$$

3. Найти полный дифференциал функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением $z^2 - 2xy = c$.

Возьмем дифференциалы обеих частей данного уравнения:

$$d(z^2 - 2xy) = dc, \quad d(z^2) - d(2xy) = dc,$$

$$2zdz - 2(xdy + ydx) = 0, \quad zdz - (xdy + ydx) = 0,$$

$$zdz = xdy + ydx, \quad dz = \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy.$$

Задачи

Найти производные неявных функций:

1. $e^x\sin y - e^y\cos x = 0$. 2. $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$.

Найти частные производные неявных функций:

3. $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 60 = 0$. 4. $\frac{y}{x} - \operatorname{tg}\frac{z}{c} = 0$.

Найти полные дифференциалы функций $z = z(x, y)$, заданных уравнениями:

5. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0$. 6. $z - ye^{\frac{x}{z}} = 0$.

Ответы

1. $y' = -\frac{e^x \sin y + e^y \sin x}{e^x \cos y - e^y \cos x}$. 2. $y' = -\frac{2x^3 + 2xy^2 - a^2x}{2x^2y + 2y^3 + a^2y}$. 3. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x}{5z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{5y}{5z}$. 4. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{cy}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{cx}{x^2 + y^2}$. 5. $dz = -\frac{x}{z}\,dx + \frac{1-y}{z}\,dy$. 6. $dz = \frac{ze^{\frac{x}{z}}(zdy + ydx)}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}}$.

§ 12.4. Дифференцирование сложных функций

Если

$$u = F(v_1, v_2, \dots, v_n), \qquad (12.18)$$

где

$$v_1 = f_1(x, y, z, \dots, t), \quad v_2 = f_2(x, y, z, \dots, t), \dots,$$
$$v_n = f_n(x, y, z, \dots, t), \qquad (12.19)$$

то функция u называется *сложной* функцией независимых переменных $x, y, z, \dots, t$. Переменные $v_1, v_2, \dots, v_n$ называются *промежуточными аргументами.*

Частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по данной независимой переменной:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x};\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial y} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial y};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.20)$$

В частности, если все промежуточные аргументы являются функциями одной независимой переменной x, то функция (12.18) будет сложной функцией от x. Производная этой функции называется *полной* производной и находится по формуле

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{dv_1}{dx} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{dv_2}{dx} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{dv_n}{dx}. \qquad (12.21)$$

Примеры

1. Найти $\frac{du}{dx}$, если $u = e^{z-2y}$, где $z = \sin x$, $y = x^2$.

Функция $u = e^{z-2y}$ зависит от двух промежуточных аргументов $v_1 = y$, $v_2 = z$. По формуле (12.21), которая в данном случае принимает вид

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx},$$

получаем

$$\frac{du}{dx} = e^{z-2y}(-2)\,2x + e^{z-2y}\cos x = e^{z-2y}(\cos x - 4x) = e^{\sin x - 2x^2}(\cos x - 4x),$$

так как

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{z-2y}(-2), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = e^{z-2y}, \quad \frac{dy}{dx} = 2x, \quad \frac{dz}{dx} = \cos x.$$

Замечание. Тот же результат можно получить и другим путем, выразив u как явную функцию x

$$u = e^{\sin x - 2x^2}$$

и продифференцировав последнюю:

$$\frac{du}{dx} = (e^{\sin x - 2x^2})'(\sin x - 2x^2)' = e^{\sin x - 2x^2}(\cos x - 4x).$$

2. Найти полный дифференциал функции

$$u = x^2 \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Функцию u двух переменных x и y можно представить следующей формулой:

$$u \equiv F(v_1, v_2, v_3, v_4) = v_1v_2 - v_3v_4, \qquad (A)$$

где

$$v_1 = x^2, \quad v_2 = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad v_3 = y^2, \quad v_4 = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}. \qquad (B)$$

Полный дифференциал функции $u = f(x, y)$ определяется формулой

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ с помощью формул (12.20), которые в данном случае примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v_3}\cdot\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v_4}\cdot\frac{\partial v_4}{\partial x};\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial v_3}\cdot\frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial v_4}\cdot\frac{\partial v_4}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

Из формул (B) получаем:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_3}{\partial y} = 2y;$$

$$\frac{\partial v_4}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial v_4}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial u}{\partial v_1}=v_2,\quad \frac{\partial u}{\partial v_2}=v_1,\quad \frac{\partial u}{\partial v_3}=-v_4,\quad \frac{\partial u}{\partial v_4}=-v_3$$

и подставляя полученные выражения в формулы (G), находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=v_2\cdot 2x+v_1\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}+(-v_4)\cdot 0+(-v_3)\cdot\frac{y}{x^2+y^2}=$$

$$=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{x^2y}{x^2+y^2}-\frac{y^2y}{x^2+y^2}=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{y(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=$$

$$=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=v_2\cdot 0+v_1\cdot\frac{x}{x^2+y^2}+(-v_4)\cdot 2y+(-v_3)\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)=$$

$$=\frac{x^2x}{x^2+y^2}-2y\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\frac{x(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-2y\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=$$

$$=x-2y\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Следовательно,

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\left(2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-y\right)dx+$$

$$+\left(x-2y\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)dy.$$

3. Дана дифференцируемая функция $u=f(x, y)$, где $x=$ $=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Показать, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Применяем формулы (12.20), которые в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r};$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}.$$

По этим формулам получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi;$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi.$$

Возводя в квадрат обе части двух последних равенств и почленно складывая полученные результаты, находим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

что и требовалось доказать.

Задачи

1. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\ln(x^2+y^2)$, где $x=t$, $y=t^2$.

2. Найти $\frac{du}{dx}$, если $u=e^{z^2-y^2}$, где $z=\cos x$, $y=\sin x$.

3. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, если $u=v^3w^3+\frac{w^2}{v^2}$, где $v=\cos y$, $w=$ $=\sin x$.

4. Найти полный дифференциал функции

$$u=\frac{\sin v}{\cos w},\ \text{где } v=xy,\ w=\frac{x}{y}.$$

5. Показать, что если функция $u=f(x+ay)$ дифференцируемая, то она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial x}.$$

6. Показать, что функция $u=f(v, w)$, где $v=x+at$, $w=$ $=y+bt$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ответы

1. $\frac{du}{dt}=\frac{2(1+2t^2)}{t(1+t^2)}$. 2. $\frac{du}{dx}=-2e^{\cos 2x}\sin 2x$. 3 $\frac{\partial u}{\partial x}=$ $=3\sin^2x\cos x\cos^3y+2\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 y}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2\sin^2 x\sin y}{\cos^3 y}-3\sin^3x\sin y\cos^2y$.

4. $du=\frac{\cos xy}{\cos\frac{x}{y}}(y\,dx+x\,dy)+\frac{\sin xy\sin\frac{x}{y}}{y^2\cos^2\frac{x}{y}}(ydx-xdy)$.

Глава 13. Применения частных производных

§ 13.1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в данной ее точке M (точке касания) называется плоскость, в которой лежат касательные в этой точке к всевозможным кривым, проведенным на данной поверхности через указанную точку.

Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания.

Координаты направляющего вектора нормали $\overline{m}=\{a, b, c\}$ к поверхности

$$F(x, y, z)=0 \tag{13.1}$$

в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пропорциональны значениям соответствующих частных производных функции (13.1), вычисленных в этой точке:

$$a = \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0, \quad b = \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0, \quad c = \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0, \qquad (13.2)$$

где

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = F'_x(x_0, y_0, z_0), \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = F'_y(x_0, y_0, z_0), \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = F'_z(x_0, y_0, z_0).$$

Координаты вектора $\overline{m}$ входят в уравнение касательной плоскости к поверхности (13.1) в точке M:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0 \qquad (13.3)$$

и в уравнения нормали к данной поверхности в той же точке:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}. \qquad (13.4)$$

Для поверхности

$$z = f(x, y) \qquad (13.5)$$

уравнения касательной плоскости и нормали в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принимают вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0); \qquad (13.6)$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (13.7)$$

Примеры

1. Найти направляющий вектор нормали к эллипсоиду $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ в точке $M_0(1, -1, 1)$.

Прежде всего точка M_0 лежит на эллипсоиде, в чем можно убедиться, подставив ее координаты в данное уравнение. Этому уравнению можно придать вид

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0.$$

Сравнивая данное уравнение с уравнением (13.1), заключаем, что

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6. \qquad (A)$$

Находим частные производные функции (A):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 6z$$

и вычисляем их значения в точке $M(1, -1, 1)$, т. е. при $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $z_0 = 1$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = 2, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = -4, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 6.$$

Следовательно, получен направляющий вектор нормали

$$\overline{m} = \{2, -4, 6\}.$$

Замечание. В качестве направляющего вектора нормали можно взять вектор $\overline{m'} = \{1, -2, 3\}$ или любой другой вектор, коллинеарный вектору $\overline{m} = \{2, -4, 6\}$.

2. Составить уравнения нормали и касательной плоскости к сфере $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ в точке $M_0(3, -1, 5)$.

Найдем частные производные функции $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 4, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 6.$$

Вычислив их значения в точке $M_0(3, -1, 5)$, получим направляющий вектор нормали $\overline{m} = \{4, 2, 4\}$.

В соответствии с формулой (13.3) составляем уравнение касательной плоскости

$$4(x - 3) + 2(y + 1) + 4(z - 5) = 0$$

или

$$2x + y + 2z - 15 = 0.$$

На основании формулы (13.4) находим уравнения нормали

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{2}.$$

3. В какой точке касательная плоскость к эллиптическому параболоиду $z = 2x^2 + 4y^2$ параллельна плоскости $8x - 32y - 2z + 3 = 0$? Написать уравнения нормали и касательной плоскости в этой точке.

В данном случае плоскость задана уравнением, разрешенным относительно z, т. е. уравнением вида (13.5), где $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$.

Уравнение касательной плоскости в произвольной точке M в соответствии с формулой (13.6) имеет вид

$$z - z_0 = 4x_0(x - x_0) + 8y_0(y - y_0)$$

или

$$4x_0(x - x_0) + 8y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \qquad (A)$$

Эта плоскость по условию задачи должна быть параллельна плоскости $8x - 32y - 2z + 3 = 0$. Так как плоскости параллельны, то их коэффициенты при соответствующих текущих координатах пропорциональны:

$$\frac{4x_0}{8} = \frac{8y_0}{-32} = \frac{-1}{-2},$$

откуда

$$\frac{1}{2} x_0 = \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{4} y_0 = \frac{1}{2},$$

т. е.

$$x_0 = 1, \quad y_0 = -2.$$

Из уравнения $z = 2x^2 + 4y^2$ находим $z_0 = 18$. Следовательно, $M_0(1, -2, 18)$ — искомая точка.

Уравнение (А) при полученных значениях x_0, y_0, z_0 принимает вид

$$4(x-2) - 16(y+2) - (z-18) = 0$$

или

$$4x - 16y - z - 22 = 0.$$

В соответствии с формулой (13.7) составляем уравнения нормали в точке $M_0(1, -2, 18)$:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-16} = \frac{z-18}{-1}.$$

Задачи

Составить уравнения нормали и касательной плоскости к каждой из следующих поверхностей в указанной точке:

1. $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 9$, $M_0(1, -1, 1)$.
2. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $M_0(3, 4, 5)$.
3. $z = 4x^2 - 9y^2$, $M_0(1, 1, -5)$.
4. $x = 2y^2 + 3z^2$, $M_0(5, 1, 1)$.
5. В каких точках поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y + 2z + 12 = 0$$

касательные плоскости к ней параллельны координатным плоскостям?

6. К поверхности $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ провести касательную плоскость, отсекающую на осях координат равные отрезки.

Ответы

1. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{4}$; $2x - 3y + 4z - 9 = 0$. 2. $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{-5}$; $3x + 4y - 5z = 0$. 3. $\frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{-18} = \frac{z+5}{-1}$; $8x - 18y - z + 5 = 0$. 4. $\frac{x-5}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{6}$, $x - 4y - 6z + 5 = 0$

5. В точках $M_1(-7, 2, -1)$, $M_2(-1, 2, -1)$ касательные плоскости параллельны Oyz; в точках $M_3(-4, 5, -1)$, $M_4(-4, -1, -1)$ плоскости параллельны Oxz; в точках $M_5(-4, 2, 2)$, $M_6(-4, 2, -4)$ плоскости параллельны Oxy. 6. $x + y + z - 3 = 0$; $x + y + z + 3 = 0$.

§ 13.2. Экстремум функции нескольких переменных

Максимумом (минимумом) функции $z = f(x, y)$ называется такое ее значение $f(x_0, y_0)$, которое больше (меньше) всех других значений, принимаемых ею в точках, достаточно близких к точке $M_0(x_0, y_0)$ и отличных от нее.

Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом*. Точка, в которой достигается экстремум, называется *точкой экстремума*.

Аналогично определяется экстремум функции трех и более переменных.

Экстремум функции нескольких переменных может достигаться лишь в точках, лежащих внутри области ее определения, в которых все частные производные первого порядка обращаются в нуль. Такие точки называются *критическими*. Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ критические точки находятся из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x, y) = 0; \\ f'_y(x, y) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13.8)$$

Условия (13.8) являются *необходимыми условиями* экстремума. *Достаточные условия* экстремума для функции $z = f(x, y)$ выражаются с помощью определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2, \qquad (13.9)$$

где

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0), \qquad (13.10)$$

а именно:

1) если $\Delta > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ — точка экстремума: при $A < 0$ (или $C < 0$) — точка максимума, при $A > 0$ (или $C > 0$) — точка минимума,

2) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума.

Если $\Delta = 0$, то вопрос о наличии или отсутствии экстремума функции остается открытым (требуется дальнейшее исследование функции, например, по знаку приращения Δf вблизи этой точки).

Примеры

1. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy.$$

Находим частные производные первого и второго порядка:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 9y; \quad f'_y(x, y) = 3y^2 + 9x;$$

$$f''_{xx}(x, y) = 6x; \quad f''_{xy}(x, y) = 9; \quad f''_{yy}(x, y) = 6y.$$

Обращая в нуль первые производные, получим систему уравнений для определения критических точек:

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 9y = 0, \\ 3y^2 + 9x = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} x^2 + 3y = 0, \\ y^2 + 3x = 0. \end{aligned}\right\}$$

Определяя y из первого уравнения и подставляя его выражение

$$y = -\frac{1}{3}x^2 \qquad \text{(A)}$$

во второе уравнение, получим

$$\left(-\frac{1}{3}x^2\right)^2 + 3x = 0, \quad x^4 + 27x = 0$$

или

$$x(x^3 + 27) = 0,$$

откуда

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -3.$$

(Комплексные корни уравнения $x^3 + 27 = 0$ или $(x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$ не принимаем во внимание.)

Находим значения y, соответствующие значениям $x_1 = 0$, $x_2 = -3$. Из уравнения (A) имеем $y_1 = 0$, $y_2 = -3$. Получены две критические точки $M_1(0, 0)$, $M_2(-3, -3)$.

Вычислим значения частных производных второго порядка в этих точках:

$$A_1 = f''_{xx}(0, 0) = 0, \quad B_1 = f''_{xy}(0, 0) = 9, \quad C_1 = f''_{yy}(0, 0) = 0,$$

$$A_2 = f''_{xx}(-3, -3) = -18, \quad B_2 = f''_{xy}(-3, -3) = 9,$$

$$C_2 = f''_{yy}(-3, -3) = -18.$$

Находим определитель (13.9):

$$\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 0\cdot 0 - 9^2 = -81;$$

$$\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = (-18)(-18) - 9^2 = 243.$$

В силу достаточных условий заключаем, что в точке M_1 нет экстремума, так как $\Delta_1 < 0$, в точке M_2 функция имеет максимум, ибо $\Delta_2 > 0$ и $A_2 < 0$, причем

$$\max f(x, y) = f(-3, -3) = 27.$$

2. Найти экстремум функции

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 18x^2 - 18xy - 18y^2 + 57x + 138y + 290.$$

Находим первые и вторые частные производные:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 36x - 18y + 57;$$

$$f'_y(x, y) = 6xy - 18x - 36y + 138;$$

$$f''_{xx}(x, y) = 6x - 36; \quad f''_{xy}(x, y) = 6y - 18; \quad f''_{yy}(x, y) = 6x - 36.$$

Приравнивая нулю первые производные, получаем систему уравнений для определения критических точек:

$$\left.\begin{aligned} &3x^2 + 3y^2 - 36x - 18y + 57 = 0;\\ &6xy - 18x - 36y + 138 = 0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &x^2 + y^2 - 12x - 6y + 19 = 0;\\ &2xy - 6x - 12y + 46 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Сложив почленно эти уравнения, получим уравнение

$$x^2 + y^2 + 2xy - 18x - 18y + 65 = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$(x+y)^2 - 18(x+y) + 65 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно $(x+y)$, решая его, находим

$$x + y = 13, \quad x + y = 5. \qquad \text{(B)}$$

Вычитая почленно второе уравнение системы (A) из первого, получаем

$$x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 27 = 0$$

или

$$(x-y)^2 - 6(x-y) - 27 = 0,$$

откуда

$$x - y = 9, \quad x - y = -3. \qquad \text{(C)}$$

Таким образом для определения критических точек получены четыре системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=13;\\ x-y&=9; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x+y&=13;\\ x-y&=-3; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x+y&=5;\\ x-y&=9; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x+y&=5;\\ x-y&=-3. \end{aligned}\right\}$$

Решая эти системы, находим четыре критические точки $M_1(11, 2)$, $M_2(5, 8)$, $M_3(7, -2)$, $M_4(1, 4)$.

Вычисляем значения частных производных второго порядка в указанных точках:

$$A_1 = f''_{xx}(11, 2) = 30, \quad B_1 = f''_{xy}(11, 2) = -6,$$

$$C_1 = f''_{yy}(11, 2) = 30;$$

$$A_2 = f''_{xx}(5, 8) = -6, \quad B_2 = f''_{xy}(5, 8) = 30,$$

$$C_2 = f''_{yy}(5, 8) = -6;$$

$$A_3 = f''_{xx}(7, -2) = 6, \quad B_3 = f''_{xy}(7, -2) = -30.$$

$$C_3 = f''_{yy}(7, -2) = 6;$$

$$A_4 = f''_{xx}(1, 4) = -30, \quad B_4 = f''_{xy}(1, 4) = 6,$$

$$C_4 = f''_{yy}(1, 4) = -30$$

и значения определителя (13.9):

$$\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 30\cdot 30 - (-6)^2 = 864;$$

$$\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = (-6)(-6) - 30^2 = -864;$$

$$\Delta_3 = A_3C_3 - B_3^2 = 6\cdot 6 - (-30)^2 = -864;$$

$$\Delta_4 = A_4C_4 - B_4^2 = (-30)(-30) - 6^2 = 864.$$

Так как $\Delta_2 < 0$ и $\Delta_3 < 0$, то в точках M_2 и M_3 экстремумов нет Поскольку $\Delta_1 > 0$ и $A_1 > 0$, то точка M_1 является точкой минимума, причем

$$\min f(x, y) = f(11, 2) = 10.$$

Так как $\Delta_4 > 0$ и $A_4 < 0$, то точка M_4 есть точка максимума, причем

$$\max f(x, y) = f(1, 4) = 570.$$

Задачи

Найти экстремумы функций:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$.
2. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7$.
3. $z = x^3 + y^3 - 6xy$.
4. $z = x^3 + y^3 - 3axy$.
5. $z = x^3 - 7x^2 + xy - y^2 + 9x + 3y + 12$.

Ответы

1. $\min f(x, y) = f(1, -2) = -4$. 2. $\min f(x, y) = f(5, 3) = -42$. 3. $z_{\min} = z(2, 2) = -8$. 4. Минимум при $a > 0$, максимум при $a < 0$. 5. $z_{\max} = z(1, 2) = 19$.

§ 13.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области, достигает в ней наибольшего и наименьшего значений или в критических точках, или в точках, лежащих на границе области.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой ограниченной области необходимо:

1. Найти критические точки (лежащие внутри данной области) и вычислить в них значения функции.

2. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области.

3. Сравнить все полученные значения функции: самое большее (меньшее) и будет наибольшим (наименьшим) значением функции в данной области.

Замечание 1. В данном случае нет необходимости исследовать функцию на экстремум с помощью частных производных второго порядка. Требуется найти критические точки и значения функции в них.

Замечание 2. Для функции $z = f(x, y)$ граница области состоит из нескольких дуг (отрезков), уравнения которых $y = f_i(x)$, где $a \leqslant x \leqslant b$ или $x = \varphi(y)$, где $c \leqslant y \leqslant d$, поэтому на соответствующих дугах границы данная функция является функцией одной переменной:

$$z = f[x, f(x)] = z(x) \quad \text{или} \quad z = f[\varphi(y), y] = z(y).$$

Если граница задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

то данная функция также превращается в функцию одной переменной

$$z = f(x, y) = f[\varphi_1(t), \varphi_2(t)] = z(t).$$

Примеры

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

Данная функция имеет частные производные:

$$f_x'(x, y) = 4x; \quad f_y'(x, y) = -4y.$$

Приравнивая нулю эти производные, получим систему уравнений, из которой находим $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Значение функции в критической точке $M_0(0, 0)$ равно нулю:

$$z_0 = f(0, 0) = 2\cdot 0 - 2\cdot 0 = 0.$$

Границей данной замкнутой области является окружность

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{или} \quad y^2 = 9 - x^2,$$

где $-3 \leqslant x \leqslant 3$. Функция $z = 2x^2 - 2y^2$ на границе области становится функцией одной переменной x:

$$z(x) = 2x^2 - 2(9 - x^2) = 4x^2 - 18,$$

аргумент которой изменяется на отрезке $[-3, 3]$.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $z(x)$ на указанном отрезке. Дифференцируя эту функцию, получаем $z'(x) = 8x$. Из уравнения $z'(x) = 0$ находим единственную критическую точку $x_1 = 0$, в которой функция $z(x)$ имеет значение $z_1 = -18$. Вычислим ее значения на концах отрезка $[-3, 3]$, т. е. в точках $x = -3$, $x = 3$:

$$z_2 = z(-3) = 4(-3)^2 - 18 = 18;$$

$$z_3 = z(3) = 4\cdot 3^2 - 18 = 18.$$

Сравнивая между собой числа z_0, z_1, z_2, z_3, заключаем, что функция $z = 2x^2 - 2y^2$ имеет наибольшее значение, равное 18 и наименьшее значение, равное -18, причем:

$$z_{\text{наиб}} = f(-3, 0) = f(3, 0) = 18;$$

$$z_{\text{наим}} = f(0, -3) = f(0, 3) = -18.$$

Замечание. Наибольшее и наименьшее значения функции на границе области можно было найти и другим способом. Окружность $x^2 + y^2 = 9$ имеет следующие параметрические уравнения:

$$x = 3\cos t; \quad y = 3\sin t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Подставляя эти выражения для x и y в формулу $z = 2x^2 - 2y^2$, получим функцию одной переменной t:

$$z(t) = 2(3\cos t)^2 - 2(3\sin t)^2 = 18(\cos^2 t - \sin^2 t)$$

или

$$z(t) = 18\cos 2t,$$

для которой $z'(t) = -36\sin 2t$. На отрезке $[0, 2\pi]$ функция $z(t) = 18\cos 2t$ имеет критические точки $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$, $t_3 = \pi$, $t_4 = \frac{3}{2}\pi$, которым соответствуют следующие значения функции:

$$z_1 = z(t_1) = 18; \quad z_2 = z(t_2) = -18;$$

$$z_3 = z(t_3) = 18; \quad z_4 = z(t_4) = -18.$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy$ в прямоугольнике с вершинами $A(-3, -3)$, $B(-3, 2)$, $C(1, 2)$, $D(1, -3)$.

Возьмем частные производные данной функции:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 6y; \quad f'_y(x, y) = 3y^2 + 6x.$$

Из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 6y &= 0; \\ 3y^2 + 6x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} x^2 + 2y &= 0; \\ y^2 + 2x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

находим две критические точки $M_1(0, 0)$, $M_2(-2, -2)$, обе они принадлежат прямоугольнику $ABCD$ (рис. 13.1).

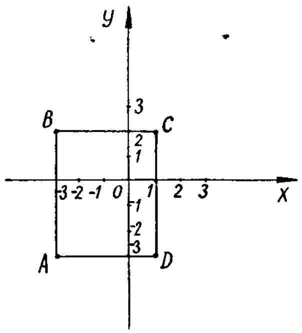

Рис. 13.1

Вычисляем значения функции в этих точках:

$$z_1 = f(0, 0) = 0, \quad z_2 = f(-2, -2) = 8.$$

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе прямоугольника $ABCD$. Эту границу удобно разбить на четыре отрезка AB, BC, CD, DA, на каждом из которых могут оказаться свои критические точки. Кроме того, необходимо учесть и концы отрезков, т. е. точки A, B, C и D.

Ищем критические точки на отрезке AB, уравнение которого $x = -3$, причем $-3 \leqslant y \leqslant 2$. На этом отрезке данная функция становится функцией одной переменной y:

$$z = f(-3, y) = -27 + y^3 - 18y; \quad z(y) = y^3 - 18y - 27.$$

Производная этой функции

$$z' = 3y^2 - 18$$

обращается в нуль при $y = -\sqrt{6} \approx -2{,}45$, $y = \sqrt{6} \approx 2{,}45$. Второго значения рассматривать не будем, так как оно не принадлежит отрезку AB, для которого $-3 \leqslant y \leqslant 2$. Вычислим значение функции $z(y)$ при $y = -\sqrt{6}$:

$$z_3 = z(-\sqrt{6}) = (-\sqrt{6})^3 - 18(-\sqrt{6}) - 27 = 12\sqrt{6} - \\ - 27 \approx 2{,}4.$$

На отрезке BC $y = 2$ $(-3 \leqslant x \leqslant 1)$, поэтому

$$z = f(x, 2) = x^3 + 8 + 12x.$$

Функция $z(x) = x^3 + 12x + 8$ критических точек не имеет, так как ее производная $z'(x) = 3x^2 + 12$ в нуль не обращается.

На отрезке CD, где $x = 1$ $(-3 \leqslant y \leqslant 2)$,

$$z = f(1, y) = 1 + y^3 + 6y,$$

также нет критических точек.

На отрезке DA $y = -3$ $(-3 \leqslant x \leqslant 1)$, поэтому

$$z = f(x, -3) = x^3 - 27 - 18x.$$

Функция $z(x) = x^3 - 18x - 27$ имеет критическую точку $x = -\sqrt{6}$ (точка $x = \sqrt{6}$, в которой производная $z'(x) = 3x^2 - 18$ также обращается в нуль, отрезку DA не принадлежит).

Вычисляем значение функции $z(x)$ в точке $x = -\sqrt{6}$:

$$z_4 = z(-\sqrt{6}) = (-\sqrt{6})^3 - 18(-\sqrt{6}) - 27 = \\ = 12\sqrt{6} - 27 \approx 2{,}4.$$

Осталось найти значения функции $z = f(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy$ в вершинах A, B, C, D:

$$z_5 = f(A) = f(-3, -3) = (-3)^3 + (-3)^3 + 6(-3)(-3) = 0;$$
$$z_6 = f(B) = f(-3, 2) = (-3)^3 + 2^3 + 6(-3)2 = -55;$$
$$z_7 = f(C) = f(1, 2) = 1^3 + 2^3 + 6 \cdot 1 \cdot 2 = 21;$$
$$z_8 = f(D) = f(1, -3) = 1^3 + (-3)^3 + 6(-3)1 = -44.$$

Сравнивая z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, заключаем, что функция $z = x^3 + y^3 + 6xy$ в прямоугольнике $ABCD$ достигает наименьшего значения, равного -55, в точке B, и наибольшего значения, равного 21, — в точке C.

3. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих сумму трех измерений, равную положительной постоянной a, найти тот, объем которого наибольший.

Обозначим измерения прямоугольного параллелепипеда через x, y, z. Из условия задачи видно, что $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Объем параллелепипеда V выразится формулой

$$V = xyz.$$

По условию задачи

$$x + y + z = a, \quad a > 0,$$

откуда

$$z = a - x - y,$$

поэтому

$$V = xy(a - x - y).$$

Полученная функция двух переменных определена внутри треугольника OBA, ограниченного прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x +$

$+ y = a$ (рис. 13.2). Функция $V(x, y) = xy(a - x - y)$ имеет частные производные:

$$V'_x(x, y) = ay - 2xy - y^2; \quad V'_y(x, y) = ax - x^2 - 2xy,$$
$$V''_{xx}(x, y) = -2y, \quad V''_{xy} = a - 2x - 2y, \quad V''_{yy} = -2x.$$

Приравняв нулю частные производные первого порядка, находим:

$$\left.\begin{aligned} ay - 2xy - y^2 &= 0; \\ ax - x^2 - 2xy &= 0. \end{aligned}\right\}$$

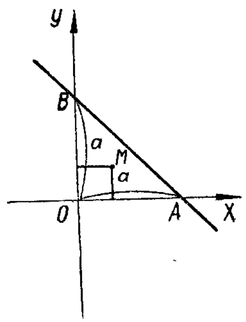

Рис. 13.2

Так как $x \neq 0$, $y \neq 0$, то сокращая первое уравнение на y, второе — на x, получим систему

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= a; \\ x + 2y &= a, \end{aligned}\right\}$$

решение которой

$$x_0 = \frac{a}{3}, \quad y_0 = \frac{a}{3}.$$

Критическая точка $M\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ лежит внутри области определения функции, т. е. внутри треугольника OAB.

Вычислим в этой точке значения вторых частных производных:

$$V''_{xx}(x_0, y_0) = -\frac{2}{3}a; \quad V''_{xy}(x_0, y_0) = -\frac{1}{3}a;$$
$$V''_{yy}(x_0, y_0) = -\frac{2}{3}a$$

и определитель (13.9):

$$\Delta = \left(-\frac{2}{3}a\right)\left(-\frac{2}{3}a\right) - \left(-\frac{1}{3}a\right)^2 = \frac{1}{3}a^2.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A = V''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, то точка M является точкой максимума.

Из уравнения $z = a - x - y$ находим $z_0 = \frac{a}{3}$. Таким образом, $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{a}{3}$; искомый параллелепипед есть куб, ребро которого равно $\frac{a}{3}$ и объем $V = \frac{a^3}{27}$.

Задачи

Найти наибольшие и наименьшие значения функций в указанных замкнутых областях:

1. $z = f(x, y) = 3x + 3y$ в круге $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

2. $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

3. $z = x^2y(4 - x - y)$ в треугольнике $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 6$.

4. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в треугольнике $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$.

5. Положительное число a разложить на три положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

6. Открытый прямоугольный ящик должен иметь данный объем V. Определить размеры ящика, при которых на его изготовление потребуется наименьшее количество материала.

7. Найти прямоугольный параллелепипед данной поверхности S, имеющий наибольший объем.

8. Дан треугольник с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. В плоскости треугольника ABC найти точку, для которой сумма квадратов расстояний до его вершин будет наименьшей.

Ответы

1. $z_{\text{наиб}} = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$; $z_{\text{наим}} = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -6\sqrt{2}$. **2.** $z_{\text{наиб}} = f(-1, 0) = f(1, 0) = 1$; $z_{\text{наим}} = f(0, -1) = f(0, 1) = -1$. **3.** $z_{\text{наиб}} = f(2, 1) = 4$; $z_{\text{наим}} = f(4, 2) = -64$. **4.** $z_{\text{наиб}} = f(2, -1) = 13$; $z_{\text{наим}} = f(1, 1) = f(0, -1) = -1$. **5.** $x = y = z = \frac{a}{3}$. **6.** $x = y = (2V)^{\frac{1}{3}}$; $z = \frac{1}{2}(2V)^{\frac{1}{3}}$. **7.** $x = y = z = a$. **8.** $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. $M_0(x_0, y_0)$ — точка пересечения медиан треугольника ABC.

VI. Дифференциальные уравнения

Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные различных порядков.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Дифференциальное уравнение n-го порядка в общем виде записывается так:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Решением дифференциального уравнения называется любая функция $y = f(x)$, обращающая это уравнение в тождество.

Решение $F(x, y) = 0$, заданное в неявном виде, называется *интегралом* дифференциального уравнения.

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

зависящая от x и n произвольных *независимых* постоянных C_1, $C_2, \ldots, C_n$, обращающая это уравнение в тождество.

Общее решение, заданное в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

называется *общим интегралом.*

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, которое получается из общего, если придать определенные значения произвольным постоянным, т. е. решение вида:

$$y = \varphi(x, C_1^\circ, C_2^\circ, \ldots, C_n^\circ),$$

где $C_1^\circ, C_2^\circ, \ldots, C_n^\circ$ — фиксированные числа.

Частным интегралом называется интеграл, полученный из общего путем фиксирования произвольных постоянных:

$$\Phi(x, y, C_1^\circ, C_2^\circ, \ldots, C_n^\circ) = 0,$$

где $C_1^\circ, C_2^\circ, C_3^\circ, \ldots, C_n^\circ$ — фиксированные числа.

Примеры

1. Определить порядок дифференциального уравнения:

1) $y'' - 3y' + 2y - 4 = 0$;

2) $x(1 + x)y' - (1 + 2x)y - (1 + 2x) = 0$;

3) $y^{\mathrm{IV}} - 16y'' = 0$;

4) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Первое уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка, так как порядок старшей, входящей в него производной равен 2, второе — уравнением первого порядка, ибо оно содержит только первую производную. (Заметим, что в первом уравнении коэффициенты при y, y', y'' и свободный член являются числами, во втором уравнении они зависят от x.) Третье уравнение является уравнением четвертого порядка, так как порядок старшей производной равен 4, четвертое — уравнением третьего порядка, поскольку третья производная является старшей производной, содержащейся в этом уравнении. (Заметим, что третье уравнение не содержит y, y', y''' и x, четвертое также не содержит x.)

2. Показать, что функция $y = e^{2x}$ является решением дифференциального уравнения $y''' - 8y = 0$.

Найдем третью производную данной функции:

$$y' = 2e^{2x}, \quad y'' = 4e^{2x}, \quad y''' = 8e^{2x}.$$

Подставляя выражения для y и y''' в дифференциальное уравнение, получим тождество $8e^{2x} - 8e^{2x} = 0$. Это и означает, что функция $y = e^{2x}$ есть решение данного уравнения. Это решение — частное, так как оно не содержит произвольных постоянных.

3. Показать, что функция $y = C_1e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$ удовлетворяет уравнению $y'' - 4y' + 3y = x - 1$. Является ли это решение общим?

Находим две первые производные данной функции:

$$y' = 3C_1e^{3x} + \frac{1}{3}, \quad y'' = 9C_1e^{3x}.$$

Подставляем выражения для y, y' и y'' в исходное уравнение:

$$9C_1e^{3x} - 4\left(3C_1e^{3x} + \frac{1}{3}\right) + 3\left(C_1e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right) =$$

$$= 9C_1e^{3x} - 12C_1e^{3x} - \frac{4}{3} + 3C_1e^{3x} + x + \frac{1}{3} \equiv x - 1.$$

Так как получено тождество, то функция $y = C_1e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$ является решением данного уравнения. Это решение не является общим, ибо оно содержит только одну произвольную постоянную, а порядок уравнения равен 2.

4. Убедиться в том, что функция $y = C_1e^{x} + C_2e^{x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$ является решением уравнения $y'' - 4y' + 3y = x - 1$.

Найдем производные

$$y' = C_1e^{x} + C_2e^{x} + \frac{1}{3}, \quad y'' = C_1e^{x} + C_2e^{x}$$

и, подставляя выражения для y, y' и y'' в данное уравнение, получаем тождество

$$(C_1e^x + C_2e^x) - 4\left(C_1e^x + C_2e^x + \frac{1}{3}\right) + 3\left(C_1e^x + C_2e^x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right) =$$
$$= (C_1e^x + C_2e^x) - 4(C_1e^x + C_2e^x) - \frac{4}{3} + 3(C_1e^x + C_2e^x) +$$
$$+ x + \frac{1}{3} \equiv x - 1.$$

Следовательно, данная функция является решением дифференциального уравнения. Это решение будет частным, так как оно содержит лишь одну *независимую* постоянную (постоянные C_1 и C_2 в данном случае не являются независимыми: их число можно уменьшить; поскольку сумма двух постоянных также есть постоянная, то можно обозначить $C_1 + C_2 = C$), тогда

$$y = Ce^x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}.$$

5. Показать, что функция $y = C_1e^{3x} + C_2e^x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$ является общим решением уравнения $y'' - 4y' + 3y = x - 1$.

Данная функция содержит две независимые произвольные постоянные (их число нельзя уменьшить, как в предыдущем примере). Если мы покажем, что функция удовлетворяет уравнению, то это и будет означать, что она является общим решением данного дифференциального уравнения.

Поскольку

$$y' = 3C_1e^{3x} + C_2e^x + \frac{1}{3}, \quad y'' = 9C_1e^{3x} + C_2e^x,$$

то подстановка выражений y, y', y'' в уравнение приводит к тождеству

$$9C_1e^{3x} + C_2e^x - 4\left[3C_1e^{3x} + C_2e^x + \frac{1}{3}\right] + 3\left[C_1e^{3x} + C_2e^x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right] =$$
$$= 9C_1e^{3x} + C_2e^x - 12C_1e^{3x} - 4C_2e^x - \frac{4}{3} + 3C_1e^{3x} + 3C_2e^x +$$
$$+ x + \frac{1}{3} \equiv x - 1.$$

6. Дано общее решение $y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$ дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$. Какие частные решения получаются при $C_1 = 2$, $C_2 = 3$? При каких значениях параметров C_1 и C_2 получаются частные решения: $y = \sin 2x$, $y = \cos 2x$?

Подставляя значения $C_1 = 2$, $C_2 = 3$ в формулу для общего решения, получим частное решение $y = 2\sin 2x + 3\cos 2x$. Частное решение $y = \sin 2x$ получается из общего при $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, частное решение $y = \cos 2x$ при $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

7. Показать, что функция $y^2 - x^2 - Cy = 0$ является общим интегралом дифференциального уравнения $y'(x^2 + y^2) - 2xy = 0$.

Дифференцируя по x данную неявную функцию, получим

$$2yy' - 2x - Cy' = 0, \quad y'(2y - C) = 2x, \quad y' = \frac{2x}{2y - C}.$$

Из уравнения $y^2 - x^2 - Cy = 0$ находим

$$C = \frac{y^2 - x^2}{y}$$

и подставляем его выражение в формулу для производной y':

$$y' = \frac{2x}{2y - \frac{y^2 - x^2}{y}}, \quad y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Подстановка производной в дифференциальное уравнение приводит к тождеству

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2) - 2xy \equiv 0.$$

Таким образом, неявная функция $y^2 - x^2 - Cy = 0$, зависящая от одной произвольной постоянной, есть решение дифференциального уравнения, т. е. является общим интегралом этого уравнения.

8. Найти дифференциальное уравнение, общим решением которого является функция $y = C_1x + C_2$, зависящая от двух произвольных постоянных.

Дважды дифференцируя данную функцию, исключаем параметры C_1 и C_2:

$$y' = C_1, \quad y'' = 0.$$

Уравнение $y'' = 0$ удовлетворяет условию задачи.

9. Составить дифференциальное уравнение, общее решение которого

$$y = C_1x + \frac{C_2}{x}.$$

Дифференцируя данную функцию, получим:

$$y' = C_1 - \frac{C_2}{x^2}, \quad y'' = \frac{2C_2}{x^3}.$$

Из уравнений

$$y = C_1x + \frac{C_2}{x}, \quad y' = C_1 - \frac{C_2}{x^2}$$

исключим C_1. Умножая второе уравнение на x и вычитая из него первое, получим

$$xy' - y = -\frac{2C_2}{x}.$$

Прибавляя это уравнение к уравнению $y'' = \frac{2C_2}{x^3}$, умноженному на x^2, исключим C_2:

$$xy' - y + y''x^2 = 0.$$

Полученное уравнение является искомым.

10. Найти дифференциальное уравнение семейства кривых $y = Cx^3$.

Дифференцируя данную функцию, получаем $y' = 3Cx^2$. Подставляя сюда выражение $C = \frac{y}{x^3}$, полученное из данного уравнения, находим искомое дифференциальное уравнение

$$y' = 3\frac{y}{x^3}\cdot x^2, \quad y' = \frac{3y}{x}.$$

Задачи

1. Определить порядок дифференциального уравнения:

1) $y' + p(x)y = q(x)$;
2) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$;
3) $y''' - ay'' + by' + Cy = 0$;
4) $y^{V} + y^{IV} - y = 0$.

2. Дано общее решение $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Найти частные решения в случаях: 1) $C_1 = 0$, $C_2 = 1$; 2) $C_1 = 1$, $C_2 = 0$; 3) $C_1 = 1$, $C_2 = -2$.

3. Дан общий интеграл $x^2 - y^2 - Cx = 0$ дифференциального уравнения $2xyy' = x^2 + y^2$. Найти частные интегралы при $C = 4$, $C = 6$, $C = -8$, $C = -10$ и построить их.

В задачах 4—10 показать, что данные функции удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям; установить, какими решениями они являются — общими или частными:

4. $y = x(\ln x^2 + C)$; $xy' - y = 2x$.

5. $y = \frac{(x+1)^4}{2} + (x+1)^2$, $\quad y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.

6. $y = C_1e^x \sin x$, $y'' - 2y' + 2y = 0$.

7. $y = C_1 \sin 7x + C_2 \cos 7x$, $y'' + 49y = 0$.

8. $x^2 + y^2 - C^2 = 0$, $x + yy' = 0$.

9. $y^2 - x^2 - 2y = 0$, $y'(x^2 + y^2) - 2xy = 0$.

10. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$, $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Найти дифференциальное уравнение семейства кривых:

11. $y = Cx^2$. **12.** $y = C\sin x$.

Найти дифференциальное уравнение, общим решением которого является данная функция:

13. $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x}$. **14.** $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$.

15. $y = C_1 + C_2 \cos(x + C_3)$. **16.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$.

Ответы

1. 1) первый порядок; 2) второй; 3) третий; 4) пятый. **2.** 1) $y = e^{2x}$; 2) $y = e^x$; 3) $y = e^x - 2e^{2x}$. **3.** 1) $x^2 - y^2 - 4x = 0$ или $(x-2)^2 - y^2 = 4$ (равнобочная гипербола, центр которой находится в точке M (2, 0), полуоси

равны двум); 2) $x^2 - y^2 - 6x = 0$; 3) $x^2 - y^2 + 8x = 0$; 4) $x^2 - y^2 + 10x = 0$. **4.** Общее решение. **5.** Частное решение. **8.** Общий интеграл. **9.** Частный интеграл. **10.** Общее решение **11.** $y' = \frac{2y}{x}$. **12.** $y' = y \operatorname{ctg} x$. **13.** $y'' - 2y' - 8y = 0$. **14.** $y'' + 9y = 0$. **15.** $y''' + y' = 0$. **16.** $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Глава 14. Дифференциальные уравнения первого порядка

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{14.1}$$

Если это уравнение разрешимо относительно y', то

$$y' = f(x, y) \text{ или } dy = f(x, y)\,dx. \tag{14.2}$$

Уравнение (14.2) можно записать так:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{14.3}$$

Общим решением уравнения (14.1) называется функция

$$y = \varphi(x, C) \tag{14.4}$$

от x и произвольной постоянной C, обращающая это уравнение в тождество.

Общее решение, заданное в неявном виде

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{14.5}$$

называется *общим интегралом*.

Геометрически общее решение (и общий интеграл) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, зависящих от одного параметра C.

Частным решением уравнения (14.1) называется решение, полученное из общего решения (14.4) при фиксированном значении C:

$$y = \varphi(x, C_0), \tag{14.6}$$

где C_0 — фиксированное число.

Частным интегралом уравнения (14.1) называется интеграл, полученный из общего интеграла (14.5) при фиксированном значении C:

$$\Phi(x, y, C_0) = 0. \tag{14.7}$$

Задача Коши. *Найти решение $y = f(x)$ дифференциального уравнения* (14.1), *удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y = y_0$ при $x = x_0$.* Другими словами: найти интегральную кривую уравнения (14.1), проходящую через данную точку $M_0(x_0, y_0)$.

§ 14.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$X(x)Y(y)\,dx + X_1(x)Y_1(y)\,dy = 0, \tag{14.8}$$

где $X(x)$, $X_1(x)$ — функции только от x; $Y(y)$, $Y_1(y)$ — функции только от y.

Уравнение (14.8) делением на произведение $Y(y)\,X_1(x)$ приводится к *уравнению с разделенными переменными:*

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = 0. \tag{14.9}$$

Общий интеграл уравнения (14.9)

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = C. \tag{14.10}$$

Замечание. При делении на произведение $Y(y)\,X_1(x)$ можно потерять те решения уравнения (14.8), которые обращают это произведение в нуль.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция $x = a$, где a есть корень уравнения $X_1(x) = 0$, т. е. $X_1(a) = 0$, является решением уравнения (14.8). Функция $y = b$, где b корень уравнения $Y_1(y) = 0$, т. е. $Y_1(b) = 0$, также является решением уравнения (14.8).

Решения $x = a$ и $y = b$, если они имеются, геометрически представляют собой прямые линии, соответственно параллельные оси Oy и оси Ox.

Примеры

1. Проинтегрировать уравнение

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$

Найти интегральную кривую, проходящую через точку $M(3, -4)$.

Данное уравнение можно переписать так:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ или } x\,dx + y\,dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделенными переменными (коэффициент при dx — функция только от x, при dy — функция только от y).

Интегрируя, получим

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1 \text{ или } x^2 + y^2 = 2C_1.$$

Полагая $2C_1 = C^2$ (что можно сделать, так как $x^2 + y^2 \geqslant 0$), общий интеграл запишем в виде

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Геометрически общий интеграл представляет собой семейство окружностей радиусов C с центром в начале координат (рис. 14.1).

Найдем ту окружность, которая проходит через точку $M(3, -4)$. Подставляя координаты точки M в уравнение $x^2 + y^2 = C^2$, находим

$$3^2 + (-4)^2 = C^2 \text{ или } C^2 = 25.$$

Подставив значение C^2 в общий интеграл, получим искомую окружность

$$x^2 + y^2 = 25.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

Найти частное решение, удовлетворяющее условию: $y = 3$ при $x = 2$.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0.$$

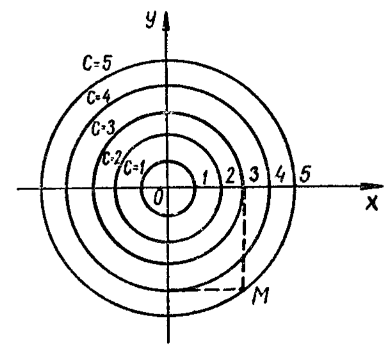

Рис. 14.1

Интегрируя, находим

$$\ln|y| + \ln|x| = C_1. \tag{A}$$

Постоянную C_1 можно записать в виде

$$C_1 = \ln|C| \quad (C \neq 0)$$

(поскольку любое положительное или отрицательное число C_1 может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|C|$).

Подставляя выражение для C_1 в равенство (А) и преобразуя его, получим

$$\ln|xy| = \ln|C| \quad (C \neq 0).$$

Потенцируя последнее равенство, находим общий интеграл $xy = C$ ($C \neq 0$), геометрически представляющий собой семейство гипербол, асимптотами которых являются координатные оси.

Решим задачу Коши для данного уравнения по заданным начальным условиям: $y_0 = 3$ при $x_0 = 2$. Подставив эти значения в уравнение $xy = C$, получим $2 \cdot 3 = C$ или $C = 6$.

Таким образом, получено частное решение $xy = 6$. Это гипербола, проходящая через точку $M_0(2, 3)$.

Замечание. Разделяя переменные, мы предполагали, что $y \neq 0$, и, следовательно, могли потерять решение $y = 0$. Действительно, $y = 0$ — решение уравнения (в чем можно убедиться непосредственно), оно может быть получено из общего интеграла при $C = 0$. Таким образом, общий интеграл дается формулой

$$xy = C,$$

где C может принимать любые действительные значения (в том числе и $C=0$).

3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(1 + x^2)\,dy - 2xy\,dx = 0.$$

Найти частное решение, удовлетворяющее условию: $y = 1$ при $x = 0$.

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (коэффициент при dy — функция только от x, при dx — произведение функций, одна из которых зависит только от x, другая — только от y). Разделив обе части уравнения на произведение $y(1 + x^2)$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dy}{y} - \frac{2x\,dx}{1+x^2} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\ln|y| - \ln(1 + x^2) = \ln|C|$$

или

$$\ln\left(\frac{|y|}{1 + x^2}\right) = \ln|C|,$$

откуда получаем общее решение

$$y = C(1 + x^2).$$

Чтобы найти искомое частное решение, достаточно определить значение C по начальным условиям:

$$1 = C(1 + 0), \quad C = 1.$$

Следовательно, частное решение имеет вид

$$y = 1 + x^2.$$

Замечание. При делении на $y(1 + x^2)$ предполагалось, что $y(1 + x^2) \neq 0$, т. е. $y \neq 0$, $1 + x^2 \neq 0$. Но $y = 0$—решение уравнения, в чем можно непосредственно убедиться. Это решение получается из общего при $C = 0$

4. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0.$$

Вынося соответствующие множители за скобки, данное уравнение можно записать так:

$$x(y^2 + 1)\,dx + y(1 - x^2)\,dy = 0,$$

откуда видно, что это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив обе части последнего уравнения на произведение $(y^2 + 1)(1 - x^2) \neq 0$, получим

$$\frac{x\,dx}{1 - x^2} + \frac{y\,dy}{1 + y^2} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$-\ln|1 - x^2| + \ln|1 + y^2| = \ln|C|$$

или

$$\ln\left|\frac{1 + y^2}{1 - x^2}\right| = \ln|C|,$$

откуда получаем общий интеграл:

$$1 + y^2 = C(1 - x^2).$$

5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$dr - r\,d\varphi = 0.$$

В данном уравнении искомая функция обозначена буквой r, ее аргумент — буквой φ. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dr}{r} = d\varphi,$$

откуда

$$\ln r = \varphi + C_1.$$

Из последнего уравнения находим

$$r = e^{\varphi + C_1} = Ce^{\varphi},$$

где $C = e^{C_1}$.

Следовательно, общее решение определяется формулой

$$r = Ce^{\varphi}.$$

Задачи

Проинтегрировать дифференциальные уравнения, найти указанные частные решения и построить их:

1. $y' = 4x^3$; $y = 0$ при $x = 0$.
2. $(x^2 + 4)\,y' - 2xy = 0$, $y = 5$ при $x = 1$.
3. $xy' = \frac{y}{\ln x}$, $y = 1$ при $x = e$.
4. $y' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $y = 1$ при $x = 0$.
5. $y' = y^2$, $y = 1$ при $x = -1$.
6. $y' \operatorname{tg} x - y = 1$, $y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

7. $(x + 3)\,dy - (y + 3)\,dx = 0$.
8. $y' = \frac{4}{x^2 - 4}$.
9. $(xy^2 + x)\,dx + (y + x^2y)\,dy = 0$.
10. $y' = y^2 \cos x$.
11. $\sin x\,dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$.
12. $dr - r\operatorname{ctg}\varphi\,d\varphi = 0$.

Ответы

1. $y = x^4 + C$, $y = x^4$. 2. $y = C(x^2 + 4)$, $y = x^2 + 4$. 3. $y = C\ln x$, $y = \ln x$ 4. $y = -\sqrt{1 - x^2} + C$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$. 5. $y = -\frac{1}{x + C}$,

$y = -\frac{1}{x}$. 6. $y = C \sin x - 1$, $y = 2 \sin x - 1$. 7. $y = C(x+3) - 3$. 8. $y = \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$. 9. $(1+x^2)(1+y^2) = C$. 10. $y = \frac{1}{C - \sin x}$. 11. $y = \frac{(\cos x + C)^2}{4}$. 12. $r \sin \varphi = C$.

§ 14.2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение

$$P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = 0 \tag{14.11}$$

называется *однородным*, если коэффициенты $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения n, т. е. функциями, для которых при любом k выполняются тождества

$$P(kx,\ ky) \equiv k^n P(x,\ y),\ Q(kx,\ ky) \equiv k^n Q(x,\ y). \tag{14.12}$$

Уравнение (14.11) можно привести к виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{14.13}$$

С помощью подстановки

$$y = ux, \tag{14.14}$$

где u — новая неизвестная функция, однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнение

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right), \tag{14.15}$$

для которого

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{14.16}$$

преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x &= u + h; \\ y &= v + k, \end{aligned}\right\} \tag{14.17}$$

где постоянные h и k находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1 h + b_1 k + c_1 &= 0; \\ a_2 h + b_2 k + c_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{14.18}$$

сводится к однородному уравнению. При $\Delta = 0$ преобразованием $a_1 x + b_1 y = t$ уравнение (14.15) сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Примеры

1. Проинтегрировать однородное дифференциальное уравнение

$$x\,dy - (y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx = 0.$$

Замечание При $u = -1$ получаем $y = -x$ — решение уравнения. Это решение частное, оно получается из общего интеграла $x^3 + y^3 = Cxy$ при $C = 0$. При $u = 0$ получаем решение $y = 0$. Кроме того, $x = 0$ также является решением. Эти решения — частные, они получаются из общего интеграла $C_1(x^3 + y^3) = xy$ при $C_1 = 0$

4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(4y - 3x - 5)\,y' + 7x - 3y + 2 = 0.$$

Это уравнение вида (14.15)

$$y' = \frac{-7x + 3y - 2}{-3x + 4y - 5},$$

здесь $\Delta = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -28 + 9 = -19 \neq 0.$

Вводим новые переменные по формулам (14.17):

$$\left.\begin{aligned} x &= u + h; \\ y &= v + k, \end{aligned}\right\}$$

где h, k должны удовлетворять уравнениям (14.18):

$$\left.\begin{aligned} -7h + 3k - 2 &= 0; \\ -3h + 4k - 5 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эти уравнения, находим $h = \frac{7}{19}$, $k = \frac{29}{19}$. Таким образом, формулы (14.17) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= u + \frac{7}{19}; \\ y &= v + \frac{29}{19}, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$dx = du,\ dy = dv.$$

Подставляя это в исходное уравнение, получим

$$y' = \frac{dv}{du} = \frac{-7u + 3v - \frac{49}{19} + \frac{87}{19} - 2}{-3u + 4v - \frac{21}{19} + \frac{116}{19} - 5} = \frac{-7u + 3v}{-3u + 4v}$$

или

$$\frac{dv}{du} = \frac{-7 + 3\left(\frac{v}{u}\right)}{-3 + 4\left(\frac{v}{u}\right)}. \tag{A}$$

Сделаем подстановку

$$\frac{v}{u} = z,$$

откуда

$$v = uz,\ \frac{dv}{du} = \frac{dz}{du} \cdot u + z \cdot 1,$$

поэтому уравнение (A) принимает вид

$$\frac{dz}{du}\cdot u+z=\frac{-7+3z}{-3+4z}.$$

Преобразуем последнее уравнение

$$\frac{dz}{du}\cdot u=\frac{3z-7}{4z-3}-z=\frac{3z-7-4z^2+3z}{4z-3}=\frac{-(4z^2-6z+7)}{4z-3}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{(4z-3)\,dz}{4z^2-6z+7}=-\frac{du}{u}$$

или

$$\frac{(4z-3)\,dz}{2\left(2z^2-3z+\frac{7}{2}\right)}=-\frac{du}{u}.$$

Пользуясь формулой

$$\int\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}=\ln f(z),$$

из последнего уравнения находим

$$\frac{1}{2}\ln\left(2z^2-3z+\frac{7}{2}\right)=-\ln u+\frac{1}{2}\ln C_1.$$

Умножим на 2:

$$\ln\left(2z^2-3z+\frac{7}{2}\right)=\ln C_1-2\ln u,$$

$$\ln\left(2z^2-3z+\frac{7}{2}\right)+\ln u^2=\ln C_1,$$

$$\ln\left[u^2\left(2z^2-3z+\frac{7}{2}\right)\right]=\ln C_1.$$

Подставляя сюда выражение для $z=\frac{v}{u}$, получим

$$\ln\left(2v^2-3uv+\frac{7}{2}u^2\right)=\ln C_1.$$

Перейдем к переменным x, y по формулам:

$$\left.\begin{aligned} u&=x-\frac{7}{19},\\ v&=y-\frac{29}{19}.\end{aligned}\right\}$$

$$\ln\left[2\left(y-\frac{29}{19}\right)^2-3\left(x-\frac{7}{19}\right)\left(y-\frac{29}{19}\right)+\frac{7}{2}\left(x-\frac{7}{19}\right)^2\right]=\ln C_1.$$

$$2y^2-\frac{4\cdot 29}{19}y+2\left(\frac{29}{19}\right)^2-3xy+\frac{21}{19}y+\frac{87}{19}x-\frac{21\cdot 29}{19^2}+$$

$$+\frac{7}{2}x^2-\frac{49}{19}x+\frac{7\cdot 49}{2\cdot 19^2}=C_1.$$

Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$2y^2-3xy+\frac{7}{2}x^2+2x-5y=C.$$

Задачи

Проинтегрировать однородные дифференциальные уравнения:

1. $2xyy'=y^2-4x^2$.
2. $2x^2y'-4xy-y^2=0$.
3. $(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$.
4. $y^2-4xy+4x^2y'=0$.
5. $(2xy+y^2)\,dx+(2xy+x^2)\,dy=0$.
6. $xy'-y+x\operatorname{tg}\frac{y}{x}=0$.
7. $x\,dy-y\,dx=y\,dy$.
8. $(x+y)\,dx-(x-y)\,dy=0$.
9. $(x^2+y^2)\,dx-2x^2dy=0$.
10. $(x^2+y^2+xy)\,dx=x^2dy$.

Проинтегрировать уравнения, приводящиеся к однородным:

11. $3y-7x+7=(3x-7y-3)\frac{dy}{dx}$.
12. $(2x+8)\,dx+(3y-5x-11)\,dy=0$.

Ответы

1. $y^2+4x^2-8Cx=0$. 2. $2x^2+xy-Cy=0$. 3. $x^2-y^2=Cx$. 4. $y=\frac{4x}{\ln x+C}$. 5. $xy(x+y)=C$. 6. $x\sin\frac{y}{x}=C$. 7. $\ln y+\frac{x}{y}=C$. 8. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2}=C$. 9. $2x=(x-y)(\ln x+C)$. 10. $y=x\operatorname{tg}(\ln Cx)$. 11. $(x+y-1)^5(x-y-1)^2=C$. 12. $C(3y-2x+1)^3(y-x-1)^2=0$.

§ 14.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение первой степени относительно y и y', т. е. уравнение вида

$$\varphi_1(x)\,y'+\varphi_2(x)\,y+\varphi_3(x)=0\quad(\varphi_1(x)\neq 0)\tag{14.19}$$

или

$$y'+p(x)\,y=q(x).\tag{14.20}$$

Решение линейного уравнения ищется в виде

$$y=u(x)\,v(x).\tag{14.21}$$

Подстановка выражений для y и y' в уравнение (14.20) приводит его к виду

$$v\frac{du}{dx}+\left[\frac{dv}{dx}+p(x)\,v\right]u=q(x).\tag{14.22}$$

В качестве v выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{dv}{dx}+p(x)\,v=0,\tag{14.23}$$

тогда функция u определяется из уравнения

$$v\frac{du}{dx}=q(x).\tag{14.24}$$

Если функция $q(x) \equiv 0$, то уравнение (14.20) принимает вид

$$y' + p(x)\,y = 0 \qquad (14.25)$$

и называется *линейным однородным*, его общее решение выражается формулой

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}. \qquad (14.26)$$

Для решения неоднородного линейного уравнения (14.20) можно применять *метод вариации произвольной постоянной*. Этот метод состоит в том, что сначала находят общее решение уравнения (14.25), т. е. соотношение (14.26). Далее, полагая в этом соотношении величину C функцией от x, ищут решение неоднородного уравнения (14.20) в виде (14.26). Для этого подставляют в уравнение (14.20) y и y', определяемые из формулы (14.26), и из полученного дифференциального уравнения находят функцию $C(x)$. Общее решение уравнения (14.20) получается в виде

$$y = C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}. \qquad (14.27)$$

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{\alpha}, \qquad (14.28)$$

где α — действительное число. В случае $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ уравнение (14.28) является линейным. Во всех других случаях оно сводится к линейному с помощью подстановки

$$u = y^{1-\alpha}. \qquad (14.29)$$

Примеры

1. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения

$$y' + y - kx = 0.$$

Данное уравнение является уравнением вида (14.20), где $p(x) = 1$, $q(x) = kx$. Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получим

$$u'v + uv' + uv - kx = 0 \text{ или } u(v' + v) + u'v - kx = 0. \qquad \text{(A)}$$

В качестве v выберем одну из функций, удовлетворяющих уравнению

$$v' + v = 0 \text{ или } \frac{dv}{dx} + v = 0. \qquad \text{(B)}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln v = -x, \quad v = e^{-x}.$$

Уравнение (A) с учетом (B) перепишем так:

$$u'v - kx = 0 \text{ или } \frac{du}{dx}v - kx = 0.$$

Подставляя сюда значение $v = e^{-x}$, получим

$$du - kxe^{x}\,dx = 0.$$

Интегрируя полученное уравнение, находим

$$u = \int kxe^{x}\,dx = k\int x\,d(e^{x}) = k\left[xe^{x} - \int e^{x}dx\right] = kxe^{x} - ke^{x} + C = ke^{x}(x-1) + C.$$

Подставим выражения для u, v в формулу $y = vu$:

$$y = uv = e^{-x}\left[ke^{x}(x-1) + C\right] = k(x-1) + Ce^{-x}.$$

Следовательно, общее решение данного дифференциального уравнения таково:

$$y = k(x-1) + Ce^{-x}.$$

2. Найти общее решение линейного уравнения $xy' - y = x^3$.

Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Уравнение перепишем в виде

$$x(u'v + uv') - uv = x^3 \text{ или } u(xv' - v) + xu'v = x^3. \qquad \text{(A)}$$

Выберем v так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, тогда

$$x\frac{dv}{dx} - v = 0, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \quad \ln v = \ln x, \quad v = x.$$

Уравнение (A) при $v = x$ запишем так:

$$x^2du = x^3dx, \quad du = x\,dx,$$

откуда

$$u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Следовательно,

$$y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x$$

общее решение.

3. Проинтегрировать линейное уравнение $y' + y = x + 2$.

Пусть $y = uv$, тогда

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставляя выражения для y и y' в уравнение, получим

$$u'v + uv' + uv = x + 2, \quad u(v' + v) = x + 2 - u'v. \qquad \text{(A)}$$

Потребуем, чтобы $v' + v = 0$, тогда

$$\frac{dv}{dx} + v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -dx, \quad \ln v = -x, \quad v = e^{-x}.$$

Если $v' + v = 0$, то уравнение (A) принимает вид

$$x + 2 - u'v = 0.$$

Подставляя сюда значение v, перепишем уравнение в виде

$$x + 2 - e^{-x}\frac{du}{dx} = 0, \quad du = e^{x}(x+2)\,dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$u = \int e^{x}(x+2)\,dx = \int xe^{x}dx + 2\int e^{x}dx = xe^{x} - \int e^{x}dx + 2e^{x} + C,$$
$$u = xe^{x} + e^{x} + C.$$

Следовательно,

$$y = uv = e^{-x}[C + e^{x}(x+1)].$$

Таким образом, общее решение дается формулой

$$y = Ce^{-x} + x + 1.$$

4. Найти решение уравнения

$$(x+y)\,y' = 1, \tag{A}$$

удовлетворяющее начальному условию: $y = 0$ при $x = -1$.

По виду это уравнение не является линейным, так как содержит произведение искомой функции y и ее производной y'. Однако, если рассматривать x как функцию от y, то, учитывая, что

$$y' = \frac{1}{x'},$$

получим линейное уравнение

$$x' = x + y. \tag{B}$$

Применим подстановку

$$x = uv,$$

тогда

$$x' = u'v + uv'.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (B), получим

$$u'v + uv' = uv + y \text{ или } u'v + u(v' - v) = y. \tag{C}$$

Выберем функцию $v \neq 0$ так, чтобы обратился в нуль коэффициент при u в последнем уравнении

$$v' - v = 0,\ \frac{dv}{dy} - v = 0,\ \frac{dv}{v} = dy. \tag{D}$$

Интегрируя, получим

$$\ln v = y,\ v = e^{y}. \tag{E}$$

Подставляя это значение в уравнение (C), в силу равенства (D) находим

$$e^{y}\frac{du}{dy} = y,\ du = ye^{-y}\,dy,$$

$$u = \int ye^{-y}\,dy = -ye^{-y} - e^{-y} + C. \tag{F}$$

Таким образом, общее решение уравнения (B) есть:

$$x = uv = (-ye^{-y} - e^{-y} + C)\,e^{y} \text{ или } x = -y - 1 + Ce^{y}.$$

Полагая $x = -1$ и $y = 0$, получим $-1 = -1 + C$, т. е. $C = 0$.

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = -(x+1).$$

5. Проинтегрировать линейное уравнение

$$y' - y\,\mathrm{th}\,x = \frac{1}{2}. \tag{A}$$

Применим метод вариации произвольной постоянной. Решим сначала линейное однородное уравнение

$$y' - y\,\mathrm{th}\,x = 0, \tag{B}$$

$$\frac{dy}{y} = \mathrm{th}\,x\,dx,\ \ln y = \int \mathrm{th}\,x\,dx = \ln \mathrm{ch}\,x + \ln C,$$

$$y = C\,\mathrm{ch}\,x.$$

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)\,\mathrm{ch}\,x. \tag{C}$$

Дифференцируя, находим

$$y' = C'(x)\,\mathrm{ch}\,x + C(x)\,\mathrm{sh}\,x. \tag{D}$$

Подставляя (C) и (D) в уравнение (A), получим:

$$C'(x)\,\mathrm{ch}\,x + C(x)\,\mathrm{sh}\,x - C(x)\,\mathrm{ch}\,(x)\,\mathrm{th}\,(x) = \frac{1}{2},$$

$$C'(x)\,\mathrm{ch}\,x = \frac{1}{2},\quad C'(x) = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,x},$$

откуда

$$C(x) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\mathrm{ch}\,x}\,dx = \int \frac{1}{e^{x} + e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^{x}}{e^{2x} + 1}\,dx.$$

Осуществляя подстановку

$$e^{x} = t,\ e^{x}\,dx = dt,$$

найдем

$$\int \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{arctg}\,t = \mathrm{arctg}\,e^{x} + C.$$

Итак,

$$C(x) = \mathrm{arctg}\,e^{x} + C. \tag{E}$$

Подставляя (E) в (C), получим

$$y = \mathrm{ch}\,x\,[\mathrm{arctg}\,e^{x} + C].$$

6. Проинтегрировать уравнение

$$x^2(x-1)\,y' - y^2 - x(x-2)\,y = 0. \tag{A}$$

Данное уравнение можно привести к виду

$$y' - \frac{x(x-2)}{x^2(x-1)}\,y = \frac{1}{x^2(x-1)}\,y^2. \tag{A'}$$

Это уравнение Бернулли, т. е. уравнение вида (14.28). Здесь

$$p(x) = -\frac{x(x-2)}{x^2(x-1)};\ q(x) = \frac{1}{x^2(x-1)};\ \alpha = 2.$$

Подстановка (14.29) в данном случае принимает вид

$$u(x) = y^{1-\alpha} = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y},$$

т. е.

$$u(x) = \frac{1}{y},\quad y = \frac{1}{u(x)}, \tag{B}$$

откуда

$$u'(x) = -\frac{1}{y^2}y', \quad y' = -y^2 u'(x). \qquad \text{(C)}$$

Подставляя (B) и (C) в уравнение (A), получим линейное неоднородное уравнение относительно u:

$$x^2(x-1)\frac{du}{dx} + x(x-2)u = -1. \qquad \text{(D)}$$

Решим соответствующее однородное линейное уравнение:

$$x^2(x-1)\frac{du}{dx} + x(x-2)u = 0. \qquad \text{(E)}$$

Так как

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x(x-2)}{x^2(x-1)}\cdot u$$

и

$$\frac{du}{u} = -\frac{x-2}{x(x-1)}\,dx = -\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}\right)dx,$$

то

$$\ln u = -2\ln x + \ln(x-1) + \ln C_1,$$

$$\ln u = \ln\frac{C_1(x-1)}{x^2},$$

откуда

$$u = \frac{C_1(x-1)}{x^2}. \qquad \text{(F)}$$

Общее решение уравнения (D) ищем с помощью метода вариации произвольной постоянной.

Полагаем

$$u = C_1(x)\cdot\frac{x-1}{x^2}. \qquad \text{(G)}$$

Дифференцируя функцию $u(x)$, получим

$$\frac{du}{dx} = C_1'(x)\frac{x-1}{x^2} + C_1(x)\frac{2-x}{x^3}. \qquad \text{(H)}$$

Подставляя (H) в уравнение (D), находим

$$x^2(x-1)\left[C_1'(x)\frac{x-1}{x^2} + C_1(x)\frac{2-x}{x^3}\right] + x(x-2)C_1(x)\frac{x-1}{x^2} = -1$$

или

$$C_1'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}, \quad \frac{dC_1(x)}{dx} = -\frac{1}{(x-1)^2}, \quad dC_1 = -\frac{dx}{(x-1)^2},$$

$$C_1(x) = \frac{1}{x-1} + C. \qquad \text{(J)}$$

Подставляя (J) в (G), получим общее решение уравнения (D):

$$u(x) = \frac{x-1}{x^2}\left[\frac{1}{x-1} + C\right].$$

Переходя к переменной y, получим:

$$\frac{1}{y} = \left(C + \frac{1}{x-1}\right)\frac{x-1}{x^2},$$

$$\frac{1}{y} = C\frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1 + C(x-1)}{x^2}.$$

Следовательно,

$$y = \frac{x^2}{1 + C(x-1)}$$

общее решение исходного уравнения.

Задачи

Найти общие решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

1. $y' - 4y = e^{2x}$.

2. $y' - \frac{xy}{x^2+1} = x$.

3. $y' + \frac{x}{1-x^2}y = 1$.

4. $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$.

5. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{2x}{\cos x}$.

6. $y'x - y - x^2 = 0$.

7. $y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 2x(x^2+1)$.

8. $y'\cos x + y\sin x = 1$.

Проинтегрировать уравнения Бернулли:

9. $yy' + y^2 + 4x(x+1) = 0$.

10. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Ответы

1. $y = Ce^{4x} - \frac{1}{2}e^{2x}$. 2. $y = 1 + x^2 + C\sqrt{1+x^2}$. 3. $y = \sqrt{1-x^2}(\arcsin x + C)$. 4. $y = (x+C)(1+x^2)$. 5. $y = \frac{x^2+C}{\cos x}$. 6. $y = x^2 + Cx$. 7. $y = C(x^2+1) + (x^2+1)^2$. 8. $y = C\cos x + \sin x$. 9. $4x^2 + y^2 = Ce^{-2x}$. 10. $y = x^4(\ln\sqrt{x} + C)^2$.

§ 14.4. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнением в полных дифференциалах называется дифференциальное уравнение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \qquad (14.30)$$

левая часть которого есть полный дифференциал некоторой функции:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = d\,u(x, y). \qquad (14.31)$$

Уравнение (14.30) с учетом (14.31) можно записать так:

$$d\,u(x, y) = 0, \qquad (14.32)$$

поэтому его общий интеграл имеет вид

$$u(x, y)=C. \tag{14.33}$$

Функция $u(x, y)$ может быть найдена из системы уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y).$$

Равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{14.34}$$

является необходимым и достаточным условием того, что левая часть уравнения (14.30) есть полный дифференциал некоторой функции.

Если левая часть уравнения (14.30) не является полным дифференциалом и существует функция $\mu=\mu(x, y)$ такая, что

$$\mu(Pdx+Qdy)=du,$$

то функция $\mu=\mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем*.

Функция $\mu(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q). \tag{14.35}$$

Если

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x), \tag{14.36}$$

то интегрирующий множитель зависит только от x, т. е.

$$\mu=\mu(x).$$

Если

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\varphi(y), \tag{14.37}$$

то интегрирующий множитель зависит только от y, т. е.

$$\mu=\mu(y).$$

Примеры

1. Проинтегрировать уравнение

$$2xydx+x^2dy=0.$$

Левая часть данного уравнения есть полный дифференциал функции $u(x, y)=x^2y$, т. е.

$$2xydx+x^2dy=d(x^2y).$$

Исходное уравнение можно переписать в виде

$$d(x^2y)=0,$$

откуда получается его общий интеграл

$$x^2y=C.$$

2. Проинтегрировать уравнение

$$x^3dx+(ydx+xdy-ydy)=0.$$

Преобразуя левую часть уравнения, получаем

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right)+d(xy)-d\left(\frac{y^2}{2}\right)=0$$

или

$$d\left(\frac{x^4}{4}+xy-\frac{y^2}{2}\right)=0,$$

откуда находим общий интеграл

$$\frac{x^4}{4}+xy-\frac{y^2}{2}=C.$$

3. Проинтегрировать уравнение

$$(y^3-2xy)\,dx+(3xy^2-x^2)\,dy=0.$$

Это уравнение вида (14.30), для которого

$$P(x, y)=y^3-2xy, \quad Q(x, y)=3xy^2-x^2.$$

Находя соответствующие частные производные, получим:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}=3y^2-2x; \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}=3y^2-2x,$$

откуда

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Следовательно, левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=(y^3-2xy)\,dx+(3xy^2-x^2)\,dy,$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^3-2xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=3xy^2-x^2. \tag{A}$$

Интегрируем по x первое из уравнений (A), считая y постоянным, при этом вместо постоянной интегрирования надо поставить $\varphi(y)$ — неизвестную функцию от y:

$$u(x, y)=\int(y^3-2xy)\,dx=y^3x-yx^2+\varphi(y)$$

Дифференцируя функцию $u(x, y)$ по y, получим

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2x-x^2+\varphi'(y).$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y)=3xy^2-x^2$$

поэтому

$$3xy^2-x^2+\varphi'(y)=3xy^2-x^2,$$

откуда $\varphi'(y)=0$ и $\varphi(y)=C_1$.

Таким образом,

$$u(x, y) = y^3x - yx^2 + C_1.$$

С другой стороны, по формуле (14.33)

$$u(x, y) = C_2,$$

поэтому общий интеграл имеет вид

$$y^3x - x^2y = C, \text{ где } C = C_2 - C_1.$$

4. Проинтегрировать уравнение

$$x(x + 2y)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0.$$

В данном случае

$$P(x, y) = x(x + 2y), \quad Q(x, y) = x^2 - y^2,$$

откуда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

Условие (14.34) выполнено, поэтому данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + 2yx, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2.$$

Из первого равенства получаем

$$u(x, y) = \int (x^2 + 2xy)\,dx$$

или

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2y + \varphi(y).$$

Дифференцируя по y функцию $u(x, y)$, находим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y).$$

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2,$$

то

$$x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2,$$

откуда

$$\varphi'(y) = -y^2$$

и

$$\varphi(y) = -\int y^2 dy = -\frac{y^3}{3} + C_1.$$

Подставляя найденное выражение для $\varphi(y)$ в формулу для $u(x, y)$, получим

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2y - \frac{y^3}{3} + C_1 = C_2$$

или

$$\frac{x^3}{3} + x^2y - \frac{y^3}{3} = C_3.$$

Таким образом, общий интеграл можно записать в виде

$$x^3 + 3x^2y - y^3 = C, \text{ где } C = 3C_3.$$

5. Проинтегрировать уравнение

$$(xy^2 - y^3)\,dx + (1 - xy^2)\,dy = 0.$$

Это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 - y^3) = 2xy - 3y^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(1 - xy^2) = -y^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Интегрирующий множитель ищем в виде функции только от y:

$$\mu(x, y) \equiv \mu(y),$$

так как в данном случае выполняется условие (14.37), а именно:

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2}{y}.$$

Для этого множителя имеем:

$$\frac{\partial \mu(y)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial \mu(y)}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}.$$

Условие (14.35), которое более подробно можно записать так

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P - \frac{\partial \mu}{\partial x}Q = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

принимает вид

$$\frac{d\mu}{dy}(xy^2 - y^3) = \mu\left[-y^2 - (2xy - 3y^2)\right]$$

или

$$\frac{d\mu}{dy}(xy^2 - y^3) = \mu(2y^2 - 2xy),$$

откуда

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2y(y - x)}{y^2(x - y)}\,dy, \quad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{y}\,dy.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$\ln\mu = -2\ln y = \ln\frac{1}{y^2}, \quad \mu(y) = \frac{1}{y^2}.$$

Умножая исходное уравнение на интегрирующий множитель $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$, получаем уравнение в полных дифференциалах:

$$(x - y)\,dx + \left(\frac{1}{y^2} - x\right)dy = 0.$$

В самом деле,

$$\frac{\partial(x - y)}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2} - x\right) = -1, \quad \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x},$$

где

$$P_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = x - y, \quad Q_1 = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y^2} - x.$$

Так как

$$P_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = x - y,$$

то

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} - yx + \varphi(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x + \varphi'(y),$$

$$-x + \varphi'(y) = \frac{1}{y^2} - x, \qquad \varphi'(y) = \frac{1}{y^2}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\varphi(y) = -\frac{1}{y} + C_1.$$

Подставляя функцию $\varphi(y)$ в выражение для $u(x, y)$, находим

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} - yx - \frac{1}{y} + C_1.$$

Так как

$$u(x, y) = C_2,$$

то

$$\frac{x^2}{2} - yx - \frac{1}{y} + C_1 = C_2$$

или

$$\frac{x^2}{2} - yx - \frac{1}{y} = C.$$

Преобразуя последнее равенство, получим общий интеграл в виде

$$x^2y - 2xy^2 - 2 - 2Cy = 0.$$

Задачи

Найти общие интегралы дифференциальных уравнений, предварительно преобразовав их левые части:

1. $xdy + ydx = 0.$ 2. $y^2dx + 2xydy = 0.$

3. $\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0.$ 4. $xdx + ydy = 0.$

Показать, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и найти их общие интегралы:

5. $(x^2 + 2xy + a^2)\,dx + (x^2 + y^2 - a^2)\,dy = 0.$
6. $(\cos x + x\cos y + e^y)\,dy + (\sin y - y\sin x)\,dx = 0.$
7. $\operatorname{ch} x(\operatorname{ch} y - 1)\,dx + \operatorname{sh} y(\operatorname{sh} x + 1)\,dy = 0.$
8. $\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy = 0.$

Решить уравнения, допускающие интегрирующий множитель вида $\mu(x)$ или $\mu(y)$:

9. $(y^2 - 2x - 2)\,dx + 2ydy = 0.$
10. $y^2dx + (xy - 1)\,dy = 0.$
11. $(2y + xy^3)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0.$
12. $(1 + x^2y)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0.$

Ответы

1. $xy = C$. Указание. $xdy + ydx = d(xy)$. 2. $y^2x = C$. 3. $\frac{y}{x} = C$. 4. $x^2 + y^2 = C^2$. 5. $x^3 + y^3 + 3x^2y + 3a^2x - 3a^2y = C$. 6. $x\sin y + y\cos x + e^y = C$. 7. $\operatorname{ch} y(1 + \operatorname{sh} x) - \operatorname{sh} x = C$. 8. $\frac{xy}{x-y} + \ln\frac{x}{y} = C$. 9. $\mu(x) = e^x$, $y^2e^x - 2xe^x = C$. 10. $\mu(y) = \frac{1}{y}$, $xy - \ln y = C$. 11. $\mu(x) = \frac{1}{x}$, $3x^2y + x^3y^3 = C$. 12. $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$, $y^2 - \frac{2}{x} + xy = C$.

§ 14.5. Разные дифференциальные уравнения первого порядка

Определить типы дифференциальных уравнений и решить их, найти указанные частные решения:

1. $y' = \frac{6}{x^2 - 9}$, $y = 0$ при $x = 0$.
2. $(1 - x^2)\,y' + xy - 3 = 0$, $y = 1$ при $x = 0$.
3. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$, $y = 1$ при $x = -1$.
4. $(y + xy^2)\,dx - xdy = 0$, $y = -1$ при $x = 1$.

Определить типы дифференциальных уравнений и проинтегрировать их:

5. $(2xy + 2y^2 - 9x^2)\,dx + (x^2 + 4xy)\,dy = 0.$
6. $y' + y - xy^3 = 0.$ 7. $y' + y - x^2 = 0.$
8. $(1 - x^2y)\,dx + x^2(y - x)\,dy = 0.$
9. $(\sqrt{21 - 8x - 4x^2})\,dy - dx = 0.$
10. $(3x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)\,dy = 0.$
11. $xy' - y = 2x.$ 12. $xy' - 3y + x^4y^2 = 0.$
13. $xdx + (x + y)\,dy = 0.$ 14. $y' + y\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x.$
15. $(y - 2x - 1)\,dx + (x + 2y + 1)\,dy = 0.$
16. $(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0.$
17. $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0.$
18. $x(x^2 - 1)\,y' - (2x^2 - 1)\,y + 4x^3 = 0.$

Ответы

1. Уравнение с разделяющимися переменными $y = \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$; $y = \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|$. 2. Линейное, $y = 3x + C\sqrt{1-x^2}$; $y = 3x + \sqrt{1-x^2}$. 3. Однородное, $x^2 + y^2 - 2Cy = 0$; $x^2 + y^2 - 2y = 0$. 4. Интегрирующий множитель $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$; $y = -\frac{2x}{x^2+2C}$; $y = -\frac{2x}{x^2+1}$. 5. Уравнение в полных дифференциалах, оно же однородное, $x^2y + 2xy^2 - 3x^3 = C$. 6. Уравнение Бернулли, $\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$. 7. Линейное, $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$. 8. $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$, $-\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} = C$. 9. Уравнение с разделяющимися переменными, $y = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2(x+1)}{5} + C$. 10. Уравнение в полных дифференциалах, оно же однородное, $x^3 + x^2y - y^2x - y^3 = C$. 11. Линейное, $y = x[\ln(x^2) + C]$. 12. Уравнение Бернулли, $7x^3 = y(x^7 + C)$. 13. Однородное, $\ln\sqrt{y^2 + xy + x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y+x}{\sqrt{3}x} = C$. 14. Линейное, $y = \frac{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C}{\sin x} - 1$. 15. Уравнение, сводящееся к однородному, $y^2 + xy - x^2 + y - x = C$. 16. Уравнение в полных дифференциалах, $(x+y)(x^2 - 7xy + y^2) = C$. 17. Уравнение, сводящееся к однородному, $x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y = C$. 18. Линейное, $y = 4x + Cx\sqrt{x^2-1}$.

§ 14.6. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Многие научные и технические задачи приводят к интегрированию дифференциальных уравнений. В таких задачах требуется найти зависимость между переменными величинами некоторого физического, химического или другого процесса, найти уравнение кривой или поверхности и т. п.

При решении этих задач необходимо:

1. Составить дифференциальное уравнение из условия задачи.
2. Определить его тип и выбрать соответствующий метод решения.
3. Проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение и получить его общее решение.
4. Найти частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям.
5. Вычислить по мере необходимости значения вспомогательных параметров (коэффициент пропорциональности и др.), используя дополнительные условия задачи.
6. Найти общий закон рассматриваемого процесса и, если это требуется, численные значения искомых величин.

Приступая к составлению дифференциального уравнения,

нужно выбрать независимую переменную и искомую функцию, выразить приращение функции, соответствующее заданному приращению аргумента, через величины, о которых идет речь в условии задачи. Составив отношение приращения функции к приращению аргумента и переходя к пределу, получим дифференциальное уравнение.

При составлении дифференциального уравнения часто бывает целесообразным применять *метод дифференциалов*, заключающийся в том, что приближенное соотношение между бесконечно малыми приращениями искомых величин, верное с точностью до бесконечно малых высшего порядка, заменяется соответствующим соотношением между их дифференциалами.

Иногда дифференциальное уравнение можно составить более простым путем, воспользовавшись геометрическим или механическим смыслом производной.

Кроме того, при составлении дифференциального уравнения, в зависимости от условия задачи, используются соответствующие законы физики, механики, химии и других наук.

Примеры

1. Найти кривую, проходящую через точку $M_0(1, 4)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка искомой кривой, AB — отрезок касательной к кривой в данной точке, заключенный между координатными осями. По условию задачи $BM = MA$. Если OP — абсцисса точки M, то $\triangle AMP \sim \triangle ABO$ и

$$\frac{OA}{PA} = \frac{OB}{MP} = \frac{AB}{MA}. \text{ Но } \frac{AB}{MA} = 2 \text{ и } PA = OP, \text{ поэтому}$$

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OB}{MP} = 2, \text{ т. е. } OA = 2x, \ OB = 2y.$$

Угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$ выражается с помощью производной $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha = \angle BAX$. С другой стороны, так как $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\angle BAO$ и $\operatorname{tg}\angle BAO = \frac{OB}{OA}$, то

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{OB}{OA} = -\frac{2y}{2x} = -\frac{y}{x}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными (см. § 14.1, пример 2), получим

$$xy = C.$$

Так как кривая должна проходить через точку $M_0(1,4)$, то подставляя ее координаты в данное уравнение, находим:

$$1\cdot 4 = C,\ C = 4.$$

Таким образом, искомая кривая определяется уравнением

$$xy = 4.$$

2. Точка движется по прямой линии с постоянным ускорением. Найти закон движения точки.

В качестве независимой переменной выберем время, тогда пройденный путь и скорость точки будут функциями времени. Обозначим путь, пройденный за время t, через s, скорость точки — через v и ускорение через w. По условию $w = a$, где a — постоянная величина. Пусть в начальный момент времени заданы значение скорости v_0 и значение пути s_0, т. е. $v = v_0$, $s = s_0$ при $t = 0$, где v_0 и s_0 — некоторые постоянные.

Так как ускорение точки при прямолинейном движении равно производной скорости по времени, то по условию задачи можно составить следующее дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dt} = a \text{ или } dv = adt.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем $v = at + C_1$. Значение постоянной C_1 определим по начальным условиям: $v = v_0$ при $t = 0$. Подставляя эти значения v и t в выражение v, найдем:

$$v_0 = a\cdot 0 + C_1,\ C_1 = v_0.$$

Следовательно, скорость движения точки выразится формулой

$$v = at + v_0.$$

Подставляя в эту формулу выражение для скорости v через производную от пути по времени $v = \frac{ds}{dt}$, получим новое дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{ds}{dt} = at + v_0 \text{ или } ds = (at + v_0)\,dt.$$

Интегрируя это уравнение, найдем общее решение данной задачи

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + C_2.$$

Так как $s = s_0$ при $t = 0$, то $C_2 = s_0$, следовательно,

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0.$$

В частности, полагая в выражениях для v и s $a = g$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0$, $s = h$, получим закон движения при свободном падении тела в пустоте:

$$v = gt,\ h = \frac{1}{2}gt^2.$$

3. Определить форму зеркала, отражающего лучи точечного источника параллельным пучком.

Источник света примем за начало координат, а ось Ox направим параллельно отраженным лучам.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка кривой, являющейся сечением зеркала плоскостью Oxy. Проведем нормаль к кривой в точке M (рис. 14.2) до пересечения с осью Ox в точке $N(x, 0)$.

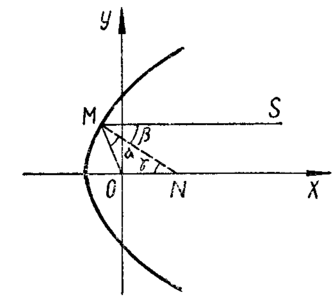

Рис. 14.2

Обозначим через α угол OMN и через β — угол SMN. Согласно закону отражения, $\alpha = \beta$. Так как $\gamma = \angle ONM = \beta = \alpha$, то ΔOMN — равнобедренный, причем $OM = ON$. Очевидно,

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отрезок ON определим из уравнения нормали

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

Полагая здесь $Y = 0$, получим

$$-y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

отсюда находим отрезок

$$X = ON = x + yy'.$$

Подставляя в равенство $OM = ON$ выражения для OM и ON, получаем однородное дифференциальное уравнение

$$x + yy' = \sqrt{x^2 + y^2},$$

которое может быть решено с помощью подстановки $y = ux$.

Чтобы упростить выкладки, применим искусственный прием. Положим

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Дифференцируя второе равенство по x, получим

$$2\rho\frac{d\rho}{dx} = 2x + 2yy' \quad \text{или} \quad \rho\frac{d\rho}{dx} = x + yy'.$$

Но

$$x + yy' = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho,$$

поэтому

$$\rho \frac{d\rho}{dx} = \rho \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{dx} = 1,$$

откуда $\rho = x + C$. Таким образом,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C, \quad y^2 = 2Cx + C^2.$$

Кривые эти являются параболами. Поверхность искомого зеркала — параболоид вращения.

4. В сосуд, содержащий 10 *л* воды, со скоростью 2 *л* в минуту непрерывно поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 *кг* соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?

За независимую переменную примем время t, за искомую функцию $y(t)$ — количество соли в сосуде через t минут после начала опыта. Найдем, как изменится количество соли за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. В сосуд поступает 2 *л* раствора в одну минуту, а в Δt минут — $2\Delta t$ литров, в которых содержится $0{,}3 \cdot 2\Delta t = 0{,}6\Delta t$ *кг* соли. С другой стороны, за тот же промежуток времени Δt из сосуда вытекает $2\Delta t$ литров раствора. В момент t во всем сосуде (10 *л*) содержится $y(t)$ *кг* соли, следовательно, в $2\Delta t$ литрах вытекающего раствора содержалось бы $0{,}2\Delta t \cdot y(t)$ *кг* соли, если бы содержание соли в сосуде оставалось неизменным за время Δt. Но поскольку за указанное время оно меняется на величину, бесконечно малую при $\Delta t \to 0$, то в вытекающих $2\Delta t$ *л* содержится $0{,}2\Delta t\,[y(t) + \alpha]$ *кг* соли, где $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Следовательно, в растворе, поступающем за промежуток времени Δt, содержится $0{,}6\Delta t$ *кг* соли, а в вытекающем — $0{,}2\Delta t \cdot [y(t) + \alpha]$ *кг*. Приращение количества соли за это время равно разности найденных выражений, т. е.

$$y(t + \Delta t) - y(t) = 0{,}6\Delta t - 0{,}2\Delta t \cdot [y(t) + \alpha],$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Разделим обе части полученного уравнения на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$y'(t) = 0{,}6 - 0{,}2y(t).$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, которое можно записать так:

$$\frac{dy}{0{,}6 - 0{,}2y} = dt.$$

Интегрируя его, получим

$$y = 3 - Ce^{-0{,}2t}.$$

Значение произвольной постоянной определим из начального условия $y = 0$ при $t = 0$ (в начальный момент в сосуде соли не было). Подставив в общее решение значения $t = 0$ и $y = 0$, найдем:

$$0 = 3 - C, \quad C = 3.$$

Итак, изменение количества соли в сосуде определяется формулой

$$y = 3 - 3e^{-0{,}2t}.$$

При $t = 5$ получаем

$$y(5) = 3 - 3e^{-0{,}2 \cdot 5} = 3 - 3e^{-1} \approx 1{,}9 \ (\text{кг}).$$

5. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 5 *м/сек*. На полном ходу ее мотор выключается и через 40 *сек* после этого скорость лодки уменьшается до 2 *м/сек*. Определить скорость лодки через 2 *мин* после остановки мотора, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

Примем за независимую переменную время t, тогда скорость лодки v будет некоторой функцией t. На движущуюся лодку действует сила $F = kv$, где k — коэффициент пропорциональности. С другой стороны, по закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение, т. е. $F = m\frac{dv}{dt}$ (ускорение равно производной от скорости по времени). Следовательно, можно составить следующее дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\,dt.$$

Интегрируя это уравнение находим его общее решение

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Постоянную интегрирования определим из начального условия: $v = 5$ *м/сек* при $t = 0$. Подставляя эти значения в общее решение, находим

$$5 = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0}, \quad C = 5.$$

Следовательно, изменение скорости в зависимости от времени определится формулой

$$v = 5e^{-\frac{k}{m}t}. \qquad \text{(A)}$$

В этой формуле в показателе степени содержится неизвестный коэффициент $\frac{k}{m}$. Его можно определить из дополнительного условия: при $t = 40$ *сек* скорость лодки $v = 2$ *м/сек*, поэтому

$$2 = 5e^{-\frac{k}{m}\cdot 40},$$

откуда

$$e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{40}}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (А), получим

$$v = 5\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{40}}\right]^t.$$

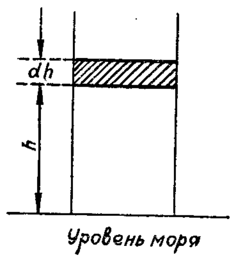

Рис. 14.3

Из этой формулы находим скорость лодки при $t = 2$ *мин* $=$ $= 120$ *сек*:

$$v = 5\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{40}}\right]^{120} = 5\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{25} = 0{,}32 \text{ (м/сек)}.$$

6. Найти зависимость между высотой места над уровнем моря и давлением воздуха.

Обозначим высоту места над уровнем моря через h (*м*) и давление воздуха через p (*н/м*^{2}). Рассмотрим призматический столб воздуха, опирающийся на горизонтальную площадку в 1 *м*^{2}, расположенную на уровне моря (рис. 14.3).

Давление воздуха p в сечении этого столба на высоте h определится весом части столба, опирающейся на указанное сечение. Увеличение высоты h на бесконечно малую величину dh влечет за собой уменьшение давления на бесконечно малую величину dp, измеряемую весом слоя воздуха между двумя сечениями h и $h + dh$. Следовательно, получается уравнение

$$-dp = \gamma\, dh,$$

где γ есть вес одного кубометра воздуха под давлением p (здесь пренебрегается тем, что γ меняется при переходе от нижнего сечения к верхнему). Но величина γ сама пропорциональна давлению, что вытекает из закона Бойля — Мариотта ($pv = p_0v_0$), т. е. $\gamma = kp$, где k — коэффициент пропорциональности. Подставляя это выражение для γ в уравнение $-dp = \gamma dh$, получим

$$-dp = kpdh \text{ или } \frac{dp}{p} = -kdh.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$p = Ce^{-kh}.$$

Пусть $p = p_0$ при $h = 0$ (т. е. давление на уровне моря равно p_0), тогда $p_0 = Ce^{-k\cdot 0}$, $C = p_0$.

Таким образом, искомая зависимость устанавливается формулой

$$p = p_0e^{-kh}.$$

Коэффициент k определяется из дополнительных условий.

Решая полученное уравнение относительно h, получаем формулу

$$h = \frac{1}{k}\ln\frac{p_0}{p},$$

позволяющую вычислить высоту h места над уровнем моря по давлению воздуха p.

7. В некоторой химической реакции вещество B разлагается на два вещества X и Y, причем скорость образования каждого из них пропорциональна наличному количеству b вещества B. Найти законы изменения количеств x и y веществ X и Y в зависимости от времени t, если в начале процесса $b = b_0$, $x = 0$, $y = 0$, а по истечении одного часа $b = \frac{1}{2}b_0$, $x = \frac{b_0}{8}$, $y = \frac{3b_0}{8}$.

Если через x и y обозначены количества веществ X и Y соответственно, то производная $\frac{dx}{dt}$ выражает скорость образования вещества X, производная $\frac{dy}{dt}$ — скорость образования вещества Y. В каждый момент времени t количество b разложившегося вещества B определяется формулой $b = b_0 - x - y$, где b_0 — первоначальное количество вещества B. Согласно условию задачи получаем систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = k(b_0 - x - y), \quad \frac{dy}{dt} = l(b_0 - x - y),$$

где k и l — коэффициенты пропорциональности.

Эту систему можно свести к одному дифференциальному уравнению первого порядка. В самом деле, разделив обе части второго уравнения на соответствующие части первого уравнения, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{l}{k}.$$

Решая это уравнение, будем иметь

$$y = \frac{l}{k}x + C_1.$$

Используя начальные условия ($x = 0$, $y = 0$ при $t = 0$), находим, что $C_1 = 0$, поэтому $y = \frac{l}{k}x$. Подставляя полученное выражение для y в первое из уравнений исходной системы, получим линейное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} + (k + l)x = kb_0,$$

общее решение которого

$$x = \frac{kb_0}{k + l} + C_2 e^{-(k+l)t}.$$

Так как $x = 0$ при $t = 0$, то $C_2 = -\frac{kb_0}{k + l}$ и

$$x = \frac{kb_0}{k + l}(1 - e^{-(k+l)t}).$$

Подставляя полученное выражение для x в равенство $y = \frac{l}{k}x$, находим, что

$$y = \frac{lb_0}{k + l}(1 - e^{-(k+l)t}).$$

Определим теперь значения коэффициентов k и l. Так как $x = \frac{b_0}{8}$ и $y = \frac{3b_0}{8}$ при $t = 1$, то подстановка этих значений в выражения для x и y приводит к системе уравнений:

$$\frac{k}{k + l}(1 - e^{-(k+l)}) = \frac{1}{8}; \quad \frac{l}{k + l}(1 - e^{-(k+l)}) = \frac{3}{8}.$$

Сложив почленно эти уравнения, получим

$$1 - e^{-(k+l)} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$e^{-(k+l)} = 2^{-2} \text{ и } k + l = \ln 2.$$

Разделив почленно второе уравнение на первое, найдем $l = 3k$.

Следовательно, $k = \frac{1}{4}\ln 2$, $l = \frac{3}{4}\ln 2$.

Таким образом, искомое решение определяется формулами:

$$x = \frac{b_0}{4}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right); \quad y = \frac{3b_0}{4}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right).$$

Задачи

Составить дифференциальные уравнения из условий следующих задач и решить их.

1. Найти кривую, проходящую через точку $M(1, 3)$ и для которой отрезок касательной между точкой касания и осью Ox делится пополам в точке пересечения с осью Oy.

2. Найти такую кривую, проходящую через точку $M(0, 3)$, чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, уменьшенной на две единицы.

3. Через сосуд емкостью a литров, наполненный водным раствором соли, непрерывно протекает жидкость, причем в единицу времени вливается b литров чистой воды и вытекает такое же количество раствора. Найти закон, по которому изменяется содержание соли в сосуде в зависимости от времени протекания жидкости через сосуд.

4. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 *м/сек*, скорость ее через 4 *сек* 1 *м/сек*. Когда скорость уменьшится до 0,01 *м/сек*? Какой путь может пройти лодка до остановки?

5. Тело охладилось за 20 *мин* от 100 до 60°. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°. Когда тело остынет до 30°?

6. В баке находится 100 *л* раствора, содержащего 10 *кг* соли. В бак непрерывно подается вода со скоростью 5 *л* в минуту. Поступающая в бак вода перемешивается с имеющимся раствором, и смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли останется в баке через 1 час?

7. Найти кривую, все нормали которой проходят через постоянную точку.

8. Вода вытекает через отверстие в дне цилиндрического сосуда. По какому закону понижается уровень воды с течением времени, если известно, что скорость v, с которой жидкость вытекает из отверстия, зависит от высоты h столба жидкости следующим образом: $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$.

9. Судно водоизмещением в 12 000 *т* движется прямолинейно со скоростью $v_0 = 20$ *м/сек*. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости судна и равно 36 *т* при скорости 1 *м/сек*. Какое расстояние пройдет судно после остановки двигателя, прежде чем скорость станет равной 5 *м/сек*. В какое время судно пройдет это расстояние?

Ответы

1. Дифференциальное уравнение $y = 2xy'$, $y^2 = 9x$. 2. $y' = y - 2$, $y = e^x + 2$. 3. $\frac{dx}{dt} = -\frac{b}{a}x$, $x = C_0 e^{-\frac{b}{a}t}$, где C_0 — первоначальное количество соли. 4. 50 *сек*; 15 *м*. 5. $\frac{dU}{dt} = k(U - 20)$, где U — температура тела. Общее решение $U = 20 + Ce^{kt}$. Решение, соответствующее начальным условиям задачи: $U = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. Тело остынет до 30° через 1 час. Указание. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. 6. 0,5 *кг*. 7. Окружность. 8. $\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$, $t = \frac{2}{k}(\sqrt{H} - \sqrt{h})$, где H — высота сосуда. 9. $M\frac{dv}{dt} = -kv^2$, где M — масса судна; $\frac{12\,000}{g}\cdot\frac{dv}{dt} = -36v^2$, $\frac{1}{v} = 0{,}03t + \frac{1}{16}$, $t=4{,}6$ *сек*, $s=38{,}8$ *м*. Указание. Принять $g = 10$ *м/сек*^{2}.

Глава 15. Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$F(x,\ y,\ y',\ y'') = 0 \tag{15. 1}$$

или

$$y'' = f(x,\ y,\ y'). \tag{15. 2}$$

Общим решением уравнения (15. 1) называется функция

$$y = \varphi(x,\ C_1,\ C_2) \tag{15. 3}$$

от x и двух произвольных независимых постоянных C_1, C_2, обращающая данное уравнение в тождество.

Общее решение уравнения (15. 1), заданное в неявном виде

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2) = 0, \tag{15. 4}$$

называется *общим интегралом*.

Частное решение

$$y = \varphi(x,\ C_1^0,\ C_2^0), \tag{15. 5}$$

где C_1^0, C_2^0 — фиксированные числа, получается из общего решения (15. 3) при фиксированных значениях C_1 и C_2.

Задача Коши. *Найти решение дифференциального уравнения* (15. 1), *удовлетворяющее условиям:* $y = y_0$, $y' = y_0'$ *при* $x = x_0$. Постоянные определяются из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x,\ C_1,\ C_2); \\ y_0' &= \varphi_x'(x,\ C_1,\ C_2). \end{aligned}\right\} \tag{15. 6}$$

§ 15. 1. Простейшие типы интегрируемых уравнений второго порядка, случаи понижения порядка

К простейшим типам интегрируемых дифференциальных уравнений второго порядка относятся уравнения, для которых функция, стоящая в правой части формулы (15. 2), зависит или только от x, или только от y, или только от y', т. е. уравнения вида:

$$y'' = f(x); \tag{15. 7}$$
$$y'' = f(y); \tag{15. 8}$$
$$y'' = f(y'). \tag{15. 9}$$

Общее решение уравнения (15. 7) находится двукратным интегрированием.

Уравнение (15. 8) интегрируется подстановкой

$$y' = p, \tag{15. 10}$$

которая дает возможность свести его к уравнению с разделяющимися переменными y и p:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot y' = \frac{dp}{dy}\cdot p, \frac{dp}{dy}\cdot p = f(y).$$

Из последнего уравнения определяется p, а из уравнения $y' = p$ — общий интеграл $\Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2) = 0$.

Уравнение (15. 9) подстановкой (15. 10) сводится к уравнению с разделяющимися переменными x и p:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx},\quad \frac{dp}{dx} = f(p),\quad \frac{dp}{f(p)} = dx.$$

В некоторых случаях дифференциальные уравнения второго порядка сводятся к уравнениям первого порядка.

Уравнение

$$y'' = f(x,\ y') \tag{15. 11}$$

подстановкой (15. 10) приводится к уравнению

$$\frac{dp}{dx} = f(x,\ p)$$

с неизвестной функцией p.

Уравнение

$$y'' = f(y,\ y') \tag{15. 12}$$

той же подстановкой сводится к уравнению

$$p\frac{dp}{dy} = f(y,\ p),$$

где роль независимой переменной играет y.

Примеры

1. Проинтегрировать уравнение $y'' = \cos x$.

Так как $y'' = \frac{dy'}{dx}$, то $\frac{dy'}{dx} = \cos x$, $dy' = \cos x dx$,

откуда

$$y' = \int \cos x dx = \sin x + C_1, \quad \frac{dy}{dx} = \sin x + C_1.$$

Интегрируя еще раз, получаем:

$$y = \int (\sin x + C_1)\, dx = -\cos x + C_1 x + C_2,$$
$$y = -\cos x + C_1 x + C_2.$$

2. Найти интегральную кривую уравнения $y'' = x + 1$, проходящую через точку M_0 (1, 1) и касающуюся в этой точке прямой $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Находим сначала общее решение данного уравнения. Имеем:

$$y'' = \frac{dy'}{dx}, \ \frac{dy'}{dx} = x + 1, \ dy' = (x+1)\,dx, \ y' = \int (x+1)\,dx,$$

$$y' = \frac{x^2}{2} + x + C_1; \ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + x + C_1, \ dy = \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right)dx,$$

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее условиям: $y_0 = 1$, $y'_0 = \frac{1}{2}$ при $x_0 = 1$. Подставляя эти значения в выражения для $y(x)$ и $y'(x)$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} y(1) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + C_1 + C_2 = 1; \\ y'(1) &= \frac{1}{2} + 1 + C_1 = \frac{1}{2}, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= \frac{1}{3}; \\ C_1 &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Следовательно, $C_1 = -1, C_2 = \frac{4}{3}$, поэтому искомая интегральная кривая определяется уравнением

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x + \frac{4}{3}.$$

3. Найти общее решение уравнения $y'' = 2y'$.

Правая часть данного уравнения зависит только от y'. Это уравнение вида (15. 9). Полагая $y' = p$, находим:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx}, \ \frac{dp}{dx} = 2y' = 2p, \ \frac{dp}{p} = 2dx, \ \ln p =$$
$$= 2x + \ln C', \ p = e^{2x + \ln C'} = C'e^{2x}, \frac{dy}{dx} = C'e^{2x}, dy = C'e^{2x}dx,$$
$$y = \frac{C'}{2}e^{2x} + C_2, \ y = C_1 e^{2x} + C_2.$$

4. Проинтегрировать уравнение $3y'' = y^{-\frac{5}{3}}$.

Это уравнение вида (15. 8), так как правая часть его зависит только от y. Полагая $y' = p$, получим $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Уравнение перепишем в виде

$$3p\frac{dp}{dy} = y^{-\frac{5}{3}}.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим:

$$p^2 = C_1 - y^{-\frac{2}{3}} \quad \text{или} \quad p = \pm\sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}.$$

Так как $p = \frac{dy}{dx}$, то для определения y получаем уравнение

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}} = dx \quad \text{или} \quad \frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\pm\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}} = dx,$$

откуда

$$x + C_2 = \pm\int\frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}}.$$

Для вычисления последнего интеграла сделаем подстановку

$$C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1 = t^2,$$

откуда

$$y^{\frac{1}{3}} = (t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{C_1^{\frac{1}{2}}}; \ dy = 3t\,(t^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{C_1^{\frac{3}{2}}}\,dt.$$

Следовательно,

$$\int\frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}} = \frac{1}{C_1^2}\int\frac{3t\,(t^2+1)}{t}\,dt = \frac{3}{C_1^2}\left(\frac{t^3}{3} + t\right).$$

Окончательно получаем

$$x + C_2 = \pm\frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}\left(C_1 y^{\frac{2}{3}} + 2\right).$$

5. Проинтегрировать уравнение

$$(1 + x^2)\,y'' - 2xy' = 0.$$

Это уравнение вида (15. 11), так как в него явно не входит искомая функция y. Положим $y' = p$, тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx}$$

и уравнение принимает вид

$$(1 + x^2)\frac{dp}{dx} - 2xp = 0 \quad \text{или} \quad (1 + x^2)\,dp - 2xp\,dx = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x\,dx}{1+x^2}.$$

Интегрируя, находим

$$\ln|p| = \ln(1+x^2) + \ln|C_1|,$$

откуда

$$p = C_1(1+x^2).$$

Так как

$$p = \frac{dy}{dx}, \text{ то } \frac{dy}{dx} = C_1(1+x^2),$$

и, следовательно, общее решение определяется формулой

$$y = C_1\left(\frac{x^3}{3}+x\right)+C_2.$$

Замечание. Разделяя переменные, мы предполагали, что $p \neq 0$, $1+x^2 \neq 0$, поэтому могли потерять решения $p=0$, $1+x^2=0$. Из первого равенства вытекает, что $y'=0$ и $y=C$. Функция $y=C$ является решением исходного уравнения, в чем можно убедиться непосредственно. Эти решения получаются из общего решения при $C_1=0$. Второе равенство невозможно при действительных x, оно не определяет функцию, являющуюся решением данного уравнения.

6. Проинтегрировать уравнение $yy''-y'^2=0$.

Это уравнение вида (15. 12), так как оно не содержит явно аргумента x. Положим $y'=p$, тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p,\quad y'' = \frac{dp}{dy}\cdot p.$$

Подставляя выражения для y' и y'' в исходное уравнение, получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными y и p:

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dp}{p} - \frac{dy}{y} = 0 \quad (py \neq 0).$$

Интегрируя, находим

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|,$$

откуда $p = C_1y$.

Так как $p=y'$, то $\frac{dy}{dx} = C_1y$. Интегрируя это уравнение, получаем $\ln|y| = C_1x + \ln|C_2|$ или $y = C_2e^{C_1x}$.

Замечание. Решения $y=0$, $y=C$ $(y'=0)$ получаются из общего решения соответственно при $C_2=0$ и $C_1=0$.

Задачи

Проинтегрировать дифференциальные уравнения второго порядка:

1. $y'' = \sin x$.
2. $y'' = -\frac{1}{x^2}$.
3. $y'' = \frac{6}{y^3}$.
4. $4y''\sqrt{y} = 1$.
5. $y'' = \frac{1}{a}\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3$.
6. $xy''-y'=0$.
7. $(1+x^2)y''+y'^2+1=0$.
8. $yy''+y'^2+1=0$.

Ответы

1. $y = -\sin x + C_1x + C_2$. 2. $y = \ln x + C_1x + C_2$. 3. $C_1y^2 - 6 = (C_1x+C_2)^2$. 4. $3x + C_1 = 4\sqrt{C+\sqrt{y}}\,(\sqrt{y}-2C)$. 5. $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=a^2$. 6. $y = C_1x^2+C_2$. 7. $y = -C_1x + (C_1^2+1)\ln(C_1+x)+C_2$. 8. $(x+C_2)^2 + y^2 = C_1^2$.

§ 15. 2. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$ay''+by'+cy=f(x), \tag{15. 13}$$

где a, b, c — постоянные, $f(x)$ — функция от x.

Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (15. 13) называется *однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами* или уравнением без правой части:

$$ay''+by'+cy=0. \tag{15. 14}$$

Уравнение (15. 14) можно привести к виду

$$y''+py'+qy=0. \tag{15. 15}$$

Уравнение

$$k^2+pk+q=0 \tag{15. 16}$$

называется *характеристическим уравнением* для уравнения (15. 15).

В зависимости от корней k_1 и k_2 характеристического уравнения (15. 16) получаем общее решение уравнения (15. 15) в виде

$$y = C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}, \tag{15. 17}$$

если k_1 и k_2 — различные действительные числа;

$$y = (C_1x+C_2)e^{k_1x}, \tag{15. 18}$$

если $k_1=k_2$;

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x), \tag{15.19}$$

если $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$ — комплексные числа.

Примеры

1. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$ и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 1$, $y' = 2$ при $x = 0$.

Характеристическое уравнение (15. 16) для данного уравнения принимает вид $k^2 - 5k + 6 = 0$.

Так как это уравнение имеет различные действительные корни $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, то в соответствии с формулой (15. 17) общее решение данного дифференциального уравнения таково:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Чтобы найти искомое частное решение, подставим начальные данные в выражения для y и y', где

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}.$$

Подстановка этих данных приводит к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2; \\ 2 &= 2C_1 + 3C_2, \end{aligned}\right\}$$

откуда определяются значения произвольных постоянных: $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Следовательно, искомое частное решение определяется формулой

$$y = e^{2x}.$$

2. Проинтегрировать уравнение $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 4 = 0$ имеет равные корни $k_1 = k_2 = -2$.

В соответствии с формулой (15. 18) получаем общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x).$$

3. Проинтегрировать уравнение $y'' + y' + y = 0$.

Характеристическое уравнение

$$k^2 + k + 1 = 0$$

имеет комплексные корни $k_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. В соответствии с формулой (15. 19) находим общее решение

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

4. Найти общее решение уравнения $y'' + 3y' = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 + 3k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = -3$.

Общее решение определится формулой

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x}.$$

5. Проинтегрировать уравнение $y'' + 4y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет мнимые корни $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$.

Общее решение данного уравнения:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Задачи

Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

1. $y'' - 4y' + 3y = 0$.	2. $y'' + 2y' - 8y = 0$.
3. $y'' + 3y' + 2y = 0$.	4. $y'' - 4y' = 0$.
5. $y'' - 2y' + y = 0$.	6. $y' + 8y' + 16y = 0$.
7. $y'' - 4y' + 13y = 0$.	8. $y'' + 6y' + 25y = 0$.
9. $y'' + 9y = 0$.	10. $y'' - 16y = 0$.

Ответы

1. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$. 2. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$. 3. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$. 4. $y = C_1 + C_2 e^{4x}$. 5. $y = e^{x}(C_1 + C_2 x)$. 6. $y = e^{-4x}(C_1 + C_2 x)$. 7. $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. 8. $y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$. 9. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. 10. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$.

§ 15.3. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{15. 20}$$

Общее решение уравнения (15. 20) находится по формуле

$$y = y_0 + \bar{y}, \tag{15. 21}$$

где y_0 — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{15. 22}$$

а $\bar{y}$ — частное решение неоднородного уравнения.

В простейших случаях, когда функция $f(x)$, входящая в уравнение (15. 20), является показательной или полиномом, указанное частное решение находится с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Если

$$f(x) = ae^{mx}, \tag{15. 23}$$

где a, m — постоянные, то частное решение уравнения (15. 20) находят в форме

$$\bar{y} = Ae^{mx}, \tag{15. 24}$$

когда m не является корнем характеристического уравнения для уравнения (15. 22), и в форме

$$\bar{y} = Axe^{mx} \text{ или } \bar{y} = Ax^2e^{mx}, \qquad (15.\ 25)$$

когда m — соответственно простой или кратный корень характеристического уравнения.

Если

$$f(x) = a\cos mx + b\sin mx, \qquad (15.\ 26)$$

где a, b, m — постоянные, то частное решение уравнения (15. 20) ищут в форме

$$\bar{y} = A\cos mx + B\sin mx, \qquad (15.\ 27)$$

когда

$$p^2 + (q - m^2)^2 \neq 0, \qquad (15.\ 28)$$

и в форме

$$y = x(A\cos mx + B\sin mx), \qquad (15.\ 29)$$

когда

$$p = 0,\ q = m^2. \qquad (15.\ 30)$$

Если

$$f(x) = P_n(x), \qquad (15.\ 31)$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n, то частное решение уравнения (15. 20) ищут в форме

$$\bar{y} = Q_n(x) \qquad (15.\ 32)$$

при $\quad q \neq 0 \qquad (15.\ 33)$

и в форме $\quad \bar{y} = xQ_n(x) \qquad (15.\ 34)$

при $\quad q = 0,\ p \neq 0. \qquad (15.\ 35)$

Примеры

1. Проинтегрировать уравнение $y'' - 2y' + 2y = 6e^{2x}$.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 2 = 0$ имеет комплексные корни $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения таково:

$$y_0 = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

Находим частное решение исходного уравнения. Так как в данном случае $f(x) = 6e^{2x}$ (т. е. $f(x) = ae^{mx}$, где $a = 6$, $m = 2$) и $m = 2$ не является корнем характеристического уравнения, то в соответствии с формулой (15. 24) ищем частное решение в виде

$$\bar{y} = Ae^{2x}.$$

Находя производные этой функции $\bar{y}' = 2Ae^{2x}$, $\bar{y}'' = 4Ae^{2x}$ и

подставляя выражения для $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в исходное уравнение, получим

$$4Ae^{2x} - 2\cdot 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = 6e^{2x},\ 2Ae^{2x} = 6e^{2x}.$$

Так как $\bar{y}$ — решение уравнения, то последнее равенство выполняется для всех x, т. е. является тождеством,

$$2Ae^{2x} \equiv 6e^{2x},$$

откуда

$$2A = 6,\ A = 3.$$

Следовательно, частное решение имеет вид $\bar{y} = 3e^{2x}$.

На основании формулы (15. 21) получаем общее решение исходного уравнения

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + 3e^{2x}.$$

2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y' - 2y = e^{2x}.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - k - 2 = 0$$

имеет корни $k_1 = 2$, $k_2 = -1$, поэтому общее решение однородного уравнения

$$y'' - y' - 2y = 0$$

определяется формулой $y_0 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$.

Функция $f(x) = e^{2x}$ получается из формулы (15. 23) при $a = 1$, $m = 2$. Так как $m = 2$ — простой корень характеристического уравнения, то в соответствии с формулой (15. 25) частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = Axe^{2x}.$$

Подставляя в исходное уравнение выражения для $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, где

$$\bar{y}' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x},\ \bar{y}'' = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x},$$

получим

$$(4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}) - (Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) - 2Axe^{2x} \equiv e^{2x},\ 3Ae^{2x} \equiv e^{2x},$$

откуда $3A = 1$, $A = \frac{1}{3}$. Следовательно, $\bar{y} = \frac{1}{3}xe^{2x}$.

На основании формулы (15. 21) получаем общее решение

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{3}xe^{2x}.$$

3. Проинтегрировать уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}.$$

Соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

имеет общее решение

$$y_0 = (C_1 + C_2x)e^{2x},$$

так как характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

имеет равные корни $k_1 = k_2 = 2$.

Частное решение исходного уравнения ищем в виде $\bar{y} = Ax^2e^{2x}$, ибо $m = 2$ — двойной корень характеристического уравнения. Находим производные функции $\bar{y}$:

$$\bar{y}' = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x};$$

$$\bar{y}'' = 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x}$$

и подставляем выражения для $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в уравнение, получаем

$$2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x} - 4(2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}) + 4Ax^2e^{2x} \equiv e^{2x}$$

или

$$2Ae^{2x} \equiv e^{2x},$$

откуда

$$2A = 1, \quad A = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, получено частное решение $y = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$, общее решение определится формулой

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 4x - 17.$$

Правая часть данного уравнения является полиномом второй степени $f(x) = P_2(x) = ax^2 + bx + c$, где $a = 2$, $b = -4$, $c = -17$. Так как $q \neq 0$, то в соответствии с формулой (15. 32) частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Подставляя выражения для $\bar{y}$, $\bar{y}' = 2Ax + B$, $\bar{y}'' = 2A$ в данное уравнение, получаем

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 4x - 17$$

или

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) = 2x^2 - 4x - 17.$$

Поскольку $\bar{y}$ — решение дифференциального уравнения, то последнее равенство должно выполняться для всех x, т. е. является тождеством, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящие в разных частях, равны между собой:

$$2A = 2, \quad 6A + 2B = -4, \quad 2A + 3B + 2C = -17.$$

Из полученной системы уравнений находим, что

$$A = 1, \quad B = -5, \quad C = -2,$$

поэтому

$$\bar{y} = x^2 - 5x - 2.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

определяется формулой

$$y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x},$$

так как характеристическое уравнение $k^2 + 3k + 2 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = -2$. На основании формулы (15. 21) получаем общее решение

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + x^2 - 5x - 2$$

исходного уравнения.

5. Проинтегрировать уравнение

$$y'' - 7y' + 10y = x^2.$$

Правая часть данного уравнения есть многочлен вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$. Так как $q \neq 0$, то решение ищем в виде

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C.$$

Подставляя в данное уравнение выражения для $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, где

$$\bar{y}' = 2Ax + B, \quad \bar{y}'' = 2A,$$

получаем $2A - 7(2Ax + B) + 10(Ax^2 + Bx + C) = x^2$

или

$$10Ax^2 + (10B - 14A)x + (2A - 7B + 10C) = x^2,$$

откуда

$$10A = 1, \quad 10B - 14A = 0, \quad 2A - 7B + 10C = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$A = 0,1, \quad B = 0,14, \quad C = 0,078,$$

поэтому

$$\bar{y} = 0,1x^2 + 0,14x + 0,078.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 7y' + 10y = 0$$

определяется формулой

$$y_0 = C_1e^{2x} + C_2e^{5x},$$

так как характеристическое уравнение

$$k^2 - 7k + 10 = 0$$

имеет корни $k_1 = 2$, $k_2 = 5$.

На основании формулы (15. 21) получаем общее решение

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x} + 0,1x^2 + 0,14x + 0,078$$

исходного уравнения.

6. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' = x^2.$$

Так как в данном случае $q = 0$ (в левой части отсутствует член, содержащий y), то в соответствии с формулой (15. 34) частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = x(Ax^2 + Bx + C), \quad \bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Подставляя в уравнение выражения

$$\bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad \bar{y}'' = 6Ax + 2B,$$

получим

$$(6Ax + 2B) - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) \equiv x^2$$

или

$$-9Ax^2 + (6A - 6B)x + 2B - 3C \equiv x^2,$$

откуда

$$-9A = 1, \quad 6A - 6B = 0, \quad 2B - 3C = 0.$$

Следовательно,

$$\bar{y} = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x.$$

Соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 3y' = 0$$

имеет общее решение

$$y_0 = C_1 + C_2e^{3x},$$

так как для характеристического уравнения $k^2 - 3k = 0$ получаем $k_1 = 0$, $k_2 = 3$.

По формуле (15. 21) получаем общее решение

$$y = C_1 + C_2e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x.$$

7. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = 2\sin 2x + 3\cos 2x.$$

Правая часть данного уравнения является тригонометрическим полиномом вида $f(x) = a\cos mx + b\sin mx$, где $a = 3$, $b = 2$, $m = 2$. Так как выполняется условие (15. 28), в соответствии с формулой (15. 27) частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Находя производные

$$\bar{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \quad \bar{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

и подставляя в данное уравнение выражения для $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, получим

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + \\ + 4(A\cos 2x + B\sin 2x) \equiv 2\sin 2x + 3\cos 2x$$

или

$$8B\cos 2x - 8A\sin 2x \equiv 3\cos 2x + 2\sin 2x,$$

откуда

$$8B = 3, \quad -8A = 2,$$

т. е.

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{3}{8}.$$

Следовательно, частное решение определяется формулой

$$\bar{y} = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{3}{8}\sin 2x.$$

Соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

имеет общее решение

$$y_0 = (C_1 + C_2x)e^{-2x}.$$

По формуле (15. 21) находим общее решение данного уравнения

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{3}{8}\sin 2x.$$

8. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 12y' + 36y = \sin 3x.$$

Правая часть данного уравнения является тригонометрическим многочленом вида $f(x) = a\cos mx + b\sin mx$, где $a = 0$, $b = 1$, $m = 3$. Так как выполнено условие (15. 28), частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Находим производные

$$\bar{y}' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x, \quad \bar{y}'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

Подставляя выражения для $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в данное уравнение, получаем

$$(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x) - 12(-3A\sin 3x + 3B\cos 2x) + \\ + 36(A\cos 3x + B\sin 3x) \equiv \sin 3x$$

или

$$(27A - 36B)\cos 3x + (27B + 36A)\sin 3x \equiv \sin 3x,$$

откуда

$$27A - 36B = 0, \quad 27B + 36A = 1.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$A = \frac{4}{225}, \quad B = \frac{1}{75}.$$

Следовательно, имеем частное решение

$$\bar{y} = \frac{4}{225}\cos 3x + \frac{1}{75}\sin 3x.$$

Соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 12y' + 36y = 0$$

имеет общее решение

$$y_0 = (C_1 + C_2 x) e^{6x},$$

так как для характеристического уравнения

$$k^2 - 12k + 36 = 0,$$

получаем $k_1 = k_2 = 6$.

По формуле (15. 21) находим общее решение

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{6x} + \frac{4}{225} \cos 3x + \frac{1}{75} \sin 3x$$

исходного уравнения.

Замечание. Частное решение мы искали в виде $\bar{y} = A \cos 3x + B \sin 3x$, а не в виде $\bar{y} = B \sin 3x$, так как из того факта, что $a = 0$ не следует, что $A = 0$.

Задачи

1. $y'' - 6y' - 7y = 32e^{3x}$.
2. $y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x}$.
3. $y'' - 2y' + y = e^x$.
4. $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15$.
5. $y'' + y' - 6y = -x^2 - \frac{29}{18}$.
6. $y'' - 4y' + 3y = x - 1$.
7. $y'' - 2y' = 6x^2 - 10x + 12$.
8. $y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x$.
9. $y'' - 8y' + 12y = -65 \cos 4x$.
10. $y'' + 16y = -24 \sin 4x$.

Ответы

1. $y = C_1 e^{7x} + C_2 e^{-x} - 2e^{3x}$. 2. $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} + 2x e^{2x}$. 3. $y = (C_1 + C_2 x) e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$. 4. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x} + 2x^2 - x - 1$. 5. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{18} x + \frac{1}{3}$. 6. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x + \frac{1}{3} x + \frac{1}{9}$. 7. $y = C_1 + C_2 e^{2x} - x^3 + x^2 - 5x$. 8. $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{13} \sin x - \frac{9}{39} \cos x$. 9. $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{2x} + 2 \sin 4x + \frac{1}{4} \cos 4x$. 10. $y = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x + 3x \cos 4x$.

Глава 16. Дифференциальные уравнения порядка выше второго. Системы дифференциальных уравнений

§ 16.1. Уравнения, допускающие понижение порядка

Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (16.\ 1)$$

решается путем n-кратного интегрирования.

Уравнение

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (16.\ 2)$$

не содержащее искомой функции y, подстановкой

$$y^{(k)} = u, \qquad (16.\ 3)$$

где $y^{(k)}$ — низшая из производных, сводится к уравнению

$$F(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-k)}) = 0, \qquad (16.\ 4)$$

порядок которого равен $n - k$.

Уравнение

$$F(y, y', \ldots, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (16.\ 5)$$

не содержащее независимой переменной x, также допускает понижение порядка с помощью подстановки

$$y' = p. \qquad (16.6)$$

Примеры

1. Решить уравнение $y''' = \sin x$.

В левой части этого уравнения стоит третья производная искомой функции, в правой — функция только от x, это уравнение вида (16. 1). Так как $y''' = \frac{dy''}{dx}$, то

$$\frac{dy''}{dx} = \sin x, \quad dy'' = \sin x \, dx,$$

откуда

$$y'' = \int \sin x \, dx = -\cos x + C_1.$$

Поскольку $y'' = \frac{dy'}{dx}$, то последнее уравнение можно переписать так:

$$\frac{dy'}{dx} = -\cos x + C_1 \quad \text{или} \quad dy' = (-\cos x + C_1)\, dx.$$

Интегрируя, получаем

$$y' = -\sin x + C_1 x + C_2$$

или

$$dy = (-\sin x + C_1 x + C_2)\, dx.$$

Интегрируя еще раз, находим общее решение исходного уравнения

$$y = \cos x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3.$$

2. Решить уравнение $xy^{\mathrm{IV}} + y''' = 0$.

Это уравнение вида (16. 2), для которого $k = 3$, $n = 4$. Принимая низшую производную y''' за новую неизвестную функцию u, осуществим подстановку (16. 3)

$$y''' = u,$$

откуда $y^{IV} = \frac{du}{dx}$. Таким образом, данное уравнение сводится к уравнению первого порядка относительно u:

$$xu' + u = 0 \text{ или } \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} = 0,$$

из которого получаем

$$u = \frac{C_1}{x}.$$

Так как $u = y'''$, то для определения y имеем уравнение

$$y''' = \frac{C_1}{x},$$

в котором правая часть зависит только от x, т. е. уравнение вида (16. 1). Трижды интегрируя, получаем соответственно:

$$y'' = \int \frac{C_1}{x}\,dx = C_1 \ln x + C_2, \quad y'' = C_1 \ln x + C_2;$$

$$y' = C_1(x \ln x - x) + C_2 x + C_3;$$

$$y = C_1\left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3}{4} x^2\right) + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

или

$$y = C_1' x^2 \ln x + C_2' x^2 + C_3 x + C_4,$$

где

$$C_1' = \frac{C_1}{2}, \; C_2' = \frac{C_2}{2} - \frac{3}{4} C_1.$$

3. Решить уравнение $y^{IV} = 2y'''$.

Положим $y''' = u$, тогда $y^{IV} = u'$, поэтому уравнение примет вид

$$u' = 2u, \quad \frac{du}{dx} = 2u.$$

Разделяя переменные (в предположении, что $u \neq 0$) и интегрируя, получим

$$\ln u = 2x + C, \quad u = e^{2x+C} = C_1 e^{2x}.$$

Так как

$$u = y''', \text{ то } y''' = C_1 e^{2x},$$

откуда:

$$y'' = \frac{C_1}{2} e^{2x} + C_2; \quad y' = \frac{C_1}{4} e^{2x} + C_2 x + C_3;$$

$$y = \frac{C_1}{8} e^{2x} + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4. \tag{A}$$

Замечание. Если $u = 0$, т. е. $y''' = 0$, то $y'' = C_2$, $y' = C_2 x + C_3$, $y = \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$. Это решение получается из формулы (A) при $C_1 = 0$.

Задачи

Решить уравнения:

1. $y''' = 2x$.
2. $y''' = \cos x$.
3. $y''' = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$.
4. $y^{IV} = \frac{1}{x}$.
5. $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$.
6. $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$.

Ответы

1. $y = \frac{x^4}{12} + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$. 2. $y = -\sin x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$. 3. $y = \ln \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$. 4. $6y = x^3 \ln x + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$. 5. $y = C_1 \ln x + C_2 x + C_3 - \frac{1}{2x}$. 6. $y = C_3 + C_2 x - \sin(x + C_1)$.

§ 16. 2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{16. 7}$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — постоянные величины, называется *линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами.*

Общее решение уравнения (16. 7) определяется формулой

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n, \tag{16. 8}$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — его линейно независимые частные решения. Последние находятся с помощью характеристического уравнения

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \tag{16. 9}$$

Если характеристическое уравнение имеет n действительных различных корней r_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$, то каждому из них соответствует частное решение

$$y_m = e^{r_m x} \tag{16. 10}$$

и общее решение уравнения (16. 7) принимает вид

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}. \tag{16. 11}$$

Если уравнение (16. 9) имеет k действительных равных корней $r_1 = r_2 = \ldots = r_k$ (т. е. корень r_1 имеет кратность k), то в формуле (16. 8) им соответствуют решения

$$y_1 = e^{r_1 x}, \; y_2 = x e^{r_1 x}, \; \ldots, \; y_k = x^{k-1} e^{r_1 x}. \tag{16. 12}$$

Однократным комплексно сопряженным корням $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ уравнения (16. 9) в формуле (16. 8) соответствуют решения:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x; \; y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x. \tag{16. 13}$$

Комплексно сопряженным корням $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратности k соответствуют следующие частные решения:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x;$$
$$y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{k+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \quad (16.\ 14)$$

Примеры

1. Решить уравнение $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Для данного уравнения с постоянными коэффициентами составим характеристическое уравнение (при этом нужно сохранить коэффициенты; вместо y поставить 1, вместо ее производной k-го порядка поставить r^k):

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0.$$

Преобразуя левую часть уравнения, получим

$$r^2(r-2) - (r-2) = 0,\ (r-2)(r^2-1) = 0,$$

откуда

$$r_1 = -1,\ r_2 = 1,\ r_3 = 2.$$

В соответствии с формулой (16. 11) получаем общее решение

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x}.$$

Замечание. Нумерация корней не имеет существенного значения. В самом деле, если считать, что $r_1 = 2$, $r_2 = -1$, $r_3 = 1$, то общее решение определится формулой

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + C_3e^x,$$

которое отличается от найденного выше только обозначениями произвольных постоянных.

2. Решить уравнение $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 0$.

Составим характеристическое уравнение

$$r^3 - 7r^2 + 15r - 9 = 0,$$

один из корней которого $r_1 = 1$ можно получить методом проб.

Так как

$$(r^3 - 7r^2 + 15r - 9) : (r-1) = r^2 - 6r + 9,$$

то уравнение принимает вид

$$(r-1)(r^2 - 6r + 9) = 0,$$

откуда $r_2 = r_3 = 3$. Таким образом, характеристическое уравнение имеет один простой (однократный корень $r_1 = 1$) и двукратный корень $r_2 = 3$ ($k = 2$).

В соответствии с формулами (16. 12) и (16. 8) получаем общее решение

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3xe^{3x}$$

или

$$y = C_1e^x + (C_2 + C_3x)e^{3x}.$$

3. Решить уравнение $y^{IV} - 16y = 0$.

Характеристическое уравнение

$$r^4 - 16 = 0 \text{ или } (r^2 - 4)(r^2 + 4) = 0$$

имеет корни

$$r_1 = 2,\ r_2 = -2,\ r_3 = 2i,\ r_4 = -2i.$$

Мнимым сопряженным корням r_3 и r_4 (для которых $\alpha = 0$, $\beta = 2$) соответствуют частные решения

$$y_3 = \cos 2x,\ y_4 = \sin 2x,$$

полученные из формул (16. 13).

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x.$$

4. Решить уравнение $y^{IV} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$.

Составим характеристическое уравнение

$$r^4 - 4r^3 + 8r^2 - 8r + 4 = 0.$$

Преобразуя левую часть этого уравнения, получим

$$r^4 - 4r^3 + 8r^2 - 8r + 4 = r^4 - 4r^3 + 4r^2 + 4r^2 - 8r + 4 =$$
$$= (r^2 - 2r + 2)^2 = (r^2 - 2r + 2)(r^2 - 2r + 2) = 0,$$

откуда $r^2 - 2r + 2 = 0$, $r^2 - 2r + 2 = 0$.

Следовательно, комплексно сопряженные корни характеристического уравнения $r_{1,2} = 1 \pm i$ имеют кратность $k = 2$. Так как в данном случае $\alpha = 1$, $\beta = 1$, то в соответствии с формулами (16. 14) и (16. 8) общее решение имеет вид

$$y = C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x + C_3xe^x\cos x + C_4xe^x\sin x$$

или

$$y = e^x[(C_1 + C_3x)\cos x + (C_2 + C_4x)\sin x].$$

5. Решить уравнение $y^{(6)} + 2y^{(IV)} + y'' = 0$.

Составим характеристическое уравнение, соответствующее данному дифференциальному уравнению:

$$r^6 + 2r^4 + r^2 = 0.$$

Преобразуя левую часть этого уравнения, получим

$$r^2(r^4 + 2r^2 + 1) = 0 \text{ или } r^2(r^2+1)^2 = 0.$$

Таким образом, характеристическое уравнение

$$rr(r^2+1)(r^2+1) = 0$$

имеет один двукратный действительный корень $r = 0$ ($r_1 = r_2 = 0$) и пару двукратных мнимых сопряженных корней $r = \pm i$ ($r_3 = r_4 = i$, $r_5 = r_6 = -i$). По формулам (16. 14), (16. 12) и (16. 8) получаем общее решение

$$y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)\cos x + (C_5 + C_6x)\sin x.$$

6. Решить уравнение $y^{(8)} + 2y^{(6)} - 2y'' - y = 0$.

Характеристическое уравнение

$$r^8 + 2r^6 - 2r^2 - 1 = 0$$

имеет два корня $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, которые можно получить методом проб, поэтому левая часть его должна делиться на $(r - 1)$ и на $(r + 1)$, следовательно, и на $(r^2 - 1)$. Произведя указанное деление, получим

$$(r^8 + 2r^6 - 2r^2 - 1) : (r^2 - 1) = r^6 + 3r^4 + 3r^2 + 1 = (r^2 + 1)^3.$$

Итак, характеристическое уравнение принимает вид

$$(r^2 - 1)(r^2 + 1)^3 = 0 \text{ или } (r - 1)(r + 1)(r^2 + 1)(r^2 + 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Это уравнение имеет два указанных простых действительных корня и два мнимых корня кратности $k = 3$ $(r_3 = r_4 = r_5 = i$, $r_6 = r_7 = r_8 = -i)$. В соответствии с формулами (16. 14), (16. 12) и (16. 8) находим общее решение

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (C_3 + C_4x + C_5x^2)\cos x + (C_6 + C_7x + C_8x^2)\sin x.$$

Задачи

Решить однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

1. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$. **2.** $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.
3. $y''' - 3y' - 2y = 0$. **4.** $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
5. $y^{IV} - 81y = 0$. **6.** $y^{IV} - 6y''' + 14y'' - 14y' + 5y = 0$.
7. $y^{(5)} + 4y^{IV} + y''' - 10y'' - 4y' + 8y = 0$.
8. $y^{(6)} + 8y^{IV} + 16y'' = 0$. **9.** $y^{(8)} - y^{(6)} - 9y^{IV} - 11y'' - 4y = 0$.
10. $y^{(9)} + 2y^{(7)} + y^{(5)} = 0$.

Ответы

1. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}$ $(r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = -2)$. **2.** $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$ $(r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = 3)$. **3.** $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + C_3e^{2x}$ $(r_1 = r_2 = -1,\ r_3 = 2)$. **4.** $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$ $(r_1 = r_2 = r_3 = 1)$. **5.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3\cos 3x + C_4\sin 3x$ $(r_1 = 3,\ r_2 = -3,\ r_3 = 3i,\ r_4 = -3i)$. **6.** $y = (C_1 + C_2x)e^x + (C_1\cos x + C_2\sin x)e^{2x}$ $(r_1 = r_2 = 1,\ r_3 = 2 + i,\ r_4 = 2 - i)$. **7.** $y = (C_1 + C_2x)e^x + (C_3 + C_4x + C_5x^2)e^{-2x}$ $(r_1 = r_2 = 1,\ r_3 = r_4 = r_5 = -2)$. **8.** $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)\cos 2x + (C_5 + C_6x)\sin 2x$ $(r_1 = r_2 = 0,\ r_3 = r_4 = 2i,\ r_5 = r_6 = -2i)$ **9.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + (C_3 + C_4x + C_5x^2)\cos x + (C_6 + C_7x + C_8x^2)\sin x$ $(r_1 = 2\ \ r_2 = -2,\ r_3 = r_4 = r_5 = i,\ r_6 = r_7 = r_8 = -i)$. **10.** $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4 + (C_6 + C_7x)\cos x + (C_8 + C_9x)\sin x$ $(r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 0,\ r_6 = r_7 = i,\ r_8 = r_9 = -i)$.

§ 16.3. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x) \quad (16.15)$$

называется *линейным неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами* a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_2, a_1, a_0.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (16.15) становится однородным:

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0. \quad (16.16)$$

Общее решение уравнения (16.15) определяется формулой

$$y = y_0 + \overline{y}, \quad (16.17)$$

где y_0 — общее решение соответствующего однородного уравнения (16.16), а $\overline{y}$ — частное решение данного неоднородного уравнения.

В простейших случаях частное решение может быть найдено с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Если

$$f(x) = e^{\alpha x}P_m(x), \quad (16.18)$$

где $P_m(x)$ — многочлен степени m, то частное решение ищут в виде

$$\overline{y} = e^{\alpha x}M_m(x), \quad (16.19)$$

где $M_m(x)$ — многочлен той же степени m с неопределенными коэффициентами, если α не является корнем характеристического уравнения, соответствующего уравнению (16.16), и в виде

$$\overline{y} = x^ke^{\alpha x}M_m(x), \quad (16.20)$$

если α — корень указанного уравнения кратности k.

В частности, при $\alpha = 0$ $f(x) = P_m(x)$ и если $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то существует частное решение $\overline{y} = M_m(x)$, если $\alpha = 0$ — корень характеристического уравнения кратности k, то $\overline{y} = x^kM_m(x)$.

Если

$$f(x) = e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x], \quad (16.21)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, наибольшая степень которых m, то частное решение ищут в виде

$$\overline{y} = e^{\alpha x}[M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x], \quad (16.22)$$

если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и в виде

$$\overline{y} = x^ke^{\alpha x}[M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x], \quad (16.23)$$

где $M(x)$ и $N(x)$ — многочлены степени m, если $\alpha + i\beta$ — корень указанного уравнения кратности k.

Если

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x), \quad (16.24)$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ — функции вида (16.18) и (16.21), то существует частное решение

$$\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 + \overline{y}_3, \quad (16.25)$$

определяемое указанными выше правилами.

В общем случае частное решение уравнения (16.15) может быть найдено с помощью *метода вариации произвольных постоянных* (метода Лагранжа). Если

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

общее решение однородного уравнения (16.16), то общее решение неоднородного уравнения (16.15) ищут в виде

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n. \qquad (16.26)$$

Функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ находят из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \ldots + C'_n y_n = 0; \\ &C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \ldots + C'_n y'_n = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \ldots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0; \\ &C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x). \end{aligned}\right\} \qquad (16.27)$$

Примеры

1. Решить уравнение $y''' + y = e^{2x}(x^2 + x + 1)$.

Это линейное неоднородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами, правая часть которого есть функция вида (16.18), где $\alpha = 2$, $P_2(x) = x^2 + x + 1$, т. е. $m = 2$.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y''' + y = 0.$$

Так как характеристическое уравнение $r^3 + 1 = 0$ имеет корни $r_1 = -1$, $r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $r_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, то общее решение однородного уравнения определяется формулой

$$y_0 = C_1 e^{-x} + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2} x\right).$$

В соответствии с формулой (16.19) частное решение исходного уравнения ищем в виде

$$\bar{y} = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C),$$

поскольку число $\alpha = 2$ не является корнем характеристического уравнения и $P_2(x)$ — многочлен второй степени.

Находим производные функции $\bar{y}$:

$$\bar{y}' = e^{2x}(2Ax + B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C);$$

$$\bar{y}'' = e^{2x}(2A + 8Ax + 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C);$$

$$\bar{y}''' = e^{2x}(12A + 24Ax + 12B + 8Ax^2 + 8Bx + 8C).$$

Подставляя выражения для $\bar{y}$ и $\bar{y}'''$ в данное уравнение и сокращая на e^{2x}, получим тождество

$$12A + 24Ax + 12B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C \equiv x^2 + x + 1,$$

откуда

$$9A = 1,\ 24A + 9B = 1,\ 12A + 12B + 9C = 1$$

и

$$A = \frac{1}{9},\ B = -\frac{5}{27},\ C = \frac{17}{81},$$

поэтому

$$\bar{y} = e^{2x}\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{27}x + \frac{17}{81}\right).$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = y_0 + \bar{y} = C_1 e^{-x} + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \\ + e^{2x}\left(\frac{x^2}{9} - \frac{5x}{27} + \frac{17}{81}\right).$$

2. Решить уравнение $y''' + y' = x^4$.

Правая часть уравнения есть функция вида (16.18), для которой $\alpha = 0$, $m = 4$.

Характеристическое уравнение

$$r^3 + r = 0 \text{ или } r(r^2 + 1) = 0$$

имеет корни $r_1 = 0$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$, поэтому общее решение однородного уравнения $y''' + y' = 0$ определяется формулой

$$y_0 = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Так как число $\alpha = 0$ является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = xe^{0\cdot x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)$$

или

$$\bar{y} = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex.$$

Находим производные функции $\bar{y}$:

$$\bar{y}' = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E;$$

$$\bar{y}'' = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D;$$

$$\bar{y}''' = 60Ax^2 + 24Bx + 6C.$$

Подставляя выражения для $\bar{y}'$, $\bar{y}'''$ в данное уравнение, получим тождество

$$60Ax^2 + 24Bx + 6C + 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E \equiv x^4,$$

откуда

$$5A = 1,\ 4B = 0,\ 60A + 3C = 0,\ 24B + 2D = 0,\ 6C + E = 0,$$

т. е.

$$A = \frac{1}{5},\ B = 0,\ C = -4,\ D = 0,\ E = 24.$$

Таким образом,

$$\bar{y} = \frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 24x$$

и

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + \frac{x^5}{5} - 4x^3 + 24x.$$

3. Проинтегрировать уравнение $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$.

В данном случае правая часть — функция вида (16.18), где $\alpha = 1, m = 0$. Число $\alpha = 1$ равно трехкратному корню характеристического уравнения $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$, поэтому частное решение в соответствии с формулой (16.20) ищем в виде

$$\bar{y} = ax^3e^x.$$

Дифференцируя функцию $\bar{y}$, получаем:

$$\bar{y}' = (ax^3 + 3ax^2)e^x,\quad \bar{y}'' = (ax^3 + 6ax^2 + 6ax)e^x;$$
$$\bar{y}''' = (ax^3 + 9ax^2 + 18ax + 6a)e^x.$$

Подставляя найденные значения $\bar{y}', \bar{y}'', \bar{y}'''$ и $\bar{y}$, сокращая результат на e^x, получим

$$6a = 2,\ a = \frac{1}{3}.$$

Так как $y_0 = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$, то общее решение данного уравнения определится формулой

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + \frac{1}{3}x^3e^x.$$

4. Решить уравнение

$$y^{IV} - y = e^{\alpha x} + e^{-\alpha x} + \cos\beta x.$$

Характеристическое уравнение

$$r^4 - 1 = 0$$

имеет корни $r_1 = 1,\ r_2 = -1,\ r_3 = i,\ r_4 = -i$, поэтому

$$y_0 = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

В соответствии с формулой (16.25) ищем частное решение:

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3,$$

где

$$\bar{y}_1 = Ae^{\alpha x},\ \bar{y}_2 = Be^{-\alpha x},\ \bar{y}_3 = C\sin\beta x + D\cos\beta x$$

соответственно частные решения уравнений

$$y^{IV} - y = e^{\alpha x},\ y^{IV} - y = e^{-\alpha x},\ y^{IV} - y = \cos\beta x.$$

Находя производные $\bar{y}_1^{IV},\ \bar{y}_2^{IV},\ \bar{y}_3^{IV}$ и подставляя их выражения и $\bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \bar{y}_3$ в последние уравнения, получим:

$$A = \frac{1}{\alpha^4 - 1},\ B = \frac{1}{\alpha^4 - 1},\ C = 0,\ D = \frac{1}{\beta^4 - 1}.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\sin x + C_4\cos x + \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{\alpha^4 - 1} + \frac{\cos\beta x}{\beta^4 - 1}.$$

Замечание. В случае, если $\alpha = \beta = 1$, общее решение будет:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\sin x + C_4\cos x + \frac{x}{4}(e^x - e^{-x}) - \frac{x\sin x}{4}.$$

В этом случае частные решения нужно искать в виде:

$$\bar{y}_1 = Axe^x;\ \bar{y}_2 = Bxe^{-x};\ \bar{y}_3 = x(C\sin x + D\cos x).$$

5. Решить уравнение $y''' + y' = \operatorname{tg} x$.

Характеристическое уравнение $r^3 + r = 0$ имеет корни $r_1 = 0$, $r_2 = i,\ r_3 = -i$, поэтому

$$y_1 = 1,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x$$

и общее решение однородного уравнения выразится формулой

$$y_0 = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x.$$

Методом вариации произвольных постоянных находим общее решение данного неоднородного уравнения, полагая

$$y = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x.$$

Система (16.27) для определения функций $C_1(x),\ C_2(x),\ C_3(x)$ запишется так:

$$C_1' + C_2'\cos x + C_3'\sin x = 0;$$
$$-C_2'\sin x + C_3'\cos x = 0;$$
$$-C_2'\cos x - C_3'\sin x = \operatorname{tg} x.$$

Умножив обе части второго уравнения на $\sin x$, третьего — на $\cos x$ и сложив почленно, получим

$$C_2' = -\sin x.$$

Из второго уравнения имеем

$$C_3' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Сложив почленно первое уравнение с третьим, получим

$$C_1' = \operatorname{tg} x.$$

Интегрируя три полученных уравнения, находим:

$$C_1(x) = -\ln\cos x + C_1;$$
$$C_2(x) = \cos x + C_2;$$
$$C_3(x) = \sin x - \ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Следовательно, общее решение данного неоднородного уравнения выразится формулой

$$y = -\ln\cos x - \sin x\cdot\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + $$
$$+ C_2\cos x + C_3\sin x + \overline{C}_1,$$

где $\overline{C}_1 = C_1 + 1$.

Задачи

Решить линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами:

1. $y''' - y'' + y' - y = (x+1)e^{2x}$.
2. $y''' - 7y' + 6y = x^2$.
3. $y^{\text{IV}} - 8y''' + 23y'' - 28y' + 12y = x$.
4. $y^{\text{IV}} - 2y'' + y = -8e^{-x} + 8e^{x} + 12\sin x - 12\cos x$.
5. $y^{(5)} - y'' = x$.
6. $y^{(6)} + 3y^{\text{IV}} + 3y'' + y = 9\sin 2x$.
7. $y''' + 2y'' + 5y' = 4xe^{-x} - 68\cos 2x + x$.
8. $y^{\text{IV}} - 3y'' - 4y = x^2 + 1 + e^{3x} + 4\cos x$.

С помощью метода вариации произвольных постоянных решить линейные неоднородные уравнения:

9. $y''' - 3y'' + y' - 3y = \sin x$.
10. $y''' - 2y'' - y' + 2y = \dfrac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$.

Ответы

1. $y = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x + e^{2x}\left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25}\right)$. 2. $y = \frac{1}{6}\left(x^2 + \right.$ $\left. + \frac{7}{3}x + \frac{49}{18}\right) + C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-3x}$. 3. $y = \frac{3x+7}{36} + (C_1 + C_2x)e^{2x} +$ $+ C_3e^x + C_4e^{3x}$. 4. $y = (C_1 + C_2x + x^2)e^x + (C_3 + C_4x - x^2)e^{-x} + 3\sin x -$

$- 3\cos x$. 5. $y = C_1 + C_2x + \frac{x^3}{6} + C_3e^{-x} + C_4e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x +$ $+ C_5e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$. 6. $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\cos x + (C_4 + C_5x +$ $+ C_6x^2)\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$. 7. $y = -(x+1)e^{-x} + 8\cos 2x - 2\sin 2x +$ $+ \frac{x^2}{10} - \frac{2x}{25} + C_1 + C_2e^{-x}\cos 2x + C_3e^{-x}\sin 2x$. 8. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} +$ $+ C_3\cos x + C_4\sin x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8} + \frac{e^{3x}}{50} - \frac{2x\sin x}{5}$. 9. $y = C_1e^{3x} + C_2\sin x +$ $+ C_3\cos x + \frac{3\cos x - 21\sin x}{200} + \frac{x}{20}(3\cos x - \sin x)$. 10. $y = C_1e^x +$ $+ C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + \frac{1}{x}$.

§ 16.4. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами называется совокупность дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x); \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{n}y_n + f_n(x); \end{aligned}\right\} \qquad (16.28)$$

где y_1, y_2, ..., y_n — неизвестные функции независимой переменной x; a_{ik} $(i,\ k = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные величины.

Если при всех рассматриваемых значениях x все данные функции $f_k(x) \equiv 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то система (16.28) называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*.

Решением системы (16.28) называется система n функций

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x), \qquad (16.29)$$

обращающих равенства (16.28) в тождества.

З а д а ч а К о ш и. *Найти такое решение* (16.29) *системы* (16.28), *которое при* $x = x_0$ *принимало бы заданные значения*

$$y_1(x_0) = b_1,\ y_2(x_0) = b_2,\ \ldots,\ y_n(x_0) = b_n.$$

Методом исключения $(n-1)$ неизвестных функций система (16.28) может быть сведена к дифференциальному уравнению n-го порядка относительно одной из неизвестных функций.

Замечание. Если независимую переменную обозначить через t, то система (16.28) примет вид

$$\dot{y}_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l + f_k(t) \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n), \tag{16.30}$$

где точкой обозначена производная по t. Этот способ обозначения очень часто применяется в механике.

Примеры

1. Решить систему уравнений

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = -y.$$

Это система из двух уравнений с постоянными коэффициентами относительно двух неизвестных функций y и z. Дифференцируя по x первое уравнение, находим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}.$$

Принимая во внимание второе уравнение системы, получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Таким образом, данная система сведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянным коэффициентом относительно неизвестной функции y. Решим это уравнение. Так как характеристическое уравнение $r^2 + 1 = 0$ имеет корни $r_1 = i$, $r_2 = -i$, то общее решение определится формулой

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Отсюда и из первого уравнения системы находим z:

$$z = \frac{dy}{dx} = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Итак, получено общее решение системы:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x; \quad z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

2. Решить систему уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = 5y + 4z; \quad \frac{dz}{dx} = 4y + 5z.$$

Найти решение, удовлетворяющее условию: $y = 2$, $z = 0$ при $x = 0$.

Дифференцируя по x первое уравнение и подставляя выражения для первых производных из данной системы, получим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5\frac{dy}{dx} + 4\frac{dz}{dx} = 5(5y + 4z) + 4(4y + 5z),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 41y + 40z. \tag{A}$$

Из первого уравнения системы найдем z:

$$z = \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx} - 5y\right). \tag{B}$$

Подставляя выражение (B) в уравнение (A), находим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 41y + 10\left(\frac{dy}{dx} - 5y\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 10\frac{dy}{dx} - 9y \quad \text{или} \quad y'' - 10y' + 9y = 0.$$

Решая это линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (см. § 15.2), получим

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}. \tag{C}$$

Функция z выражается формулой (B), для чего находим

$$y' = C_1 e^x + 9C_2 e^{9x}.$$

Следовательно,

$$z = \frac{1}{4}[C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} - 5(C_1 e^x + C_2 e^{9x})] = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

Общее решение системы:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}; \quad z = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}. \tag{D}$$

Решим задачу Коши, т. е. найдем решение, удовлетворяющее условию $y = 2$, $z = 0$ при $x = 0$. Подставляя эти значения в систему (D), получим

$$2 = C_1 + C_2,$$
$$0 = -C_1 + C_2,$$

откуда $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. Итак, получено частное решение

$$y = e^x + e^{9x}, \quad z = -e^x + e^{9x}.$$

3. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 5x - 3y + 2e^{3t}; \\ \dot{y} &= x + y + 5e^{-t}. \end{aligned}\right\}$$

Это система вида (16.30), точкой здесь обозначена производная по независимой переменной t. Как и в предыдущих примерах, это система двух уравнений относительно двух неизвестных функций x и y, но эта система является неоднородной ($f_1(t) = 2e^{3t}$, $f_2(t) = 5e^{-t}$). Покажем, что систему можно привести к неоднородному линейному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами. Дифференцируя по t первое уравнение и подставляя выражения для $\dot{x}$, $\dot{y}$ из уравнений системы, находим

$$\ddot{x} = 5\dot{x} - 3\dot{y} + 6e^{3t} =$$
$$= 5(5x - 3y + 2e^{3t}) - 3(x + y + 5e^{-t}) + 6e^{3t},$$
$$\ddot{x} - 22x + 18y = 16e^{3t} - 15e^{-t}. \tag{A}$$

Найдем y из первого уравнения системы:

$$y = \frac{1}{3}(5x - \dot{x} + 2e^{3t}). \tag{B}$$

Подставляя выражение для y в уравнение (A), получим

$$\ddot{x} - 22x + 6(5x - \dot{x} + 2e^{3t}) = 16e^{3t} - 15e^{-t},$$

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 8x = 4e^{3t} - 15e^{-t}. \qquad (C)$$

Решая это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, находим

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}. \qquad (D)$$

Так как

$$\dot{x} = 2C_1e^{2t} + 4C_2e^{4t} - 12e^{3t} + e^{-t},$$

то из уравнения (B) получаем

$$y = \frac{1}{3}\left[5(C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}) - \right.$$
$$\left. - (2C_1e^{2t} + 4C_2e^{4t} - 12e^{3t} + e^{-t}) + 2e^{3t}\right],$$
$$y = C_1e^{2t} + \frac{1}{3}C_2e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}. \qquad (E)$$

Общее решение определяется формулами (D) и (E).

Замечание. Частное решение уравнения (C) необходимо было искать в виде

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2,$$

где $\bar{x}_1$ — частное решение уравнения $\ddot{x} - 6\dot{x} + 8x = 4e^{3t}$, x_2 — частное решения уравнения $\ddot{x} - 6\dot{x} + 8x = -15e^{-t}$, причем $\bar{x}_1 = Ae^{3t}$, $\bar{x}_2 = Be^{-t}$.

4. Решить систему уравнений:

$$\dot{x} = y;\ \dot{y} = z;\ \dot{z} = x.$$

Дифференцируя по t первое уравнение и принимая во внимание второе, находим

$$\ddot{x} = \dot{y},\ \ddot{x} = z.$$

Дифференцируя последнее уравнение и принимая во внимание третье уравнение системы, получим

$$\dddot{x} = \dot{z},\ \dddot{x} = x.$$

Решим это линейное однородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами. Имеем

$$x = C_1e^{t} + e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \qquad (A)$$

Так как $y = \dot{x}$, то

$$y = C_1e^{t} + e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{C_3\sqrt{3} - C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \right.$$
$$\left. - \frac{C_2\sqrt{3} + C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \qquad (B)$$

Поскольку $z = \dot{y}$, то

$$z = C_1e^{t} + e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{-C_3\sqrt{3} - C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \right.$$
$$\left. + \frac{C_2\sqrt{3} - C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \qquad (C)$$

Общее решение системы определяется формулами (A) — (C).

5. Решить систему:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x + z - y; \\ \dot{y} &= x + y - z; \\ \dot{z} &= 2x - y. \end{aligned}\right\}$$

Дифференцируя по t первое уравнение и принимая во внимание все уравнения системы, находим

$$\ddot{x} = \dot{x} + \dot{z} - \dot{y} = (x + z - y) + (2x - y) - (x + y - z),$$
$$\ddot{x} = 2x + 2z - 3y.$$

Дифференцируя еще раз, получаем

$$\dddot{x} = 2\dot{x} + 2\dot{z} - 3\dot{y} = 2(x + z - y) + 2(2x - y) - 3(x + y - z),$$
$$\dddot{x} = 3x + 5z - 7y.$$

Таким образом, для определения x, y, z через $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ имеем три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x + z - y; \\ \ddot{x} &= 2x + 2z - 3y; \\ \dddot{x} &= 3x + 5z - 7y. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему относительно x, y, z, получим

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 2;\ \Delta_x = \begin{vmatrix} \dot{x} & 1 & -1 \\ \ddot{x} & 2 & -3 \\ \dddot{x} & 5 & -7 \end{vmatrix} = \dot{x} + 2\ddot{x} - \dddot{x};$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dot{x} \\ 2 & 2 & \ddot{x} \\ 3 & 5 & \dddot{x} \end{vmatrix} = 4\dot{x} - 2\ddot{x};\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & \dot{x} & -1 \\ 2 & \ddot{x} & -3 \\ 3 & \dddot{x} & -7 \end{vmatrix} = 5\dot{x} - 4\ddot{x} + \dddot{x}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{\dot{x} + 2\ddot{x} - \dddot{x}}{2} \quad \text{или} \quad \dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0; \qquad \text{(A)}$$

$$y = \frac{4\dot{x} - 2\ddot{x}}{2} \quad \text{или} \quad y = 2\dot{x} - \ddot{x}; \qquad \text{(B)}$$

$$z = \frac{5\dot{x} - 4\ddot{x} + \dddot{x}}{2} \quad \text{или} \quad z = \frac{1}{2}(5\dot{x} - 4\ddot{x} + \dddot{x}). \qquad \text{(C)}$$

Уравнение (A) является линейным однородным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами. Решая его, находим

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{2t}. \qquad \text{(D)}$$

Из уравнений (B) и (C) с учетом формулы (D) получаем соответственно:

$$y = C_1e^t - 3C_2e^{-t}; \qquad \text{(E)}$$

$$z = C_1e^t - 5C_2e^{-t} + C_3e^{2t}. \qquad \text{(F)}$$

Итак, общее решение системы определяется формулами (D) — (F).

Задачи

Решить линейные однородные системы с постоянными коэффициентами:

1. $\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -2y; \\ \frac{dz}{dx} &= z. \end{aligned}\right\}$ 2. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y; \\ \frac{dy}{dt} &= 2y. \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 8y - x; \\ \dot{y} &= x + y. \end{aligned}\right\}$ 4. $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x + y; \\ \dot{y} &= 3y - 2x. \end{aligned}\right\}$

Решить линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами:

5. $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 4y + e^{-2t}; \\ \dot{y} &= x - 2y - 3e^{-2t}. \end{aligned}\right\}$ 6. $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - 3y; \\ \dot{y} &= x - 2y + 2\sin t. \end{aligned}\right\}$

Решить линейные однородные системы с постоянными коэффициентами:

7. $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - y + z; \\ \dot{y} &= x + y + z; \\ \dot{z} &= 4x - y + z. \end{aligned}\right\}$ 8. $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 4y - 2z - 3x; \\ \dot{y} &= z + x; \\ \dot{z} &= 6x - 6y + 5z. \end{aligned}\right\}$

Ответы

1. $y = C_1e^{-2x}$; $z = C_2e^x$. 2. $y = C_1e^{2t}$; $x = \frac{C_1}{2}e^{2t} + C_2$. 3. $x = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t}$; $y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$. 4. $x = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$; $y = e^{2t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t]$. 5. $x = C_1e^{-t} + 4C_2e^{2t} + 3e^{-2t}$; $y = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + 4e^{-2t}$. 6. $x = 3C_1e^t + C_2e^{-t} + 3\sin t$; $y = C_1e^t + C_2e^{-t} - \cos t + 2\sin t$. 7. $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$, $y = C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$; $z = -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}$. 8. $x = C_1e^t + C_3e^{-t}$; $y = C_1e^t + C_2e^{2t}$, $z = 2C_2e^{2t} - C_3e^{-t}$.

Приложение

Некоторые кривые

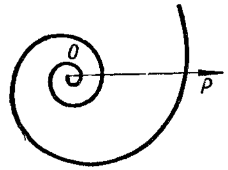

Рис. 1. Логарифмическая спираль

$\rho = ae^{k\varphi}$

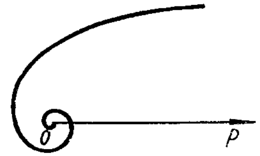

Рис. 2. Гиперболическая спираль

$\rho = \dfrac{a}{\varphi}$

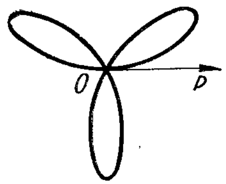

Рис. 3. Трехлепестковая роза

$\rho = a \sin 3\varphi$

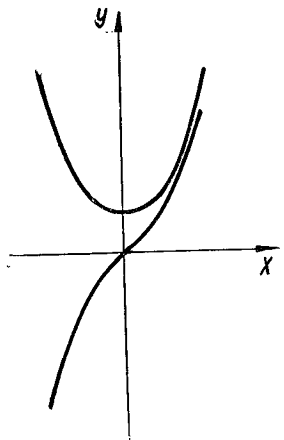

Рис. 4. Графики гиперболических функций:

$y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

$y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

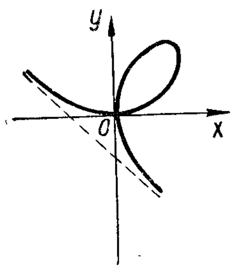

Рис. 5. Декартов лист

$x^3 + y^3 - 3axy = 0$

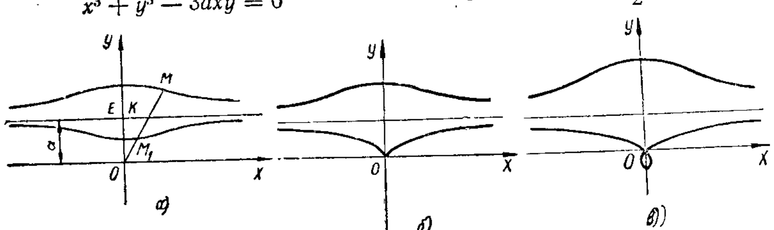

Рис. 6. Конхоида Никомеда

$\rho = \dfrac{a}{\sin\varphi} + l$: а) $l < a$; б) $l = a$; в) $l > a$.

Литература

Бараненков Г. С. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу. Под редакцией Б. П. Демидовича. М., Физматгиз, 1959.

Бахвалов С. В. и др. Сборник задач по аналитической геометрии. М., Гостехиздат, 1957.

Выгодский М. Я. Аналитическая геометрия. М., Физматгиз, 1963.

Дубнов Я. С. Основы векторного исчисления, ч. 1. М., Гостехиздат, 1950.

Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Росвузиздат, 1962.

Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. М., Физматгиз, 1961.

Немыцкий В. В. и др. Курс математического анализа, т. 1, 2. М., Гостехиздат, 1957.

Привалов И. И. Аналитическая геометрия. М., Физматгиз, 1961.

Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1965.

Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1—3. М., Физматгиз, 1959, 1960.

Оглавление