

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

СЕНЧУК Ю.Ф.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

Часть II

Учебное пособие

Утверждено  
редакционно-издательским  
советом университета,  
протокол № 1 от 05.04.2006г.

ХАРЬКОВ НТУ «ХПИ» 2006

ББК 22.161  
С – 31  
УДК 517 (07)

Рецензенти: *О.М. Литвин*, д-р фіз.-мат. наук, проф., Українська інженерно-педагогічна академія.  
*Є.Г. Голоскоков*, д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ “ХПІ”.

Викладено розділи: криволінійні і поверхневі інтеграли, теорія поля, числові і функціональні ряди та інтеграл Фур’є, диференціальні рівняння і системи диференціальних рівнянь, а також додаткові розділи: інтеграли залежні від параметра і наближені методи розв’язку звичайних диференціальних рівнянь та їх систем. Всі викладені теоретичні факти доведено і проілюстровано великою кількістю прикладів і задач.

Призначено для студентів інженерно-технічних та економічних спеціальностей.

С – 31            Сенчук Ю.Ф. Математичний аналіз для інженерів: Навч. посібник. Ч. II. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2006 – 376 с. – Рос. мовою

ISBN

Изложены разделы: криволинейные и поверхностные интегралы, теория поля, числовые и функциональные ряды, интеграл Фурье, дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений, а также дополнительные разделы: интегралы, зависящие от параметра и приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Все изложенные теоретические факты доказаны и проиллюстрированы большим количеством примеров и задач.

Предназначено для студентов инженерно-технических и экономических специальностей.

Ил. 394. Табл. 3. Библиогр: 9 назв.

ББК 22.161

ISBN

С – 31  
© Ю. Ф. Сенчук, 2006

## Предисловие

Настоящее учебное пособие является продолжением первого тома книги Ю.Ф. Сенчука “Математический анализ для инженеров”. В эту часть включены следующие разделы высшей математики: криволинейные и поверхностные интегралы, интегралы, зависящие от параметра, основы математической теории поля, обыкновенные дифференциальные уравнения и системы линейных дифференциальных уравнений, числовые и функциональные ряды, ряды Фурье и интеграл Фурье. Для углубленного изучения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и приближенных методов их решения могут быть полезными главы XVII, XXIV. В качестве примеров приложения интеграла Фурье и преобразования Фурье следует рассматривать главу XXIII “Элементы спектральной теории сигналов”.

Материал, представленный в этом томе, посвящен рассмотрению теоретических вопросов математического анализа с хорошей иллюстрацией на конкретных примерах. Достаточно четко и понятно для будущих инженеров проведено доказательство всех сформулированных теорем. Сохраняется строгая последовательность и логика изложения материала с подробным графическим изображением. Представленное пособие может быть классифицировано как конспект лекций по указанным выше разделам высшей математики.

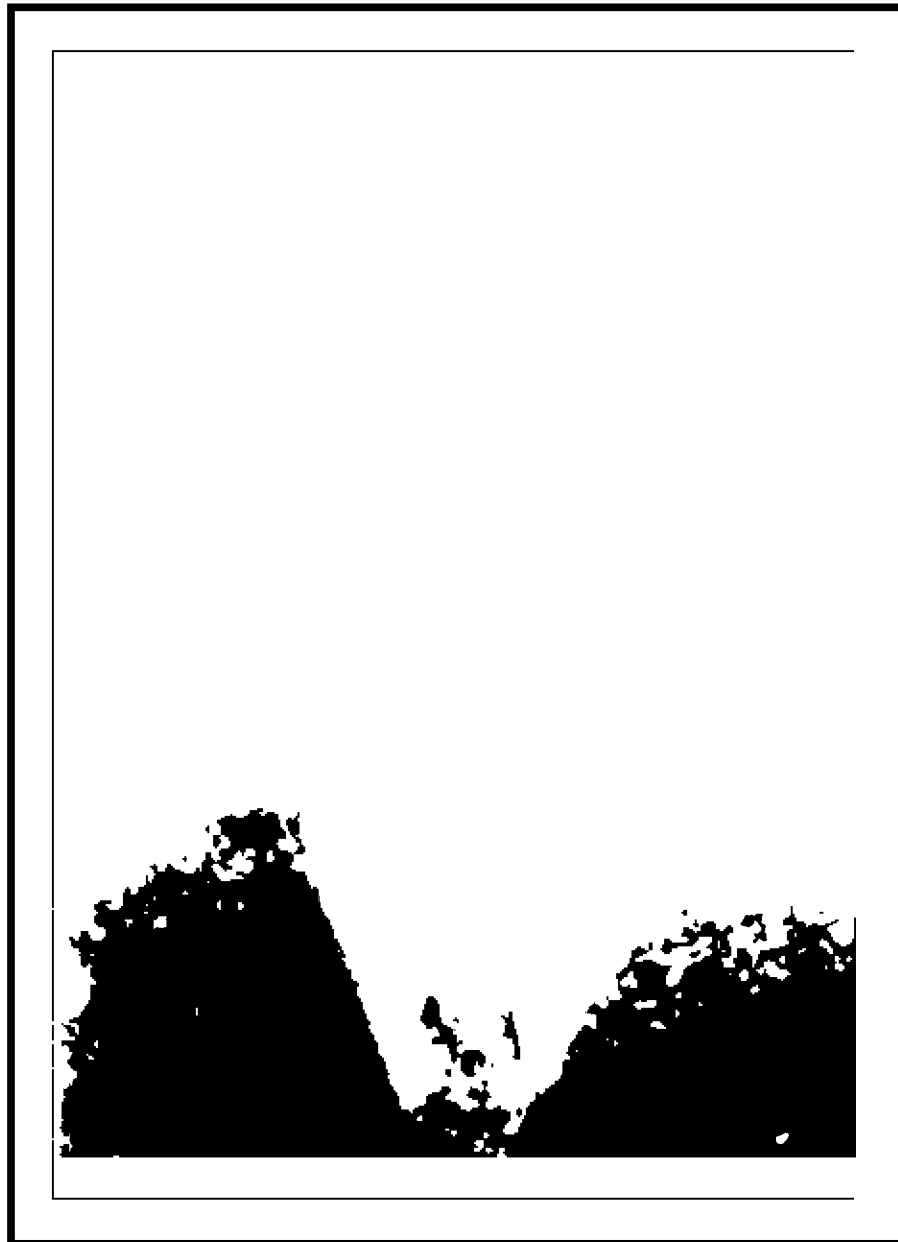
Мы обращаем внимание пользователей этой книги на то, что она составлена на основе материалов, подготовленных Юрием Федоровичем Сенчуком, для чтения лекций по математическому анализу и курсу “Дифференциальные уравнения” для специальности “Прикладная математика”. Тем не менее, это пособие будет чрезвычайно полезным для студентов всех технических специальностей. Мы также надеемся на то, что второй том этого пособия, как и первый, поможет преподавателям, особенно начинающим, читать лекции по курсу высшей математики, планировать изложение лекций, выделять главные вопросы и учить студентов глубоко их осмысливать.

Хочется выразить особую признательность и благодарность сотрудникам кафедры прикладной математики проф. Михлину Ю.В.; ст. преп., к.т.н. Ярошенко А.Р.; ст. преп. Кашуба Ж.Б.; аспирантам: Курилову Е.А., Пильгун Г.В., Тимченко Г.Н. за активное участие в подготовке данного учебного пособия к изданию, рецензентам проф. О.М. Литвину, проф. Е.Г. Голоскокову.

Заведующая кафедрой  
прикладной математики НТУ «ХПИ»  
доктор технических наук, профессор

Курпа Л.В.

*Книга посвящается светлой памяти:  
прекрасного педагога –  
сотрудника Национального  
Технического Университета «ХПИ»  
Сенчука Юрия Федоровича*



**(1930-2003)**

## ХII. Криволинейные интегралы и интегралы по поверхности

### 1. Криволинейные интегралы 1-го рода и их вычисление

Рассмотрим функцию  $f(x, y)$ , заданную в области  $S$  плоскости  $xOy$ , и некоторую непрерывную дугу  $L$ , целиком лежащую в  $S$  (рис.12.1). Разобьем  $L$  на  $n$  частей  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ . На каждой элементарной дуге  $\Delta s_k$  возьмем произвольную точку  $M_k(\xi_k, \eta_k)$  и вычислим

$$f(\xi_k, \eta_k). \text{ Составим сумму } \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k.$$

Пусть теперь  $\delta = \max \Delta s_k \rightarrow 0$ . Если

существует  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$ , не зависящий от способа дробления дуги  $L$  и

выбора точек  $M_k$  (это будет, например, если функция  $f(x, y)$  непрерывна на дуге  $L$ ), то он называется криволинейным интегралом 1-го рода функции  $f(x, y)$  по дуге  $L$  и обозначается  $\int_L f(x, y) ds$ .

Очевидно, что криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления интегрирования. Кроме того, для него, разумеется, верны обычные свойства интегралов.

Рассмотрим правила вычисления криволинейных интегралов 1-го рода.

Пусть  $y = \varphi(x)$  – уравнение дуги  $L$ , причем  $a \leq x \leq b$ . Далее, пусть  $A_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$  и  $A_k(x_k, y_k)$  – начало и конец дуги  $\Delta s_k$  (рис.12.2). Как было показано раньше длина дуги  $\Delta s_k$  определяется как

$$\Delta s_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx,$$

или, в силу теоремы о среднем,

$$\Delta s_k = \sqrt{1 + (\varphi'(\xi_k))^2} \Delta x_k,$$

где  $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ . Положим  $\eta_k = \varphi(\xi_k)$ . Точка

$(\xi_k, \eta_k)$  принадлежит дуге  $A_{k-1}A_k$ , и возьмём её в качестве точки  $M_k$ . Тогда получим

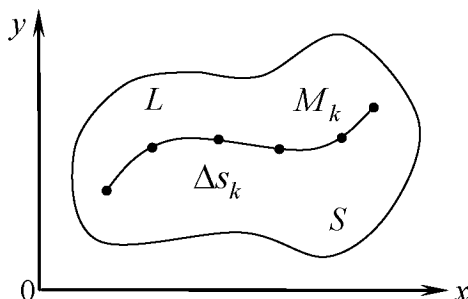


Рис. 12.1

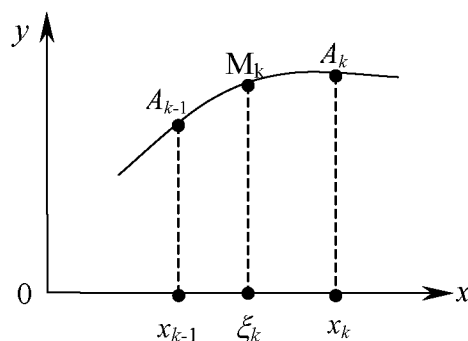


Рис. 12.2

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \sqrt{1 + (\varphi'(\xi_k))^2} \Delta x_k \quad (12.1)$$

Справа стоит интегральная сумма для функции  $f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}$  в интервале  $[a, b]$ . Поэтому при  $\delta \rightarrow 0$  в пределе из (12.1) получим

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx \quad (12.2)$$

Пусть теперь дуга  $L$  задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

причем  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Тогда, рассуждая совершенно аналогично, будем иметь

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Переходя к пространственному случаю, определим точно так же интеграл  $\int_L f(x, y, z) ds$ , где  $L$  – некоторая пространственная дуга. Если она задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

причем  $\alpha \leq t \leq \beta$ , то

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt.$$

## 2. Некоторые применения криволинейных интегралов 1-го рода

**Вычисление массы неоднородной кривой.** Пусть  $\rho(x, y)$  – линейная плотность материальной дуги  $L$ . Тогда, очевидно, масса этой дуги равна

$$m = \int_L \rho(x, y) ds.$$

**Пример 12.1.** Вычислим массу материальной кривой, совпадающей с эллипсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , если  $\rho = xy$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  (рис.12.3). Уравнение заданной дуги

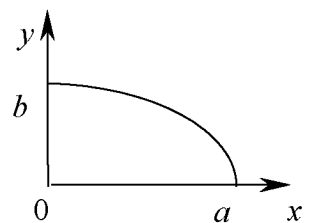


Рис. 12.3

имеет вид

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

откуда

$$y' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

а значит

$$\begin{aligned} m &= \int_0^a x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}} dx = \frac{b}{a} \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2} dx = \\ &= \frac{b}{a} \int_0^a x \sqrt{a^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2} dx = -\frac{2b}{3a} \frac{1}{2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} \sqrt{\left(a^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2\right)^3} \Big|_0^a = \\ &= \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} \left( a^3 - \sqrt{\left(a^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) a^2\right)^3} \right) = \frac{ab(a^3 - b^3)}{3(a^2 - b^2)} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)} \end{aligned}$$

**Вычисление моментов инерции кривых.** Пусть дуга  $L$  имеет плотность  $\rho(x, y)$ . Тогда момент инерции этой дуги относительно начала координат, очевидно, равен

$$J_0 = \int_L \rho(x, y) (x^2 + y^2) ds.$$

Если дуга – пространственная, то ее момент инерции, например, относительно оси  $Ox$  равен

$$J_x = \int_L \rho(x, y) (y^2 + z^2) ds.$$

**Вычисление площади цилиндрической поверхности.** Вычислим площадь цилиндрической поверхности, заключенной между плоскостью  $xOy$  и поверхностью  $z = f(x, y)$ , если направляющей цилиндра служит дуга  $L$ , а образующая параллельна оси  $Oz$  (рис.12.4). Если  $f(x, y) \geq 0$ , то площадь  $\Delta S_k$  элементарной полоски заданной цилиндрической поверхности приближенно определяется как

$$\Delta S_k \approx f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k,$$

Тогда, рассуждая аналогично предыдущему, получим формулу для вычисления всей поверхности, т.е.

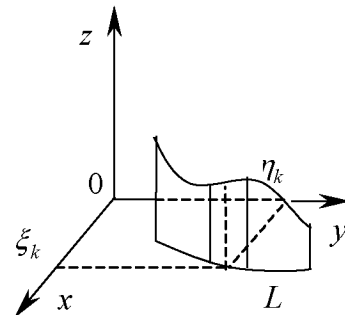


Рис. 12.4

$$S = \int_L f(x, y) ds.$$

**Пример 12.2.** Определим площадь боковой поверхности цилиндра  $y = \frac{3}{8}x^2$ , ограниченного плоскостями  $x = 0$ ,  $z = 0$ ,  $z = x$  и  $y = 6$  (рис. 12.5).

Поскольку

$$y' = \frac{3}{4}x,$$

то

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 x \sqrt{1 + \frac{9}{16}x^2} dx = \frac{1}{\frac{9}{16} \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\left(1 + \frac{9}{16}x^2\right)^3} \Big|_0^4 = \\ &= \frac{16}{27} (\sqrt{1000} - 1) = \frac{16}{27} (10\sqrt{10} - 1) \end{aligned}$$

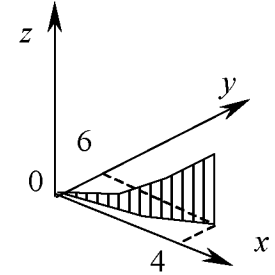


Рис. 12.5

### 3. Интегралы по поверхности 1-го рода

Пусть на некоторой поверхности  $\sigma$  задана функция  $f(x, y, z)$  (рис.12.6). Разобьем  $\sigma$  на  $n$  частей  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , площади поверхности полученных участков обозначим как:  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ .

На каждой площадке  $\Delta s_k$  возьмем произвольную точку  $P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  и вычислим в ней значение функции

$f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ . Составим сумму  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta\sigma_k$ .

Пусть теперь каждая элементарная площадка стягивается в точку таким образом, что  $\delta = \max \Delta\sigma_k \rightarrow 0$ . Если существует

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta\sigma_k,$$

не зависящий от способа дробления поверхности  $\sigma$  и выбора точек  $P_k$  на элементарных участках (это будет, в частности, если функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на  $\sigma$ ), то он называется интегралом 1-го рода функции  $f(x, y, z)$  по поверхности  $\sigma$  и обозначается  $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$ .

Если  $f(x, y, z)$  трактовать как плотность материальной поверхности

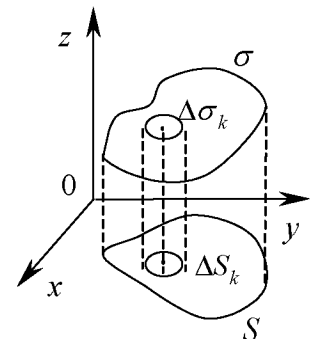


Рис. 12.6



$\sigma$ , то интеграл  $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$  численно равен массе этой поверхности.

Пусть  $z = \varphi(x, y)$  – уравнение поверхности  $\sigma$ , а  $S$  – проекция  $\sigma$  на плоскость  $xOy$ . Тогда, как было показано ранее площадь  $\Delta\sigma_k$  участка поверхности может быть вычислена как

$$\Delta\sigma_k = \iint_{\Delta S_k} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi(\xi_k, \eta_k)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(\xi_k, \eta_k)}{\partial y}\right)^2} \Delta S_k.$$

Положим  $\zeta_k = \varphi(\xi_k, \eta_k)$ . Очевидно, точка  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  принадлежит  $\Delta\sigma_k$ . Беря ее в качестве точки  $P_k$ , будем иметь

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \\ & = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \varphi(\xi_k, \eta_k)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi(\xi_k, \eta_k)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(\xi_k, \eta_k)}{\partial y}\right)^2} \Delta S_k, \end{aligned}$$

т.е.

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_S f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} dS \quad (12.3)$$

Подобно тому, как формула (12.2) выражает криволинейный интеграл через определенный интеграл, формула (12.3) выражает интеграл по поверхности через двойной интеграл.

**Пример 12.3.** Вычислим момент инерции пластины, совпадающей с частью плоскости  $x + y + z = 1$ , расположенной в первом октанте (рис. 12.7), относительно начала координат, если  $\rho(x, y, z) = 1$ .

Из равенства  $z = 1 - x - y$  имеем

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3},$$

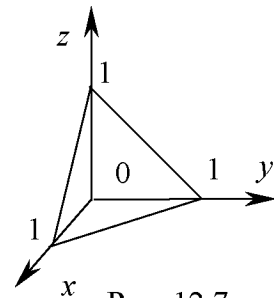


Рис. 12.7

а поэтому

$$\begin{aligned} J_0 &= \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma = \iint_S (x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2) \sqrt{3} dS = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1) dy \right) dx = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \left( 2x^2 y + \frac{2}{3} y^3 + xy^2 - 2xy - y^2 + y \right) \Big|_0^{1-x} dx = \sqrt{3} \int_0^1 \left( 2x^2 - 2x^3 + \frac{2}{3} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + x - 2x^2 + x^3 - 2x + 2x^2 - 1 + 2x - x^2 + 1 - x \Big) dx = \\
& = \sqrt{3} \int_0^1 \left( -\frac{5}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + \frac{2}{3} \right) dx = \sqrt{3} \left( -\frac{5}{12}x^4 + x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x \right) \Big|_0^1 = \\
& = \sqrt{3} \left( -\frac{5}{12} + 1 - 1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

#### 4. Криволинейные интегралы 2-го рода

Пусть в каждой точке дуги  $\overset{\cup}{AB}$  лежащей в плоскости  $xOy$  задана вектор-функция  $\vec{F}(x, y)$  (рис. 12.8). Разобьём дугу  $\overset{\cup}{AB}$  на  $n$  частей точками  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ , после чего обозначим  $A$  через  $M_0$ , а  $B$  через  $M_n$ . Кроме того, введём обозначение  $\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \overrightarrow{\Delta s_k}$ .

На каждой дуге  $\overset{\cup}{M_{k-1}M_k}$  возьмём произвольную точку  $N_k(\xi_k, \eta_k)$  и вычислим  $\vec{F}(N_k)$ .

Составим сумму

$$\sum_{k=1}^n \left( \vec{F}(N_k), \overrightarrow{\Delta s_k} \right),$$

где  $\left( \vec{F}(N_k), \overrightarrow{\Delta s_k} \right)$  – скалярное произведение векторов  $\vec{F}(N_k)$  и  $\overrightarrow{\Delta s_k}$ .

Обозначим  $\lambda = \max_k \left| \overrightarrow{\Delta s_k} \right|$  и предположим, что  $\lambda \rightarrow 0$ . Если существует

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left( \vec{F}(N_k), \overrightarrow{\Delta s_k} \right),$$

не зависящей от способа дробления дуги  $\overset{\cup}{AB}$  и выбора точек  $N_k$ , то он называется криволинейным интегралом 2-го рода вектор-функции  $\vec{F}(x, y)$  по дуге  $\overset{\cup}{AB}$  и обозначается  $\int_{\overset{\cup}{AB}} \left( \vec{F}(x, y), \overrightarrow{ds} \right)$ .

Выясним физический смысл этого интеграла. Пусть  $\vec{F}(x, y)$  – сила, действующая на точку  $M$  при её движении по дуге  $\overset{\cup}{AB}$ . Тогда работа этой

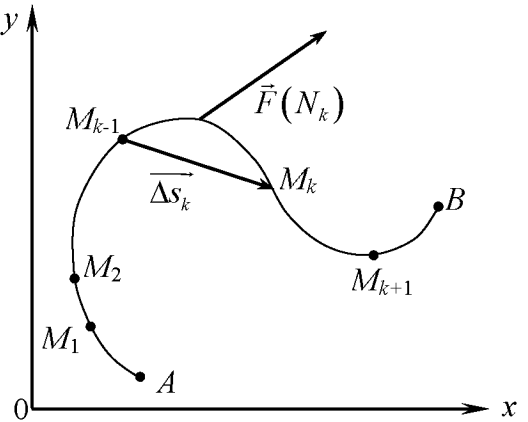


Рис. 12.8

силы на пути  $M_{k-1}M_k$  приближённо равна

$$\left| \vec{F}(N_k) \right| \left| \overrightarrow{\Delta s_k} \right| \cos \left( \vec{F}(N_k), \overrightarrow{\Delta s_k} \right) = \left( \vec{F}(N_k), \overrightarrow{\Delta s_k} \right).$$

Поэтому интеграл  $\int_{\overset{\cup}{AB}} \left( \vec{F}(x, y), \overrightarrow{ds} \right)$  в данном случае представляют собой

работу силы  $\vec{F}(x, y)$  на пути  $\overset{\cup}{AB}$ .

При изменении направления интегрирования каждый из векторов  $\overrightarrow{\Delta s_k}$  меняет знак, а значит меняет знак и интегральная сумма и её предел-интеграл. Итак, в отличие от криволинейных интегралов 1-го рода, здесь мы имеем

$$\int_{\overset{\cup}{BA}} \left( \vec{F}(x, y), \overrightarrow{ds} \right) = - \int_{\overset{\cup}{AB}} \left( \vec{F}(x, y), \overrightarrow{ds} \right).$$

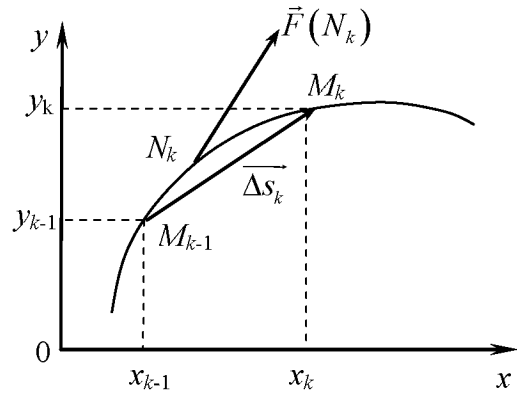


Рис. 12.9

Пусть  $x_k$  и  $y_k$  – координаты точки  $M_k$ . Тогда  $\overrightarrow{\Delta s_k} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$  (рис.12.9).

Далее, пусть

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j},$$

откуда следует, что

$$\vec{F}(N_k) = P(\xi_k, \eta_k) \vec{i} + Q(\xi_k, \eta_k) \vec{j}.$$

Получаем

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} \left( \vec{F}(x, y), \overrightarrow{ds} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k)$$

В связи с этим пишут, что

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} \left( \vec{F}(x, y), \overrightarrow{ds} \right) = \int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (12.4)$$

Правую часть называют скалярной формой криволинейного интеграла 2-го рода.

Совершенно аналогично вводится криволинейный интеграл 2-го рода вектор-функции  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$  по пространственной дуге  $\overset{\cup}{AB}$

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} \left( \vec{F}(x, y, z), \overrightarrow{ds} \right) = \int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (12.5)$$

**Примечание.** Очевидно, что правую часть равенства (12.4) можно переписать так

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y)dx + \int_{\overset{\cup}{AB}} Q(x, y)dy \quad (12.6)$$

Аналогичное замечание касается и формулы (12.5).

## 5. Вычисление криволинейных интегралов 2-го рода

Пусть дуга  $\overset{\cup}{AB}$  задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

причем движение по этой дуге от точки  $A$  к точке  $B$  отвечает монотонному изменению параметра  $t$  от  $\alpha$  до  $\beta$ . Будем считать, что функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  имеют на отрезке  $[\alpha, \beta]$  непрерывные производные  $\varphi'(t)$  и  $\psi'(t)$  (это значит, что дуга  $\overset{\cup}{AB}$  – гладкая). О функциях же  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  предположим, что они непрерывны на дуге  $\overset{\cup}{AB}$ .

Пусть  $t_k$  – значение  $t$ , отвечающее точке  $M_k$ , т.е.  $\varphi(t_k) = x_k$ ,  $\psi(t_k) = y_k$ . Точке же  $N_k(\xi_k, \eta_k)$  пусть отвечает значение  $t = \tau_k$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))$$

т.е.

$$\sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k^*) \Delta t_k$$

где  $\tau_k^* \in (t_{k-1}, t_k)$ . На основании теоремы о квазиинтегральной сумме, отсюда получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k) \Delta t_k$$

т.е.

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt$$

Совершенно аналогично будем иметь

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt.$$

Складывая оба результата, получим, в силу (12.6),

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt + \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)dt. \quad (12.7)$$

Эта формула легко обобщается на случай интеграла вида (12.5).

**Пример 12.4.** Вычислим работу упругой силы  $\vec{F} = -k\vec{r}$  при перемещении точки  $M$  по первой четверти эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . (Рис. 12.10).

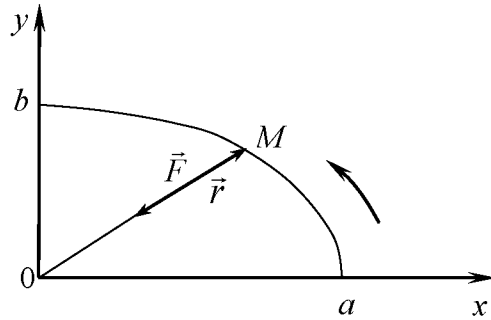


Рис. 12.10

Поскольку

$$\vec{F} = -k(x\vec{i} + y\vec{j}) = -kx\vec{i} - ky\vec{j},$$

то

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-ka \cos t (-a \sin t) - kb \sin t b \cos t) dt = k(a^2 - b^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = \frac{k(a^2 - b^2)}{2} \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} k(a^2 - b^2)$$

Пусть теперь дуга  $\overset{\cup}{AB}$  задана уравнением  $y = f(x)$ , причем  $a \leq x \leq b$ . Тогда из (12.7) сразу будем иметь

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x))dx$$

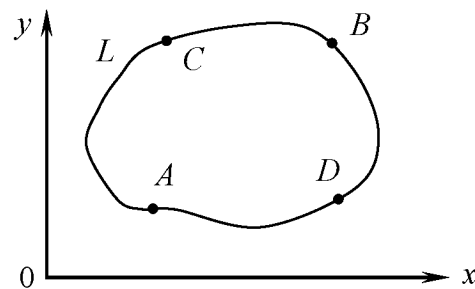


Рис. 12.11

**Примечание.** Возьмём вместо дуги  $\overset{\cup}{AB}$  замкнутый контур  $L$  в плоскости  $xOy$  (рис. 12.11). Тогда криволинейный интеграл 2-го рода обозначают  $\oint_L (\vec{F}(x,y), \vec{ds})$ , при этом положительный обход контура  $L$

предполагается против часовой стрелки, т.е.

$$\oint_L (\vec{F}(x,y), \vec{ds}) = \int_{\overset{\cup}{ADB}} (\vec{F}(x,y), \vec{ds}) + \int_{\overset{\cup}{BCA}} (\vec{F}(x,y), \vec{ds}). \quad (12.8)$$

Если изменить направление интегрирования на противоположное, очевидно, рассматриваемый интервал изменит свой знак.

### 6. Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода

Пусть  $\overset{\cup}{AB}$  – гладкая дуга (рис. 12.12). Взяв в качестве параметра величину  $s = \overset{\cup}{AM}$ , запишем уравнения дуги так

$$\begin{cases} x = g(s) \\ y = h(s) \end{cases} \quad (0 \leq s \leq s_{\overset{\cup}{AB}})$$

Обозначим через  $\alpha$  – угол, образованный с осью  $Ox$  вектором касательной  $\vec{\tau}$ , направленным в сторону возрастания величины  $s$ . Тогда

$$dx = ds \cdot \cos \alpha, \quad dy = ds \cdot \sin \alpha$$

т.е.

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha$$

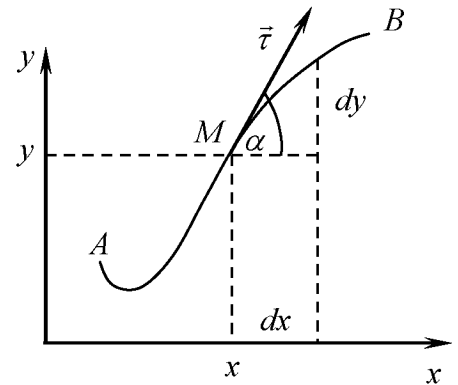


Рис. 12.12

Поэтому в случае непрерывных на дуге  $\overset{\cup}{AB}$  функций  $P(x,y)$  и  $Q(x,y)$ , получим, в силу (12.7),

$$\begin{aligned} & \int_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \\ & = \int_0^{s_{\overset{\cup}{AB}}} (P(g(s),h(s))g'(s) + Q(g(s),h(s))h'(s))ds = \\ & = \int_0^{s_{\overset{\cup}{AB}}} (P(g(s),h(s))\cos \alpha + Q(g(s),h(s))\sin \alpha)ds \end{aligned}$$

Окончательно

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\overset{\cup}{AB}} (P(x,y)\cos \alpha + Q(x,y)\sin \alpha)ds$$

Тем самым криволинейный интеграл 2-го рода выражен через криволинейный интеграл 1-го рода по той же дуге. Благодаря аддитивности интеграла, этот результат легко обобщить и на случай кусочно-гладкой дуги.

Далее, для пространственной дуги  $\overset{\cup}{AB}$  с уравнениями

$$\begin{cases} x = g(s) \\ y = h(s) \\ z = k(s) \end{cases} \quad \left( 0 \leq s \leq s_{AB} \right)$$

точно так же получим

$$\begin{aligned} & \int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \int_{\overset{\cup}{AB}} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) ds \end{aligned}$$

где  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  – направляющие косинусы вектора  $\vec{\tau}$  касательной, направленного в сторону возрастания дуги  $\overset{\cup}{AM} = s$ .

### 7. Формула Грина-Римана

Пусть область  $D$  ограничена контуром  $L$ , составленным из двух линий:  $y = \varphi_1(x)$  и  $y = \varphi_2(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) (рис. 12.13).

Будем считать, что функции  $P(x, y)$  и  $\frac{\partial P}{\partial y}$  непрерывны в области  $\bar{D} = D \cup L$ . Тогда

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y) dx &= \int_{\overset{\cup}{AMB}} P(x, y) dx + \int_{\overset{\cup}{BNA}} P(x, y) dx = \\ &= \int_{\overset{\cup}{AMB}} P(x, y) dx - \int_{\overset{\cup}{ANB}} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx = \\ &= - \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx = - \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \end{aligned}$$

т.е.

$$\oint_L P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} ds$$

Легко видеть, что этот результат верен и в случае, когда контур  $L$  содержит в себе и отрезки, параллельные оси  $Oy$  (рис. 12.14).

Действительно, в этом случае, очевидно,

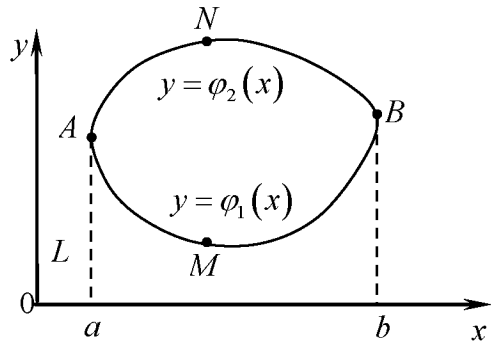


Рис. 12.13

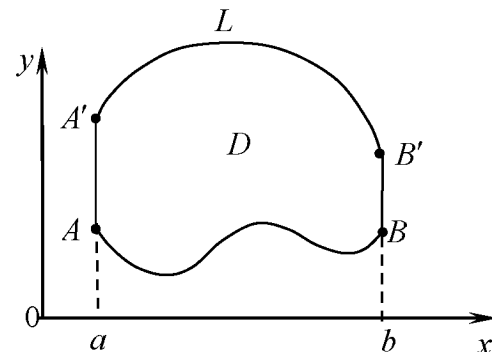


Рис. 12.14

$$\int_{BB'} P(x,y)dx = \int_{A'A} P(x,y)dx = 0.$$

Предположим теперь, что контур  $L$  составлен из линий:  $x = \psi_1(y)$  и  $x = \psi_2(y)$  ( $c \leq y \leq d$ ), а функции  $Q(x,y)$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны в области  $\bar{D}$  (рис.12.15).

Тогда

$$\begin{aligned} \oint_L Q(x,y)dy &= \int_{ANB} Q(x,y)dy + \int_{BMA} Q(x,y)dy = \\ &= \int_{ANB} Q(x,y)dy - \int_{AMB} Q(x,y)dy = \\ &= \int_c^d Q(\psi_2(y),y)dy - \int_c^d Q(\psi_1(y),y)dy = \end{aligned}$$

$$= \int_c^d (Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y))dy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy$$

т.е.

$$\oint_L Q(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} ds,$$

причем это равенство, очевидно, верно и тогда, когда контур  $L$  содержит в себе и отрезки, параллельные оси  $Ox$ .

Предположим, наконец, что контур  $L$  и функции  $P(x,y)$  и  $Q(x,y)$  удовлетворяют одновременно условиям 1-го и 2-го случаев. Тогда, складывая оба полученных результата, будем иметь

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) ds \quad (12.9)$$

Эту формулу называют формулой Грина-Римана. Она выражает криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутому контуру через двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.

**Пример 12.5.** Вычислить интеграл

$$I = \oint_L y^2 dx + (x+y)^2 dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами  $O(0,0)$ ,  $A(0,1)$ ,  $B(1,0)$  (рис.12.16).

Вычисляя интеграл непосредственно, имеем:

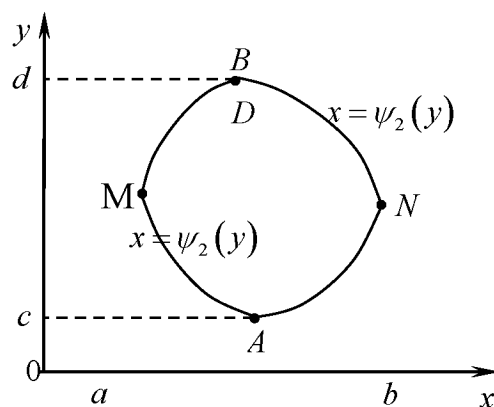


Рис. 12.15

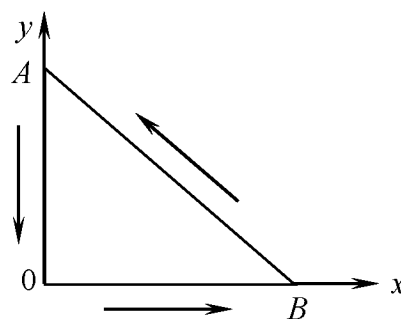


Рис. 12.16



$$\begin{aligned}
I &= \int_{AO} y^2 dx + (x+y)^2 dy + \int_{OB} y^2 dx + (x+y)^2 dy + \int_{BA} y^2 dx + (x+y)^2 dy = \\
&= \int_1^0 (0+y)^2 dy + \int_1^0 [(1-x)^2 + 1^2(-1)] dx = -\int_0^1 y^2 dy + \int_0^1 (2x-x^2) dx = \\
&= -\frac{y^3}{3} \Big|_0^1 + \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Вычисляя тот же интеграл по формуле Грина-Римана, получим

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D [2(x+y) - 2y] ds = 2 \iint_D x ds = 2 \int_0^1 \left( x \int_0^{1-x} dy \right) dx = 2 \int_0^1 x(1-x) dx = \\
&= 2 \int_0^1 (x-x^2) dx = 2 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

### 8. Условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

Предположим, что интеграл  $\int_{\overset{\cup}{AB}} (\vec{F}(x, y), \vec{ds})$  не зависит от формы дуги

$\overset{\cup}{AB}$ , а зависит только от положения точек  $A$  и  $B$ .

Тогда

$$\int_{\overset{\cup}{ANB}} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) = \int_{\overset{\cup}{AMB}} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}),$$

т.е.

$$\int_{\overset{\cup}{ANB}} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) - \int_{\overset{\cup}{AMB}} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) = 0$$

или

$$\int_{\overset{\cup}{ANB}} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) + \int_{\overset{\cup}{BMA}} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) = 0,$$

т.е.

$$\oint_{\overset{\cup}{ANBMA}} (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) = 0,$$

Легко убедиться в том, что эти рассуждения верны и тогда, когда дуги  $\overset{\cup}{AMB}$  и  $\overset{\cup}{ANB}$  имеют более двух общих точек.

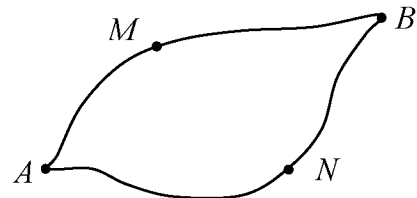


Рис. 12.17

Итак, если интеграл  $\int_{\overset{\cup}{AB}} (\vec{F}(x, y), \vec{ds})$  не зависит от формы дуги  $\overset{\cup}{AB}$ , то при любом замкнутом контуре  $L$  будет справедливо равенство

$$\oint_L (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) = 0$$

Повторяя рассуждения в обратном порядке, получим, что и, наоборот, если  $\oint_L (\vec{F}(x, y), \vec{ds}) = 0$  по любому замкнутому контуру  $L$ , то интеграл

$\int_{\overset{\cup}{AB}} (\vec{F}(x, y), \vec{ds})$  не зависит от формы дуги  $\overset{\cup}{AB}$ . Таким образом, независимость

интеграла от формы дуги равносильна равенству нулю этого интеграла по любому замкнутому контуру.

**Теорема 12.1.** Пусть функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны в области  $D$ , ограниченной одним замкнутым контуром. Тогда для независимости интеграла  $\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  от формы дуги  $\overset{\cup}{AB} \in \overline{D}$

необходимо и достаточно, чтобы при всех  $(x, y) \in \overline{D}$  выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (12.10)$$

**Достаточность.** Пусть  $L$  – произвольный замкнутый контур в  $D$ , а  $D_1$  – область, ограниченная контуром  $L$ . Поскольку  $\overline{D_1} \subset \overline{D}$ , то, на основании формулы Грина-Римана

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) ds = \iint_{D_1} 0 \cdot ds = 0,$$

что и требовалось доказать.

**Необходимость.** Дано, что  $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  по любому замкнутому контуру  $L \in \overline{D}$ . Докажем, что тогда для всех  $(x, y) \in \overline{D}$  выполняется равенство (12.10).

Предположим противное, т.е. пусть в некоторой точке  $M(x_1, y_1) \in \overline{D}$  будет, например,  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$ . Так как на основании условия,  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  есть непрерывная функция, то, в силу леммы о сохранении знака, существует

такая окрестность  $C_\varepsilon(M)$ , что неравенство  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$  выполняется всюду в области  $D_1 = C_\varepsilon(M) \cap \overline{D_1}$ . Возьмем в этой области произвольный замкнутый контур  $L_1$ , ограничивающий область  $D_2 \subset D_1$ . Поскольку  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$  всюду в  $D_2$ , то и

$$\iint_{D_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) ds > 0,$$

а значит, в силу формулы (12.9),

$$\oint_{L_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy > 0,$$

что противоречит условию. Тем самым доказана необходимость.

**Пример 12.6.** Возьмем интеграл  $I = \int_{\overset{\cup}{AB}} y dx + (x + y) dy$ , где  $\overset{\cup}{AB}$  – дуга с

началом в точке  $A(1,1)$  и с концом в точке  $B(3,2)$ . Поскольку в данном случае  $P(x, y) = y$ ,  $Q(x, y) = x + y$ , то справедливо равенство

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial(x+y)}{\partial x}.$$

Поэтому интеграл  $I$  не зависит от формы дуги  $\overset{\cup}{AB}$ , а зависит только от положения точек  $A$  и  $B$ , в связи с чем его записывают просто так:

$$I = \int_{(1,1)}^{(3,2)} y dx + (x + y) dy. \quad (3.2)$$

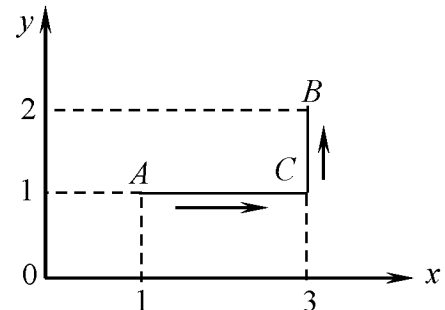


Рис. 12.18

Беря в качестве дуги  $\overset{\cup}{AB}$  линию  $ACB$ , состоящую из отрезков, параллельных осям координат, (рис.12.18), получим

$$\begin{aligned} I &= \int_{\overset{\cup}{AC}} y dx + (x + y) dy + \int_{\overset{\cup}{CB}} y dx + (x + y) dy = \\ &= \int_1^3 1 \cdot dx + 0 + \int_1^2 (3 + y) dy = \end{aligned}$$

$$= x \Big|_1^3 + \left( 3y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 3 - 1 + 6 + 2 - 3 - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}.$$

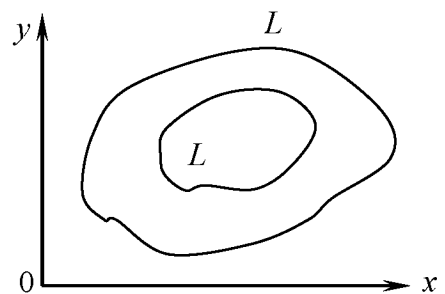


Рис. 12.19

**Примечание.** В доказательстве теоремы 12.1 использовалось, что

область  $D$  ограничена именно одним контуром  $L$ , а не несколькими. В этом случае, какой бы контур  $L_1$  в области  $\bar{D}$  мы не взяли, область, ограниченная этим контуром, также принадлежит области  $\bar{D}$  (рис. 12.19). Ниже дано понятие о связности области.

Область, ограниченная одним замкнутым контуром, называется односвязной. Если же  $\partial D$  состоит из нескольких замкнутых контуров (в этом случае  $\partial D$  называют еще сложным контуром), то область  $D$  называется многосвязной.

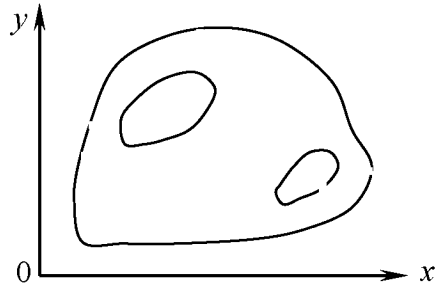


Рис. 12.20

Например, на чертеже 12.20 приведена трехсвязная область.

### 9. Условие полного дифференциала

Если  $z = F(x, y)$ , то  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  также есть, вообще говоря, функции от  $x$  и  $y$ , а значит, полный дифференциал функции  $z$  имеет вид

$$dz = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Возникает вопрос: каждое ли выражение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{12.11}$$

является полным дифференциалом некоторой функции  $z = F(x, y)$ ?

**Теорема 12.2.** Пусть функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны в односвязной области  $\bar{D}$ . Тогда для того, чтобы выражение (12.11) было полным дифференциалом некоторой функции  $z = F(x, y)$ , необходимо и достаточно, чтобы для всех  $(x, y) \in \bar{D}$  выполнялось равенство (12.10)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

**Необходимость.** Пусть  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dz$ , где  $z = F(x, y)$  – некоторая функция. Тогда

$$P(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y},$$

а значит

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \tag{12.12}$$

Поскольку условия теоремы Шварца (см. главу X) выполнены, то из (12.12) и

следует, что  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  всюду в  $\bar{D}$ .

**Достаточность.** Пусть равенство (12.10) выполнено всюду в области  $\bar{D}$ . Возьмем в ней произвольную, но фиксированную точку  $A(x_0, y_0)$  и переменную (текущую) точку  $B(x, y)$  (рис. 12.21). Введем в рассмотрение функцию.

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (12.13)$$

интеграл справа, в силу предыдущей теоремы, не зависит от формы дуги  $\overset{\cup}{AB}$ . Вычислим  $\frac{\partial F}{\partial x}$  и  $\frac{\partial F}{\partial y}$ .

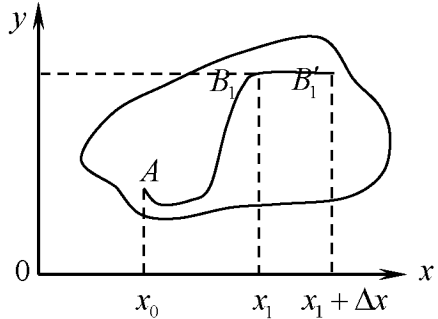


Рис. 12.21

Пусть  $B_1(x_1, y_1)$  – некоторая фиксированная точка области  $\bar{D}$ . Тогда

$$\begin{aligned} F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) &= \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

Второй интеграл справа возьмем по произвольной дуге  $AB_1$ , а первый – по дуге  $AB_1B_1'$ . Получим

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = \int_{B_1B_1'} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

а так как  $\int_{B_1B_1'} Q(x, y) dy = 0$ , то

$$\Delta_x F(x_1, y_1) = \int_{B_1B_1'} P(x, y) dx = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} P(x, y) dx = P(\xi, y_1) \Delta x,$$

где  $\xi \in (x_1, x_1 + \Delta x)$ . Следовательно,

$$\frac{\Delta_x F(x_1, y_1)}{\Delta x} = P(\xi, y_1).$$

Отсюда в пределе при  $\Delta x \rightarrow 0$ , в силу непрерывности функции  $P(x, y)$ , получим

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x} = P(x_1, y_1).$$

Поскольку  $B_1(x_1, y_1)$  – произвольная точка области  $\bar{D}$ , то всюду в  $\bar{D}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \quad (12.14)$$

Совершенно аналогично доказывается, что для всех  $(x, y) \in \bar{D}$  будет

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y). \quad (12.15)$$

Из (12.14) и (12.15) вытекает равенство  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF$ , что и доказывает достаточность.

В силу только что доказанной теоремы, теорема 12.2 утверждает, что (при предположениях этой теоремы) криволинейный интеграл не зависит от формы дуги тогда и только тогда, когда подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции.

### 10. Нахождение функции по ее полному дифференциалу

Пусть выражение (12.11) есть полный дифференциал некоторой функции  $F(x, y)$ . Тогда эту функцию называют первообразной выражения (12.11). Равенство (12.13) фактически дает способ нахождения первообразной, т.е. нахождения функции по ее полному дифференциалу.

Поскольку интеграл в (12.13) не зависит от формы дуги, соединяющей точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x, y)$ , то, беря в качестве этой дуги, например, линию  $ACB$  (рис. 12.22), получим из (12.13)

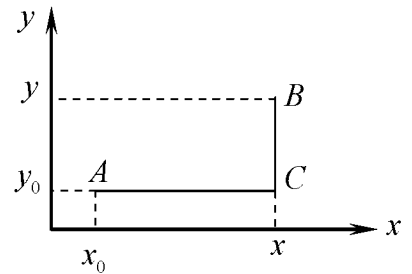


Рис. 12.22

$$F(x, y) = \int_{AC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{CB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

т.е.

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy. \quad (12.16)$$

**Пример 12.7.** Пусть  $dz = ydx + (x + y)dy$  (выполнение условия (12.10) было проверено в примере 12.6.). Тогда (рис.12.23)

$$z = \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y (x + y)dy = xy + \frac{y^2}{2}.$$

**Примечание.** Функция, найденная по формуле (12.16), зависит от выбора точки  $A(x_0, y_0)$ . Беря в качестве  $A$  другую точку области  $\bar{D}$ , получим другую первообразную  $\Phi(x, y)$ . Она отличается от  $F(x, y)$  на

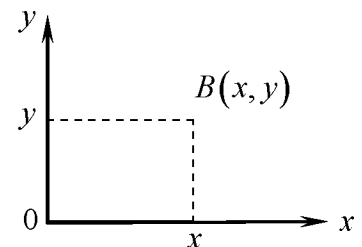


Рис. 12.23

постоянное число. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Phi(x, y) - F(x, y)) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) - P(x, y) \equiv 0,$$

и аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Phi(x, y) - F(x, y)) \equiv 0.$$

Таким образом,  $\Phi(x, y) - F(x, y)$  не зависит ни от  $x$ , ни от  $y$ , т.е.

$$\Phi(x, y) - F(x, y) \equiv C, \quad (12.17)$$

где  $C = const$ .

В равенстве (12.17) положим  $(x, y) = (x_0, y_0)$ . Получим  $C = \Phi(x_0, y_0)$ , а значит

$$F(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0).$$

Подставляя это в (12.13), находим

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0).$$

Этот результат записывают обычно так

$$\int_A^B P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \Phi(B) - \Phi(A). \quad (12.18)$$

Поскольку здесь  $\Phi(x, y)$  – любая первообразная подынтегрального выражения, то формулу (12.18) естественно назвать формулой Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла 2-го рода.

## 11. Интегралы по поверхности 2-го рода

Пусть в каждой точке гладкой поверхности  $\Sigma$  задана вектор-функция

$\vec{F}(x, y, z)$  (рис. 12.24). Разобьем  $\Sigma$  на элементарные части  $\Delta\Sigma_1, \Delta\Sigma_2, \dots, \Delta\Sigma_n$ . На каждой из площадок  $\Delta\Sigma_k$  возьмем произвольную точку  $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  и вычислим  $\vec{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ . Введем вектор  $\vec{\Delta\sigma}_k$ , направленный по нормали к площадке  $\Delta\Sigma_k$  в точке  $M_k$  и численно равный по длине площади  $\Delta\sigma_k$  площадки  $\Delta\Sigma_k$ . Составим сумму

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k), \vec{\Delta\sigma}_k), \text{ где } (\vec{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k), \vec{\Delta\sigma}_k)$$

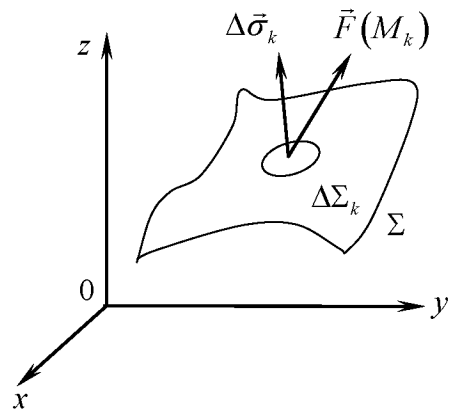


Рис. 12.24

есть скалярное произведение векторов  $\vec{F}$  и  $\overrightarrow{\Delta\sigma_k}$ .

Обозначим через  $\lambda$  наибольший из диаметров площадок  $\Delta\Sigma_k$ . Предположим теперь, что  $\lambda \rightarrow 0$ , т.е. что каждая из площадок стягивается в соответствующую точку  $M_k$ . Если существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left( \vec{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k), \overrightarrow{\Delta\sigma_k} \right),$$

не зависящий от способа дробления поверхности  $\Sigma$  и выбора точек  $M_k$ , то он называется интегралом 2-го рода вектор-функции  $\vec{F}(x, y, z)$  по поверхности  $\Sigma$  и обозначается  $\iint_{\Sigma} (\vec{F}(x, y, z), \overrightarrow{d\sigma})$ .

При таком определении молча предполагается, что на всех площадках  $\Delta\Sigma_k$  векторы  $\overrightarrow{\Delta\sigma_k}$  направлены по одну сторону от поверхности  $\Sigma$ , в связи с чем, эта поверхность считается односторонней. Если же одновременно направления всех нормалей поменять на противоположные, то интеграл изменит знак. Поэтому интеграл по поверхности 2-го рода определяется с точностью до знака. Знак же такого интеграла зависит от того, по какой стороне поверхности ведется интегрирование.

Для выяснения физического смысла интеграла по поверхности 2-го рода предположим, что  $\vec{v}(x, y, z)$  – скорость частиц жидкости в точке  $M(x, y, z)$  (рис. 12.25), а  $\Sigma$  – воображаемая поверхность в этой жидкости. Тогда за единицу времени через площадку  $\Delta\Sigma_k$  протекает объем жидкости, приближенно равный

$$\Delta V_k = \Delta\sigma_k |\vec{v}(M_k)| \cos \left( \vec{v}(M_k), \hat{\overrightarrow{\Delta\sigma_k}} \right) = \left( \vec{v}(M_k), \overrightarrow{\Delta\sigma_k} \right).$$

Следовательно, через всю поверхность  $\Sigma$  за время  $t=1$  протекает объем жидкости, равный

$$V = \iint_{\Sigma} (\vec{v}(x, y, z), \overrightarrow{d\sigma})$$

( $V$  – поток жидкости через эту поверхность).

Если  $\Sigma$  – замкнутая поверхность, то интеграл обозначают  $V = \oiint_{\Sigma} (\vec{v}(x, y, z), \overrightarrow{d\sigma})$ . В этом случае, если не оговорено противное, векторы  $\overrightarrow{\Delta\sigma_k}$  принято направлять наружу.

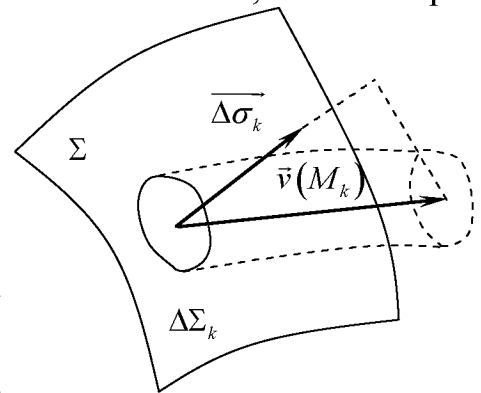


Рис. 12.25



**Пример 12.8.** Пользуясь определением, вычислить поверхностный интеграл  $\iint_{\Sigma} (\vec{r}, \overrightarrow{d\sigma})$ , где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки, а  $\Sigma$  – полная поверхность тела, ограниченного конусом  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  и плоскостью  $z = h$ . (Рис. 12.26)

Имеем

$$\iint_{\Sigma} (\vec{r}, \overrightarrow{d\sigma}) = \iint_{\Sigma_{\text{б.}}} (\vec{r}, \overrightarrow{d\sigma}) + \iint_{\Sigma_{\text{осн.}}} (\vec{r}, \overrightarrow{d\sigma}),$$

где  $\Sigma_{\text{б.}}$  – боковая поверхность тела,  $\Sigma_{\text{осн.}}$  – поверхность основания.

Поскольку  $\vec{r}(N_k) \perp \overrightarrow{\Delta\sigma_k}$  всюду на  $\Sigma_{\text{б.}}$ , то

$$\iint_{\Sigma_{\text{б.}}} (\vec{r}, \overrightarrow{d\sigma}) = 0, \text{ а значит}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\vec{r}, \overrightarrow{d\sigma}) &= \iint_{\Sigma_{\text{осн.}}} (\vec{r}, \overrightarrow{d\sigma}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\vec{r}(M_k), \overrightarrow{\Delta\sigma_k}) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |\vec{r}(M_k)| \Delta\sigma_k \cos \gamma_k = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n h \Delta\sigma_k = h \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k = h \cdot \pi h^2 = \pi h^3. \end{aligned}$$

Пусть  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  – углы вектора  $\overrightarrow{\Delta\sigma_k}$  с осями  $Ox, Oy, Oz$ . Тогда

$$\overrightarrow{\Delta\sigma_k} = (\Delta\sigma_k \cos \alpha_k) \vec{i} + (\Delta\sigma_k \cos \beta_k) \vec{j} + (\Delta\sigma_k \cos \gamma_k) \vec{k}.$$

Поэтому, если  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ , то

$$\begin{aligned} (\vec{F}(M_k), \overrightarrow{\Delta\sigma_k}) &= (P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cos \alpha_k + \\ &+ Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cos \beta_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cos \gamma_k) \Delta\sigma_k \end{aligned}$$

а значит

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\vec{F}(x, y, z), \overrightarrow{\Delta\sigma}) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cos \alpha_k + \\ &+ Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cos \beta_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cos \gamma_k) \Delta\sigma_k \end{aligned} \quad (12.19)$$

Справа стоит интегральная сумма функции  $P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma$  для интеграла по поверхности 1-го рода (см. выражение (12.9)). Величины  $\alpha, \beta, \gamma$  являются здесь, очевидно, функциями от  $x, y, z$ . Следовательно, мы получаем формулу, выражающую интеграл по

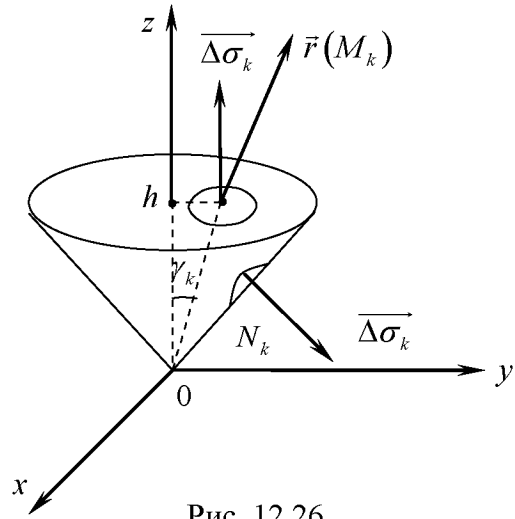


Рис. 12.26

поверхности 2-го рода через поверхностный интеграл 1-го рода:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (\vec{F}(x, y, z), \overline{\Delta\sigma}) = \\ & = \iint_{\Sigma} (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma) d\sigma \quad (12.20) \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что если функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  и  $R(x, y, z)$  непрерывны на поверхности  $\Sigma$ , то интеграл  $\iint_{\Sigma} (\vec{F}(x, y, z), \overline{\Delta\sigma})$

существует.

Отметим еще, что формула (12.20) напоминает по внешнему виду формулу (12.9), что говорит о сходстве связи интегралов по поверхности 2-го и 1-го рода и криволинейных интегралов 2-го и 1-го рода.

Обратимся к формуле (12.20). Проектируя бесконечно малый вектор  $\overline{d\sigma}$  на плоскость  $xOy$ , получим (см. рис. 12.27)

$$d\sigma \cdot \cos\gamma = dS^{(3)},$$

т.е.

$$d\sigma \cdot \cos\gamma = dxdy.$$

Здесь под  $dxdy$  подразумевается элемент площади в плоскости  $xOy$ . Совершенно аналогично получим (в том же смысле)

$$d\sigma \cdot \cos\alpha = dydz, \quad d\sigma \cdot \cos\beta = dxdz$$

(при этом предполагается, что все три угла:  $\alpha, \beta, \gamma$  – острые).

В связи с этим равенство (12.20) формально записывают так:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{F}(x, y, z), \overline{\Delta\sigma}) = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dxdz + R(x, y, z) dxdy.$$

Правую часть называют скалярной формой интеграла  $\iint_{\Sigma} (\vec{F}(x, y, z), \overline{\Delta\sigma})$ . Ее

следует рассматривать как сумму трех интегралов, каждый из которых может быть сведен к двойному. Например, если  $z = \varphi(x, y)$  – уравнение поверхности  $\Sigma$ , и  $D^{(3)}$  – ее проекция на плоскость  $xOy$ , то, на основании формул (12.20) и (12.3), имеем

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos\gamma d\sigma =$$

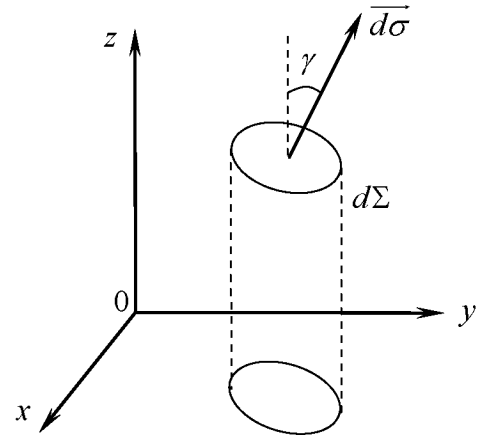


Рис. 12.27

$$= \iint_{D^{(3)}} R(x, y, \varphi(x, y)) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

т.е.

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D^{(3)}} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy.$$

Аналогично, переписав уравнение  $z = \varphi(x, y)$  в виде  $x = \psi(y, z)$  и  $y = \chi(x, z)$  (предполагается, что функции  $\psi(y, z)$  и  $\chi(x, z)$  однозначны и имеют непрерывные частные производные 1-го порядка), будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz &= \iint_{D^{(1)}} P(\psi(y, z), y, z) dy dz, \\ \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dx dz &= \iint_{D^{(2)}} Q(x, \chi(x, z), z) dx dz, \end{aligned}$$

где  $D^{(1)}$  и  $D^{(2)}$  – проекции поверхности  $\Sigma$  на плоскости  $yOz$  и  $xOz$ . При этом в общем случае каждый из трех интегралов берется со своим знаком или с противоположным – в зависимости от знаков величин  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  и  $\cos \gamma$ .

**Пример 12.9.** Рассмотрим интеграл

$$I = \iint_{\Sigma} xyz dy dz + (x - yz) dx dz + (x^2 y^2 + z) dx dy,$$

где  $\Sigma$  – часть плоскости  $x + 2y + 3z = 6$ , расположенная в 1-м октанте, причем интегрирование ведется по верхней стороне плоскости (рис. 12.28).

Разрешая уравнение плоскости  $\Sigma$  относительно каждой из переменных, получим

$$\begin{aligned} x &= 6 - 2y - 3z, \quad y = 3 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}z, \\ z &= 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y, \end{aligned}$$

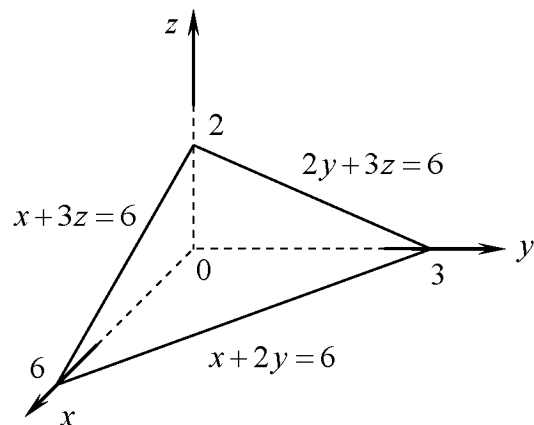


Рис.12.28

а, значит, исходный интеграл равен

$$J = \iint_{D^{(1)}} (6 - 2y - 3z) yz dy dz + \iint_{D^{(2)}} \left( x - \left( 3 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}z \right) z \right) dx dz +$$

$$\iint_{D^{(3)}} \left( x^2 y^2 + \left( 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \right) \right) dx dy = \int_0^3 \left( y \int_0^{2-\frac{2}{3}y} (6-2y-3z) z dz \right) dy +$$

$$\int_0^2 \left( \int_0^{6-3z} \left( x - \left( 3 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}z \right) \right) dx \right) dz + \int_0^3 \left( \int_0^{6-2y} \left( x^2 y^2 + \left( 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \right) \right) dx \right) dy$$

## 12. Формула Остроградского- Гаусса

Пусть  $D$ -пространственная односвязная область, ограниченная снизу и сверху гладкими поверхностями  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  с уравнениями  $z = \varphi_1(x, y)$  и  $z = \varphi_2(x, y)$  соответственно (рис. 12.29). Далее, пусть  $G$ -проекция области  $D$  на плоскость  $xOy$ . Предположим, что

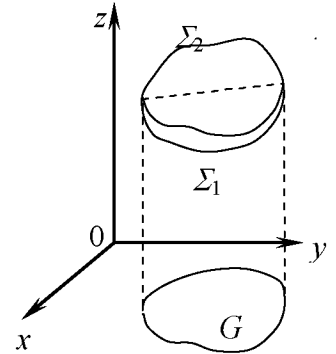


Рис. 12.29

функция  $R(x, y, z)$  и  $\frac{\partial R}{\partial z}$  непрерывны в области  $D$ .

Тогда, обозначив  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$ , получим

$$\iiint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma_2} R(x, y, z) dx dy - \iint_{\Sigma_1} R(x, y, z) dx dy$$

(интеграл по поверхности  $\Sigma_1$  берется с противоположным знаком, потому, что интегрирование на ней ведется по нижней стороне поверхности).

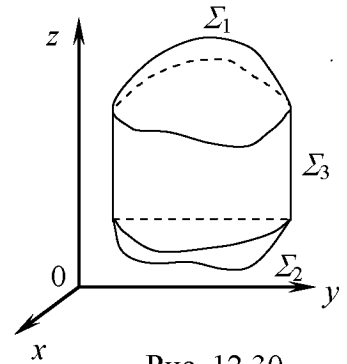


Рис. 12.30

Выражая интеграл по  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  через двойные интегралы, будем иметь:

$$\iiint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_G R(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy - \iint_G R(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy =$$

$$\iint_G \left( R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y)) \right) dx dy = \iint_G \left( \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy.$$

Окончательно

$$\iiint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iiint_D \frac{\partial R}{\partial z} dV \quad (12.21)$$

Очевидно (см. рис. 12.30), что формула (12.21) верна и тогда, когда  $\partial D$  содержит в себе и цилиндрическую поверхность  $\Sigma_3$ , с образующей параллельной оси  $Oz$  (поскольку в этом случае  $\iint_{\Sigma_3} R(x, y, z) dx dy = 0$ ).

Аналогично формуле (12.21), получим (при очевидных предположениях)

$$\iiint_{\Sigma_3} P(x, y, z) dydz = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x} dV$$

$$\iiint_{\Sigma} Q(x, y, z) dx dz = \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial y} dV.$$

Складывая все три результата, получим

$$\begin{aligned} \iiint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ = \iiint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV. \end{aligned} \quad (12.22)$$

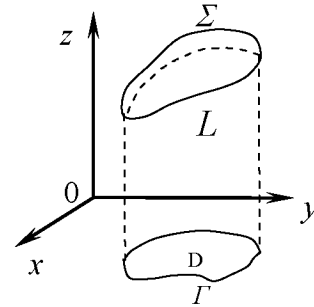


Рис. 12.31

Эту формулу называют формулой Остроградского-Гаусса. Выражая интеграл по замкнутой поверхности через тройной интеграл по области, ограниченной этой поверхностью, она тем самым является пространственным аналогом формулы Грина-Римана.

### 13. Формула Стокса

Пусть  $L$  – не пересекающий сам себя пространственный контур, на который можно натянуть гладкую поверхность  $\Sigma$ , пересекающуюся с любой прямой, параллельной оси  $Oz$ , не более чем в одной точке (рис.12.32). Далее, пусть  $\Gamma$  – проекция контура  $G$  на плоскости  $xOy$ , а  $D$  – область, ограниченная контуром  $\Gamma$ . Пусть, наконец,  $z = \varphi(x, y)$  – уравнение поверхности  $\Sigma$ , а  $P(x, y, z)$  – функция, имеющая на поверхности  $\Sigma$  непрерывные частные производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial P}{\partial z}$ .

Имеем

$$\int_L P(x, y, z) dx = \int_{\Gamma} P(x, y, \varphi(x, y)) dx$$

или, на основании формулы Грина-Римана,

$$\int_L P(x, y, z) dx = - \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{z=\varphi(x,y)} dx dy,$$

т.е.

$$\int_L P(x, y, z) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{z=\varphi(x,y)} dx dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=\varphi(x,y)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy \quad (12.23)$$

Записав уравнение  $z = \varphi(x, y)$  в виде  $-\varphi(x, y) + z = 0$ , заключаем, что направляющие косинусы нормали этой поверхности равны

$$\cos \alpha = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}. \quad (12.24)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{z=\varphi(x,y)} dx dy = \\ &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{z=\varphi(x,y)} \cos \gamma \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma d\sigma, \\ & - \iint_D \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=\varphi(x,y)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy = \\ &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{z=\varphi(x,y)} \cos \beta \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta d\sigma. \end{aligned}$$

Подставляя это в (12.23), получим

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma. \quad (12.25)$$

Точно так же, сделав очевидные предположения, получим формулы

$$\oint_L R(x, y, z) dz = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) d\sigma \quad (12.26)$$

$$\oint_L Q(x, y, z) dy = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) d\sigma. \quad (12.27)$$

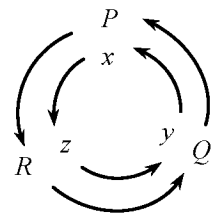


Рис. 12.32

Складывая все три результата, будем иметь

$$\begin{aligned} & \oint_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ &= \iint_{\Sigma} \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma. \quad (12.28) \end{aligned}$$

Эта формула называется формулой Стокса. Ей можно придать следующий символический вид

$$\oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$

**Примечание.1.** В формуле Стокса направление интегрирования в интеграле слева и сторона поверхности  $\Sigma$ , по которой ведется интегрирование, должны быть согласованы между собой. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Последняя из формул (12.24) означает, что всегда  $\cos \gamma > 0$ . Следовательно, воспользовавшись формулами (12.24), мы имеем дело с интегралами по верхней стороне поверхности  $\Sigma$ . С другой стороны, используя формулу Грина-Римана, мы предполагали, что в интеграле  $\oint_L P(x, y, \varphi(x, y))dx$

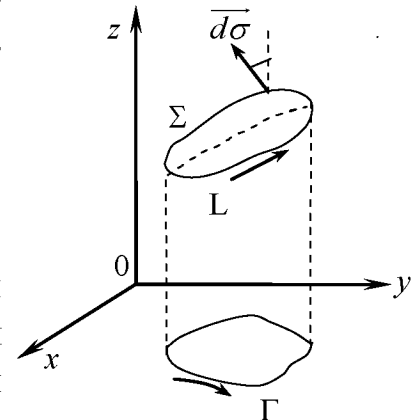


Рис. 12.33

интегрирование ведется против часовой стрелки. Но тогда в интеграле  $\oint_L P(x, y, z)dx$  интегрирование должно вестись так (см. рис. 12.33), чтобы с верхней стороны поверхности  $\Sigma$  оно казалось происходящим против часовой стрелки. Именно при таком условии была выведена формула (12.25).

Если же теперь в интеграле  $\oint_L P(x, y, z)dx$  поменять направление интегрирование на противоположное, то правая часть формулы (12.25) изменит знак, а это будет означать, что в интеграле справа направление нормали изменилось на противоположное. Однако, и в этом случае с конца вектора нормали интегрирование по контуру  $L$  будет казаться происходящим против часовой стрелки. Таким образом, формула (12.25) имеет место, если в интеграле справа вектор нормали к поверхности  $\Sigma$  направлен в ту сторону, откуда направление обхода контура  $L$  кажется происходящим против стрелки часов.

Аналогичное замечание касается и формул (12.26) и (12.27), а значит и всей формулы Стокса.

**Примечание 2.** Если поверхность  $\Sigma$  такова, что “верхняя” нормаль во всех ее точках образует острые углы с осями  $Ox, Oy$  и  $Oz$ , то правую часть формулы Стокса можно представить в виде интеграла по поверхности 2-го рода в скалярной форме, и тогда эта формула запишется так:

$$\begin{aligned} & \oint_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (12.29) \end{aligned}$$

**Примечание 3.** Предположим, что величины  $P$  и  $Q$  зависят только от  $x$  и  $y$ , а  $R(x, y, z) \equiv 0$ . Далее, пусть контур  $L$  лежит в плоскости  $xOy$ , а  $D$  – ограниченная им область этой плоскости. Тогда  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 0$ , и из (12.29) получим

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

а это – формула Грина-Римана, являющаяся, таким образом, частным случаем формулы Стокса. Обратно, формула Стокса есть обобщение формулы Грина-Римана на пространственный случай.

#### 14. Условия независимости криволинейного интеграла по пространственной дуге от формы дуги

Предположим, что функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  и их частные производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial y}$  непрерывны в пространственной области  $\bar{D}$ . Эту область будем считать такой, что на любой замкнутый контур, принадлежащий области  $\bar{D}$ , можно натянуть гладкую поверхность, также полностью принадлежащую этой области. Примером такой области может служить область между двумя концентрическими сферами. Наоборот, шар не является областью указанного типа.

Так же, как и в двумерном случае, легко показать, что равенство нулю интеграла  $\oint_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$  по любому гладкому или

кусочно-гладкому контуру  $L \in \bar{D}$  равносильно независимости интеграла

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (12.30)$$

от формы дуги  $\overset{\sim}{AB}$ .

**Теорема 12.3.** Для того, чтобы интеграл (12.30) не зависел от формы дуги  $\overset{\sim}{AB}$ , необходимо и достаточно, чтобы всюду в области  $\bar{D}$  выполнялись равенства



$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (12.31)$$

Достаточность условий (12.31) вытекает из формулы Стокса, а необходимость проверяется так же, как и в двумерном случае.

Так же, как и в случае двух независимых переменных, доказывается, что условия (12.31) необходимы и достаточны для того, чтобы выражение

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

было полным дифференциалом некоторой функции  $F(x, y, z)$ . Поэтому предыдущая

теорема, как и в двумерном случае, утверждает, что криволинейный интеграл 2-го рода по пространственной дуге не зависит от формы этой дуги тогда и только тогда, когда подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции.

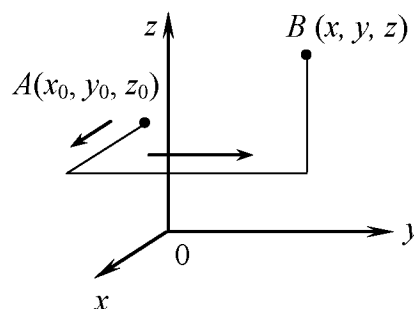


Рис. 12.34

Функция  $F(x, y, z)$ , являющаяся первообразной для выражения

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

может быть найдена, как нетрудно сообразить, по формуле (рис. 12.34)

$$F(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z)dz.$$

При выполнении условий (12.31) для интеграла (12.30) легко получить формулу Ньютона-Лейбница, аналогичную формуле (12.18).

## Задачи и упражнения к главе XII

1. Найти массу линии  $y = \sqrt{x^3}$  ( $0 \leq x \leq 4$ ), если плотность в каждой ее точке равна  $\gamma = x$ .
2. Найти массу дуги линии  $y^2 = 4x$  ( $y \geq 0$ ) на участке  $x \in [0, 4]$ , если плотность в каждой точке равна  $\gamma = \sqrt{x}$ .
3. Найти площадь цилиндрической поверхности  $y = \ln x$ , вырезанной плоскостями  $z = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$  и поверхностью  $z = x^2$ .
4. Найти боковую поверхность тела, ограниченного плоскостями  $x = 1$ ,  $z = 0$  и поверхностями  $y^2 = x$ ,  $z = \sqrt{x}$ .

5. Найти площадь цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = 4$ , вырезанной плоскостью  $z = 0$  и поверхностью  $z = (y + 2)^2$ .
6. Найти площадь части поверхности  $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ , вырезанной плоскостями  $z = 0$ ,  $x = 3$  и поверхностью  $z = x^2$ .
7. Найти массу параболической оболочки  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  ( $0 \leq z \leq 2$ ), если
8. ее плотность в каждой точке равна  $\gamma = 2$ .
9. Найти момент инерции поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) относительно оси  $Oz$ .
10. Вычислить массу части поверхности  $z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 1$ ), если плотность в каждой ее точке равна  $\gamma = |xy|z$ .
11. Вычислить работу силы  $\vec{F} = (x + y, 2x)$  вдоль первой четверти окружности  $x^2 + y^2 = 4$ .
12. Вычислить интеграл  $\int_{\overset{\cup}{AB}} \cos y dx + \sin x dy$  для точек  $A(0, \pi)$  и  $B(\pi, 0)$ .
13. Вычислить интеграл  $\oint_L \arctg \frac{y}{x} dx$ , где  $L$  - изображенный на чертеже 12.35 контур.

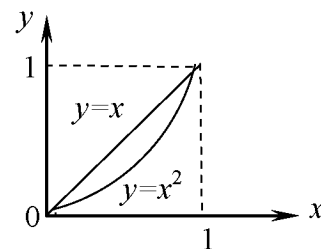


Рис. 12.35

**Непосредственно и при помощи формулы Грина-Римана вычислить интегралы:**

14.  $\oint_L (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$ , где  $L$  - треугольник с вершинами  $(1,1)$ ,  $(4,2)$ ,  $(4,4)$ .
15.  $\oint_L (x^2 + y) dx - (x + y) dy$ , где  $L$  - контур, образованный линиями  $y = 0$ ,  $x + y = 2$ ,  $y = \sqrt{x}$

16.  $\oint y dx + (x + y)^2 dy$ , где  $L$  – контур, образованный линиями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x + y = 1$ , ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ).

17.  $\oint_L x^2 dy + y^2 dx$  где  $L$  – контур, образованный линиями  $y = 0$ ,  $y = x$  и  $xy = 1$ .

18.  $\oint_L xy^2 dy - x^2 y dx$ , где  $L$  – окружность  $x^2 + y^2 = a^2$ .

19. Вычислить интеграл  $\oint_L (x + y) dx + (x - y) dy$ , где  $L$  – эллипс

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Объяснить результат.

**Вычислить интегралы:**

20.  $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x + y) dx + (x - y) dy$ .

21.  $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$ .

22.  $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$ .

23. При помощи формулы Ньютона-Лейбница вычислить интеграл.

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

24. По формуле Ньютона-Лейбница вычислить интеграл

$$\int_{\left(0, \frac{\pi}{4}\right)}^{(\pi, 0)} \cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy$$

25. Вычислить интеграл  $\oint_L (x + y) dx + (x - y) dy$ , где  $L$  – эллипс

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

26. Вычислить работу силы  $\vec{F} = \left\{ \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{x} \right\}$  вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки (1,1,1) и (2,4,8).

27. Найти работу силы

$$\vec{F} = \left\{ z, \sqrt{4-y^2}, xy \right\} \text{ вдоль дуги винтовой линии } \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = \frac{t}{\pi} \end{cases} \text{ от точки}$$

пересечения с плоскостью  $xOy$  до точки пересечения с плоскостью  $z = 2$ .

28. При помощи формулы Ньютона-Лейбница вычислить интеграл

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz .$$

**Найти  $u(x, y, z)$ , если:**

$$29. du = 2x \ln z dx + z^2 dy + \left( \frac{x^2}{z} + 2yz \right) dz$$

$$30. du = 2xz dx + 2z^4 dy + (x^2 + 8yz^3) dz$$

$$31. du = 2xz^2 dx + z^3 dy + (2x^2 z + 3yz^2) dz$$

### ХIII. Питегралы, зависящие от иараметра

#### 1. Оиределениие интегралы, зависящие от иараметра

Пусть  $[a, b]$  – конечный отрезок оси  $0x$ , а  $E$  – некоторое множество на оси  $0y$ . Рассмотрим интеграл:

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

Где  $f(x, y)$  при каждом  $y \in E$  есть интегрируемая на отрезке  $[a, b]$  функция. При переменном  $y$  этот интеграл есть функция, определенная на множестве  $E$ . Итак, рассмотрим функцию:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (13.1)$$

В стоящем справа интеграле переменную  $y$  называют параметром. Будем предполагать, что множество  $E$  имеет по крайней мере одну предельную точку  $y_0$ .

Тогда существует числовая последовательность  $\{y_n\} \in E$ , такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

Предположим, что существует конечный предел:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$$

Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon, x)$ , что

$$(|y - y_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon)$$

Здесь существенно, что  $\delta$  зависит не только от  $E$ , но и от  $x$ .

Функция  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow y_0$  называется сходящейся к предельной функции  $\varphi(x)$  равномерно относительно  $x$  на отрезке  $[a, b]$  если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon)$ , что

$$(|y - y_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon), \forall x \in [a, b] \quad (13.2)$$

или

$$(|y - y_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon)$$

В этом случае пишут,  $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x)$

**Лемма 13.1.** Если функция  $f(x, y)$  при любом  $y \in E$  непрерывна по  $x$  на отрезке  $[a, b]$  и при этом  $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x)$ , то и предельная функция

$\varphi(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

■ Выберем в  $E$  произвольную последовательность  $\{y_n\} \rightarrow y_0$ . Тогда при достаточно большом  $n$  будет  $|y_n - y_0| < \delta$ , а значит, на основании (13.2),

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b].$$

Поэтому, положив  $\varphi_n(x) = f(x, y_n)$ , получим, что последовательность функций  $\{\varphi_n(x)\}$  равномерно на отрезке  $[a, b]$  сходится к функции  $\varphi(x)$

$$\{\varphi_n(x)\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} \varphi(x).$$

Поскольку все функции  $\varphi_n(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , то, на основании теоремы о непрерывности предельной функции функциональной последовательности, функция  $\varphi(x)$  также непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . □<sup>\*</sup>

**Теорема 13.1.** Пусть функция  $f(x, y)$  при любом  $y \in E$  непрерывна по  $x$  на отрезке  $[a, b]$  и пусть  $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} \varphi(x)$ . Тогда

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx \quad (13.3)$$

■ Заметим, что стоящий справа интеграл существует на основании непрерывности функции  $\varphi(x)$ , обеспечиваемой *леммой 13.1*.

Снова возьмем в  $E$  последовательности  $\{y_n\} \rightarrow y_0$  и положим

$$\varphi_n(x) = f(x, y_n)$$

Тогда  $\varphi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} \varphi(x)$ . На основании теоремы об интегрировании

последовательности функций, имеем отсюда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx &= \int_a^b \varphi(x) dx, \text{ т.о.} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x, y_n) dx &= \int_a^b \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Это равенство выполняется для любой последовательности  $\{y_n\} \in E$ , такой, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ , а значит отсюда и следует соотношение (13.3). □

**Примечание.** Поскольку равенство (13.3) можно переписать так:

---

<sup>\*</sup>) Здесь всюду в дальнейшем символы ■ и □ обозначают соответственно начало и конец доказательства.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$$

то **теорему 13.1** называют теоремой о предельном переходе по параметру под знаком определенного интеграла.

Рассмотрим теперь тот случай, когда  $E = [c, d]$ .

**Теорема 13.2.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна по совокупности переменных в прямоугольнике

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Тогда интеграл (13.1) как функция аргумента  $y$  непрерывен на отрезке  $[c, d]$ .

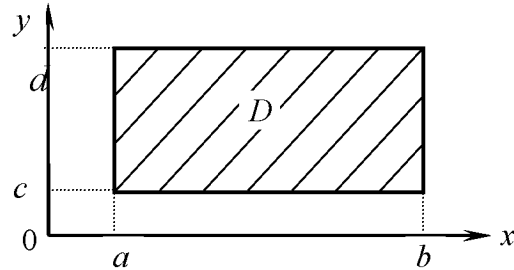


Рис. 13.1

■ На основании теоремы Кантора для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что

$$(|x' - x''| < \delta \cap |y' - y''| < \delta) \Rightarrow (|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon, \forall (x, y) \in D)$$

в частности, для любого  $x \in [a, b]$  будет

$$(|y - y_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon).$$

Это значит, что  $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} f(x, y_0)$ . Но тогда, на основании теоремы 13.1,

получим

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx, \text{ т.е.}$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \Phi(y) = \Phi(y_0).$$

Поскольку здесь  $y_0$  – произвольная точка отрезка  $[c, d]$ , то теорема доказана. □

**Примечание.** Теорема о предельном переходе под знаком интеграла справедлива для любого промежутка изменения параметра  $y$ , конечного или бесконечного (отрезок, интервал, полуось, вся ось).

Справедлива также теорема, аналогичная **теореме 13.2.** для интеграла с переменными пределами.

**Теорема 13.3.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  по совокупности переменных, а функции  $\varphi(y)$  и  $\psi(y)$  непрерывны на отрезке  $[c, d]$ . Тогда интеграл

$$I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

непрерывен на отрезке  $[c, d]$ , т.е.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0) dx \quad (13.4)$$

для любого  $y_0 \in [c, d]$

**Пример 13.1.** Вычислим величину  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{y+1} \frac{(1+x^4)^y}{1+x^2+y^2} dx$

Поскольку функции

$$f(x, y) = \frac{(1+x^4)^y}{1+x^2+y^2}, \varphi(y) = y, \psi(y) = y+1$$

непрерывны всюду, то интеграл  $I(y)$  также непрерывен. В частности, он непрерывен при  $y_0 = 0$ . Следовательно

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{y+1} \frac{(1+x^4)^y}{1+x^2+y^2} dx = I(0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

## 2. Дифференцирование и интегрирование определенных интегралов по параметру

**Теорема 13.4.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена в прямоугольнике  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  (рис. 13.1) и непрерывна по  $x$  на отрезке  $[a, b]$  при любой постоянной  $y \in [c, d]$ . Пусть, далее, в области  $D$  существует частная производная  $f'_y(x, y)$ , непрерывная по совокупности переменных. Тогда при любом  $y \in [c, d]$  функция (13.1) дифференцируема и имеет место формула

$$\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx \quad (13.5)$$

■ Возьмем произвольно  $y_0 \in [c, d]$ . Тогда

$$\Delta\Phi(y_0) = \Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0) =$$



$$= \int_a^b f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx = \int_a^b (f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)) dx,$$

или, в силу теоремы Лагранжа,

$$\Delta\Phi(y_0) = \int_a^b f'_y(x, \eta) \Delta y dx = \Delta y \int_a^b f'_y(x, \eta) dx,$$

где  $\eta \in (y_0, y_0 + \Delta y)$ . Следовательно,

$$\frac{\Delta\Phi(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, \eta) dx.$$

Рассмотрим разность

$$\frac{\Delta\Phi(y_0)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x, y_0) dx = \int_a^b (f'_y(x, \eta) - f'_y(x, y_0)) dx.$$

Поскольку функция  $f'_y(x, y)$  непрерывна в замкнутой области  $D$ , то, на основании теоремы Кантора, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что всюду в  $D$

$$(|x' - x''| < \delta \cap |y' - y''| < \delta) \Rightarrow (|f'_y(x', y') - f'_y(x'', y'')| < \varepsilon).$$

В частности, для любого  $x \in [a, b]$  будет

$$(|y - y_0| < \delta) \Rightarrow (|f'_y(x, y) - f'_y(x, y_0)| < \varepsilon).$$

Но если  $|\Delta y| < \delta$ , то тем более  $|\eta - y_0| < \delta$ , а значит

$$|f'_y(x, \eta) - f'_y(x, y_0)| < \varepsilon.$$

Но тогда

$$\left| \frac{\Delta\Phi(y_0)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x, y_0) dx \right| \leq \int_a^b |f'_y(x, \eta) - f'_y(x, y_0)| dx < \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon(b - a).$$

Отсюда следует, что предел  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi(y_0)}{\Delta y}$  существует и равен  $\int_a^b f'_y(x, y) dx$ ,

что и доказывает **теорему 13.4**.  $\square$

Формула (13.5) выражает т.н. правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру: для того чтобы (при условии **теоремы 13.4**) продифференцировать интеграл по параметру, достаточно продифференцировать по нему подынтегральную функцию.

**Теорема 13.4\* (обобщенное правило Лейбница).** Пусть функции  $f(x, y)$  и  $f'_n(x, y)$  непрерывны в прямоугольнике  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  и кроме того, на отрезке  $[c, d]$  существуют

$\varphi'(y)$  и  $\psi'(y)$ . Тогда интеграл

$$I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

дифференцируем по  $y$  на отрезке  $[c, d]$ , и при этом

$$I'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y).$$

**Теоремы 13.3 и (13.4\*.)** позволяют не только вычислять производную интегралов по параметру, но в отдельных случаях для этих интегралов явные численные выражения.

**Пример 13.2.** Вычислить величину

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + \cos^2 x) dx$$

где  $a \geq 1$ .

В данном случае

$$f(x, a) = \ln(a^2 \sin^2 x + \cos^2 x), \quad f'_a(x, a) = \frac{2a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + \cos^2 x}.$$

Эти функции непрерывны на множестве  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [1, +\infty)$ . Дифференцируя по параметру под знаком интеграла, получим

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + \cos^2 x} dx = \left| t = \operatorname{ctg} x, x = \operatorname{arccot} t \right|_{dx = -\frac{dt}{1+t^2}} = 2a \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + t^2)(1+t^2)} = \\ &= \frac{2a}{a^2 - 1} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{a^2 + t^2} \right) dt = \frac{2a}{a^2 - 1} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{a+1}. \end{aligned}$$

Итак,

$$I'(a) = \frac{\pi}{a+1},$$

а значит

$$I(a) = \pi \ln(a+1) + c.$$

Но

$$I(1) = \int_0^1 \ln(\sin^2 x + \cos^2 x) dx = 0,$$

так что

$$C = -\pi \ln 2.$$

Окончательно

$$I(a) = \pi \ln \frac{a+1}{2}.$$

**Теорема 13.5.** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}, \text{ то}$$

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Утверждение этой теоремы было ранее доказано в теории двойных интегралов.

Мы ее сформулируем сейчас повторно в связи с последующим ее обобщением, которое рассмотрим ниже.

**Пример 13.3.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx,$$

где  $a > 0, b > 0$ .

Подынтегральная функция не определена при  $x=0$  и  $x=1$ . Но в этих точках она, как легко видеть, имеет устранимые разрывы. Поэтому ее можно доопределить предельными значениями в этих точках

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = b - a$$

Считая функцию доопределенной по непрерывности на всем отрезке  $[0, 1]$ , ее можно представить в виде интеграла, зависящего от параметра  $x$ :

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy.$$

Поскольку функция  $f(x, y) = x^y$  непрерывна в прямоугольнике  $[0, 1] \times [a, b]$ , то на основании *теоремы 13.5.*

$$I = \int_0^1 \left( \int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln|y+1| \Big|_a^b.$$

Окончательно

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

### 3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Напомним, что дискретным аналогом несобственного интеграла 1-го рода

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \quad (13.6)$$

является числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (13.7)$$

В частности, аналогом частичной суммы ряда (13.7)  $I_n = \sum_{k=1}^n a_k$  является для интеграла (13.6) определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

где  $b$  – некоторое конечное число, а непрерывным остатком ряда (13.7)

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

является интеграл

$$\int_b^{\infty} f(x) dx.$$

Поэтому (в случае сходимости ряда (13.7) с суммой  $s$ ) будет

$$S = S_n + r_n,$$

а, соответственно, для интеграла (13.6)

$$Q = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx,$$

где  $Q$  – значение интеграла (13.6). Сходимость ряда (13.7), означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0,$$

и аналогично, сходимость интеграла (13.6) значит, что

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_b^{\infty} f(x) dx = 0.$$

Будем теперь вместо интеграла вида (13.1) рассматривать интеграл вида:

$$\Phi(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx, \quad (13.8)$$

хотя результаты, полученные ниже, легко распространяются также на интегралы вида

$$\int_{-\infty}^a f(x, y) dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

В том же смысле, в котором интеграл (13.7) есть непрерывный аналог числового ряда (13.6) интеграл (13.8) можно считать непрерывным аналогом функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (13.9)$$

Если интеграл (13.8) сходится при любом  $y \in E$ , то говорят, что этот интеграл сходится на множества  $E$ . Это значит, что при любом фиксированном  $y \in E$  будет:

$$\text{Lim}_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^{\infty} f(x, y) dx,$$

или, что то же самое:

$$\text{Lim}_{b \rightarrow +\infty} \int_b^{\infty} f(x, y) dx = 0 \quad (13.10)$$

Для ряда (13.9) соответствующее условие сходимости записывается так:

$$\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = 0. \quad (13.11)$$

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда, на основании равенства (13.10), для этого  $\varepsilon$  существует такое  $B(\varepsilon, y)$ , что

$$(b > B) \Rightarrow \left( \left| \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \right).$$

■ Интеграл (13.8) называется сходящимся на множестве  $E$  равномерно относительно параметра  $y$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $B(\varepsilon)$ , что

$$(b > B) \Rightarrow \left( \left| \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon, \forall y \in E \right). \quad (13.12)$$

Соответственно для функционального ряда (13.9) это соотношение запишется так:

$$(n > N) \Rightarrow \left( \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon \right).$$

Таким образом равномерная сходимость интеграла (13.8) относительно параметра аналогична равномерной сходимости функционального ряда (13.9).

**Теорема 13.6.** Пусть существует функция  $g(x)$ , интегрируемая на каждом конечном отрезке  $[a, b]$  и такая, что

1.  $|f(x, y)| \leq g(x)$  для всех  $x \geq a$  и всех  $y \in E$ ;
2. интеграл  $\int_a^\infty g(x) dx$  сходится.

Тогда интеграл (13.8) сходится на множества  $E$  равномерно. Тот факт, что при любом  $y \in E$  интеграл  $\int_a^\infty f(x, y) dx$  сходится (и даже абсолютно) следует из *условия 1* и признака сравнения несобственных интегралов. Далее, из *условия 1* следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $B(\varepsilon)$ , что

$$(b > B) \Rightarrow \left( \int_b^\infty g(x) dx < \varepsilon \right).$$

Но тогда, в силу *условия 1*, при  $b > B$  тем более будет

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| \leq \int_b^\infty f(x, y) dx \leq \int_b^\infty g(x) dx < \varepsilon,$$

а поскольку  $B$  здесь зависит только от  $\varepsilon$ , т.е. не зависит от  $y$ , то равномерная сходимость интеграла (13.8) – доказана.  $\square$

Легко видеть, что *теорема 13.6* аналогична признаку Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. В связи с этим ее также мы будем в дальнейшем называть признаком Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру.

**Пример 13.4.** Рассмотрим интеграл  $\Phi(y) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2+y}$ . Поскольку для

всех  $x$  и для всех  $y \geq 0$  будет

$$\frac{1}{1+x^2+y} \leq \frac{1}{1+x^2},$$

а интеграл  $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$  сходится, то интеграл  $\Phi(y)$ , на основании признака

Вейерштрасса, сходится равномерно на множестве  $E = [0, \infty)$ .

Ниже мы познакомимся с другими достаточными признаками равномерной сходимости интеграла (13.8).

**Пример 13.5.** Исследуем на равномерную сходимость интеграл

$$\Phi(y) = \int_1^{+\infty} \frac{2y}{x^4 + y^2} dx,$$

где  $y \in R$  – произвольное число.

Имеем: 
$$|f(x, y)| = \frac{2|y|}{x^4 + y^2}.$$

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получим

$$x^4 + y^2 \geq 2|y|x^2, \text{ а значит}$$

$$|f(x, y)| \leq \frac{2|y|}{2|y| \cdot x^2} = \frac{1}{x^2}, \forall y \in R.$$

Поскольку интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$  сходится, то исходный интеграл, на основании *теоремы 13.6* сходится равномерно на всей оси  $Oy$ .

#### 4. Предельный переход по параметру под знаком несобственного интеграла

**Теорема 13.7.** Пусть функция  $f(x, y)$  при  $x \geq 0$  и при  $y \in E$  непрерывна по  $x$ , а  $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} \varphi(x)$  на любом конечном отрезке  $[a, b]$ . Пусть, далее, интеграл (13.8) сходится на множестве  $E$  равномерно. Тогда

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} \varphi(x) dx. \quad (13.13)$$

■ На основании *леммы 13.1* функция  $\varphi(x)$  непрерывна, а значит и интегрируема, на любом конечном отрезке  $[a, b]$ .

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Для него в силу условия найдется такое  $B(\varepsilon)$ , что для всех  $y \in E$  будет

$$(b > B) \Rightarrow \left( \left| \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \right).$$

Возьмем некоторое конечное  $b' > b$ . Тогда

$$\left| \int_{b'}^{\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left| \int_b^{b'} f(x, y) dx \right| = \left| \int_b^{\infty} f(x, y) dx - \int_{b'}^{\infty} f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right| + \left| \int_{b'}^{\infty} f(x, y) dx \right|, \text{ т.е.}$$

$$\left| \int_b^{b'} f(x, y) dx \right| < 2\varepsilon.$$

Поскольку это верно при всех  $y \in E$ , то

$$(b' > B) \Rightarrow \left( \left| \lim_{y \rightarrow y_0} \int_b^{b'} f(x, y) dx \right| \leq 2\varepsilon \right),$$

или, на основании **теоремы 13.1**:

$$(b > B, b' > B) \Rightarrow \left( \left| \int_b^{b'} \varphi(x) dx \right| \leq 2\varepsilon \right). \quad (13.14)$$

Здесь  $b'$  можно взять сколь угодно большим, а поэтому выражению (13.14) можно придать вид:

$$(B < b) \Rightarrow \left( \left| \int_b^{\infty} \varphi(x) dx \right| \leq 2\varepsilon \right).$$

Последнее означает, что  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_b^{\infty} \varphi(x) dx = 0$ , т.е. что интеграл  $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$

сходится. Имеем теперь

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx - \int_a^{\infty} \varphi(x) dx = \left( \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right) + \int_b^{\infty} f(x, y) dx - \int_b^{\infty} \varphi(x) dx,$$

где  $b > 0$  – произвольное число. Отсюда

$$\left| \int_a^{\infty} f(x, y) dx - \int_a^{\infty} \varphi(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| + \left| \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right| + \left| \int_b^{\infty} \varphi(x) dx \right|.$$

Если  $b > B$ , то 2-ое и 3-е слагаемые справа не превосходят  $2\varepsilon$ . Взяв теперь  $b$  достаточно большим по отношению к  $y_0$ , можно, на основании (13.3) и 1-ое слагаемое справа сделать меньшим, чем  $\varepsilon$ . Таким образом, для взятого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta(\varepsilon)$ , что при  $|y - y_0| < \delta$  будет

$$\left| \int_a^{\infty} f(x, y) dx - \int_a^{\infty} \varphi(x) dx \right| < 5\varepsilon$$

откуда и следует выражение (13.13).  $\square$

## 5. Пеирерывность несобственного интеграла по параметру

**Теорема 13.8.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна по совокупности переменных в области  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  (рис. 13.2) и пусть интеграл (13.8) равномерно сходится относительно параметра  $y$  на отрезке



$[c, d]$ . Тогда этот интеграл как функция аргумента  $y$  непрерывен на этом отрезке.

■ При доказательстве **теоремы 13.2** мы видели, что при изменении  $x$  на конечном отрезке  $[a, b]$  для любого  $y_0 \in [c, d]$  ,будет

$$f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} f(x, y_0)$$

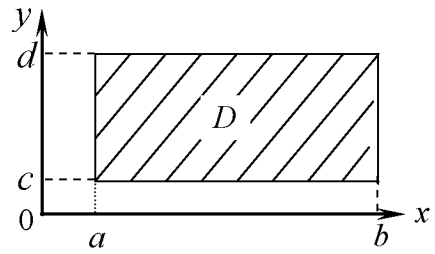


Рис. 13.2

Но тогда, на основании **теоремы 13.7**, в интеграле (13.8) можно перейти к пределу под знаком интеграла, так что

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} f(x, y_0) dx,$$

т.е.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \Phi(y) = \Phi(y_0),$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

### 6. Интегрирование и дифференцирование несобственных интегралов по параметру

**Теорема 13.9.** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна при  $x \geq a$ ,  $c \leq y \leq d$  и интеграл (13.8) сходится равномерно относительно параметра  $y$  на отрезке  $[c, d]$ , то

$$\int_c^d \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{\infty} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \tag{13.15}$$

Эта теорема обобщает утверждение теоремы (13.4) на случай несобственного интеграла 13.8.

■ Имеем

$$\int_c^d \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx + \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right) dy,$$

или, на основании **теоремы 13.3**.

$$\int_c^d \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx + \int_c^d \left( \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right) dy.$$

Но

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^d \left( \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d 0 \cdot dy = 0,$$

а значит

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy,$$

т.е.

$$\int_a^{\infty} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy,$$

что и требовалось доказать.  $\square$

Формулу (13.15) можно обобщить и на случай, когда  $d = +\infty$ , т.е. когда интегралы по обеим переменным  $x$  и  $y$  – несобственные.

**Теорема 13.10.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в области

$$D = \{(x, y) | x \geq a, y \geq c\}.$$

Если:

1. интеграл  $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$  равномерно сходится относительно  $y$  на любом

конечном отрезке оси  $Oy$ ;

2. интеграл  $\int_c^{\infty} f(x, y) dy$  равномерно сходится относительно  $x$  на любом

конечном отрезке оси  $Ox$ ;

3. существует хотя бы один из повторных интегралов

$$\int_c^{\infty} \left( \int_a^{\infty} |f(x, y)| dx \right) dy, \quad \int_a^{\infty} \left( \int_c^{\infty} |f(x, y)| dy \right) dx,$$

то существуют и равны между собой оба повторных интеграла

$$\int_c^{\infty} \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{\infty} \left( \int_c^{\infty} f(x, y) dy \right) dx,$$

т.е.

$$\int_c^{\infty} \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{\infty} \left( \int_c^{\infty} f(x, y) dy \right) dx. \quad (13.16)$$

■ Пусть, для определенности, существует интеграл

$$\int_a^{\infty} \left( \int_c^{\infty} f(x, y) dy \right) dx.$$

Возьмем произвольное  $t > c$ . Из условия 1 и теоремы 13.9 следует, что

$$\int_c^t \left( \int_a^\infty f(x,y) dx \right) dy = \int_a^\infty \left( \int_c^t f(x,y) dy \right) dx. \quad (13.17)$$

Рассмотрим функцию  $F(x,t) = \int_c^t f(x,y) dy$ . В силу **теоремы 13.9**, она непрерывна по  $x$ , а из **условия 2** следует, что она равномерно относительно  $x$  на любом конечном отрезке  $[a,b]$  стремится к интегралу  $\int_c^t f(x,y) dy$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Далее,

$$|F(x,t)| \leq \int_c^t |f(x,y)| dy \leq \int_c^\infty |f(x,y)| dy.$$

Но последний интеграл сходится, а значит интеграл

$$\int_a^\infty F(x,t) dx = \int_a^\infty \left( \int_c^t f(x,y) dy \right) dx$$

сходится равномерно относительно  $t$  (в силу признака Вейерштрасса) на любом конечном отрезке изменения  $t$ .

Итак, для функции  $F(x,t)$  выполняются все условия **теоремы 13.7**, а значит, на основании этой теоремы

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^\infty F(x,t) dx = \int_a^\infty \lim_{t \rightarrow +\infty} F(x,t) dx,$$

т.е.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^\infty \left( \int_c^t f(x,y) dy \right) dx = \int_a^\infty \left( \int_c^\infty f(x,y) dy \right) dx.$$

Поэтому, совершая в равенстве 13.17 предельный переход при  $t \rightarrow +\infty$ , получим требуемую формулу (13.16).  $\square$

**Примечание:** с геометрической точки в **теореме 13.10** область  $D$  (рис.13.2) заменяется областью  $D$ , изображенной на рис. 13.3.

**Теорема 13.11.** Пусть функция  $f(x,y)$  непрерывна по  $x$  при  $x \geq 0$  и  $y \in [c,d]$ , и при этих  $x$  и  $y$  имеет непрерывную  $y$  частную производную  $f'_y(x,y)$ . Пусть, далее, интеграл (13.8) сходится при всех  $y \in [c,d]$ , а интеграл  $\int_a^\infty f'_y(x,y) dx$  сходится на отрезке  $[c,d]$

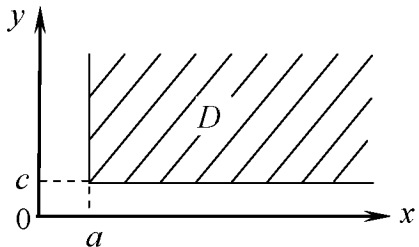


Рис. 13.3

равномерно относительно  $y$ .

Тогда при любом  $y \in [c, d]$  интеграл 13.8 дифференцируем по  $y$ , и

$$\Phi'(y) = \int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx. \quad (13.18)$$

■ Возьмем произвольное  $y \in [c, d]$ . Тогда, на основании *теоремы 13.9*,

$$\int_c^y \left( \int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx \right) dy = \int_a^{\infty} \left( \int_c^y f'_y(x, y) dy \right) dx,$$

т.е.

$$\int_c^y \left( \int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx \right) dy = \int_a^{\infty} f(x, y) dx - \int_a^{\infty} f(x, c) dx. \quad (13.19)$$

На основании *теоремы 13.8*, функция  $\int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx$  непрерывна по  $y$ .

Поэтому дифференцируя по  $y$  обе части равенства (13.19) и используя теорему **Барроу**, получим

$$\int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx = \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right)'_y,$$

что равносильно формуле (13.18). □

**Пример 13.6.** Рассмотрим интеграл

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-px}}{xe^x} dx, \quad (13.20)$$

где  $p \geq 0$ . Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-px}}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{px}{x} = p < \infty,$$

то этот интеграл является несобственным интегралом, только 1-го рода.

При  $x \rightarrow +\infty$  и  $p \geq 0$  имеем

$$\left| \frac{1 - e^{-px}}{xe^x} \right| \approx \frac{1}{xe^x},$$

а поэтому сходимость интеграла (13.20) очевидна.

Далее

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1 - e^{-px}}{xe^x} \right) = \frac{xe^{-px}}{xe^x} = \frac{1}{e^{(p+1)x}}. \quad (13.21)$$

Для любого  $p \geq 0$  имеем

$$\frac{1}{e^{(p+1)x}} \leq \frac{1}{e^x},$$

а так как интеграл  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$  сходится (поскольку он равен единице), то, на

основании признака Вейерштрасса интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{(p+1)x}}$  сходится равномерно

относительно параметра  $p$  на любом конечном отрезке изменения  $p$ .

Таким образом, условия теоремы 13.10 выполнены, и поэтому, используя (13.21), получим

$$\Phi'(p) = \int_0^{\infty} e^{-(p+1)x} dx = \frac{e^{-(p+1)x}}{p+1} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p+1},$$

откуда

$$\Phi(p) = \ln(p+1) + C \quad (13.22)$$

Из (13.20) непосредственно следует, что  $\Phi(0) = 0$ , а значит из (13.22) получим

$$0 = \ln 1 + C,$$

т.е.  $C = 0$ . Итак:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-px}}{xe^x} dx = \ln(p+1)$$

При получении этого результата мы предполагали, что  $p \geq 0$ . Легко проверить, что этот результат верен и при  $p > -1$ .

**Пример 13.7.** Возьмем интеграл  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx$ , где  $a > 0$  (при  $a < 0$  интеграл, очевидно, расходится).

В качестве параметра возьмем, например,  $b$ , хотя можно было взять и  $a$ . Итак пусть

$$\Phi(b) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx.$$

Отсюда формально имеем:

$$\Phi'(b) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \left( \frac{\sin bx}{x} \right)' dx = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx.$$

Поскольку  $|\cos bx| \leq 1$ , а интеграл  $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx$  сходится (при  $a > 0$ ), то

интеграл  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx$  сходится равномерно относительно параметра  $b$ .

Следовательно, действительно

$$\Phi'(b) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx.$$

Но

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{(a+bi)x} dx = \operatorname{Re} \frac{e^{(-a+bi)x}}{-a+bi} \Big|_0^{\infty} = \operatorname{Re} \frac{1}{a-bi} = \operatorname{Re} \frac{a+bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

Итак,

$$\Phi'(b) = \frac{a}{a^2+b^2},$$

откуда

$$\Phi(b) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + C.$$

Но  $C = \Phi(0) = 0$ , так что  $\Phi(b) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ .

Предположим, что  $b > 0$ . Тогда

$$\operatorname{Lim}_{a \rightarrow +0} \Phi(b) = \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx,$$

т.е.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \operatorname{Lim}_{a \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, если  $b > 0$ , то

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (13.23)$$

Эту формулу (мы ее используем позже) называют интегралом Эйлера-Дирихле.

**Примечание.** Рассмотренная теория интегралов, зависящих от параметра, легко переносится на случай двух и большего чисел независимых параметров, т.е. на интегралы вида:

$$\Phi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx. \quad (13.24)$$

Например, в случае двух параметров вместо интеграла (13.8) мы имеем дело с интегралом вида

$$\Phi(y, z) = \int_a^{\infty} f(x, y, z) dx,$$

где, например,  $c \leq y \leq d$ ,  $f \leq z \leq h$ . В этом случае в формулировках и доказательствах приведенных выше теорем следует заменить отрезок  $[c, d]$  оси  $0y$  некоторым  $n$ -мерным параллелепипедом в пространстве точек  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

В частности, к случаю двух независимых параметров  $s$  и  $\omega$  сводится случай комплексного параметра  $p = s + \omega i$ . Таким образом, все рассмотренные теоремы можно считать доказанными и для интегралов вида

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} f(x, p) dx,$$

где  $p$  – комплексный параметр. Интеграл такого вида составляет содержание одного из важнейших разделов инженерной математики “Операционное исчисление”.

## 7. О других признаках равномерной сходимости несобственных интегралов по параметру

Признак Вейештрасса (теорема 13.4) является наиболее простым признаком равномерной сходимости несобственных интегралов по параметру (в сущности, он “списан” с соответствующего признака Вейерштрасса для функционального ряда). Можно доказать, хотя и более сложным образом, следующее утверждение.

**Теорема 13.12.** (Признак Дирихле). Пусть имеется интеграл

$$\Phi(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)g(x, y)dx, \quad (13.25)$$

Где  $y \in E$ , и пусть:

1. При всех  $y \in E$  функции  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  и  $\frac{\partial g}{\partial x}$  непрерывны по  $x$  при всех  $x \geq a$ ;

2. Функция  $F(x, y) = \int_a^x f(x, y)dx$  при любом  $y \in E$  ограничена в промежутке  $[a, +\infty)$ ;

3.  $\frac{\partial g}{\partial x} \leq 0$  при всех  $y \in E$  и всех  $x \geq a$ ;

4. Существует функция  $\psi(x)$ , непрерывная в промежутке  $[a, +\infty)$  и такая, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0 \text{ и } |g(x, y)| \leq \psi(x) \text{ для всех } y \in E \text{ и } x \geq a.$$

Тогда интеграл (13.25) сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $E$ .

**Пример 13.8.** Пусть имеется интеграл  $\Phi(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$ . В нем функция  $\sin x$  есть первообразная для  $\cos x$ , а при  $x \geq 1$ ,  $y \geq 0$  будет

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-xy}}{x} \right) = -\frac{e^{-xy}}{x^2} (1 + xy) < 0; \quad \frac{e^{-xy}}{x} \leq \frac{1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Все условия **теоремы 13.12** выполнены, а значит интеграл (13.25) сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $E = [0, +\infty)$ .

Существуют и некоторые другие признаки равномерной сходимости несобственных интегралов по параметру.

## 8. Другие виды несобственных интегралов, зависящих от параметра

До сих пор мы рассматривали зависящие от параметра несобственные интегралы 1-го рода, т.е. интегралы с бесконечными пределами. Можно теперь иметь дело с интегралами вида

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \tag{13.26}$$

где  $[a, b]$  – конечный отрезок, но функция  $f(x, y)$  имеет на множестве  $E$  одну или несколько точек, в котором она обращается в бесконечность. Примером может служить интеграл:

$$\int_0^1 \frac{e^{-xy}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

Для интеграла вида (13.26) точно так же можно ввести понятие равномерной относительно параметра сходимости, а также сформулировать и доказать теоремы, аналогичные рассмотренным для интегралов вида (13.8). Наконец, можно рассмотреть “объединенный” случай, когда в интеграле (13.26) может быть  $b = +\infty$ , а в промежутке  $[a, +\infty)$  функция  $f(x, y)$  имеет одну или несколько особых точек. В этом случае интеграл (13.26) представляют в виде суммы нескольких несобственных интегралов 1-го и 2-го рода.



## 9. Гамма-функция и ее основные свойства

Рассмотрим интеграл  $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$ , где  $p$  – некоторое вещественное

число. Если  $x$  велико, то

$$e^{-x} x^{p-1} = \frac{x^{p-1}}{e^x} < \frac{x^{p-1}}{x^{p+1}} = \frac{1}{x^2},$$

а так как  $2 > 1$ , то данный интеграл как несобственный интеграл 1-го рода сходится.

Однако, при  $p < 1$  этот интеграл является несобственным интегралом и 2-го рода, так как при  $p < 1$  в точке  $x = 0$  будет  $e^{-x} x^{p-1} = \infty$ , т.е.  $x = 0$  – особая точка подынтегральной функции. При этом, если  $x \rightarrow +0$ , то  $e^{-x} x^{p-1} \approx \frac{1}{x^{1-p}}$ . Если  $1 - p < 1$ , т.е. если  $p > 0$ , то интеграл сходится и как несобственный интеграл 2-го рода.

Итак, учитывая, что при  $p \geq 1$  рассматриваемый интеграл есть несобственный интеграл только 1-го рода, заключаем, что данный интеграл сходится при всех  $p > 0$ . При этих  $p$  он является функцией параметра  $p$ . Эта функция называется гамма-функцией и обозначается  $\Gamma(p)$ . Таким образом, по определению (при  $p > 0$ )

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx. \quad (13.27)$$

Например, при  $p = 1$  имеем

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Далее,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int_0^{\infty} e^{-(\sqrt{x})^2} d(\sqrt{x}) = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

(мы используем ранее известный результат для интеграла Пуассона).

Заменим  $p$  в формуле (13.27) на  $p + 1$ . Получим, интегрируя по частям

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} -e^{-x} x^p dx = \left| \begin{matrix} u=x^p, dv=e^{-x} dx \\ du=px^{p-1} dx, v=-e^{-x} \end{matrix} \right| = x^p e^{-x} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx.$$

Поскольку  $p > 0$ , то внеинтегральное слагаемое равно нулю, а значит

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \quad (13.28)$$

Эта формула выражает т.н. основное свойство гамма-функции. В частности, из нее находим

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 3!$$

и вообще при любом натуральном  $n$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Последняя формула позволяет обобщить понятие факториала на случай любого числа  $p > -1$  следующим образом

$$p! = \Gamma(p+1)$$

Например,

$$0! = \Gamma(1) = 1.$$

(этот результат использовался нами еще на первых занятиях).

Далее,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

## 10. Формула Стирлинга

Мы уже видели, что при  $p > -1$  будет

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx.$$

Исследуем поведение этой величины при  $p \rightarrow +\infty$ . Для этого совершим в интеграле замену переменной по формуле  $x = p(1+\alpha)$ . Получим

$$\Gamma(p+1) = \int_{-1}^{\infty} e^{-p(1+\alpha)} p^p (1+\alpha)^p p d\alpha = e^{-p} p^{p+1} \int_{-1}^{\infty} e^{-p\alpha} (1+\alpha)^p d\alpha.$$

Последний интеграл для кратности обозначим через  $I(p)$ . Имеем

$$I(p) = \int_{-1}^{\infty} \left( e^{-\alpha + \ln(1+\alpha)} \right)^p d\alpha.$$

Положив

$$u(\alpha) = \alpha - \ln(1+\alpha),$$

будем иметь

$$I(p) = \int_{-1}^{\infty} e^{-pu(\alpha)} d\alpha. \quad (13.29)$$

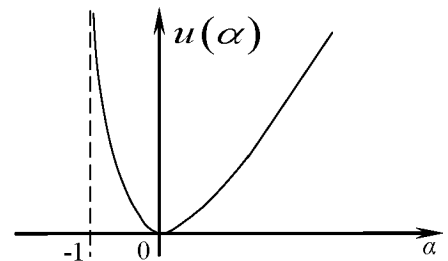


Рис. 13.4

Легко видеть, что график функции  $u(\alpha)$  имеет вид, изображенный на рис. 13.4. Но тогда, при  $p > 0$  вид графика функции  $e^{-pu(\alpha)}$  будет такой, как указано на рис. 13.5. При этом если  $p \rightarrow +\infty$ , то пик этого графика, сохраняя высоту, равную единице, неограниченно суживается. Поэтому основной вклад в интеграл (13.29) дает некоторый малый отрезок  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ . Но на этом промежутке будет

$$u(\alpha) = a - \left( \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + \dots \right) = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{3} + \dots \approx \frac{\alpha^2}{2}.$$

Функция же  $e^{-p\frac{\alpha^2}{2}}$  (рис. 13.6) имеет при больших  $p$  также узкий пик при  $a = 0$ , а значит

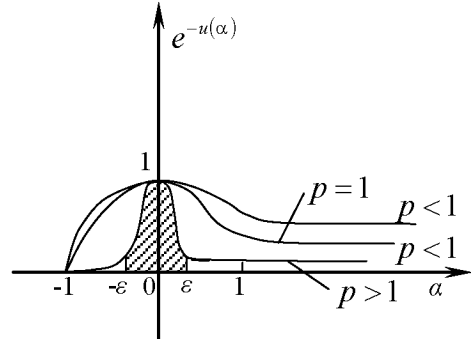


Рис. 13.5

основной вклад в интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$  дает малый отрезок  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ .

Итак, получаем цепочку приближенных равенств (тем более точных, чем больше  $p$ ):

$$\int_{-1}^{\infty} e^{-pu(\alpha)} d\alpha \approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-pu(\alpha)} d\alpha \approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-p\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \approx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$$

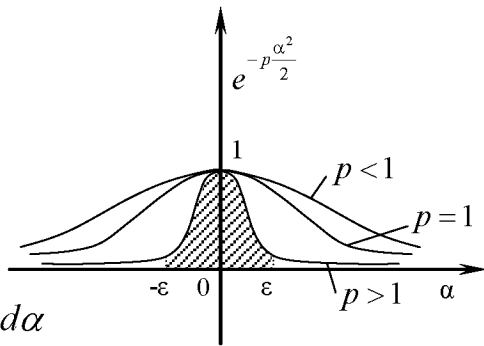


Рис. 13.6

Но

$$\int_{-1}^{\infty} e^{-p\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{p}{2}}\alpha\right)^2} d\left(\sqrt{\frac{p}{2}}\alpha\right) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{p}},$$

а значит при больших  $p$  будет  $\int_{-1}^{\infty} e^{-pu(\alpha)} d\alpha = \sqrt{\frac{2\pi}{p}}$ .

Способ получения последнего приближенного равенства есть одна из разновидностей общего метода, называемого методом перевала.

Итак, если  $p$  велико, то

$$\Gamma(p+1) \approx e^{-p} p^{p+1} \sqrt{\frac{2\pi}{p}},$$

т.е.

$$\Gamma(p+1) \approx e^{-p} p^p \sqrt{2\pi p}. \quad (13.30)$$

Если  $p = n$ , где  $n$  – натуральное число, то приходим к т.н. формуле Стирлинга

$$n! = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n},$$

позволяющей приближенно вычислять большие числа. Ее относительная погрешность тем меньше, чем больше  $n$ . Например, при  $n=100$  относительная погрешность формулы Стирлинга составляет 0,08%.

*Примечание.* Пусть имеются функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , такие, что

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , т.е. такие, что при  $x \rightarrow \infty$  будет  $f(x) \approx g(x)$ , а значит

$f(x) = g(x) + o(g(x))$ . Практически это значит, что чем больше  $x$  тем точнее равенство  $f(x) \approx g(x)$ . В этом случае функцию  $g(x)$  называют асимптотическим представлением функции  $f(x)$  на бесконечности. Например, если  $x \rightarrow +\infty$ , то  $x^4 + x \ln x \approx x^4$ .

В связи с этим формулу (13.30) называют асимптотической формулой для гамма-функции.

Очевидно, что для каждой функции  $f(x)$  можно построить бесконечное множество функций  $g(x)$ . Наиболее удобным следует считать ту, при которой функция  $g(x)$  вычисляется наиболее просто.

## 11. Производная гамма-функции

Из формулы (13.27) формально находим

$$\Gamma'(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} \ln x dx. \quad (13.31)$$

Для доказательства справедливости этой формулы достаточно проверить, что при  $D < \delta \leq p \leq \rho < \infty$  интеграл (13.31) сходится равномерно относительно параметра  $p$ .

Имеем при  $x > 1$

$$\left| e^{-x} x^{p-1} \ln x \right| < e^{-x} x^{p-1} x = e^{-x} x^p \leq e^{-x} x^p.$$

Но интеграл  $\int_{-1}^{\infty} e^{-x} x^p dx$  сходится при любом  $p$ , а значит интеграл (13.31), как несобственный интеграл 1-го рода, сходится равномерно относительно  $p$ .

Пусть теперь  $x < 1$ . Поскольку  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k \ln x = 0$  при любом  $k > 0$ , то при любом  $k > 0$  и при  $x < 1$  будет  $|\ln x| \leq \frac{1}{x^k}$ . В частности, можно считать, что  $k < \delta$ . Поэтому

$$\left| e^{-x} x^{p-1} \ln x \right| = \frac{|\ln x|}{e^x x^{1-p}} \leq \frac{|\ln x|}{e^x x^{1-\delta}} \leq \frac{1}{e^x x^{1-\delta}} \cdot \frac{1}{x^k} = \frac{1}{e^x x^{1-(\delta-k)}}.$$

Но если  $x \rightarrow +0$ , то

$$\frac{1}{e^x x^{1-(\delta-k)}} \approx \frac{1}{x^{1-(\delta-k)}},$$

а так как интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-(\delta-x)}}$  сходится, то интеграл (13.31) как несобственный интеграл 2-го рода сходится равномерно относительно  $p$ .

Итак, мы показали, что функция  $\Gamma(p)$  дифференцируема при любом  $p > 0$ , и ее производная может быть вычислена по формуле (13.31).

## 12. Бэ́та-функция

Бэ́та-функция определяется следующей формулой:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad (13.32)$$

где  $p > 0$ ,  $q > 1$ . Если  $p \geq 1$ ,  $q \geq 1$ , то интеграл (13.32) собственный. Если же  $p < 1$ , то интеграл есть несобственный интеграл 2-го рода, причем его сходимость очевидна. То же относится и к случаю, когда  $q < 1$ .

Произведем в интеграле (13.32) замену переменной по формуле  $x = 1 - t$ . Получим

$$B(p, q) = - \int_{+1}^0 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt = \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt,$$

т.е.

$$B(p, q) = B(q, p), \quad (13.33)$$

так что бэ́та-функция симметрична относительно своих аргументов.

Далее, из (13.32) имеем при  $q > 1$

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 (1-x)^{q-1} d\left(\frac{x^p}{p}\right) = \\ &= \frac{1}{p} (1-x)^{q-1} x^p \Big|_0^1 + \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx = \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx \end{aligned}$$

Но

$$x^p (1-x)^{q-2} = x^{p-1} (1-x)^{q-2} (1-(1-x)) = x^{p-1} (1-x)^{q-2} - x^{p-1} (1-x)^{q-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
B(p, q) &= \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-2} dx - \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \\
&= \frac{q-1}{p} B(p, q-1) - \frac{q-1}{p} B(p, q).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{p+q-1}{p} B(p, q) = \frac{q-1}{p} B(p, q-1),$$

а значит

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1)$$

и, в силу (13.33), аналогично

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q). \quad (13.34)$$

Пусть  $q=n$ , где  $n$  – натуральное число. Тогда, последовательно применяя формулу (13.34), будем иметь

$$B(p, n) = \frac{n-1}{p+n-1} \cdot \frac{n-2}{p+n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{p+1} B(p, 1).$$

Но

$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p},$$

а поэтому

$$B(p, n) = \frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2) \cdot \dots \cdot (p+n-1)}.$$

В частности, если  $p$  есть натуральное число  $m$ , то

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)(m+2) \cdot \dots \cdot (m+(n-1))},$$

или

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Но мы видели, что  $(m-1)! = \Gamma(m)$ ,  $(n-1)! = \Gamma(n)$ . Следовательно, (13.34) можно переписать так:

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Можно показать, что при произвольных  $p$  и  $q$  (не обязательно целых) последняя формула остается в силе, т.е. при любом  $p > 0$ ,  $q > 0$ , будет

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

## XIV. Основы математической теории поля

### 1. Понятие скалярного поля

Скалярным полем называют часть пространства, в каждой точке которого задана некоторая скалярная величина. Примерами могут служить: поле температур внутри нагретого тела, поле давлений жидкости в некотором сосуде, поле плотностей в некотором объеме газа и т.п.

Отнесем поле к конкретной системе координат  $Oxyz$ . Рассматриваемую в ней скалярную величину будем обозначать  $u(x, y, z)$ .

Совокупность точек поля, в которых поле  $u(x, y, z)$  имеет постоянное значение  $C$ , называется поверхностью уровня данного поля.

Очевидно, ее уравнение:

$$u(x, y, z) = C$$

Придавая константе  $C$  всевозможные значения, получим семейство поверхностей уровня.

**Пример 14.1.** Поверхностями уровня поля плотностей земной атмосферы являются – в первом приближении – концентрические сферы с центром в центре Земли. Чем больше радиус сферы, тем, очевидно, меньше  $C$ . (рис. 14.1)

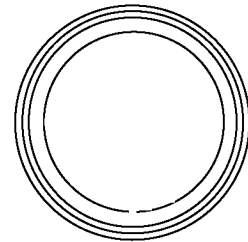


Рис.14.1

**Пример 14.2.** Поверхностями уровня поля гидростатического давления воды в сосуде являются горизонтальные плоскости. Чем больше глубина плоскости, тем больше  $C$ . (рис. 14.2)

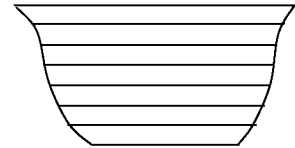


Рис.14.2

**Пример 14.3.** Возьмем некоторое абстрактное поле

$$u = \frac{z}{x^2 + y^2}.$$

Его поверхности уровня имеют уравнение

$$\frac{z}{x^2 + y^2} = C,$$

т.е.

$$z = C(x^2 + y^2).$$

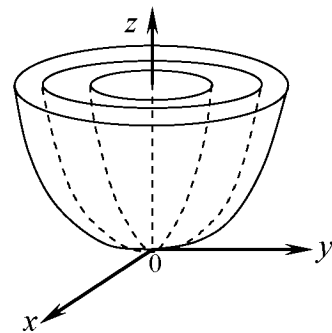


Рис. 14.3

Это – семейство параболоидов вращения с общей осью  $Oz$ . Чем «уже» параболоид, тем больше  $C$ . (рис. 14.3)

## 2. Производная скалярного поля в данном направлении

Пусть поле задано функцией  $u(x, y, z)$ . Возьмем в нем некоторую фиксированную точку  $M(x_0, y_0, z_0)$  и «текущую» точку  $M(x, y, z)$  (рис.14.4). Составим разность

$$\Delta u(M_0) = u(M) - u(M_0),$$

т.е.

$$\Delta u(x_0, y_0, z_0) = u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0).$$

Обозначим  $\Delta \ell = |\overline{M_0 M}|$ , и рассмотрим отношение

$\frac{\Delta u}{\Delta \ell}$ . Оно равно средней скорости изменения поля на отрезке  $M_0 M$ . Пусть теперь  $\Delta \ell \rightarrow 0$ . Если

существует  $\lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta u(M_0)}{\Delta \ell}$ , то он называется

производной поля  $u(M)$  в точке  $M_0$  в направлении  $\overline{M_0 M}$ , и обозначается  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell}$ . С физической точки зрения эта величина, очевидно, представляет собой скорость изменения поля в точке  $M_0$  в направлении точки  $M$ .

Введем обозначения:

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, \Delta z = z - z_0$$

Тогда

$$\Delta x = \Delta \ell \cos \alpha, \Delta y = \Delta \ell \cos \beta, \Delta z = \Delta \ell \cos \gamma$$

где  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  – направляющие косинусы  $\overline{M_0 M}$ .

Предположим, что функция  $u(x, y, z)$  во всех точках поля имеет непрерывные частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u}{\partial z}$ . Тогда эта функция дифференцируема всюду в поле, а это значит, что

$$\Delta u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \Delta z + o(\Delta \ell)$$

Отсюда,

$$\frac{\Delta u(M_0)}{\Delta \ell} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta \ell} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta \ell} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta \ell} + \frac{o(\Delta \ell)}{\Delta \ell},$$

т.е.

$$\frac{\Delta u(M_0)}{\Delta \ell} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos \gamma + \frac{o(\Delta \ell)}{\Delta \ell}. \quad (14.1)$$

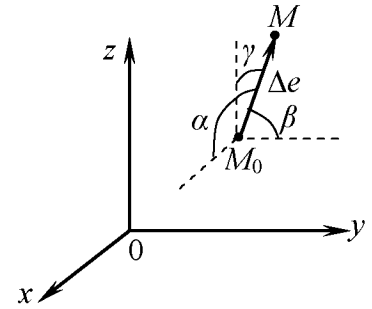


Рис. 14.4



Если  $\Delta\ell \rightarrow 0$ , то, учитывая, что  $\lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{o(\Delta\ell)}{\Delta\ell} = 0$ , получим в пределе из равенства (14.1)

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos \gamma \quad (14.2)$$

Итак, мы не только доказали существование производной  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell}$  при сделанных предположениях, но и вывели формулу для ее вычисления.

**Пример 14.4.** Вычислить производную поля  $u = x^3 - 2y^2 + 4yz$  в точке  $M_0(1, 2, -1)$  в направлении вектора  $\overline{M_0M_1}$ , где  $M_1(3, 1, 1)$ .

**Решение.** Вычислим частные производные функции  $u$ , т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4y + 4z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 4y,$$

а, значит

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = -12, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 8$$

Далее, в данном случае  $\Delta x = 2$ ,  $\Delta y = -1$ ,  $\Delta z = 2$ , а поэтому

$$\Delta \ell = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3,$$

так что

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, на основании формулы (14.2) получим

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = 3 \frac{2}{3} + (-12) \left( -\frac{1}{3} \right) + 8 \frac{2}{3} = \frac{34}{3}$$

**Примечание.** Положим  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \gamma = 90^\circ$ . Тогда из формулы (14.2) следует, что  $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Таким образом, частную производную

$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}$  можно теперь рассматривать, как производную поля

$u(M)$  в положительном направлении оси  $Ox$ . Аналогичное замечание

касается и производных  $\frac{\partial u}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u}{\partial z}$ . Следовательно, частные производные

функции трех переменных можно считать теперь частными случаями производной по направлению, когда направление дифференцирования параллельно направлениям координатных осей.

### 3. Градиент скалярного поля

Выше отмечалось, что производные поля в одной и той же точке, но в разных направлениях, вообще говоря, различны. Возьмем точку  $M$  в поле  $u(x, y, z)$  и выясним, в каком направлении (т.е. при каких углах  $\alpha$ ,  $\beta$ , и  $\gamma$ )

величина  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell}$  будет наибольшей. С этой целью введем вектор

$$\vec{N} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \vec{k}, \quad (14.3)$$

а также вектор  $\vec{\tau} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$ , являющийся ортом искомого направления. Тогда формула (14.2) примет вид

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = (\vec{N}, \vec{\tau})$$

а так как  $|\vec{\tau}| = 1$ , то

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = |\vec{N}| \cos(\vec{N}, \vec{\tau}) \quad (14.4)$$

Отсюда следует, что величина  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell}$  примет наибольшее значение, если угол между  $\vec{N}$  и  $\vec{\tau}$  равен нулю, т.е.  $(\vec{N}, \vec{\tau}) = 0$ , т.е.  $\vec{\tau} \uparrow \vec{N}$ , а это значит, что искомым направлением является направление вектора  $\vec{N}$ . Таким образом, в данной точке  $M_0$  поле  $u(x, y, z)$  наиболее быстро возрастает в направлении вектора  $\vec{N}$ , определяемого формулой (14.3). Этот вектор называется градиентом скалярного поля  $u(M)$  в данной точке  $M_0$  и обозначается  $\text{grad } u(M_0)$ .

Итак, по определению,

$$\text{grad } u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \vec{k} \quad (14.5)$$

Напомним, что касательная плоскость к поверхности  $u(x, y, z) = C$ , (а это – поверхность уровня поля  $u(x, y, z)$ ) в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  имеет уравнение

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} (z - z_0) = 0.$$

Следовательно, величины  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial z}$  есть проекции нормального вектора этой плоскости. Поэтому равенство (14.5) означает, что градиент поля направлен по нормали к поверхности уровня поля в данной точке.

Формулу (14.4) можно теперь переписать так

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = |\text{grad } u(M_0)| \cos \left( \vec{\tau}^\wedge, \text{grad } u(M_0) \right). \quad (14.6)$$

Отсюда следует, что производная поля в данном направлении  $\vec{\ell}$  равна проекции градиента поля на это направление (рис. 14.5).

В частности, если направление  $\vec{\ell}$  совпадает с направлением градиента, то  $\left( \vec{\tau}^\wedge, \text{grad } u(M_0) \right) = 0$ , а значит, в этом случае

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = |\text{grad } u(M_0)|,$$

т.е.

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = \sqrt{\left( \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \right)^2}.$$

Итак, из формального определения (14.5) следует, что градиент скалярного поля – это вектор, направленный в сторону наиболее быстрого возрастания поля и равный по длине скорости этого возрастания.

Если же направление лежит в касательной плоскости к поверхности уровня поля, то  $\left( \vec{\tau}^\wedge, \text{grad } u(M_0) \right) = 90^\circ$ , и из формулы (14.6) получим, что  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = 0$ .

Этот результат естественен, так как вдоль поверхности уровня поле сохраняет постоянное значение, т. е. имеет скорость изменения равную нулю.

Из последних рассуждений вытекает, что, хотя производная по направлению и градиент скалярного поля выражаются в декартовых координатах формулами (14.2) и (14.5), они не зависят от выбора системы координат, т. е. являются внутренними характеристиками поля. Такие характеристики называют инвариантами поля.

**Пример 14.5.** Возьмем поле  $u = x^3 - 2y^2 + 4yz$  из предыдущего примера и ту же точку  $M_0(1, 2, -1)$ . Тогда, как мы видели,

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = -12, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 8,$$

а, значит, из формулы (14.5) следует, что

$$\text{grad } u(M_0) = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Отсюда

$$|\text{grad } u(M_0)| = \sqrt{9 + 144 + 64} = \sqrt{217}.$$

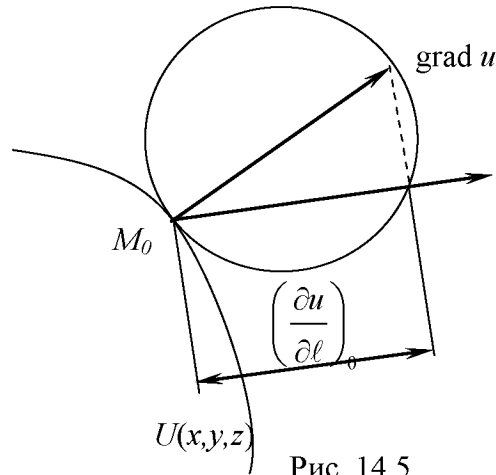


Рис. 14.5

Пусть  $\vec{\ell}$  – направление из точки  $M_0$  к точке  $M(3,1,1)$ . Тогда (см. предыдущий пример),  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = \frac{34}{3}$ , а значит,

$$\cos\left(\vec{\ell}, \text{grad } u(M_0)\right) = \frac{\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell}}{|\text{grad } u(M_0)|} = \frac{34}{3\sqrt{217}} \approx 0,77.$$

Отсюда следует, что в точке  $M(1,2,-1)$  направление к точке  $M(3,1,1)$  составляет с направлением градиента поля угол, приближенно равный  $39^\circ 36'$ .

#### 4. Свойства градиента

Градиент скалярного поля обладает следующими свойствами:

1.  $\text{grad}(u_1 + u_2) = \text{grad } u_1 + \text{grad } u_2$   
(следует помнить, что стоящая справа сумма – векторная).
2. Если  $c = \text{const}$ , то  $\text{grad } cu = c \text{grad } u$
3.  $\text{grad}(u_1 u_2) = u_1 \text{grad } u_2 + u_2 \text{grad } u_1$
4. Если  $f(u)$  – дифференцируемая функция, то  $\text{grad } f(u) = f'(u) \text{grad } u$ .

Последняя формула позволяет найти градиент сложной функции. Свойства 1 и 2 непосредственно следуют из формулы (14.5), а свойства 3 и 4 легко проверяются. Например, имеем в силу (14.5)

$$\text{grad } f(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(u)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(u)}{\partial z} \vec{k}.$$

Но, согласно формуле для производной сложной функции,

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(u)}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(u)}{\partial z} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial z}.$$

А значит,

$$\text{grad } f(u) = f'(u) \left( \frac{\partial f(u)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(u)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(u)}{\partial z} \vec{k} \right) = f'(u) \text{grad } u,$$

т.е. свойство 4 доказано.

Получим еще одну формулу, полезную при решении задач.

Пусть  $u$  – поле расстояний от начала координат, т. е. пусть  $u = r$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

и, аналогично

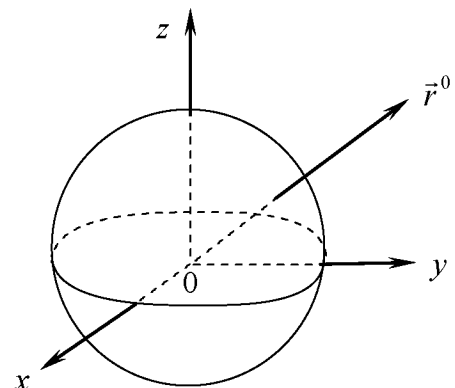


Рис. 14.6

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Поэтому

$$\text{grad } u = \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k} = \frac{\vec{r}}{r}$$

т.е.

$$\text{grad } r = \vec{r}^\circ \quad (\text{рис. 14.6}) \quad (14.7)$$

В данном случае поверхностями уровня поля являются сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$ . И то, что градиент поля направлен по нормали к поверхности уровня, является очевидным геометрическим фактором.

## 5. О плоскопараллельном поле

Скалярное поле называют плоскопараллельным, если оно не зависит от  $z$ , т.е. если оно имеет вид  $u(x, y)$ . В этом случае все сечения поля плоскостями  $z = \text{const}$  одинаковы, а поэтому можно рассматривать его только в плоскости  $xOy$ , т.е. считать поле двумерным.

Полагая  $u(x, y) = C$  и придавая затем константе  $C$  всевозможные значения, получим семейство линий уровня поля.

Введем в плоскости  $xOy$  направление  $\sigma$ , образующее угол  $\alpha$  с осью  $Ox$ . Тогда с осями  $Oy$  и  $Oz$  это направление образует углы  $\beta = 90^\circ - \alpha$  и  $\gamma = 90^\circ$ , а значит – на основании формулы (14.2) – для производной поля в точке поля  $M_0$  по направлению  $\sigma$  находим

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \sigma} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos(90^\circ - \alpha),$$

т.е.

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \sigma} = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \sin \alpha.$$

Рассуждая так же, как и в трехмерном случае, получим, что величина  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \sigma}$  становится наибольшей, если направление  $\sigma$  совпадает с направлением вектора

$$\text{grad } u(M_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \vec{j}.$$

Вектор  $\text{grad } u(M_0)$ , очевидно, нормален по отношению к линии уровня поля, проходящей через точку  $M_0$ .

Считая поле  $u(x, y)$  заданным в плоскости  $xOy$ , будем изображать

величину поля в данной точке  $(x, y)$  в виде координаты  $z$ . Тогда получим поверхность  $z = u(x, y)$ , являющуюся как бы «графиком» данного поля. Составим отношение  $\frac{\Delta u(M_0)}{\Delta \sigma}$ . Очевидно, оно равно  $\operatorname{tg} \varphi$  и представляет собой среднюю крутизну поверхности в точке  $P_0$  в направлении  $\sigma$ . Устремляя теперь  $\Delta \sigma$  к нулю, получим, что величина  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \sigma}$  представляет собой  $\operatorname{tg} \varphi$ . Эту величину называют крутизной поверхности  $z = u(x, y)$  в точке  $P_0$ . Беря различные направления  $\sigma$ , выходящие из точки  $M_0$ , будем получать различные углы  $\varphi$ , т.е. различную крутизну поверхности в одной и той же точке  $P_0$ . Если в качестве  $\sigma$  взять направление вектора  $\operatorname{gradu}(M_0)$ , то получим направление, в котором поверхность  $z = u(x, y)$  имеет в точке  $P_0$  наибольшую крутизну подъема, равную

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = |\operatorname{gradu}(M_0)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\right)^2}.$$

Таков геометрический смысл модуля градиента функции двух переменных.

## 6. Векторное поле

Векторным полем называется пространственная область, в каждой точке  $M(x, y, z)$  которой, задан некоторый вектор  $\vec{a}(x, y, z)$ .

**Пример 14.6.** Классическим примером векторного поля является поле скоростей жидкости, протекающей через некоторую область (течение предполагается стационарным, т.е. не зависит от времени).

**Пример 14.7.** Рассмотрим поле точечного заряда  $+q$  (рис. 14.7). Напряженность этого поля

равна  $E = \frac{q}{r^2}$ . Введем вектор напряженности поля

$$\vec{E} = E \cdot \vec{e}^0 = E \cdot \vec{r}^0 = \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{r^3} \vec{r}.$$

Он представляет собой силу взаимодействия заряда  $+q$  с единичным положительным зарядом, помещенным в точке  $M$ .

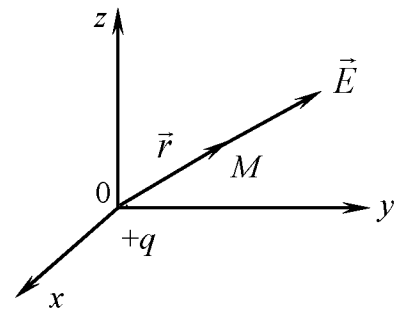


Рис. 14.7

**Пример 14.8.** Аналогично можно рассматривать поле тяготения, создаваемое материальной точкой массы  $m$ :

$$\vec{F} = f \frac{m \vec{r}}{r^3}.$$

Здесь  $f$  – постоянная тяготения.

**Пример 14.9.** Рассмотрим поле скоростей точек вращающегося твердого тела. Направим ось  $Oz$  по оси вращения (рис. 14.8). Пусть  $\vec{\omega}$  – вектор угловой скорости. Тогда известная из механики формула Эйлера  $\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$  дает

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} = \omega(-y \vec{i} + x \vec{j})$$

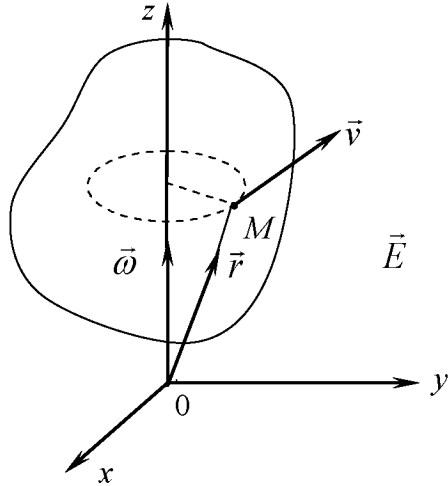


Рис. 14.8

**Пример 14.10.** Пусть по бесконечному прямолинейному проводнику течет ток плотности  $J$ , одинаковой во всех точках проводника (рис. 14.9). Направим ось  $Oz$  по проводнику в направлении тока. Пусть  $M(x, y, z)$  – произвольная точка вне

проводника. Каждый элемент тока  $\vec{J} \Delta \zeta_k$  создает в ней, согласно закона Био-Савара, магнитное поле

$$\Delta \vec{H}_k = \frac{[\vec{J}, \vec{r}_k]}{r_k^3} \cdot \Delta \zeta_k$$

Поскольку  $\vec{r}_k = x \vec{i} + y \vec{j} + (z - \zeta_k) \cdot \vec{k}$ , то

$$\begin{aligned} \Delta \vec{H}_k &= \frac{1}{\left[ x^2 + y^2 + (z - \zeta_k)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & J \\ x & y & z - \zeta_k \end{vmatrix} \Delta \zeta_k = \\ &= \frac{J(-y \vec{i} + x \vec{j})}{\left[ x^2 + y^2 + (z - \zeta_k)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \Delta \zeta_k. \end{aligned}$$

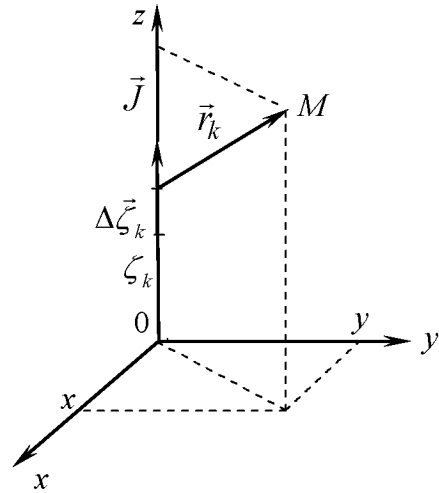


Рис. 14.9

Легко видеть, что векторы  $\Delta \vec{H}_k$ , отвечающие различным  $\Delta \zeta_k$ , коллинеарны и одинаково направлены. Поэтому при суммировании складываются их длины, и мы имеем

$$\vec{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J(-y \vec{i} + x \vec{j}) d\zeta}{\left[ x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = J(-y \vec{i} + x \vec{j}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\left[ x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Положив  $z - \zeta = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tg} t$ , получим, что

$$\zeta = z - \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tg} t, \quad d\zeta = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos^2 t} dt,$$

тогда

$$\begin{aligned} \vec{H} &= J(-y\vec{i} + x\vec{j}) \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \cdot \frac{-\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos^2 t} dt = \\ &= \frac{J(-y\vec{i} + x\vec{j})}{x^2 + y^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{J(-y\vec{i} + x\vec{j})}{x^2 + y^2} \sin t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Окончательно

$$\vec{H} = \frac{2J(-y\vec{i} + x\vec{j})}{x^2 + y^2}. \quad (14.8)$$

Пусть векторное поле задано произвольным вектором  $\vec{a}(x, y, z)$ . Линии, в каждой точке которых касательная коллинеарна вектору  $\vec{a}$ , называются векторными линиями этого поля (рис. 14.10). В случае электрического или магнитного полей их называют еще силовыми линиями, а в случае поля скоростей жидкости – линиями тока.



Рис. 14.10

Пусть  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$  – уравнение одной из векторных линий. Тогда при

каждом  $t$  вектор  $\vec{\tau} = \varphi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j} + \chi'(t)\vec{k}$  направлен по касательной к этой линии в соответствующей точке, а значит,  $\vec{\tau} \parallel \vec{a}$ , откуда следует, что

$$\frac{\varphi'(t)}{a_x(x, y, z)} = \frac{\psi'(t)}{a_y(x, y, z)} = \frac{\chi'(t)}{a_z(x, y, z)},$$

т.е.

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{a_x(x, y, z)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{a_y(x, y, z)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{a_z(x, y, z)},$$

или

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}.$$



Эти уравнения выполняются для любой векторной линии поля, т.е. мы получили систему дифференциальных уравнений 1-го порядка, интегрируя которую, найдем двухпараметрическое семейство векторных линий поля  $\vec{a}$ .

**Пример 14.11.** Найдем векторные линии поля (14.8). Имеем

$$H_x = -\frac{2J_y}{x^2 + y^2}, \quad H_y = \frac{2J_x}{x^2 + y^2}, \quad H_z = 0,$$

а значит,

$$\frac{dx}{\frac{-2J_y}{x^2 + y^2}} = \frac{dy}{\frac{2J_x}{x^2 + y^2}} = \frac{dz}{0},$$

т.е.

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Откуда

$$\begin{cases} xdx = -ydy \\ dz = 0, \end{cases}$$

и значит

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \frac{c_1^2}{2} \\ z = c_2, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c_1^2 \\ z = c_2. \end{cases}$$

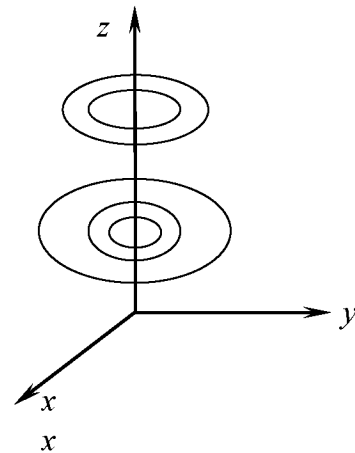


Рис.14.11

Это – семейство окружностей, «нанизанных» на ось  $Oz$  (рис. 14.11).

## 7. Поток векторного поля через поверхность

Пусть  $\vec{V}$  – поле скоростей жидкости, а  $\Sigma$  – некоторая воображаемая поверхность в поле. Тогда, как мы видели (см. главу XI), величина

$$Q = \iint_{\Sigma} (\vec{V}, \vec{d\sigma})$$

есть объем жидкости, протекающей через поверхность  $\Sigma$  за единицу времени, которая называется потоком этой жидкости через данную поверхность.

Пусть теперь  $\vec{a}(x, y, z)$  – произвольное поле. По аналогии с предыдущим результатом величину

$$Q = \iint_{\Sigma} \left( \vec{a}, \vec{d\sigma} \right)$$

называют потоком поля  $\vec{a}$  через поверхность  $\Sigma$ . Очевидно, при сложении полей алгебраически складываются их потоки, а при умножении поля на константу на эту же константу умножается и поток поля. Очевидно, что знак потока зависит от того, какое направление нормали к поверхности взято в качестве положительного.

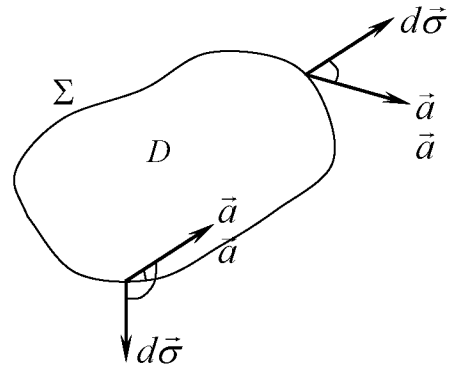


Рис. 14.12

Пусть  $\Sigma$  – замкнутая поверхность (рис. 14.12). Тогда векторы  $\vec{d\sigma}$ , как отмечалось, обычно направлены наружу по отношению к области  $D$ , ограниченной поверхностью  $\Sigma$ . Поэтому в случае «вытекания жидкости» угол

$\left( \vec{a}, \vec{d\sigma} \right)$  будет острым, а значит скалярное произведение  $\left( \vec{a}, \vec{d\sigma} \right) > 0$ . В

случае же «втекания» этот угол будет тупым, а значит  $\left( \vec{a}, \vec{d\sigma} \right) < 0$ . Итак, поток со знаком «+» отвечает вытеканию, а отрицательный поток – втеканию жидкости.

Предположим, что  $\iint_{\Sigma} \left( \vec{a}, \vec{d\sigma} \right) > 0$ . Это значит, что для области  $D$  вытекание преобладает над втеканием. Исходя из гидродинамической аналогии, можно утверждать, что в этом случае внутри области  $D$  имеются точки, дополнительно порождающие поле. Их называют источниками поля.

Если  $\iint_{\Sigma} \left( \vec{a}, \vec{d\sigma} \right) < 0$ , то в области  $D$  имеются так называемые стоки, поглощающие часть поля.

Легко видеть, что если даже  $\iint_{\Sigma} \left( \vec{a}, \vec{d\sigma} \right) > 0$ , то существование стоков в области  $D$  не исключено. Источники и стоки могут существовать одновременно, но источники в данном случае преобладают. Наоборот, если  $\iint_{\Sigma} \left( \vec{a}, \vec{d\sigma} \right) < 0$ , то преобладают стоки. Если же  $\iint_{\Sigma} \left( \vec{a}, \vec{d\sigma} \right) = 0$ , то источники и стоки в области  $D$  либо отсутствуют, либо компенсируют друг друга.

**Пример 14.12.** Рассмотрим поле точечного заряда  $+q$ , помещенного в начало координат (рис. 14.13). Окружим заряд сферой

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} (\vec{E}, \vec{d\sigma}) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\vec{E}_k, \Delta \vec{\sigma}_k) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n E_k \Delta \sigma_k = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{q}{R^2} \Delta \sigma_k = \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi q \end{aligned}$$

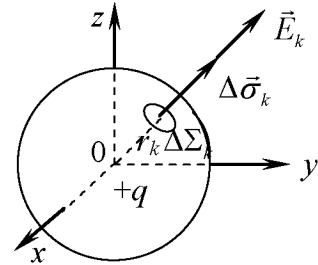


Рис. 14.13

Эта величина не зависит от радиуса сферы и всегда положительна. Это значит, что положительный электрический заряд является источником в поле  $\vec{E}$ .

**Пример 14.13.** Для заряда  $-q$ , очевидно, будем иметь

$$\oiint_{\Sigma} (\vec{E}, \vec{d\sigma}) = -4\pi q,$$

а значит, отрицательный электрический заряд является стоком в своем поле.

**Пример 14.14.** Аналогично для поля тяготения материальной точки массы  $m$  получим

$$\oiint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{d\sigma}) = -4\pi fm,$$

а значит, материальная точка также является стоком своего гравитационного поля.

## 8. Дивергенция векторного поля

Возьмем поле  $\vec{a}(x, y, z)$  и в нем – некоторую точку  $M$ . Окружим эту точку замкнутой поверхностью  $\Sigma$ , и пусть  $D$  – область, ограниченная этой поверхностью, а  $V$  – ее объем. Вычислим поток поля  $\vec{a}$  через поверхность  $\Sigma$

$$Q = \oiint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{d\sigma})$$

и составим отношение  $\frac{Q}{V}$ . Оно характеризует среднюю по области  $D$  «производительность» источников и стоков, вместе взятых.

Пусть теперь поверхность  $\Sigma$  стягивается в точку  $M$ ; при этом  $V \rightarrow 0$ . Если существует  $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{Q}{V}$ , не зависящий от способа стягивания  $\Sigma$  в точку  $M$ , то он называется дивергенцией поля  $\vec{a}$  в точке  $M$  и обозначается  $\text{div} \vec{a}(M)$ .

Итак, по определению

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\Sigma} \left( \vec{a}, \vec{d}\sigma \right)}{V}. \quad (14.9)$$

Из этого определения, в частности, следует, что дивергенция является инвариантом векторного поля.

Если  $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$ , то, очевидно, в точке  $M$  имеется источник, тем более интенсивный, чем больше  $\operatorname{div} \vec{a}(M)$ . Если же  $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$ , то в точке  $M$  – сток. Если же  $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$ , то в точке  $M$  нет ни источника, ни стока.

Таким образом, дивергенция поля в данной точке, с физической точки зрения, есть не что иное, как мощность (обильность) источника или стока, находящегося в этой точке.

Легко видеть, что  $\operatorname{div} \vec{a}$  есть скалярная величина. Поэтому можно говорить, что каждое векторное поле  $a(x, y, z)$  (удовлетворяющее условиям, сформулированным ниже), порождает скалярное поле  $\operatorname{div} a(x, y, z)$ , которое характеризует мощности источников и стоков, распределенных в этом поле.

Равенство (14.9) неудобно для вычисления дивергенции. Предположим, что проекции поля:  $a_x(x, y, z)$ ,  $a_y(x, y, z)$  и  $a_z(x, y, z)$  имеют частные производные  $\frac{\partial a_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial a_y}{\partial y}$  и  $\frac{\partial a_z}{\partial z}$ , непрерывные в области  $D$ . Тогда, применяя формулу Остроградского-Гаусса<sup>\*)</sup>, получим

$$\oiint_{\Sigma} \left( \vec{a}, \vec{d}\sigma \right) = \iiint_D \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV.$$

Теорема о среднем дает

$$\oiint_{\Sigma} \left( \vec{a}, \vec{d}\sigma \right) = \left[ \frac{\partial a_x(N)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(N)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(N)}{\partial z} \right] V,$$

где  $N$  – некоторая точка внутри области  $D$ .

Подставляя этот результат в (14.9), находим

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{V \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial a_x(N)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(N)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(N)}{\partial z} \right].$$

Но если  $\Sigma$  стягивается в точку  $M$ , то  $N \rightarrow M$ , а значит в пределе получим

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial a_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M)}{\partial z},$$

<sup>\*)</sup> Предполагается, что поверхность  $\Sigma$  удовлетворяет условиям, при которых была выведена формула Остроградского-Гаусса.

или короче

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (14.10)$$

Итак, мы доказали существование дивергенции (при сделанных предположениях) и получили удобную формулу для ее вычисления.

**Дивергенция обладает следующими свойствами:**

1.  $\operatorname{div}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \operatorname{div} \vec{a}_1 + \operatorname{div} \vec{a}_2$ .

2.  $\operatorname{div}(c\vec{a}) = c \operatorname{div} \vec{a}$ .

3. Если  $u(x, y, z)$  – скалярная функция, то

$$\operatorname{div}(u\vec{a}) = u \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{a}, \operatorname{grad} u).$$

Свойства 1 и 2 очевидны. Проверим свойство 3. В силу (14.10), имеем,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u\vec{a}) &= \frac{\partial(ua_x)}{\partial x} + \frac{\partial(ua_y)}{\partial y} + \frac{\partial(ua_z)}{\partial z} = \\ &= u \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} a_x + u \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} a_y + u \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} a_z = \\ &= u \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) + \left( a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = u \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{a}, \operatorname{grad} u) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Пример 14.15.** Пусть  $\vec{a} = \vec{r}$ , где  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . Тогда

$$\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

**Пример 14.16.** Пусть  $\vec{a} = 3x^2 y\vec{i} + (y^3 + xz)\vec{j} + xz\vec{k}$ . Вычислить дивергенцию этого поля в точке  $M = (1, -3, 2)$ . Очевидно, что

$$\operatorname{div} \vec{a} = 6xy + 3y^2 + x,$$

откуда

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = -18 + 27 + 1 = 10.$$

Итак, в точке  $M$  поле имеет источник мощностью в 10 единиц.

**Пример 14.17.** В силу свойства 3 дивергенции, учитывая также свойство 4 градиента и формулу (14.6), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[f(r)\vec{r}] &= f(r) \operatorname{div}(\vec{r}) + (\vec{r}, \operatorname{grad} f(r)) = \\ &= 3f(r) + (\vec{r}, f'(r) \operatorname{grad}(r)) = 3f(r) + f'(r) (\vec{r}, \vec{r}^0) = \\ &= 3f(r) + f'(r) \left( \vec{r}, \frac{\vec{r}}{r} \right) = 3f(r) + f'(r) \frac{r^2}{r} = 3f(r) + f'(r)r. \end{aligned}$$

В частности, при  $r \neq 0$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \left( \frac{q}{r^3} \vec{r} \right) = \frac{3q}{r^3} + \left( -\frac{3q}{r^4} \right) r = 0.$$

Этот результат очевиден и физически, так как предполагается, что вне заряда  $+q$  других зарядов нет.

### 9. Теорема Остроградского-Гаусса. Соленоидальное поле

Рассмотрим поле  $\vec{a}(x, y, z)$  и в нем – замкнутую поверхность  $\Sigma$ , окружающую область  $D$ . Тогда, считая условия формулы Остроградского-Гаусса выполненными, получим

$$\iint_{\Sigma} \left( \vec{a}, \vec{d}\sigma \right) = \iiint_D \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV.$$

Учитывая формулу (14.10), перепишем это так

$$\iint_{\Sigma} \left( \vec{a}, \vec{d}\sigma \right) = \iiint_D \operatorname{div} a dV. \quad (14.11)$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 14.1.** Поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу дивергенции этого поля по области, ограниченной данной поверхностью.

Эту теорему называют теоремой Остроградского-Гаусса. С физической точки зрения она выражает тот факт, что поток поля через замкнутую поверхность есть суммарный результат производительности всех источников и стоков, расположенных внутри этой поверхности.

При выводе формулы (14.11) предполагалось, что область  $D$  – односвязная.

Легко видеть, что теорема Гаусса-Остроградского верна и в случае, когда область  $V$  имеет две границы – внешнюю и внутреннюю (рис. 14.14), т.е. является двусвязной. При этом

под  $\iint_{\sigma} \left( \vec{a}, \vec{d}\sigma \right)$  надо подразумевать суммарный

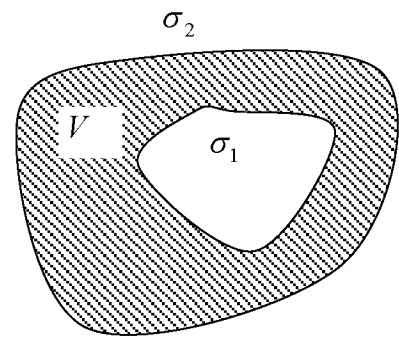


Рис. 14.14

поток через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Однако, поскольку вектор  $\vec{d}\sigma$  должен быть направлен наружу по отношению к  $V$ , то на поверхности  $\sigma_1$  его нужно направлять внутрь по отношению к  $\sigma_1$ . Поэтому формула (14.11) для данного случая запишется так:

$$\iint_{\sigma_2} (\vec{a}, \vec{d}\sigma) - \iint_{\sigma_1} (\vec{a}, \vec{d}\sigma) = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV, \quad (14.12)$$

где предполагается, что на каждой из поверхностей векторы  $\vec{d}\sigma$  направлены наружу по отношению к этим поверхностям.

Отсюда легко получается следующая

**Теорема 14.2.** Пусть в точке  $M$  имеется изолированный источник или сток. Тогда поток поля через замкнутую поверхность, окружающую точку  $M$ , не зависит от размеров и формы этой поверхности, если только внутри нее нет других

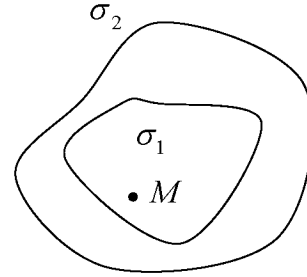


Рис. 14.15

источников или стоков.

Предположим сначала, что поверхность  $\sigma_1$  целиком лежит внутри поверхности  $\sigma_2$  (в отдельных точках она может касаться ее) (рис. 14.15). Пусть  $V$  – область между  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Тогда всюду в  $V$  будет  $\operatorname{div} \vec{a} = 0$  (благодаря отсутствию источников и стоков), а значит, в силу (14.12),

$$\iint_{\sigma_2} (\vec{a}, \vec{d}\sigma) - \iint_{\sigma_1} (\vec{a}, \vec{d}\sigma) = 0,$$

т.е.

$$\iint_{\sigma_2} (\vec{a}, \vec{d}\sigma) = \iint_{\sigma_1} (\vec{a}, \vec{d}\sigma). \quad (14.13)$$

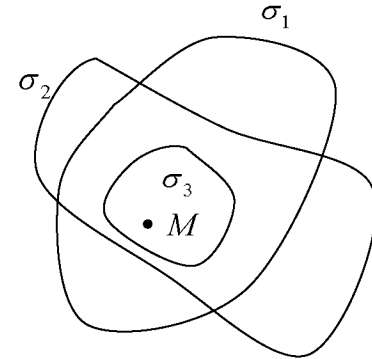


Рис. 14.16

Если же  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  пересекаются, то, беря поверхность  $\sigma_3$ , находящуюся внутри и  $\sigma_1$ , и  $\sigma_2$  (рис. 14.16), получим, по уже доказанному,

$$\iint_{\sigma_2} (\vec{a}, \vec{d}\sigma) = \iint_{\sigma_3} (\vec{a}, \vec{d}\sigma),$$

$$\iint_{\sigma_1} (\vec{a}, \vec{d}\sigma) = \iint_{\sigma_3} (\vec{a}, \vec{d}\sigma),$$

откуда снова следует (14.13).

**Примечание.** Доказанная теорема получена нами как следствие теоремы Гаусса-Остроградского. Однако, она совершенно очевидна и физически, так как, в силу отсутствия «посторонних» источников и стоков, поверхность  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  пересекает одинаковое число векторных линий (рис. 14.17).

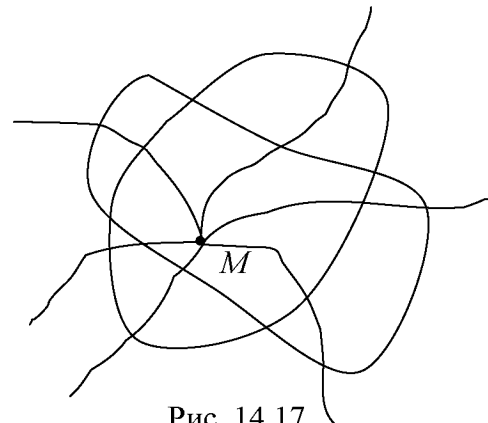


Рис. 14.17

Векторное поле называется соленоидальным (или трубчатым), если в каждой его точке дивергенция равна нулю, т.е. если в ней отсутствуют источники и стоки. Примером такого поля может служить поле  $\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r}$  вне заряда  $+q$ .

Из теоремы Остроградского-Гаусса легко следует, что для того чтобы поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы его поток через любую замкнутую поверхность, принадлежащую полю вместе с ограниченной ею областью, был равен нулю.

### 10. Циркуляция и ротор векторного поля

Возьмем произвольное поле  $\vec{a}(x, y, z)$  и в нем – некоторую дугу  $\overset{\cup}{MN}$ . Интеграл

$$\int_{\overset{\cup}{MN}} (\vec{a}, \vec{ds})$$

называют линейным интегралом поля  $\vec{a}$  по дуге  $\overset{\cup}{MN}$ . В случае силового поля он представляет собой работу этого поля на пути  $\overset{\cup}{MN}$ .

Заменим теперь дугу  $\overset{\cup}{MN}$  замкнутым контуром  $L$ . Величину

$$C = \oint_L (\vec{a}, \vec{ds})$$

называют циркуляцией поля  $\vec{a}$  по контуру  $L$ .

Пусть  $\Sigma$  – некоторая поверхность, натянутая на контур  $L$  (рис.14.18), а  $\sigma$  – ее площадь. Возьмем на  $\Sigma$  произвольную точку  $M$ . Вычислим циркуляцию  $C$  поля  $\vec{a}$  по контуру  $L$  и составим отношение  $\frac{C}{\sigma}$ .

Предположим теперь, что контур  $L$  стягивается в точку  $M$ ; при этом  $\sigma \rightarrow 0$ .

Пусть существует предел  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{C}{\sigma}$ , не зависящий от

способа стягивания контура  $L$  в точку  $M$ .

Данный предел можно рассматривать как проекцию некоторого вектора на нормаль к поверхности  $\Sigma$  в точке  $M$ ; при этом вектор нормали  $\vec{d\sigma}$  направляется по ту сторону поверхности  $\Sigma$ , откуда обход контура  $L$  при вычислении циркуляции виден совершающимся против часовой стрелки.

Этот вектор, проекция которого на нормаль к поверхности  $\Sigma$  в точке  $M$

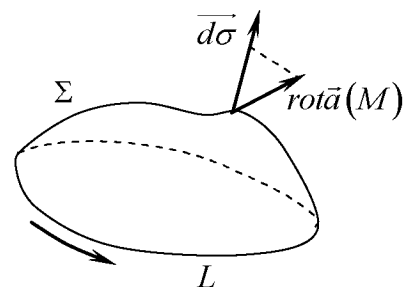


Рис. 14.18



равна  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{C}{\sigma}$  (см. замечание дальше), называется ротором (или вихрем поля  $\vec{a}$  в точке  $M$  и обозначается  $rot\vec{a}(M)$ ). Итак, по определению,  $rot\vec{a}(M)$  – это вектор, для которого

$$\left( rot\vec{a}(M) \right)_n = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\oint_L(\vec{a}, \vec{ds})}{\sigma} \quad (14.14)$$

Из этого определения, в частности, следует, что ротор поля (если он существует) является инвариантом этого поля.

Получим из выражения (14.14) формулу, удобную для вычисления ротора. Для этого предположим, что проекции поля  $a_x(x, y, z)$ ,  $a_y(x, y, z)$ , и  $a_z(x, y, z)$  и контур  $L$  удовлетворяют условиям, при которых была выведена формула Стокса (12.33). Тогда

$$\oint_L(\vec{a}, \vec{ds}) = \iint_{\Sigma} \left[ \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma \quad (14.15)$$

Введем вектор  $\vec{N}^0 = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$ , являющийся, очевидно, ортом вектора  $\vec{ds}$ , а также вектор

$$\vec{b}(x, y, z) = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Тогда получим из (14.15)

$$\oint_L(\vec{a}, \vec{ds}) = \iint_{\Sigma} (\vec{b}, \vec{N}^0) d\sigma.$$

Но

$$(\vec{b}, \vec{N}^0) = |\vec{b}| \cdot 1 \cos(\vec{b}, \vec{d\sigma}) = b_n,$$

где  $b_n$  – проекция вектора  $\vec{b}$  на направление вектора  $\vec{d\sigma}$ .

Следовательно,

$$\oint_L(\vec{a}, \vec{ds}) = \iint_{\Sigma} b_n d\sigma,$$

или, по теореме о среднем,

$$\oint_L(\vec{a}, \vec{ds}) = b_n(P) \sigma,$$

где  $P$  – некоторая точка поверхности  $\Sigma$ .

Подставляя этот результат в равенство (14.14), получим

$$\left[ rot\vec{a}(M) \right]_n = \lim_{\sigma \rightarrow 0} b_n(P). \quad (14.16)$$

Если поверхность  $\Sigma$  стягивается в точку  $M$ , то и  $P \rightarrow M$ , а так как вектор  $\vec{b}$ , в силу предположенного, непрерывен на поверхности  $\Sigma$ , то в пределе из выражения (14.16) будем иметь

$$[\text{rot}\vec{a}(M)]_n = b_n(M). \quad (14.17)$$

Из равенства проекций двух векторов на некоторое направление, конечно, не следует равенство самих векторов. Но ведь  $\Sigma$  – произвольная поверхность, содержащая точку  $M$ . Поэтому соотношение (14.17) фактически означает, что проекции векторов  $\vec{b}(M)$  и  $\text{rot}\vec{a}(M)$  на любое направление одинаковы, а отсюда следует, что  $\vec{b}(M) = \text{rot}\vec{a}(M)$ , т.е. что для любой точки  $M(x, y, z)$  будет

$$\text{rot}\vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k},$$

или, в символическом виде,

$$\text{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (14.18)$$

Заметим, что мы одновременно доказали существование (при сделанных предположениях) ротора и вывели удобную формулу для его вычисления.

Теперь можно говорить, что каждое векторное поле  $\vec{a}$  порождает новое векторное поле  $\text{rot}\vec{a}$ , называемое полем вихрей поля  $\vec{a}$ .

Для выяснения физического смысла ротора возьмем поле скоростей вращающегося твердого тела. Поскольку

$$\vec{V} = \omega(-y\vec{i} + x\vec{j})$$

то, на основании (14.18),

$$\text{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = (\omega + \omega)\vec{k} = 2\omega\vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Итак, в данном случае ротор поля во всех точках одинаков и равен удвоенному вектору угловой скорости.

По аналогии с этим результатом, говорят, что и в случае произвольного поля  $\vec{a}$  вектор  $\text{rot}\vec{a}$  характеризует так называемую вращательную способность, или «завихренность» поля в данной точке.

**Пример 14.18.** Возьмем магнитное поле бесконечного прямолинейного

проводника

$$\vec{H} = \frac{2J}{x^2 + y^2} (-y\vec{i} + x\vec{j}).$$

Тогда

$$H_x = -\frac{2Jy}{x^2 + y^2}, \quad H_y = \frac{2Jx}{x^2 + y^2}, \quad H_z = 0.$$

Отсюда

$$\text{rot}\vec{H} = 2J \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix},$$

а значит,

$$\begin{aligned} (\text{rot}\vec{H})_x &= -2J \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \equiv 0, \quad (\text{rot}\vec{H})_y = -2J \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \equiv 0, \\ (\text{rot}\vec{H})_z &= 2J \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] = \\ &= 2J \left[ \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \equiv 0 \end{aligned}$$

Итак, всюду, кроме точек проводника (где  $x^2 + y^2 = 0$ , и приведенные выше равенства теряют смысл) поле  $\vec{H}$  является безвихревым.

## 11. Свойства ротора. Теорема Стокса

Ротор обладает следующими свойствами:

1.  $\text{rot}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{rot}\vec{a}_1 + \text{rot}\vec{a}_2$  (эта сумма – векторная).
2. Если  $c = \text{const}$ , то  $\text{rot}(c\vec{a}) = c\text{rot}(\vec{a})$ .

Это свойство, как и предыдущее, совершенно очевидно.

3. Если  $u(x, y, z)$  – скалярное поле, то

$$\text{rot}(u\vec{a}) = u\text{rot}\vec{a} + [\text{grad}u, \vec{a}].$$

Действительно,

$$\operatorname{rot}(u\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ua_x & ua_y & ua_z \end{vmatrix}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot}(ua))_x &= \frac{\partial}{\partial y}(ua_z) - \frac{\partial}{\partial z}(ua_y) = \frac{\partial u}{\partial y}a_z + \frac{\partial a_z}{\partial y}u - \frac{\partial u}{\partial z}a_y - \frac{\partial a_y}{\partial z}u = \\ &= u\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \left((\operatorname{gradu})_y a_z - (\operatorname{grad}_y)_z a_y\right) = u(\operatorname{rot}\vec{a})_x + [\operatorname{gradu}, \vec{a}]_x \end{aligned}$$

Аналогично проверяются равенства и для двух других пар проекций. Из равенства проекций следует равенство самих векторов.

4. Для любого поля  $\vec{a}$  будет  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0$ , т.е. поле вихрей любого векторного поля соленоидально.

Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial y} \equiv 0 \end{aligned}$$

5. Для любого скалярного поля  $u(x, y, z)$  будет  $\operatorname{rot}(\operatorname{gradu}) = \vec{0}$ .

Действительно,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{gradu}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Отсюда

$$(\operatorname{rot}(\operatorname{gradu}))_x = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \equiv 0,$$

и аналогично

$$(\operatorname{rot}(\operatorname{gradu}))_y \equiv 0, \quad (\operatorname{rot}(\operatorname{gradu}))_z \equiv 0,$$

откуда и следует свойство 5.

Возьмем теперь произвольное поле  $\vec{a}$ , и в нем – контур,  $L$ , на который натянем некоторую поверхность  $\Sigma$ . Считая условия формулы Стокса

выполненными, получим равенство (14.15), которое можно теперь переписать так

$$\oint_L (\vec{a}, \vec{ds}) = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{a}, \vec{d\sigma}) \quad (14.19)$$

Следовательно, при упомянутых условиях имеет место

**Теорема 14.3.** Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через произвольную поверхность, натянутую на данный контур.

Эту теорему называют теоремой Стокса.

Пусть теперь  $L$  – произвольный контур в поле  $\vec{a}$ . Натянем на него две различные поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  так, чтобы они ограничивали некоторую область  $D$  (рис. 14.19). Тогда, в силу (14.19),

$$\iint_{\Sigma_1} (\text{rot } \vec{a}, \vec{d\sigma}) = \iint_{\Sigma_2} (\text{rot } \vec{a}, \vec{d\sigma})$$

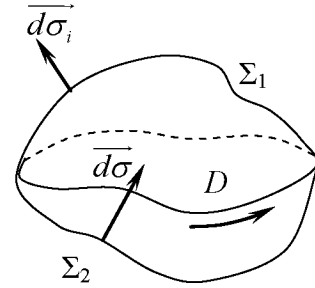


Рис. 14.19

(поскольку оба интеграла равны  $\oint_L (\vec{a}, \vec{ds})$ ). При этом векторы  $\vec{d\sigma}$  на обеих

поверхностях направлены так, чтобы с их концов обход контура  $L$  был виден совершающимся против часовой стрелки. Если же на поверхности  $\Sigma_2$  векторы  $\vec{d\sigma}$  направлены в противоположную сторону, то на всей поверхности  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  вектор  $\vec{d\sigma}$  будет направлен наружу по отношению к области  $D$ . Получим тогда

$$\iint_{\Sigma_1} (\text{rot } \vec{a}, \vec{d\sigma}) = -\iint_{\Sigma_2} (\text{rot } \vec{a}, \vec{d\sigma}),$$

т.е.

$$\iint_{\Sigma_1} (\text{rot } \vec{a}, \vec{d\sigma}) + \iint_{\Sigma_2} (\text{rot } \vec{a}, \vec{d\sigma}) = 0$$

или

$$\iint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} (\text{rot } \vec{a}, \vec{d\sigma}) = 0.$$

Ввиду произвольности поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  отсюда следует, что поле  $\text{rot } \vec{a}$  – соленоидальное, т.е. мы фактически установили физический смысл свойства 4 ротора.

## 12. Потенциальное поле

Векторное поле  $\vec{a}(x, y, z)$  называется потенциальным, если существует

такое скалярное поле  $u(x, y, z)$ , что  $\text{grad} u = a$ . Функцию  $u(x, y, z)$  в этом случае называют потенциалом поля  $\vec{a}$ .

**Пример 14.19.** Пусть  $\vec{a} = \vec{r}$ . В этом случае  $u = \frac{r^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ . В самом деле,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x, \frac{\partial u}{\partial y} = y, \frac{\partial u}{\partial z} = z,$$

а значит,

$$\text{grad} u = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{r}.$$

Потенциальное поле определяется одной скалярной функцией  $u(x, y, z)$ , тогда как произвольное векторное поле  $\vec{a}(x, y, z)$  определяется тремя скалярными функциями  $a_x(x, y, z)$ ,  $a_y(x, y, z)$  и  $a_z(x, y, z)$ .

Пусть  $\vec{a}$  – потенциальное поле, а  $u(x, y, z)$  – его потенциал. Поверхности уровня скалярного поля  $u(x, y, z)$  называют эквипотенциальными поверхностями. Поскольку  $\vec{a} = \text{grad} u$ , то в любой точке поля вектор  $\vec{a}$  нормален к соответствующей эквипотенциальной поверхности. Но вектор  $\vec{a}$  коллинеарен касательной к векторной линии поля. Таким образом, векторные линии потенциального поля пересекают эквипотенциальные поверхности под прямым углом.

**Теорема 14.4.** Для того чтобы векторное поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

■Необходимость. Пусть  $\vec{a}$  – потенциальное поле с потенциалом  $u(x, y, z)$ . Тогда  $\vec{a} = \text{grad} u$ , и, в силу свойства 5 ротора,  $\text{rot} \vec{a} = \text{rot}(\text{grad} u) = \vec{0}$ . □

■Достаточность. Пусть  $\vec{a}$  – безвихревое поле. Возьмем в нем произвольный контур  $L$  и натянем на него некоторую поверхность  $\Sigma$ . Поскольку  $\text{rot} \vec{a} = \vec{0}$ , то, на основании теоремы Стокса,

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{s}) = 0. \quad (14.20)$$

В силу произвольности контура  $L$ , из условия (14.18) следует, что выражение  $(\vec{a}, d\vec{s})$  есть полный дифференциал некоторой функции  $u(x, y, z)$ . Итак, существует такая функция  $u(x, y, z)$ , что  $(\vec{a}, d\vec{s}) = du$ , т.е.

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz = du,$$

а это значит, что

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x}, a_y = \frac{\partial u}{\partial y}, a_z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

т.е. что  $\vec{a} = \text{grad} u$ , так что поле  $\vec{a}$  – потенциальное. □

**Примечание.** Из доказательства достаточности следует, что если циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю, то это поле потенциально.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т.е. циркуляция потенциального поля по замкнутому контуру, полностью принадлежащему полю, может и не равняться нулю. Действительно, равенство (14.20) будет выполнено, в силу теоремы Стокса, если на контур  $L$  можно натянуть поверхность, все точки которой принадлежат полю, а это не всегда возможно.

**Пример 14.20.** Возьмем поле  $\vec{H} = \frac{2J}{x^2 + y^2}(-y\vec{i} + x\vec{j})$ . Мы видели, что

$\text{rot} \vec{H} = \vec{0}$  всюду вне оси  $Oz$ , а значит везде, кроме точек этой оси, поле  $\vec{H}$  потенциально. Это можно проверить и непосредственно. Для этого рассмотрим функцию  $u = 2J \arctg \frac{y}{x}$ . Имеем для нее

$$\begin{aligned} \text{grad} u &= 2J \text{grad} \left( \arctg \frac{y}{x} \right) = \\ &= 2J \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 1 + \frac{y^2}{x^2} & 1 + \frac{y^2}{x^2} \end{pmatrix} = \frac{2J}{x^2 + y^2}(-y\vec{i} + x\vec{j}) = \vec{H} \end{aligned}$$

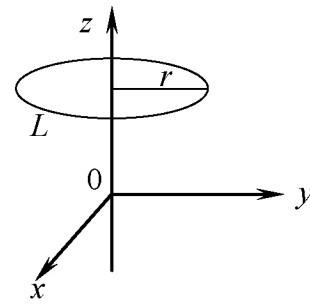


Рис. 14.20

Итак, функция  $u = 2J \arctg \frac{y}{x}$  есть потенциал поля  $\vec{H}$ . Эта функция определена всюду, кроме точек оси  $Oz$ , где не определено и поле  $\vec{H}$ .

Вычислим циркуляцию поля  $\vec{H}$  по окружности  $L = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = \text{const} \end{array} \right. \right\}$ ,

где  $z$  – любое число. Тогда

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{s}) = 2J \oint_L \frac{1}{x^2 + y^2} (-y\vec{i} + x\vec{j}, d\vec{s}) = \frac{2J}{r^2} \oint_L (-ydx + xdy) = \frac{2J}{r^2} \iint_D 2ds = 4\pi J \neq 0$$

Невыполнение равенства (рис. 14.20) здесь связано с невозможностью натянуть на контур  $L$  поверхность, не пересекающую ось  $Oz$ , на котором поле не определено.

Если же контур  $L$  не охватывает оси  $Oz$  (рис. 14.21), то, очевидно,  $\oint_L (\vec{H}, d\vec{s}) = 0$ .

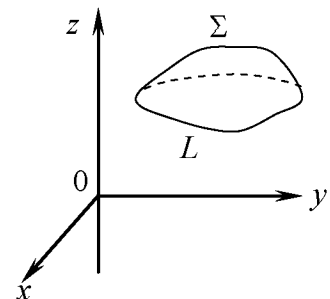


Рис. 14.21

Предположим теперь, что для любого контура  $L$  в поле  $\vec{a}$  выполняется равенство (14.23). Возьмем в

этом потенциальном поле некоторую дугу  $\overset{\cup}{MN}$ . На основании (14.23), интеграл

$\int_{\overset{\cup}{MN}} (\vec{a}, d\vec{s})$  не зависит от формы дуги  $\overset{\cup}{MN}$ , а зависит лишь от положения точек  $M$  и  $N$ . Поэтому его можно обозначить  $\int_M^N (\vec{a}, d\vec{s})$ . Поскольку в этом случае  $(\vec{a}, d\vec{s}) = du$ , то, по ранее доказанной формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int_M^N (\vec{a}, d\vec{s}) = u(N) - u(M).$$

Этот результат означает теперь, что линейный интеграл в таком потенциальном поле равен разности потенциалов этого поля в конечной и начальной точках пути.

Что же касается нахождения потенциала поля, то оно в общем случае, очевидно, сводится к нахождению функции трех переменных по его полному дифференциалу (см. конец главы XII).

Вычислим в заключение дивергенцию потенциального поля. Имеем

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \operatorname{div} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Выражение  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  называется лапласианом скалярной функции  $u(x, y, z)$  и обозначается  $\Delta u$  (не путать с символом приращения!). Итак,

$$\operatorname{div} \vec{a} = \Delta u, \quad (14.21)$$

**Примечание.** Понятие лапласиана вводят и для векторов. Пусть  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ . Тогда, по определению,

$$\Delta \vec{a} = (\Delta a_x) \vec{i} + (\Delta a_y) \vec{j} + (\Delta a_z) \vec{k},$$

т.е.

$$\Delta \vec{a} = \left( \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \vec{k}$$

### 13. Потенциал электрического поля

Рассмотрим поле точечного заряда  $+q$ :

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r},$$



а также функцию  $u = -\frac{q}{r}$ . Имеем

$$\text{grad } u = -q \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = -q \left( 1 \frac{1}{r^2} \right) \vec{r}^\circ = \frac{q}{r^2} \vec{r}^\circ = \frac{q}{r^3} \vec{r} = \vec{E}.$$

Итак, поле  $\vec{E}$  имеет потенциал  $u = -\frac{q}{r}$ . Однако, в теории электричества принято называть потенциалом поля  $\vec{E}$  функцию  $\varphi = -u = \frac{q}{r}$ .

Пусть теперь имеется  $n$  точечных зарядов:  $+q_1, +q_2, \dots, +q_n$ . Тогда, в силу принципа суперпозиции полей, потенциал в точке  $M$  равен

$$\varphi = \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \dots + \frac{q_n}{r_n},$$

где  $r_1, r_2, \dots, r_n$  – расстояния точки  $M$  от зарядов  $+q_1, +q_2, \dots, +q_n$ .

Предположим, наконец, что заряды заполняют некоторую область  $V$  непрерывно (рис. 14.22), и пусть  $\rho(x, y, z)$  – плотность заряда. Пусть, далее,  $\Delta V$  – элементарная часть области  $V$ . Её заряд равен  $\Delta q = \rho(\xi, \eta, \zeta) \Delta V$ , где  $(\xi, \eta, \zeta)$  – некоторая точка области  $\Delta V$ . Этот элементарный заряд создаёт в точке  $M(x, y, z)$  (она может находиться как внутри области  $V$ , так и вне её) поле с потенциалом  $\frac{\Delta q}{r} = \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} \Delta V$ .

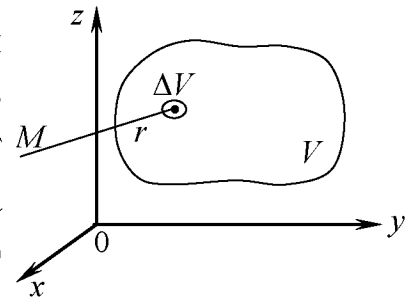


Рис. 14.22

Следовательно, суммарный потенциал в точке  $M$  равен

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_V \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} dV,$$

т.е.

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_V \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta) d}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} dV.$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho, \quad (14.22)$$

где  $\rho$  – плотность заряда в данной точке  $M(x, y, z)$ . Для этого опять возьмём сначала поле точечного заряда  $\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r}$  и вычислим его поток через сферу

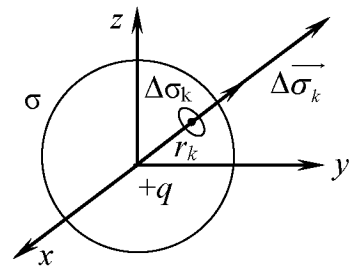


Рис. 14.23

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Поскольку в точке  $O$  поле не определено, то теорема Гаусса-Остроградского неприменима, а поэтому вычисляем поток непосредственно (рис.14.23). Имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\sigma} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \vec{E}_k \cdot \vec{\Delta\sigma}_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n E_k \cdot \Delta\sigma_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{q}{R^2} \Delta\sigma_k = \\ &= \frac{q}{R^2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k = \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi q. \end{aligned}$$

По следствию теоремы Гаусса-Остроградского поток поля  $\vec{E}$  через любую поверхность  $\sigma$ , окружающую заряд (рис.14.24), также равен

$$\iint_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\sigma} = 4\pi q \quad (14.23)$$

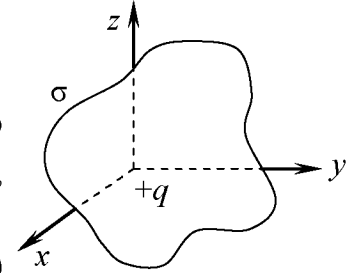


Рис. 14.24

Если внутри  $\sigma$  имеется  $n$  точечных зарядов  $+q_1, +q_2, \dots, +q_n$ , то, очевидно поток суммарного поля через эту поверхность равен

$$\iint_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\sigma} = 4\pi \sum_{k=1}^n q_k$$

Пусть, наконец, заряд распределён внутри  $\sigma$  непрерывно с плотностью  $\rho(x, y, z)$ . Тогда

$$\iint_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\sigma} = 4\pi \iiint_V \rho(x, y, z) dV,$$

где  $V$  – область, ограниченная поверхностью  $\sigma$ . С другой стороны, по теореме Гаусса-Остроградского,

$$\iint_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\sigma} = 4\pi \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV.$$

Сравнивая оба выражения для потока, получим, в силу произвольности области  $V$ ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho,$$

т.е.

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi) = 4\pi \rho,$$

т.е.

$$-\Delta \varphi = 4\pi \rho,$$

откуда и следует (14.22).

Соотношение (14.22) называется уравнением Пуассона.

Если в точке  $M$   $\rho = 0$  (в частности, если  $M$  находится вне области  $V$ ), то в этой точке

$$\frac{\partial \phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi^2}{\partial z^2} = 0. \quad (14.24)$$

Это равенство называется уравнением Лапласа.

#### 14. Символические операторы теории поля

Как мы видим, величины

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}, \quad \text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad \text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

являются основными характеристиками поля. Все эти выражения можно записать очень компактно, если ввести символический вектор

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ . Его называют вектором (или оператором) «набла».

Символичность этого оператора состоит в том, что он выражает не некоторую векторную величину, а действие. Применяя это действие к некоторой реальной величине (т.е. формально умножая  $\nabla$  на эту величину), мы получим другую реальную величину.

Например, умножая вектор  $\nabla$  на скаляр  $u(x, y, z)$ , получим вектор

$$\nabla u = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k},$$

т.е.

$$\nabla u = \text{grad } u.$$

Аналогично

$$\text{div } \vec{a} = (\nabla, \vec{a}), \quad \text{rot } \vec{a} = [\nabla, \vec{a}].$$

Введение вектора  $\nabla$  позволяет очень быстро получить многие уже известные результаты. Например,

$$\text{rot}(\text{grad } u) = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla] u = \vec{0} u = \vec{0}.$$

Точно так же

$$\text{div}(\text{rot } \vec{a}) = (\nabla, [\nabla, \vec{a}]) = ([\nabla, \nabla], \vec{a}) = (\vec{0}, \vec{a}) = 0.$$

Далее, мы имели

$$\text{div}(\text{grad } u) = \Delta u.$$

Теперь это можно переписать так:

$$(\nabla, \nabla u) = \Delta u,$$

т.е.

$$(\nabla, \nabla)u = \Delta u.$$

Поскольку здесь  $u$  произвольно, то

$$(\nabla, \nabla) = \Delta.$$

Левую часть принято обозначать  $\nabla^2$ , так что

$$\nabla^2 = \Delta.$$

Это символическое равенство следует понимать так

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta.$$

Линейный дифференциальный оператор  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  называется

оператором Лапласа. Применяя его к некоторой функции  $u(x, y, z)$ , получим

$$\Delta u = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

т.е. получим лапласиан этой функции.

Вычислим символическим методом величину  $rot(rot \vec{a})$ . Имеем

$$rot(rot \vec{a}) = [\nabla, [\nabla, \vec{a}]] = \nabla(\nabla, \vec{a}) - (\nabla, \nabla)\vec{a} = \nabla(\operatorname{div} \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a},$$

т.е.

$$rot(rot \vec{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}.$$

Следует отметить, что, поскольку  $\nabla$  не является реальным вектором, обращаться с ним нужно осторожно, т.е. формулы, полученные символическим методом, следует проверять обычным путем.

## 15. Произвольные системы ортогональных криволинейных координат

Пусть  $q_1, q_2, q_3$  – некоторые криволинейные координаты точки  $M$ , связанные с ее декартовыми координатами формулами

$$\begin{cases} x = f_1(q_1, q_2, q_3) \\ y = f_2(q_1, q_2, q_3) \\ z = f_3(q_1, q_2, q_3). \end{cases} \quad (14.25)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{cases} q_1 = \varphi_1(x, y, z) \\ q_2 = \varphi_2(x, y, z) \\ q_3 = \varphi_3(x, y, z). \end{cases} \quad (14.26)$$

Координатные поверхности имеют, следовательно, уравнения

$$\varphi_1(x, y, z) = c_1, \varphi_2(x, y, z) = c_2, \varphi_3(x, y, z) = c_3.$$

Здесь  $c_1, c_2, c_3$  – независимые произвольные постоянные.

Линия пересечения координатных поверхностей называется координатной линией. Очевидно, вдоль нее изменяется только одна из величин  $q_1, q_2, q_3$ , а две других – постоянны (рис. 14.25). Например, координатной линией координаты  $\varphi$  в сферической системе координат является окружность  $(\varphi)$  с центром на оси  $Oz$ , параллельная плоскости  $xOy$  (рис. 14.26).

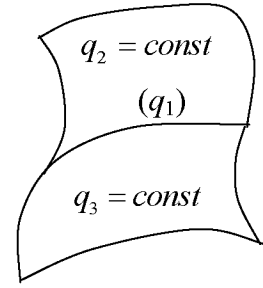


Рис. 14.25

Будем рассматривать только такие системы, в которых все три координатные линии, проходящие через каждую точку, взаимно перпендикулярны. Такие системы называют ортогональными.\*)

Пусть  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  – орты касательных к линиям  $(q_1), (q_2), (q_3)$ , направленные в сторону возрастания соответствующих координат. Будем считать, что векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  образуют правую тройку (в противном случае мы перенумеровали бы координаты  $q_1, q_2, q_3$ ) (рис. 14.27).

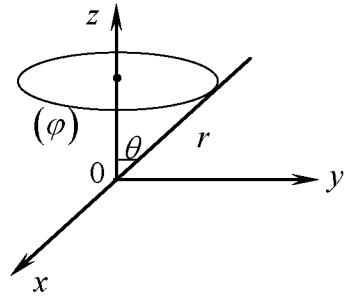


Рис. 14.26

Возьмем линию  $(q_1)$ . Вдоль нее будет  $q_2 = \text{const}$  и  $q_3 = \text{const}$ , и тогда уравнения (14.25) можно считать параметрическими уравнениями этой линии. Поэтому дифференциал дуги линии  $(q_1)$  равен

$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}\right)^2} dq_1.$$

Аналогично получаются  $ds_1$  и  $ds_2$ .

Обозначим

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} = H_1,$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} = H_2,$$

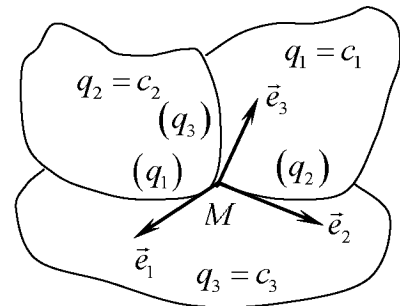


Рис. 14.27

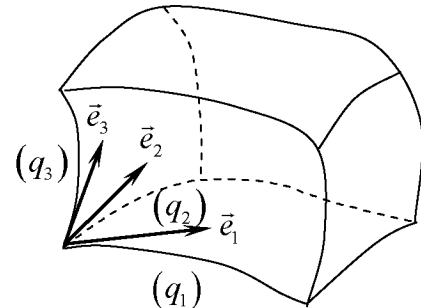


Рис. 14.28

\*) Ранее, в гл. XI, до введения ортогональности, мы вместо (14.25) и (14.26) писали соответственно (11.19) и (11.18).

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} = H_3$$

(эти числа называют коэффициентами Ламе данной криволинейной системы координат).

Получим теперь

$$ds_1 = H_1 dq_1, ds_2 = H_2 dq_2, ds_3 = H_3 dq_3.$$

Поэтому элементы площади координатных поверхностей равны

$$d\sigma_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3, d\sigma_2 = H_1 H_3 dq_1 dq_3, d\sigma_3 = H_1 H_2 dq_1 dq_2,$$

а элемент объема равен

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

## 16. Вычисление градиента, дивергенции, лапласиана и ротора в цилиндрических координатах

Начнем со скалярного поля  $u(r, \varphi, z)$ . Возьмем в нем произвольную точку  $M$  и проведем через нее линии  $(r)$ ,  $(\varphi)$  и  $(z)$ , вдоль каждой из которых меняется лишь одна координата, а две другие постоянные. Пусть  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\varphi$  и  $\vec{e}_z$  — орты этих линий, направленные в сторону возрастания соответствующих координат (рис. 14.29).

Напомним, что проекция градиента на данное направление равна производной поля по этому направлению. Следовательно,

$$(\text{grad } u)_r = \frac{\partial u}{\partial r}, (\text{grad } u)_\varphi = \frac{\partial u}{\partial s(\varphi)} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

$$(\text{grad } u)_z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

а значит,

$$\text{grad } u(r, \varphi, z) = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (14.27)$$

Рассмотрим теперь векторное поле  $\vec{a}(r, \varphi, z)$  и вычислим его дивергенцию в данной точке  $M(r_0, \varphi_0, z_0)$ . Пусть  $\sigma$  — полная поверхность элемента объема (рис. 14.30). Тогда

$$\iiint_{\sigma} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} = \left( \iint_{MQQ'M'} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} + \iint_{NPP'N'} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} \right) +$$

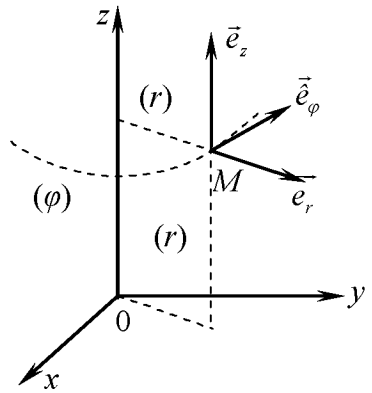


Рис. 14.29

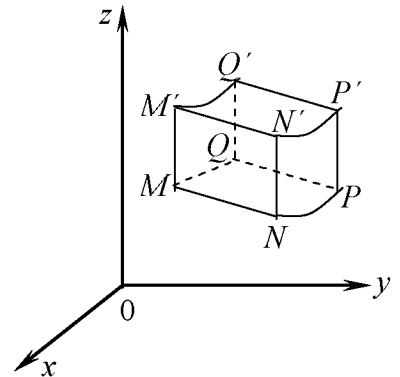


Рис. 14.30

$$+ \left( \iint_{MNN'M'} \vec{a} \cdot \overrightarrow{d\sigma} + \iint_{QPP'Q'} \vec{a} \cdot \overrightarrow{d\sigma} \right) +$$

$$+ \left( \iint_{MNPQ} \vec{a} \cdot \overrightarrow{d\sigma} + \iint_{M'N'P'Q'} \vec{a} \cdot \overrightarrow{d\sigma} \right) = Q_r + Q_\varphi + Q_z.$$

Но

$$\iint_{MQQ'M'} \vec{a} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = \iint_{MQQ'M'} (a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z) \cdot (-\vec{e}_r) d\sigma = - \iint_{MQQ'M'} a_r(r, \varphi, z) d\sigma =$$

$$= - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left[ \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} r_0 a_r(r_0, \varphi, z) dz \right] d\varphi.$$

Аналогично

$$\iint_{NPP'N'} \vec{a} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left[ \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} (r_0 + \Delta r) a_r(r_0 + \Delta r, \varphi, z) dz \right] d\varphi.$$

Поэтому

$$Q_r = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left\{ \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} [(r_0 + \Delta r) a_r(r_0 + \Delta r, \varphi, z) - r_0 a_r(r_0, \varphi, z)] dz \right\} d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left\{ \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} \Big|_{r=\rho} \Delta r dz \right\} d\varphi = \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} \Big|_{\substack{r=\rho \\ \varphi=\psi \\ z=\zeta}} \Delta r \Delta \varphi \Delta z = \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} \Big|_{M_1} \Delta r \Delta \varphi \Delta z,$$

где  $M_1$  – некоторая внутренняя точка параллелепипеда. Мы применили здесь теорему Лагранжа, а затем – теорему о среднем для двойного интеграла.

**Примечание.** Скалярное поле называется осевым, если оно зависит только от расстояния до некоторой оси (обычно принимаемой в качестве оси Oz), т.е. если  $u = u(r)$ . Примером может служить поле температур вокруг бесконечной равномерно нагретой проволоки. В этом случае

$$\text{grad } u = \frac{du}{dr} \vec{e}_r, \quad \Delta u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right).$$

Вычислим, наконец,  $\text{rot } \vec{a}(r, \varphi, z)$ . Пусть  $L_r$  - контур  $MQQ'M'M$ . Тогда

$$\oint_{L_r} \vec{a} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{\overset{\curvearrowright}{MQ}} \vec{a} \cdot \overrightarrow{ds} + \int_{\overset{\curvearrowright}{QQ'}} \vec{a} \cdot \overrightarrow{ds} + \int_{\overset{\curvearrowright}{Q'M'}} \vec{a} \cdot \overrightarrow{ds} + \int_{\overset{\curvearrowright}{M'M}} \vec{a} \cdot \overrightarrow{ds}.$$

Но

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{MQ}} \vec{a} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{\overset{\curvearrowright}{MQ}} a_\varphi(r, \varphi, z) ds = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 a_\varphi(r_0, \varphi, z_0) d\varphi;$$

$$\int_{\overset{\circ}{Q'M'}} \vec{a} \cdot \vec{ds} = - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 a_\varphi(r_0, \varphi, z_0 + \Delta z) d\varphi,$$

а значит,

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\circ}{MQ}} \vec{a} \cdot \vec{ds} + \int_{\overset{\circ}{Q'M'}} \vec{a} \cdot \vec{ds} &= - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 [a_\varphi(r_0, \varphi, z_0 + \Delta z) - a_\varphi(r_0, \varphi, z_0)] d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 \frac{\partial a_\varphi(r_0, \varphi, \zeta)}{\partial z} \Delta z d\varphi = -r_0 \frac{\partial a_\varphi(M_1)}{\partial \varphi} \Delta\varphi \Delta z, \end{aligned}$$

где  $M_1$  – некоторая внутренняя точка фигуры  $MQQ'M'$ . Точно так же

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\circ}{QQ'}} \vec{a} \cdot \vec{ds} + \int_{\overset{\circ}{M'M}} \vec{a} \cdot \vec{ds} &= \int_{\overset{\circ}{QQ'}} a_z(r, \varphi, z) dz + \int_{\overset{\circ}{M'M}} a_z(r, \varphi, z) dz = \\ &= \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} a_z(r_0, \varphi_0 + \Delta\varphi, z) dz - \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} a_z(r_0, \varphi_0, z) dz = \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \frac{\partial a_z(r_0, \psi, z)}{\partial \varphi} \Delta\varphi dz = \\ &= \frac{\partial a_z(M_2)}{\partial \varphi} \Delta\varphi \Delta z \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\oint_{L_r} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \left[ \frac{\partial a_z(M_2)}{\partial \varphi} - r_0 \frac{\partial a_\varphi(M_1)}{\partial z} \right] \Delta\varphi \Delta z,$$

а значит

$$\frac{\oint_{L_r} \vec{a} \cdot \vec{ds}}{\sigma_r} = \left[ \frac{\partial a_z(M_2)}{\partial \varphi} - r_0 \frac{\partial a_\varphi(M_1)}{\partial z} \right] \frac{\Delta\varphi \Delta z}{\sigma_r},$$

а так как  $\sigma_2 = r_0 \Delta\varphi \Delta z$ , то в пределе находим

$$[\text{rot } \vec{a}(M)]_r = \frac{1}{r_0} \left[ \frac{\partial a_z(M)}{\partial \varphi} - r_0 \frac{\partial a_\varphi(M)}{\partial z} \right]. \quad (14.28)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\circ}{NM}} \vec{a} \cdot \vec{ds} + \int_{\overset{\circ}{M'N'}} \vec{a} \cdot \vec{ds} &= \int_{\overset{\circ}{NM}} a_r(r, \varphi, z) dr + \int_{\overset{\circ}{M'N'}} a_r(r, \varphi, z) dr = \\ &= - \int_{r_0}^{r_0 + \Delta r} a_r(r, \varphi_0, z_0) dr + \int_{r_0}^{r_0 + \Delta r} a_r(r, \varphi_0, z_0 + \Delta z) dr = \int_{r_0}^{r_0 + \Delta r} \frac{\partial a_r(r, \varphi_0, \zeta)}{\partial z} \Delta z dr = \\ &= \frac{\partial a_r(M_3)}{\partial z} \Delta z \Delta r, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} a_z(r_0, \varphi_0, z) dz - \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} a_z(r_0 + \Delta r, \varphi_0, z) dz = - \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \frac{\partial a_z(\rho, \varphi_0, z)}{\partial z} \Delta r dz = \\
&= - \frac{\partial a_z(M_4)}{\partial r} \Delta r \Delta z.
\end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
\iint_{MNN'M'} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} &= - \iint_{MNN'M'} (a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_\varphi d\sigma = - \iint_{MNN'M'} a_\varphi(r, \varphi, z) d\sigma = \\
&= - \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \left[ \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} a_\varphi(r, \varphi_0, z) dz \right] dr
\end{aligned}$$

и аналогично

$$\iint_{QPP'Q'} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} = \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \left[ \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} a_\varphi(r, \varphi_0 + \Delta \varphi, z) dz \right] dr,$$

а поэтому

$$\begin{aligned}
Q_\varphi &= \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \left\{ \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} [a_\varphi(r, \varphi_0 + \Delta \varphi, z) - a_\varphi(r_0, \varphi, z)] dz \right\} dr = \\
&= \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \left[ \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \frac{\partial a_\varphi(r, \psi, z)}{\partial \varphi} \Delta \varphi dz \right] dr = \frac{\partial a_\varphi(M_2)}{\partial \varphi} \Delta \varphi \Delta z \Delta r.
\end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
\iint_{MNPQ} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} &= - \iint_{MNPQ} a_z(r, \varphi, z) d\sigma = - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta \varphi} \left[ \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} r a_z(r, \varphi, z_0) dr \right] d\varphi, \\
\iint_{M'N'P'Q'} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta \varphi} \left[ \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} r a_z(r, \varphi, z_0 + \Delta z) dr \right] d\varphi,
\end{aligned}$$

а значит

$$\begin{aligned}
Q_z &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta \varphi} \left\{ \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} [r a_z(r, \varphi, z_0 + \Delta z) - r a_z(r, \varphi, z_0)] dr \right\} d\varphi = \\
&= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta \varphi} \left[ \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \frac{r \partial a_z}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} \Delta z dr \right] d\varphi = \frac{\partial (r a_z)}{\partial z} \Big|_{M_3} \Delta z \Delta r \Delta \varphi.
\end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} = \left[ \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} \Big|_{M_1} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \Big|_{M_2} + \frac{\partial (r a_z)}{\partial z} \Big|_{M_3} \right] \Delta r \Delta \varphi \Delta z.$$

Отсюда

$$\frac{\oiint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{d\sigma}}{\Delta V} = \left[ \frac{\partial(ra_r)}{\partial r} \Big|_{M_1} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \Big|_{M_2} + \frac{\partial(ra_z)}{\partial z} \Big|_{M_3} \right] \frac{\Delta r \Delta \varphi \Delta z}{\Delta V}. \quad (14.29)$$

Если элемент объема стягивается в точку  $M$ , то

$$\frac{\Delta r \Delta \varphi \Delta z}{\Delta V} = \frac{\Delta r \Delta \varphi \Delta z}{r_0 \Delta r \Delta \varphi \Delta z + o(\Delta V)} \rightarrow \frac{1}{r_0},$$

а поэтому в пределе из (14.29) получим

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{1}{r_0} \left[ \frac{\partial(ra_r)}{\partial r} \Big|_M + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \Big|_M + \frac{\partial(ra_z)}{\partial z} \Big|_M \right].$$

Заменяя точку  $M(r_0, \varphi_0, z_0)$  на текущую точку  $(r, \varphi, z)$ , будем иметь

$$\operatorname{div} \vec{a}(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(ra_z)}{\partial z} \right].$$

Отсюда, в силу формулы (14.27), находим

$$\Delta u(r, \varphi, z) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

т.е.

$$\Delta u(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]. \quad (14.30)$$

Отсюда

$$\oiint_{L_\varphi} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \left[ \frac{\partial a_r(M_3)}{\partial z} - \frac{\partial a_z(M_4)}{\partial r} \right] \Delta r \Delta z,$$

а значит,

$$\frac{\oiint_{L_\varphi} \vec{a} \cdot \vec{ds}}{\sigma_\varphi} = \frac{\partial a_r(M_3)}{\partial z} - \frac{\partial a_z(M_4)}{\partial r},$$

и в пределе:

$$[\operatorname{rot} \vec{a}(M)]_\varphi = \frac{\partial a_r(M)}{\partial z} - \frac{\partial a_z(M)}{\partial r}. \quad (14.31)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} & \int_{\overset{\curvearrowright}{MN}} \vec{a} \cdot \vec{ds} + \int_{\overset{\curvearrowright}{PQ}} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \int_{\overset{\curvearrowright}{MN}} a_r(r, \varphi, z) dr + \int_{\overset{\curvearrowright}{PQ}} a_r(r, \varphi, z) dr = \\ & = \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} a_r(r, \varphi_0, z_0) dr - \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} a_r(r, \varphi_0 + \Delta \varphi, z_0) dr = - \int_{r_0}^{r_0+\Delta r} \frac{\partial a_r(r, \varphi, z_0)}{\partial z} \Delta \varphi dr = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial a_r(M_5)}{\partial \varphi} \Delta \varphi \Delta r; \\
&\int_{\overset{\cup}{NP}} \vec{a} \cdot \vec{ds} + \int_{\overset{\cup}{QM}} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \int_{\overset{\cup}{NP}} a_\varphi(r, \varphi, z) ds + \int_{\overset{\cup}{QM}} a_\varphi(r, \varphi, z) ds = \\
&= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta \varphi} (r_0 + \Delta r) a_\varphi(r_0 + \Delta r, \varphi, z_0) d\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta \varphi} r_0 a_\varphi(r_0, \varphi, z) d\varphi = \\
&= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta \varphi} \frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \Delta r d\varphi = \frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r} \Big|_{M_0} \Delta r \Delta \varphi.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\oint_{L_z} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \left( \frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r} \Big|_{M_6} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \Big|_{M_5} \right) \Delta r \Delta \varphi,$$

а значит

$$\frac{\oint_{L_z} \vec{a} \cdot \vec{ds}}{\sigma_z} = \left( \frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r} \Big|_{M_6} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \Big|_{M_5} \right) \frac{\Delta r \Delta \varphi}{\sigma_z}. \quad (14.32)$$

Если фигура  $MNPQ$  стягивается в точку  $M$ , то

$$\frac{\Delta r \Delta \varphi}{\sigma_z} = \frac{\Delta r \Delta \varphi}{r_0 \Delta r \Delta \varphi + o(\sigma_z)} \rightarrow \frac{1}{r_0},$$

и в пределе из (14.32) получим

$$(\text{rot } \vec{a}(M))_z = \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r} \Big|_M - \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} \Big|_M \right). \quad (14.33)$$

Сводя воедино формулы (14.30), (14.31) и (14.33) и заменяя в них фиксированную точку  $(r_0, \varphi_0, z_0)$  текущей точкой  $(r, \varphi, z)$ , будем иметь окончательно

$$\text{rot } \vec{a}(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z,$$

$$\text{или, в параметрическом виде, } \text{rot } \vec{a}(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r} \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_r & a_\varphi & a_z \end{vmatrix}.$$

Если поле является плоскопараллельным, т.е. если  $\vec{a} = a_r(r, \varphi)\vec{e}_r + a_\varphi(r, \varphi)\vec{e}_\varphi$ , то формулы для дивергенции и ротора принимают следующий вид

$$\operatorname{div} \vec{a}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad \operatorname{rot} \vec{a}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z.$$

В еще более частном случае так называемого осевого поля  $\vec{a} = a_r(r)\vec{e}_r$  получим

$$\operatorname{div} \vec{a}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r}, \quad \operatorname{rot} \vec{a}(r) = 0.$$

### 17. Градиент, дивергенция, лапласиан и ротор в сферических координатах

Рассмотрим скалярное поле  $u(r, \theta, \varphi)$ . Проведем линии  $(r)$ ,  $(\theta)$  и  $(\varphi)$  и построим орты  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  и  $\vec{e}_\varphi$  (рис. 14.31). Имеем

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} u)_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad (\operatorname{grad} u)_\theta = \frac{\partial u}{\partial s(\theta)} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}; \\ (\operatorname{grad} u)_\varphi &= \frac{\partial u}{\partial s(\varphi)} = \frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

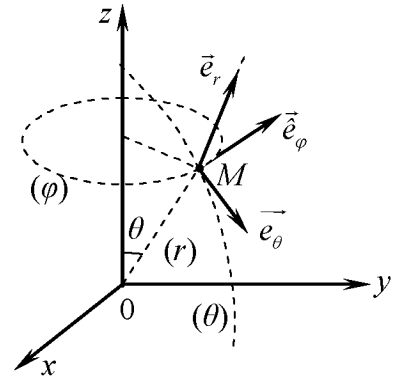


Рис. 14.31

а значит,

$$\operatorname{grad} u(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

Рассмотрим теперь векторное поле  $\vec{a}(r, \theta, \varphi)$ . Имеем (рис. 14.32):

$$\begin{aligned} & \iint_{M'N'P'Q'} \vec{a} \cdot \vec{d\sigma} = \\ & = \iint_{M'N'P'Q'} (a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_\varphi \vec{e}_\varphi) \cdot \vec{e}_r d\sigma = \end{aligned}$$

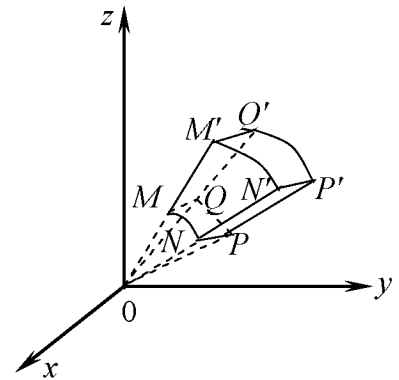


Рис. 14.32

$$\begin{aligned} & = \iint_{M'N'P'Q'} a_r(r, \theta, \varphi) d\sigma = \iint_{M'N'P'Q'} a_r(r, \theta, \varphi) r d\theta r \sin \theta d\varphi = \\ & = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left( \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} (r_0 + \Delta r)^2 \sin \theta \cdot a_r(r_0 + \Delta r, \theta, \varphi) d\theta \right) d\varphi \end{aligned}$$

и аналогично

$$\iint_{MNPQ} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} = - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left( \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} r_0^2 \sin\theta \cdot a_r(r_0, \theta, \varphi) d\theta \right) d\varphi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Q_r &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left( \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \sin\theta \left( (r_0 + \Delta r)^2 a_r(r_0 + \Delta r, \theta, \varphi) - r_0^2 a_r(r_0, \theta, \varphi) \right) d\theta \right) d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left( \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \sin\theta \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \Delta r d\theta \right) d\varphi = \left( \sin\theta \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} \right)_{M_1} \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi. \end{aligned}$$

Точно так же получим (выкладки мы опускаем ввиду их полной аналогии с предыдущими)

$$Q_\theta = \left( r \frac{\partial(a_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} \right)_{M_2} \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi; \quad Q_\varphi = \left( r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right)_{M_2} \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi.$$

Здесь  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  – некоторые внутренние точки элемента объема. Итак,

$$\iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma} = \left( \left( \sin\theta \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} \right)_{M_1} + \left( r \frac{\partial(a_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} \right)_{M_2} + \left( r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right)_{M_2} \right) \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi,$$

а значит,

$$\frac{\iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \overline{d\sigma}}{\Delta V} = \left( \left( \sin\theta \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} \right)_{M_1} + \left( r \frac{\partial(a_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} \right)_{M_2} + \left( r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right)_{M_2} \right) \frac{\Delta r \Delta\theta \Delta\varphi}{\Delta V}.$$

Если элементы объема стягиваются в точку  $M$ , то из последнего соотношения следует

$$\frac{\Delta r \Delta\theta \Delta\varphi}{\Delta V} = \frac{\Delta r \Delta\theta \Delta\varphi}{r_0^2 \sin\theta \cdot \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi + o(\Delta V)} \rightarrow \frac{1}{r_0^2 \sin\theta_0},$$

заменяя точку  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  на точку  $(r, \theta, \varphi)$ , получим

$$\operatorname{div} \vec{a}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + r \frac{\partial(a_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right).$$

Учитывая ещё формулу (12.26), будем иметь

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right).$$

Пусть скалярное поле зависит только от расстояния до некоторой точки, т.е.  $u = u(r)$ . Такое поле называется сферическим, или центральным.

Примером может служить поле температур в однородной среде, создаваемое точечным источником тепла. Для сферического поля получим

$$\operatorname{grad} u(r) = \frac{du}{dr}, \quad \Delta u(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right).$$

Вычислим, наконец,  $\operatorname{rot} \vec{a}(r, \theta, \varphi)$ . Имеем

$$\int_{\overset{\circ}{NP}} \vec{a} d\vec{s} = \int_{\overset{\circ}{NP}} a_\varphi(r, \theta, \varphi) ds = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 \sin(\theta_0 + \Delta\theta) \cdot a_\varphi(r_0, \theta_0 + \Delta\theta, \varphi) d\varphi;$$

$$\int_{\overset{\circ}{QM}} \vec{a} d\vec{s} = - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 \sin\theta_0 a_\varphi(r_0, \theta_0, \varphi) d\varphi,$$

а значит

$$\int_{\overset{\circ}{NP}} \vec{a} d\vec{s} + \int_{\overset{\circ}{QM}} \vec{a} d\vec{s} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 \left( \sin(\theta_0 + \Delta\theta) a_\varphi(r_0, \theta_0 + \Delta\theta, \varphi) - \sin\theta_0 a_\varphi(r_0, \theta_0, \varphi) \right) d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} r_0 \frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta} \Big|_{\theta=x} \Delta\theta d\varphi = r_0 \frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta} \Big|_{\theta=x} \Delta\theta d\varphi = \left( r \frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta} \right)_{M_1} \Delta\theta \Delta\varphi$$

где  $M_1$  – некоторая внутренняя точка фигуры  $ABCD$ . Далее,

$$\int_{\overset{\circ}{MN}} \vec{a} d\vec{s} = \int_{\overset{\circ}{MN}} a_\theta(r, \theta, \varphi) ds = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} r_0 a_\theta(r_0, \theta, \varphi_0) d\theta;$$

$$\int_{\overset{\circ}{PQ}} \vec{a} d\vec{s} = - \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} r_0 a_\theta(r_0, \theta, \varphi_0 + \Delta\varphi) d\theta,$$

откуда

$$\int_{\overset{\circ}{MN}} \vec{a} d\vec{s} + \int_{\overset{\circ}{PQ}} \vec{a} d\vec{s} = - \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} r_0 \left( a_\theta(r_0, \theta, \varphi_0 + \Delta\varphi) - a_\theta(r_0, \theta, \varphi_0) \right) d\theta =$$

$$= - \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} r_0 \frac{\partial a_\theta(r_0, \theta, \varphi)}{\partial\varphi} \Delta\varphi d\theta = - \left( r \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} \right) \Big|_{M_2} \Delta\varphi \Delta\theta.$$

Итак,

$$\oint_{L_r} \vec{a} d\vec{s} = \left( \left( r \frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta} \right)_{M_1} - \left( r \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} \right) \Big|_{M_2} \right) \Delta\theta \Delta\varphi,$$

$$\oint_{L_r} \vec{a} d\vec{s} = \frac{\left( \left( r \frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta} \right)_{M_1} - \left( r \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} \right) \Big|_{M_2} \right) \Delta\theta \Delta\varphi}{\sigma_r} = \frac{\left( \left( r \frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta} \right)_{M_1} - \left( r \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} \right) \Big|_{M_2} \right) \Delta\theta \Delta\varphi}{\sigma_r}. \quad (14.34)$$

а значит

Но

$$\sigma_r = S_{MNPQ} = MN \cdot PQ + O(\sigma_r) = r_0 \Delta\theta \cdot r_0 \sin\theta_0 \Delta\varphi + O(\sigma_r) = r_0^2 \sin\theta_0 \Delta\theta \Delta\varphi + O(\sigma_r)$$

а поэтому при стягивании контура  $L_r$  в точку  $M$  будет

$$\frac{\Delta\theta\Delta\varphi}{\sigma_r} \rightarrow \frac{1}{r_0^2 \sin\theta_0}.$$

Следовательно, из (14.34) в пределе получим

$$(\text{rot } \vec{a}(M))_r = \frac{\left( \left( r \frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta} \right)_M - \left( r \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} \right)_M \right)}{r_0^2 \sin\theta_0}.$$

Совершенно аналогично находим

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{a}(M))_\theta &= \frac{1}{r_0 \sin\theta_0} \left( \frac{\partial a_r}{\partial r} - \frac{\partial(r \sin\theta \cdot a_\varphi)}{\partial r} \right)_M; \\ (\text{rot } \vec{a}(M))_\varphi &= \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial(r \cdot a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial\theta} \right)_M. \end{aligned}$$

Тогда, заменяя точку  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  точкой  $(r, \theta, \varphi)$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a}(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r \sin\theta} \left( \frac{\partial(a_\varphi \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} \right) \vec{e}_r + \\ &+ \frac{1}{r \sin\theta} \left( \frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r \sin\theta a_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial\theta} \right) \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Этот результат можно записать и в символическом виде:

$$\text{rot } \vec{a}(r, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin\theta} \vec{e}_r & \frac{1}{r \sin\theta} \vec{e}_\theta & \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ a_r & r a_\theta & r \sin\theta a_\varphi \end{vmatrix}.$$

В случае центрального поля  $\vec{a}(r) = a_r(r) \vec{e}_r$  имеем

$$\text{div } \vec{a}(r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d(r^2 a_r)}{dr}; \quad \text{rot } \vec{a}(r) = 0.$$

## XV. Обыкновенные дифференциальные уравнения

### 1. Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям

**Задача.1.** Найти кривую, у которой угловой коэффициент касательной в любой точке вдвое больше углового коэффициента радиус-вектора этой точки (рис. 15.1).

По условию для каждой точки  $M(x, y)$  на кривой будет

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \varphi,$$

а значит

$$y' = 2 \frac{y}{x},$$

или

$$xy' - 2y = 0. \quad (15.1)$$

Итак, нахождение искомой кривой сводится к нахождению функции  $y(x)$ , для которой выполняется соотношение (15.1).

**Задача.2.** Горизонтальная трубка вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ . Внутри трубки (рис. 15.2) под действием центробежной силы движется шарик. Пренебрегая трением, найти закон движения шарика по трубке.

Второй закон Ньютона в проекции на ось трубки дает уравнение

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{(\omega x)^2}{x},$$

и для неизвестной функции  $x(t)$  получаем соотношение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \omega^2 x = 0 \quad (15.2)$$

### 2. Общие понятия, связанные с дифференциальными уравнениями

*Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее неизвестную функцию, ее аргументы и производные различных порядков от этой функции по различным аргументам.*

Если неизвестная функция зависит от двух и более переменных, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных. Примером может служить уравнение Пуассона

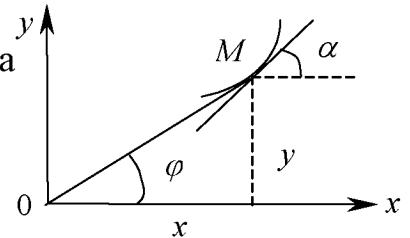


Рис. 15.1

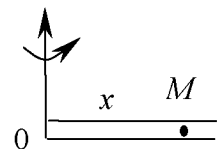


Рис. 15.2



$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Если неизвестная функция есть функция одной переменной, то уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Его общий вид

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

В этой главе мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

*Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком этого уравнения.*

Очевидно, соотношения (15.1) и (15.2) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями соответственно 1-го и 2-го порядков.

*Решением дифференциального уравнения называется функция  $y = \varphi(x)$ , которая, будучи подставлена в уравнение вместе со своими производными, обращает его в тождество.*

Например, решением уравнения

$$y'' + y = 0$$

является функция  $y = \sin x$ .

*Если решение уравнения задано в неявном виде, т.е. равенством  $\Phi(x, y) = 0$ , то такое решение называют интегралом данного дифференциального уравнения.*

*График функции  $y = \varphi(x)$ , являющейся решением данного уравнения, называется интегральной кривой этого уравнения.*

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называют интегрированием (или решением) этого уравнения.

### 3. Простейшие сведения об уравнениях 1-го порядка

Дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0,$$

или, если можно его разрешить относительно  $y'$ ,

$$y' = f(x, y). \quad (15.3)$$

Возьмем конкретное уравнение

$$xy' + y = 0. \quad (15.4)$$

Переписав его в виде

$$y' = \frac{y}{x},$$

легко убедиться, что ему удовлетворяют функции  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{2}{x}$ ,  $-\frac{3}{x}$ , и вообще всякая функция  $y = \frac{C}{x}$ , где  $C$  – произвольная постоянная.

Возьмем другое уравнение

$$y' = 4x - 2y.$$

Проверим, что ему удовлетворяет функция  $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$ , где  $C$  – любое число.

Действительно, для данной функции будет

$$y' = -2Ce^{-2x} + 2 = 4x - 2(Ce^{-2x} + 2x - 1) = 4x - 2y,$$

в чем и требовалось убедиться.

Можно показать, что решение произвольного уравнения вида (15.3) в общем случае может быть записано так

$$y = \varphi(x, C),$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Поэтому функцию  $y = \varphi(x, C)$  называют общим решением уравнения (15.3).

Придавая  $C$  некоторое конкретное значение  $C^*$ , получим конкретное решение  $y = \varphi(x, C^*)$ . Оно называется частным решением данного уравнения. Таким образом, общее решение дифференциального уравнения есть совокупность всех его частных решений.

Для того чтобы из общего решения выделить нужное частное решение, задают дополнительные условия, называемыми начальными условиями

$$y|_{x=x_0} = y_0 \tag{15.5}$$

где  $x_0$  и  $y_0$  – некоторые известные числа. Тогда, полагая в общем решении  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , получим

$$y_0 = \varphi(x_0, C).$$

Из этого равенства находим искомое  $C$ , после подстановки которого в общее решение, находим искомое частное решение.

Общее решение уравнения (15.3) геометрически представляет собой семейство интегральных кривых этого уравнения. Проинтегрировать уравнение при начальном условии (15.5) – это значит выбрать из множества интегральных кривых ту, которая проходит через данную точку  $(x_0, y_0)$ .

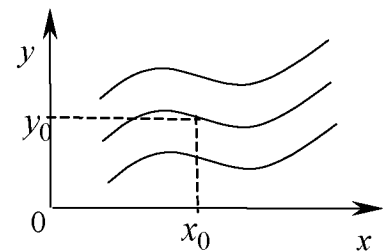


Рис. 15.3

**Пример 15.1.** Общее решение уравнения (15.4), как было показано, имеет вид

$$y = \frac{C}{x}.$$

Это – семейства гипербол. Зададим начальное условие

$$y|_{x=3} = 2.$$

Получаем

$$2 = \frac{C}{3},$$

откуда

$$C = 6,$$

а значит, искомое частное решение:

$$y = \frac{6}{x}.$$

Зададим теперь такое условие:

$$y|_{x=0} = 4. \quad (15.6)$$

Получим

$$4 = \frac{C}{0},$$

откуда следует, что соответствующее  $C$  найти нельзя, а значит такое начальное условие для данного уравнения не является допустимым. Геометрически это выражает тот факт, что ни одна из интегральных кривых не проходит через точку  $(0,4)$ .

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 15.1.** Пусть функция  $f(x, y)$  в уравнении (15.3) непрерывна в области  $D$  плоскости  $xOy$  вместе со своей производной  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Тогда для любой точки  $(x_0, y_0) \in D$  существует и единственно частное решение уравнения (15.3), удовлетворяющее начальному условию  $y|_{x=x_0} = y_0$ .

Эту теорему называют теоремой Коши о существовании и единственности решения.

**Пример 15.2.** Возьмем уравнение (15.4). Для него  $f(x, y) = -\frac{y}{x}$ , и при  $x=0$  функция  $f(x, y)$  не существует. Именно этим и вызвана недопустимость начального условия (15.6).

Теперь можно уточнить определение общего решения уравнения 1-го порядка.

*Общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка называется функция  $y = \varphi(x, C)$ , удовлетворяющая следующим условиям:*

- 1) При каждом конкретном  $C = C^*$  функция  $y = \varphi(x, C^*)$  удовлетворяет этому уравнению.
- 2) Для каждой точки  $(x_0, y_0) \in D$  (где  $D$  – область, в которой выполняются условия теоремы Коши) найдется такое значение  $C = C^*$ , что функция  $y = \varphi(x, C^*)$  будет удовлетворять начальному условию  $y|_{x=x_0} = y_0$ .

**Примечание.** При выполнении условий существования и единственности решения каждому начальному условию отвечает одно единственное частное решение уравнения. Однако, поскольку каждая кривая  $y = \varphi(x, C^*)$  состоит из бесчисленного множества точек, то двум различным начальным условиям может отвечать и одно частое решение.

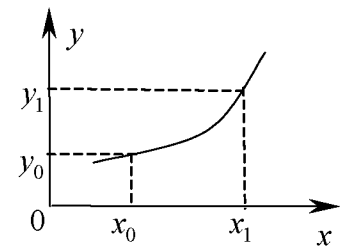


Рис. 15.4

#### 4. Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим уравнение (15.3) для случая, когда  $f(x, y)$  может быть представлена в виде двух сомножителей, один из которых зависит только от  $x$ , а другой – только от  $y$ . Тогда уравнение можно записать так

$$y' = \frac{f_1(x)}{f_2(y)} \quad (f_2(y) \neq 0),$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x)}{f_2(y)},$$

откуда

$$f_2(y)dy = f_1(x)dx \quad (15.7)$$

т.е. переменные  $x$  и  $y$  разделились. Пусть  $F_1(x)$  и  $F_2(y)$  – первообразные функций  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$ . Тогда (15.7) означает, что

$$dF_2(y) = dF_1(x),$$

а значит

$$F_2(y) = F_1(x) + C.$$

Это – общий интеграл исходного уравнения.

**Пример 15.3.** Обратимся к уравнению (15.1) и перепишем его так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x},$$

откуда

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x},$$

а значит

$$\ln y = 2 \ln x + \ln C,$$

т.е.

$$y = Cx^2.$$

Итак, поставленной ранее задаче 1 удовлетворяет бесчисленное множество изображенных на рис.15.5 парабол. При этом начальному условию

$y|_{x=0} = 0$  удовлетворяет бесчисленное множество частных решений (а именно: все частные решения). Это объясняется

тем, что в данном случае  $f(x,y) = \frac{2y}{x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x}$ , а значит, в

точке  $(0,0)$  функция  $\frac{\partial f}{\partial y}$  разрывна, т.е. не выполнены

условия теоремы о существовании и единственности решения.

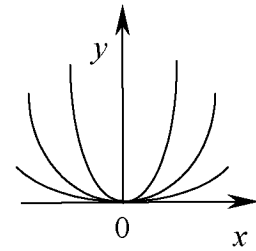


Рис. 15.5

**Примечание.** Уравнение с разделяющимися переменными можно записать и в так называемой дифференциальной форме:

$$P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0.$$

Действительно, это можно переписать так

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)Q(y)}{R(x)S(y)},$$

т.е.

$$y' = -\frac{\frac{P(x)}{R(x)}}{\frac{S(y)}{Q(y)}}.$$

## 5. Уравнения, однородные в смысле Эйлера

Уравнение  $y' = f(x,y)$  называется однородным в смысле Эйлера, если  $f(x,y)$  может быть представлена как некоторая функция, зависящая только

от  $\frac{y}{x}$ , т.е., если  $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ .

Примером может служить уравнение

$$xy^2 dx + (x^3 - y^3) dy = 0.$$

Действительно, переписав его в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2}{y^3 - x^3},$$

замечаем, что в данном случае  $f(x, y) = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 1}$ .

Другой пример однородного уравнения:

$$\frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad (15.8)$$

(это становится очевидным, если переписать уравнение так:

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}). \quad (15.9)$$

Возьмем произвольное однородное в смысле Эйлера уравнение

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (15.10)$$

и положим в нем  $\frac{y}{x} = z$ , где  $z(x)$  – новая неизвестная функция. Тогда

$$y = xz,$$

откуда

$$y' = z + x \frac{dz}{dx},$$

и уравнение (15.10) принимает вид

$$z + x \frac{dz}{dx} = g(z).$$

Это – уравнение с разделяющимися переменными. Действительно,

$$x \frac{dz}{dx} = g(z) - z,$$

откуда, после деления переменных, получаем

$$\frac{dz}{g(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим

$$F(z) = \ln x + C,$$

т.е.

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln x + C,$$

а это – общий интеграл уравнения.

**Пример 15.4.** Возьмем уравнение (15.8). Записав его в виде (15.9) и положив  $\frac{y}{x} = z$ , получим

$$z + x \frac{dz}{dx} = z + \operatorname{tg} z,$$

т.е.

$$x \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} z.$$

Разделяем переменные:

$$\operatorname{ctg} z dz = \frac{dx}{x}.$$

Отсюда

$$\ln|\sin z| = \ln|x| + \ln|C|,$$

т.е.

$$\sin z = Cx,$$

или

$$\sin \frac{y}{x} = Cx.$$

Окончательно:

$$y = x \cdot \arcsin Cx.$$

## 6. Линейные уравнения 1-го порядка

Линейным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0, \quad (15.11)$$

где  $A(x)$ ,  $B(x)$  и  $C(x)$  – некоторые функции, непрерывные вместе со своими производными. Очевидно, такое уравнение, разделив его на  $A(x)$ , всегда можно привести к виду

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (15.12)$$

Под линейностью такого уравнения подразумевается его линейность относительно  $y$  и  $y'$ .

Если в уравнении (15.12)  $q(x) \equiv 0$ , то уравнение имеет вид

$$y' + p(x)y = 0 \quad (15.13)$$

и называется линейным уравнением без правой части, или линейным однородным уравнением, причем однородность здесь понимается не в смысле Эйлера, а в смысле отсутствия «свободного члена», т.е. слагаемого, не содержащего  $y$  и  $y'$  (ср. с понятием однородной системы линейных алгебраических уравнений).

Чтобы не путать общее решение уравнения (15.12) с общим решением уравнения (15.13), обозначим последнее через  $u$ . Тогда уравнение (15.13) следует записать так:

$$u' + p(x)u = 0.$$

Отсюда

$$\frac{du}{dx} = -p(x)u,$$

и переменные разделяются:

$$\frac{du}{u} = -p(x)dx,$$

так что

$$\ln u = -\int p(x)dx + \ln C,$$

т.е.

$$u = Ce^{-\int p(x)dx}. \quad (15.14)$$

Будем искать теперь общее решение уравнения (15.12) в таком же виде, т.е. в виде

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (15.15)$$

Здесь  $C(x)$  в отличие от (15.14), уже не произвольная постоянная, а неизвестная функция. Подберем ее так, чтобы  $y$ , определяемое формулой (15.15), удовлетворяло уравнению (15.12). Имеем

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot [-p(x)].$$

Подставляя  $y$  и  $y'$  в (15.12), получим

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x), \quad (15.16)$$

т.е.

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = Q(x),$$

откуда

$$C'(x) = Q(x)e^{\int p(x)dx},$$

а значит, искомая функция  $C(x)$  равна

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx + \tilde{C}, \quad \tilde{C} = const.$$

Подставляя это в (15.15), получим общее решение уравнения (15.12). Описанный метод интегрирования линейного уравнения с правой частью называется методом вариации произвольной постоянной. Заметим, что для его применения уравнение (15.11) вовсе не обязательно приводить к виду (15.12).

**Пример 15.5.** Возьмем уравнение



$$y' - \frac{y}{x} = x + \frac{1}{x}.$$

Запишем соответствующее однородное уравнение

$$u' - \frac{u}{x} = 0,$$

откуда

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x},$$

или

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x},$$

а значит

$$\ln u = \ln x + \ln C,$$

т.е.

$$u = Cx.$$

Ищем теперь общее решение исходного уравнения в виде

$$y = C(x)x.$$

После подстановки в исходное уравнение получим:

$$C'(x)x + C(x) - C(x) = x + \frac{1}{x},$$

т.е.

$$C'(x)x = x + \frac{1}{x}.^*)$$

Отсюда

$$C'(x) = 1 + \frac{1}{x^2},$$

а значит

$$C(x) = x - \frac{1}{x} + C.$$

Итак,  $y = x^2 - 1 + \tilde{C}x$ .

## 7. Уравнение Бериулли

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

где  $\alpha$  – произвольное число, не равное 0 и 1, называется уравнением Бернулли. Перепишем уравнение так:

---

\*) Поскольку 2-е и 3-е слагаемое в левой части равенства (15.16) всегда взаимно уничтожаются, то на практике их можно вообще не писать.

$$\frac{y'}{y^\alpha} + p(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = q(x),$$

и введем новую неизвестную функцию  $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$ . Тогда  $z' = \frac{1-\alpha}{y^\alpha}y'$ , и уравнение принимает вид

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + p(x)z = q(x),$$

т.е. сводится к линейному уравнению.

**Пример 15.6.** Возьмем уравнение

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}.$$

Приводим его к виду

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$$

и полагаем  $\sqrt{y} = z$ . Тогда получим

$$2z' - \frac{4}{x}z = x.$$

Полученное линейное уравнение интегрируем методом вариации произвольной постоянной. Имеем

$$2u' - \frac{4}{x}u = 0,$$

т.е.

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x}u,$$

откуда

$$\frac{du}{u} = \frac{2dx}{x},$$

а значит,

$$\ln u = 2 \ln x + \ln C,$$

т.е.

$$u = Cx^2.$$

Теперь полагаем

$$z = C(x)x^2.$$

Получим

$$2C'(x)x^2 = x.$$

Следовательно,

$$C'(x) = \frac{1}{2x},$$

а значит

$$C(x) = \frac{1}{2} \ln x + \tilde{C}, \quad \tilde{C} = \text{const}.$$

Таким образом,

$$z = x^2 \left( \frac{1}{2} \ln x + \tilde{C} \right),$$

а так как  $y = z^2$ , то окончательно имеем

$$y = x^4 \left( \frac{1}{2} \ln x + \tilde{C} \right)^2.$$

### 8. Геометрический смысл дифференциального уравнения 1-го порядка

Рассмотрим уравнение  $y' = f(x, y)$ . Возьмем некоторую точку  $(x_0, y_0)$  и вычислим  $f(x_0, y_0)$ . Обозначим производную в этой точке через  $y'_0$ . Очевидно, это есть угловой коэффициент касательной в точке  $(x_0, y_0)$  к той интегральной кривой уравнения, которая проходит через эту точку. Берем теперь другую точку  $(x_1, y_1)$  и вычислим  $y'_1 = f(x_1, y_1)$ . Это есть угловой коэффициент касательной в точке  $(x_1, y_1)$  к проходящей через эту точку интегральной кривой (вообще говоря, это будет уже другая интегральная кривая). Поступая аналогично с новыми точками, получим угловые коэффициенты касательных для новых интегральных кривых. Итак, уравнение  $y' = f(x, y)$ , с геометрической точки зрения, показывает, в каком направлении проходит через каждую данную точку соответствующая интегральная кривая. В связи с этим говорят, что дифференциальное уравнение 1-го порядка задает поле направлений интегральных кривых.

### 9. Составление дифференциального уравнения 1-го порядка по его общему решению

Пусть

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{15.17}$$

– общий интеграл некоторого дифференциального уравнения. Покажем, как составить это уравнение. Для этого продифференцируем равенство (15.17) по  $x$ . Получим

$$\Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C)y' = 0 \tag{15.18}$$

Составить дифференциальное уравнение – это значит найти связь между  $x$ ,  $y$  и  $y'$  для всех его решений. Для этого достаточно исключить  $C$  из уравнений (15.17) и (15.18). Получим

$$F(x, y, y') = 0.$$

Это и есть искомое уравнение. С геометрической точки зрения его называют дифференциальным уравнением семейства кривых, описываемого уравнением (15.17).

**Пример 15.7.** Пусть семейство окружностей  $(x - C)^2 + y^2 = C^2$  (рис. 15.6) является общим решением некоторого дифференциального уравнения. Чтобы получить это уравнение, продифференцируем по  $x$  данное решение, тогда

$$2(x - C) + 2yy' = 0,$$

откуда

$$x - C = -yy'; \quad C = x + yy',$$

а значит, искомое дифференциальное уравнение имеет вид

$$y^2 y' + y^2 = x^2 + 2xyy' + y^2 y'^2,$$

или

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0.$$

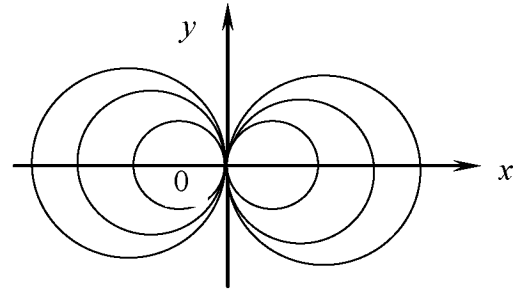


Рис. 15.6

## 10. Нахождение ортогональных траекторий семейств кривых

Пусть семейство кривых задано уравнением (15.17). Найдем семейство его ортогональных траекторий.

Исключая  $C$  из уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C)y' = 0 \end{cases}$$

получим дифференциальное уравнение семейства (15.17),

$$F(x, y, y') = 0 \tag{15.19}$$

Условие ортогональности двух кривых в точке их пересечения совпадает с условием ортогональности соответствующих касательных (рис. 15.7), т.е. имеет вид:

$$y'_{орт.тр.} = -\frac{1}{y'},$$

откуда

$$y' = -\frac{1}{y'_{орт.тр.}}$$

Поэтому если  $x$ ,  $y$  и  $y'$  для кривых семейства (15.17) удовлетворяют соотношению (15.19), то  $x$ ,  $y$  и  $y'$  для ортогональных траекторий удовлетворяют соотношению

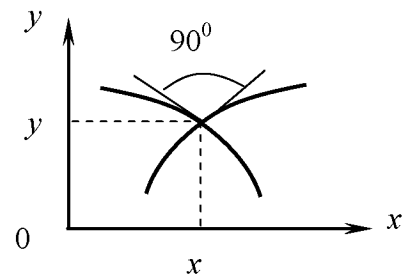


Рис. 15.7

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

Это – дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий. Его общий интеграл

$$I(x, y, C) = 0$$

является искомым уравнением этого семейства.

**Пример 15.8.** Найдем ортогональные траектории семейства  $y = Cx^2$ .  
Имеем из уравнения семейства

$$y' = 2Cx,$$

откуда

$$C = \frac{y'}{2x}.$$

Подставляя это в уравнение семейства, получим

$$y = \frac{y'}{2x} x^2,$$

т.е.

$$y = \frac{xy'}{2},$$

или

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

Это дифференциальное уравнение семейства  $y = Cx^{2*})$ . Заменяя в нем  $y'$  на  $-\frac{1}{y'}$ , получим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий

$$-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x},$$

т.е.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}.$$

Разделяем переменные:

$$ydy = -\frac{x dx}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{4} + C^2,$$

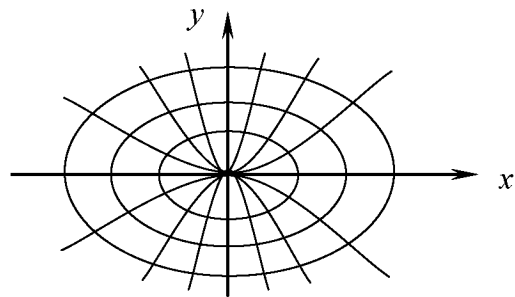


Рис. 15.8

\*) Мы могли написать его сразу, поскольку  $y = Cx^2$  является, как было показано в п.1, общим решением именно уравнения (15.1).

или

$$\frac{x^2}{(2C)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2}C)^2} = 1.$$

Это – семейство подобных эллипсов (рис. 15.8).

### 11. Особое решение уравнения 1-го порядка

Теорема Коши для уравнения  $y' = f(x, y)$  утверждает, что если в некоторой области функции  $f(x, y)$  и  $f'_y(x, y)$  непрерывны, то через каждую точку этой области проходит только одна интегральная кривая этого уравнения. Точки, в которых не выполняются условия теоремы Коши, называются **особыми точками дифференциального уравнения**. Линию, все точки которой являются особыми, называют особой линией уравнения. Если особая линия является в то же время интегральной для уравнения, то она называется особой интегральной линией или особым решением.

Пусть  $y = \varphi(x, C)$  – общее решение уравнения  $y' = f(x, y)$ . Предположим, что семейство  $y = \varphi(x, C)$  имеет огибающую  $y = F(x)$ . Тогда она также является интегральной кривой уравнения. Действительно, функция  $y = F(x)$  является решением данного дифференциального уравнения, так как для любой точки  $M(x, y)$  на огибающей величины  $x$ ,  $y$  и  $y'$  – те же, что и для проходящей через эту точку интегральной кривой семейства  $y = \varphi(x, C)$  (рис. 15.9), а значит, и соотношение между  $x$ ,  $y$  и  $y'$  будет тем же.

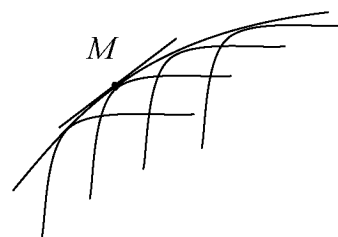


Рис. 15.9

Так как огибающая не входит в семейство, то решение  $y = F(x)$  не может быть получено из общего решения  $y = \varphi(x, C)$  ни при каком значении  $C$ , т.е. это не есть частное решение. Его называют особым решением.

**Пример 15.9.** Возьмем уравнение  $y^2(1 + y'^2) = 1$ . Имеем из него

$$y'^2 = \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1 - y^2}{y^2},$$

т.е.

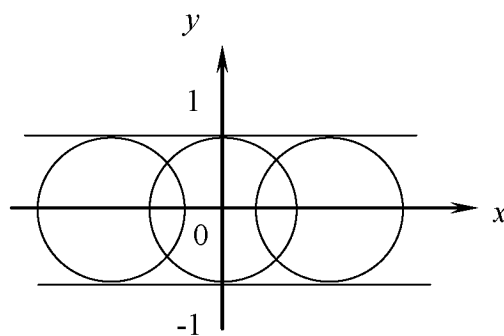


Рис. 15.10

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm dx.$$

Отсюда

$$\sqrt{1-y^2} = \mp(x+C),$$

т.е.

$$1-y^2 = (x+C)^2,$$

или

$$(x+C)^2 + y^2 = 1.$$

Это – общий интеграл исходного уравнения. Геометрически он изображается семейством окружностей. Это семейство имеет огибающую  $y = \pm 1$ . Легко видеть, что  $y = 1$  и  $y = -1$  есть решения данного уравнения. Следовательно, это – его особые решения.

**Примечание.** Поскольку далеко не всякое семейство линий имеет огибающую, то не всякое уравнение  $y' = f(x, y)$  имеет особое решение. Например, уравнение  $y' = x^2 + y^2$  заведомо не имеет особых решений, так как функция  $f(x, y) = x^2 + y^2$  и ее частная производная  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$  непрерывна всюду на плоскости  $xOy$ , т.е. выполнены условия единственности решения. Если же уравнение  $y' = f(x, y)$  имеет особое решение  $F(x)$ , то в каждой точке линии  $y = F(x)$  нарушается условие единственности, поскольку через эту точку проходят по крайней мере две интегральные кривые уравнения: кривая семейства  $y = \varphi(x, C)$  и огибающая этого семейства.

## 12. Общие сведения о дифференциальных уравнениях высших порядков

Возьмем уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Ему удовлетворяют функция  $y = \cos x$ , функция  $y = \sin x$  и вообще любая функция вида  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ , где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

Аналогично, уравнению

$$y''' - y' = 0$$

удовлетворяют функции  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $y = 1$  и вообще всякая функция вида  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3$ , где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  – любые числа.

Возьмем простейшее уравнение 4-го порядка:

$$y^{IV} = 1.$$

Имеем из него

$$\begin{aligned} y''' &= x + C_1, \\ y'' &= \frac{x^2}{2} + C_1 + C_2, \\ y' &= \frac{x^3}{6} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3, \end{aligned}$$

а значит

$$y = \frac{x^4}{24} + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4.$$

Общее решение произвольного уравнения  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (15.20)$$

записывается в общем случае так:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (15.21)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – произвольные постоянные. Придавая последним конкретные значения  $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$ , получим конкретное решение  $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*)$ . Оно называется частным решением уравнения.

Для нахождения из (15.21) нужного частного решения задаются начальные условия

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, y''|_{x=x_0} = y''_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y^{(n-1)}_0 \quad (15.22)$$

(их число всегда равно порядку уравнения). Дифференцируя (15.21)  $n-1$  раз и полагая  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y^{(n-1)}_0$ , получим систему  $n$  уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0 \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y'_0 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y^{(n-1)}_0 \end{cases},$$

из которой и находятся нужные  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

Всегда ли разрешима (и если да, то единственным ли образом) эта система? Ответ на это дает теорема Коши.



**Теорема 15.2.** Пусть функция  $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  и ее частные производные 1-го порядка

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

непрерывны в некоторой области  $D$  изменения аргументов  $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ .

Тогда для всякой точки  $M(x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$  этого  $(n+1)$ -мерного пространства существует и единственно частное решение уравнения (15.20), удовлетворяющее начальным условиям (15.22), и определенное в некоторой окрестности точки  $M$ .

Общим решением уравнения (15.20) называется функция  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , удовлетворяющая условиям:

1) При любых значениях  $C_1 = C_1^*, C_2 = C_2^*, \dots, C_n = C_n^*$  функция  $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*)$  есть решение этого уравнения.

2) Для любой точки  $(x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$  найдутся, и притом единственным образом, такие числа  $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$ , что функция  $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*)$  будет удовлетворять начальным условиям (15.22).

### 13. Простейшие случаи понижения порядка уравнений

Рассмотрим уравнение 2-го порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

и исследуем два частных случая.

**I.** Уравнение имеет вид

$$y'' = f(x, y'),$$

т.е. в него явно не входит  $y$ . Положим  $y' = t(x)$ . Тогда уравнение примет вид

$$t' = f(x, t),$$

а это – уравнение 1-го порядка. Пусть  $t = \varphi(x, C_1)$  – его общее решение. Это значит, что

$$y' = \varphi(x, C_1),$$

поэтому

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

**Пример 15.10.** Возьмем уравнение  $y'' - \frac{y'}{x} = x$ . Полагая  $y' = t(x)$ ,

получим линейное уравнение 1-го порядка

$$t' - \frac{1}{x}t = x.$$

Имеем

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0,$$

откуда

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x},$$

т.е.

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x},$$

а значит

$$\ln u = \ln x + \ln C,$$

т.е.

$$u = Cx.$$

Поэтому полагаем

$$t = C(x)x.$$

Получим

$$C'(x)x = x.$$

Отсюда

$$C'(x) = 1,$$

а значит

$$C(x) = x + C_1,$$

так что

$$t = x^2 + C_1x.$$

Но тогда

$$y = \int (x^2 + C_1x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2.$$

**II.** Уравнение имеет вид  $y'' = f(y, y')$ , т.е. оно не содержит явно  $x$ . Положим  $y' = t$ , где  $t(y)$  – новая неизвестная функция. Тогда

$$y'' = \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = t \frac{dt}{dy}.$$

Поэтому уравнение принимает вид

$$t \cdot t'(y) = f(y, t),$$

а это – уравнение 1-го порядка. Пусть  $t = \varphi(x, C_1)$  – его общее решение. Это значит, что

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1).$$

Отсюда

$$\frac{dy}{\varphi(x, C_1)} = dx,$$

а значит

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{\varphi(x, C_1)}.$$

**Пример 15.11.** Возьмем уравнение  $y'^2 + 2yy'' = 0$ . Полагая  $y' = t$ ,  $y'' = t \frac{dt}{dy}$ , получим

$$t^2 + 2yt \frac{dt}{dy} = 0; \quad (15.23)$$

т.е.

$$t = -2y \frac{dt}{dy}; \quad (15.24)$$

или

$$-\frac{dt}{t} = \frac{dy}{2y},$$

откуда

$$-\ln t + \ln C_1 = \frac{1}{2} \ln y,$$

т.е.

$$\frac{C_1}{t} = \sqrt{y},$$

а значит

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}, \quad \text{или} \quad \sqrt{y} dy = C_1 dx.$$

Получаем

$$\frac{2}{3} y \sqrt{y} = C_1 x + C_2,$$

или, что то же самое,

$$y \sqrt{y} = C_1 x + C_2.$$

Окончательно

$$y^3 = (C_1 x + C_2)^2. \quad (15.25)$$

**Примечание.** При переходе от (15.23) к (15.24) мы молча предполагали, что  $t \neq 0$ . Но если  $t \equiv 0$ , то  $y' \equiv 0$ , а значит,  $y = \text{const}$ , что содержится и в

(15.25) при  $C_1 = 0$ . Таким образом, «потери» решения при сокращении на  $t$  в данном случае не происходит.

#### 14. Однородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

Линейное уравнение 2-го порядка имеет вид

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y + D(x) = 0,$$

где  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  и  $D(x)$  – некоторые непрерывные функции. Путем почленного деления на  $A(x)$  это уравнение всегда можно привести к виду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

Если  $f(x) \equiv 0$ , уравнение называется уравнением без правой части, или однородным уравнением. Если  $f(x) \neq 0$ , уравнение называется неоднородным.

Будем рассматривать сначала только однородные уравнения, т.е. уравнения вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{15.26}$$

**Теорема 1.** Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  – решения уравнения (15.26), то и  $y_1(x) + y_2(x)$  есть его решение.

Действительно, по условию

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 \equiv 0, \quad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 \equiv 0.$$

Суммируя эти два тождества, получим то, что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** Если  $y(x)$  – решение уравнения (15.26), то  $Cy(x)$ , где  $C = const$ , также есть его решение.

По условию

$$y'' + p(x)y' + q(x)y \equiv 0.$$

Умножая это тождество на  $C$ , получим

$$(Cy)'' + p(x)(Cy)' + q(x)(Cy) \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

*Функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  называются линейно независимыми, если*

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq const.$$

Если же  $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \equiv const$ , т.е. если  $y_2 \equiv Cy_1$ , то эти функции называются

линейно зависимыми.

*Определитель*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (15.27)$$

называется определителем Вронского, или вронскианом, функций  $y_1$  и  $y_2$ .

**Теорема 3.** Если функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  линейно зависимы, то их вронскиан тождественно равен нулю.

Действительно, по условию  $y_2 = Cy_1$ , а значит

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & Cy_1 \\ y_1' & Cy_1' \end{vmatrix} \equiv 0.$$

**Теорема 4 (обратная теореме 3).**

Если  $W(x) \equiv 0$ , то соответствующие функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  линейно зависимы. По условию, в силу (15.27),

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 \equiv 0. \quad (15.28)$$

Отсюда

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} \equiv 0, \quad (15.29)$$

т.е.

$$\left( \frac{y_2}{y_1} \right)' \equiv 0,$$

а значит

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \equiv \text{const},$$

что и требовалось доказать.

**Примечание.** При переходе от (15.28) к (15.29) молча предполагалось, что  $y_1(x)$  не обращается в нуль. Можно показать, что теорема остается в силе и без этого условия.

Пусть  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  – решения уравнения (15.26). Тогда

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 \equiv 0$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 \equiv 0.$$

Умножая 1-е тождество на  $y_2$ , 2-е – на  $y_1$  и вычитая 1-е из 2-го, имеем

$$y_1 y_2'' - y_1'' y_2 + p(x)(y_1 y_2' - y_1' y_2) \equiv 0. \quad (15.30)$$

Поскольку  $W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ , то

$$W'(x) = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Поэтому (15.30) принимает вид

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dW}{dx} = -p(x)W.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dW}{W} = -p(x)dx.$$

Интегрируя это от произвольного  $x_0$  до текущего  $x$ , получим

$$\ln|W(x)| \Big|_{x_0}^x = -\int_{x_0}^x p(x)dx,$$

т.е.

$$\ln|W(x)| = -\int_{x_0}^x p(x)dx + \ln|W(x_0)|,$$

откуда

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx}. \quad (15.31)$$

Здесь  $W(x_0)$ , ввиду произвольности  $x_0$ , играет роль постоянной интегрирования.

Формула (15.31) называется формулой Остроградского-Лиувилля.

**Теорема 5.** Если  $y_1$  и  $y_2$  – линейно независимые частные решения уравнения (15.26), то их вронскиан ни в одной точке не обращается в нуль.

Предположим противное, т.е. пусть существует такое  $x_0$ , что  $W(x_0) = 0$ . Тогда, в силу (15.31), будет  $W(x) \equiv 0$ , а отсюда, на основании теоремы 4, следует, что если  $y_1$  и  $y_2$  – решения уравнения (15.26), то их вронскиан либо тождественно равен нулю (в случае линейно зависимых решений), либо, наоборот, ни при одном  $x$  не обращается в нуль (если  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы).

**Теорема 6.** Пусть  $y_1$  и  $y_2$  – линейно независимые частные решения уравнения (15.26), а  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные. Тогда  $y = C_1y_1 + C_2y_2$  есть общее решение уравнения.

То, что функция  $y = C_1y_1 + C_2y_2$  есть решение уравнения (15.26), следует из теорем 1 и 2. Докажем, что это решение – общее. Для этого надо доказать, что при любых начальных условиях

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0$$

найдутся такие  $C_1$  и  $C_2$ , что  $y = C_1y_1 + C_2y_2$  будет удовлетворять этим условиям.

Поскольку  $y' = C_1y'_1 + C_2y'_2$ , то начальные условия запишутся так

$$\left. \begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) &= y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) &= y_0' \end{aligned} \right\} \quad (15.32)$$

Определитель этой системы равен

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0),$$

и, в силу линейной независимости  $y_1$  и  $y_2$ , всегда отличен от нуля. Но тогда система (15.32) имеет единственное решение, т.е. нужные  $C_1$  и  $C_2$  находятся, и притом единственным образом.

Общего метода интегрирования уравнения (15.26) нет, т.е. в общем случае найти решение этого уравнения в конечном виде нельзя. Однако, имеет место следующая теорема.

**Теорема 7.** Если известно нетривиальное частное решение уравнения (15.26), то второе частое решение, линейно независимое от первого, может быть найдено при помощи действия интегрирования.

Перепишем формулу (15.31) так

$$W(x) = C e^{-\int p(x) dx}, \quad \text{или} \quad \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = C \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx}, \text{ т.е.}$$

$$\left( \frac{y_2}{y_1} \right)' = C \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx}.$$

Отсюда

$$\frac{y_2}{y_1} = C \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx,$$

а значит

$$y_2 = C y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx.$$

Поскольку  $y_2$  линейно независимо от  $y_1$  при  $C \neq 0$ , то можно взять  $C = 1$ . Тогда окончательно получим

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx. \quad (15.33)$$

Из доказанной теоремы следует, что знание одного частного решения уравнения (15.26) позволяет найти его общее решение.

**Пример 15.12.** Возьмем уравнение

$$(1 + x^2) y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Легко видеть, что оно имеет частное решение  $y_1 = x$ . Для нахождения  $y_2$  приведем сначала уравнение к виду (15.26):

$$y'' - \frac{2x}{(1+x^2)}y' + \frac{2}{(1+x^2)}y = 0.$$

Теперь формула (15.33) дает

$$\begin{aligned} y_2 &= x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{(1+x^2)} dx} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{\ln(1+x^2)} dx = x \int \frac{1}{x^2} (1+x^2) dx = x \int \left( \frac{1}{x^2} + 1 \right) dx = \\ &= x \left( -\frac{1}{x} + x \right) = -1 + x^2. \end{aligned}$$

Общее решение:

$$y = C_1 x + C_2 (x^2 - 1).$$

## 15. Однородные линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Возьмем уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{15.34}$$

где  $p = \text{const}$  и  $q = \text{const}$ .

Нетрудно видеть, что уравнению вида (15.34) может удовлетворять далеко не всякая функция. Например, такие функции, как  $x^\alpha$ ,  $\text{tg}x$ ,  $\ln x$ , очевидно, не могут превратить это уравнение в тождество. Для того, чтобы функция  $y(x)$  удовлетворяла уравнению (15.34), вид  $y'$  и  $y''$  должен быть аналогичен виду самого  $y(x)$ ; только в этом случае возможно тождество  $y'' + py' + qy \equiv 0$ . Такой функцией является экспоненциальная функция.

В связи с этим будем искать решение уравнения (15.34) в виде

$$y = e^{\lambda x},$$

где  $\lambda = \text{const}$ . Подставляя это в уравнение, получим

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0,$$

а так как  $e^{\lambda x} \neq 0$ , то

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{15.35}$$

Итак, для того, чтобы  $y = e^{\lambda x}$  было решением уравнения (15.34), число  $\lambda$  должно удовлетворять квадратному уравнению (15.35). Оно называется характеристическим уравнением для уравнения (15.34).

Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – корни характеристического уравнения. Возможны следующие случаи.

**I.** Числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – вещественные и разные. Тогда получаем два частных решения:  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$  и  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ . Они линейно независимы, так как



$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{\lambda_2 x}}{e^{\lambda_1 x}} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq \text{const}.$$

Поэтому сразу можно написать общее решение:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

**Примеры. 1)** Возьмем уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

а значит, общее решение:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

**2)** Для уравнения  $y'' + y' = 0$  характеристическое уравнение запишется так:

$$\lambda^2 + \lambda = 0,$$

откуда следует, что  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1$ , а значит

$$y = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

**3)** Обратимся к ранее полученному уравнению (15.2):

$$x'' - \omega^2 x = 0.$$

Характеристическое уравнение для него:

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0,$$

откуда  $\lambda_1 = \omega$ ,  $\lambda_2 = -\omega$ , а значит

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}.$$

Зададим начальные условия:

$$x|_{t=0} = a, \quad x'|_{t=0} = 0.$$

Это значит, что в начальный момент шарик находился на расстоянии  $a$  от оси и был неподвижен относительно трубки.

Поскольку  $x' = \omega C_1 e^{\omega t} - \omega C_2 e^{-\omega t}$ , то, полагая  $t=0$  в  $x(t)$  и  $x'(t)$ , получим

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = a \\ \omega(C_1 - C_2) = 0 \end{cases},$$

откуда

$$C_1 = C_2 = \frac{a}{2},$$

а значит

$$x = \frac{a}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}), \text{ т.е. } x = a \operatorname{ch} \omega t.$$

II. Числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и равны между собой:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . В этом случае имеем вначале только одно частое решение:  $y_1 = e^{\lambda x}$ . Для нахождения  $y_2$ , линейно независимого от  $y_1$ , используем формулу (15.33). Получим

$$y_2 = e^{\lambda x} \int \frac{1}{e^{2\lambda x}} e^{-\int p dx} dx = e^{\lambda x} \int \frac{1}{e^{2\lambda x}} e^{-px} dx.$$

Но, в силу теоремы Виета, в данном случае  $2\lambda = -p$ , а значит

$$y_2 = e^{\lambda x} \int dx,$$

т.е.

$$y_2 = e^{\lambda x} x,$$

а значит, общее решение:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

III. Числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – комплексно сопряженные, т.е.  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ . Поскольку в данном случае  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то формально можно применить формулу случая I:

$$\begin{aligned} y &= \tilde{C}_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + \tilde{C}_2 e^{(\alpha - \beta i)x} = \\ &= \tilde{C}_1 e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + \tilde{C}_2 e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) = \\ &= e^{\alpha x} \left( (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) \cos \beta x + (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2) i \sin \beta x \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = C_1, \quad (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2) i = C_2. \quad (15.36)$$

Тогда получим

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (15.37)$$

**Примечание.** Из обозначений (15.36) может показаться, что произвольная постоянная  $C_2$  – мнимая. Покажем, что если начальные условия – вещественные, то и числа  $C_1$  и  $C_2$  в (15.37) вещественны. Действительно, в данном случае

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Это – вещественные функции. Поэтому при вещественном  $x_0$  числа  $y_1(x_0)$  и  $y_2(x_0)$  также будут вещественными. По условию, вещественны и числа  $y_0$  и  $y'_0$ . Но тогда система (15.32), из которой находятся  $C_1$  и  $C_2$ , не может иметь комплексного решения.

**Примеры. 1)** Возьмем уравнение  $y'' + 4y' + 5y = 0$ . Имеем

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0,$$

откуда

$$\lambda = -2 + i,$$

а значит,

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

2) Для уравнения  $y'' + 9y = 0$  характеристическим уравнением будет

$$\lambda^2 + 9 = 0.$$

Его корни:  $\lambda = \pm 3i$ , т.е. они не произвольные комплексные, а чисто мнимые. Поэтому (15.37) дает

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

## 16. Общие теоремы о неоднородных линейных уравнениях 2-го порядка

Будем рассматривать уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (15.38)$$

**Теорема 15.3.** Если функции  $v_1(x)$  и  $v_2(x)$  есть решения уравнений  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$  и  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$  соответственно, то функция  $v_1(x) + v_2(x)$  есть решение уравнения  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ .

Действительно, по условию

$$v_1'' + p(x)v_1' + q(x)v_1 \equiv f_1(x), \quad v_2'' + p(x)v_2' + q(x)v_2 \equiv f_2(x).$$

Складывая эти тождества, получим

$$(v_1 + v_2)'' + p(x)(v_1 + v_2)' + q(x)(v_1 + v_2) \equiv f_1(x) + f_2(x),$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 15.4.** Пусть комплексная функция  $v(x) = v_1(x) + iv_2(x)$  есть решение уравнения (15.38) с комплексной правой частью  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ . Тогда функции  $v_1(x) = \operatorname{Re} v(x)$  и  $v_2(x) = \operatorname{Im} v(x)$  являются решениями уравнений  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$  и  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$  соответственно.

Действительно, по условию

$$(v_1 + iv_2)'' + p(x)(v_1 + iv_2)' + q(x)(v_1 + iv_2) \equiv f_1(x) + if_2(x),$$

т.е.

$$(v_1'' + p(x)v_1' + q(x)v_1) + (v_2'' + p(x)v_2' + q(x)v_2)i \equiv f_1(x) + if_2(x).$$

Приравнявая отдельно вещественные и мнимые части этого тождества, получим

$$v_1'' + p(x)v_1' + q(x)v_1 \equiv f_1(x), \quad v_2'' + p(x)v_2' + q(x)v_2 \equiv f_2(x),$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 15.5.** Общее решение неоднородного уравнения (15.38) равно

сумме какого-нибудь частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Пусть  $v(x)$  – частное решение уравнения (15.38), а  $u(x)$  – общее решение соответствующего уравнения (15.26). Тогда

$$u'' + p(x)u' + q(x)u \equiv 0, \quad v'' + p(x)v' + q(x)v \equiv f(x).$$

Складывая эти тождества, получим

$$(u + v)'' + p(x)(u + v)' + q(x)(u + v) \equiv f(x).$$

Таким образом, функция  $y = u(x) + v(x)$  есть решение уравнения (15.38). Докажем теперь, что это есть именно общее решение.

Пусть  $y_1$  и  $y_2$  – линейно независимые частные решения уравнения (15.26). Тогда  $u = C_1y_1 + C_2y_2$ , а значит  $y = C_1y_1 + C_2y_2 + v$ . Надо доказать, что для любых начальных условий

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0$$

найдутся такие  $C_1$  и  $C_2$ , что функция  $y = C_1y_1 + C_2y_2 + v$  будет удовлетворять этим начальным условиям.

Имеем

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + v'.$$

Полагая  $x = x_0$  в  $y$  и  $y'$ , получим, в силу начальных условий,

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + v(x_0) = y_0 \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + v'(x_0) = y'_0 \end{cases},$$

т.е.

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = y_0 - v(x_0) \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = y'_0 - v'(x_0) \end{cases}.$$

Из этой системы нужно определить  $C_1$  и  $C_2$ . Но определитель этой системы есть  $W(x_0)$  и, в силу линейной независимости функций  $y_1$  и  $y_2$ , он всегда отличен от нуля. Поэтому система имеет единственное решение, т.е., нужные  $C_1$  и  $C_2$  могут быть найдены, и притом единственным образом.

## 17. Линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида

Возьмем уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{14.39}$$

где  $p = \text{const}$  и  $q = \text{const}$ . Поскольку общее решение  $u(x)$  соответствующего

однородного уравнения (15.34) находится моментально, то интегрирование уравнения (15.39) фактически сводится к нахождению какого-нибудь частного решения этого уравнения. Оказывается, что при некоторых видах правой части соответствующее  $v(x)$  находится очень легко.

**I.** Пусть  $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ , где  $P_n(x)$  – многочлен  $n$ -й степени. Возможны три случая.

а) Число  $a$  не есть корень характеристического уравнения  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ . В этом случае частное решение уравнения (15.39) ищется в виде

$$v = e^{\alpha x} Q_n(x),$$

где  $Q_n(x)$  – неизвестный многочлен  $n$ -й степени. Имеем

$$v' = a e^{\alpha x} Q_n(x) + e^{\alpha x} Q_n'(x), \quad v'' = a^2 e^{\alpha x} Q_n(x) + 2a e^{\alpha x} Q_n'(x) + e^{\alpha x} Q_n''(x).$$

Подставляя  $v$ ,  $v'$  и  $v''$  в (15.39), получим

$$a^2 e^{\alpha x} Q_n(x) + 2a e^{\alpha x} Q_n'(x) + e^{\alpha x} Q_n''(x) + p a e^{\alpha x} Q_n(x) + p e^{\alpha x} Q_n'(x) + q e^{\alpha x} Q_n(x) = e^{\alpha x} P_n(x),$$

т.е.

$$(a^2 + pa + q)Q_n(x) + (2a + p)Q_n'(x) + Q_n''(x) = P_n(x). \quad (15.40)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим  $n + 1$  линейных уравнений, из которых и найдем  $n + 1$  неизвестных коэффициентов многочлена  $Q_n(x)$ .

**Пример 15.13.** Возьмем уравнение  $y'' + y = 4xe^x$ . Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Его корни равны  $\lambda_{1,2} = \pm i$ , а значит

$$u = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Далее, правая часть исходного уравнения имеет здесь вид:

$$f(x) = e^x P_1(x).$$

Поскольку  $\lambda_1 \neq 1$  и  $\lambda_2 \neq 1$ , то ищем  $v(x)$  в виде

$$v = e^x Q_1(x),$$

т.е. полагаем

$$v = (Ax + B)e^x.$$

Отсюда

$$v' = Ae^x + (Ax + B)e^x, \quad v'' = 2Ae^x + (Ax + B)e^x.$$

Подставляя все это в уравнение и сразу сокращая на  $e^x$ , получим

$$2A + Ax + B + Ax + B = 4x.$$

Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} 2A = 4 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases}$$

откуда  $A = 2$ ,  $B = -2$ , а значит,

$$v = (2x - 2)e^x.$$

Итак, общее решение:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2(x - 1)e^x.$$

б) Число  $a$  – простой корень характеристического уравнения. Тогда  $a^2 + pa + q = 0$ , и равенство (15.40) примет вид

$$(2a + p)Q'_n(x) + Q''_n(x) = P_n(x) \quad (15.41)$$

Теперь оно не может быть тождеством, так как степень левой части равна уже не  $n$ , а  $n-1$ . Для того, чтобы и левая часть имела  $n$ -ю степень, нужно положить  $v = e^{ax}Q_{n+1}(x)$ . Тогда вместо (15.41) получим

$$(2a + p)Q'_{n+1}(x) + Q''_{n+1}(x) = P_n(x) \quad (15.42)$$

В это равенство не входит свободный член неизвестного многочлена  $Q_{n+1}(x)$ , а значит, он может быть произвольным. Поэтому положим его равным нулю. Но в этом случае будет  $Q_{n+1}(x) = Q_n(x)x$ .

Итак, в рассматриваемом случае можно с самого начала положить

$$v = e^{ax}Q_n(x)x.$$

**Пример 15.14.** Найдем общее решение уравнения  $y'' + y' - 2y = e^x$ .

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$  имеет корни  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$ , а поэтому

$$u = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Далее, поскольку здесь  $f(x) = e^x P_0(x)$  и при этом  $1 = \lambda_1 \neq \lambda_2$ , то полагаем  $v = e^x Q_0(x)x$ , т.е.

$$v = Ae^x x.$$

Тогда

$$v' = Ae^x x + Ae^x, \quad v'' = Ae^x x + 2Ae^x.$$

Подставляя все это в уравнение и сокращая на  $e^x$ , будем иметь

$$Ax + 2A + Ax + A - 2Ax = 1, \quad (15.43)$$

т.е.

$$3A = 1,$$

откуда  $A = \frac{1}{3}$ , а значит

$$v = \frac{1}{3} e^x x.$$

Общее решение:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{3} e^x x.$$

**Примечание.** В левой части равенства (15.43) слагаемые, содержащие  $x^1$ , обязаны были уничтожиться, так как в противном случае тождество было бы невозможно.

в) Число  $a$  – двукратный корень характеристического уравнения. Тогда, по теореме Виета,  $2a = -p$ , т.е.  $2a + p = 0$ , и равенство (15.42) примет вид

$$Q''_{n+1}(x) = P_n(x),$$

т.е. теперь оно уже не может быть тождеством, поскольку степень левой части равна  $n-1$ , а не  $n$ . Следовательно, вместо  $Q_{n+1}(x)$  надо взять  $Q_{n+2}(x)$ , и тогда получим

$$Q''_{n+2}(x) = P_n(x).$$

Сюда не входят свободный член и коэффициент при  $x^1$  многочлена  $Q_{n+2}(x)$ . Поэтому они могут быть любыми. Полагая их равными нулю, получим, что  $Q_{n+2}(x) = Q_n(x)x^2$ , а значит, в этом случае  $v$  следует искать в виде

$$v = e^{ax} Q_n(x) x^2.$$

**Примечание.** Если правая часть уравнения (15.39) является суммой нескольких слагаемых вида  $e^{ax} P_n(x)$ , то надо воспользоваться теоремой 1 предыдущего параграфа.

**Пример 15.15.** Возьмем уравнение  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} - 4$ .

Имеем

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,$$

а значит

$$u = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} x.$$

Слагаемому  $e^{2x}$  в правой части соответствует частное решение  $v_1 = Ae^{2x}x^2$ , а слагаемому  $-4$  – частное решение  $v_2 = B$  (или имеет здесь место сочетание случаев в) и а)). Поэтому

$$v = Ae^{2x}x^2 + B.$$

Отсюда

$$v' = 2Ae^{2x}x^2 + 2Ae^{2x}x, \quad v'' = 4Ae^{2x}x^2 + 8Ae^{2x}x + 2Ae^{2x}.$$

Подставляя все это в уравнение (здесь уже нельзя сокращать на  $e^{2x}$ ), будем иметь

$$4Ae^{2x}x^2 + 8Ae^{2x}x + 2Ae^{2x} - 8Ae^{2x}x^2 - 8Ae^{2x}x + 4Ae^{2x}x^2 + 4B = e^{2x} - 4, \text{ т.е.}$$

$$2Ae^{2x} + 4B = e^{2x} - 4.$$

Отсюда

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 4B = -4 \end{cases},$$

т.е.  $A = \frac{1}{2}, B = -1$ , а значит

$$v = \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - 1.$$

Общее решение:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - 1.$$

II. Пусть  $f(x) = P_n(x)e^{ax}\sin lx$ . Это значит, что  $f(x) = \operatorname{Im}(P_n(x)e^{(a+li)x})$ .

Введем вспомогательное уравнение с комплексной правой частью:

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{(a+li)x}. \quad (15.44)$$

Формально мы имеем здесь случай 1.

а) Пусть  $a + li$  не есть корень характеристического уравнения. Тогда частное решение уравнения (15.44) имеет вид

$$\tilde{v} = Q_n(x)e^{(a+li)x}.$$

Многочлен  $Q_n(x)$  имеет, вообще говоря, комплексные коэффициенты, а значит

$$Q_n(x) = S_n(x) + iT_n(x),$$

где  $S_n(x)$  и  $T_n(x)$  – многочлены с вещественными коэффициентами (при этом степень одного из многочленов может быть и меньше, чем  $n$ ). Итак,

$$\tilde{v}(x) = (S_n(x) + iT_n(x))e^{(a+li)x}.$$

В силу теоремы 2 предыдущего параграфа, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$v = \operatorname{Im}\tilde{v} = \operatorname{Im}\left((S_n(x) + iT_n(x))e^{(a+li)x}\right) = \operatorname{Im}\left((S_n(x) + iT_n(x))e^{ax} \times\right.$$

$$\left. \times (\cos lx + i\sin lx)\right) = e^{ax}\operatorname{Im}\left((S_n(x) + iT_n(x))(\cos lx + i\sin lx)\right), \text{ т.е.}$$

$$v = e^{ax}(S_n(x)\sin lx + T_n(x)\cos lx). \quad (15.45)$$

б) Если  $a + li$  – корень характеристического уравнения, то

$$v = e^{ax}(S_n(x)\sin lx + T_n(x)\cos lx)x. \quad (15.46)$$

**Примечание.** Если  $f(x) = P_n(x)e^{ax}\cos lx$ , то, очевидно, вид формул



(15.45) и (15.46) сохраняется. Если же  $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos lx + Q_n(x)\sin lx)$ , то все равно, например, в случае а) будет

$$v = e^{ax}(S_n(x)\sin lx + T_n(x)\cos lx),$$

где  $n$  – высшая из степеней многочленов  $P_n(x)$  и  $Q_n(x)$ .

Заметим также, что на практике при интегрировании конкретных уравнений удобнее не пользоваться формулами (15.45) и (15.46), а каждый раз, как это было сделано для общего случая, вводить вспомогательное уравнение с комплексной правой частью \*).

**Пример 15.16.** Рассмотрим уравнение  $y'' + y' - 2y = e^x \cos 2x$ . Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$u = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Далее,  $e^x \cos 2x = \operatorname{Re} e^{(1+2i)x}$ . Вводим поэтому вспомогательное уравнение

$$y'' + y' - 2y = e^{(1+2i)x}. \quad (15.47)$$

Поскольку ни одно из чисел  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  не равно  $1+2i$ , то для уравнения (15.47) будет

$$\tilde{v} = A e^{(1+2i)x},$$

откуда

$$\tilde{v}' = A(1+2i)e^{(1+2i)x}, \quad \tilde{v}'' = A(1+2i)^2 e^{(1+2i)x} = A(-3+4i)e^{(1+2i)x}.$$

Подставляя  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{v}'$  и  $\tilde{v}''$  в (15.47) и попутно сокращая на  $e^{(1+2i)x}$ , получим  $A(-3+4i) + A(1+2i) - 2A = 1$ , т.е.

$$(-4+6i)A = 1,$$

откуда

$$A = \frac{1}{-4+6i} = \frac{-4-6i}{52} = -\frac{2+3i}{26}.$$

Итак,

$$\tilde{v} = -\frac{2+3i}{26} e^{(1+2i)x},$$

а значит, для исходного уравнения:

$$\begin{aligned} v &= \operatorname{Re} \left( -\frac{2+3i}{26} e^{(1+2i)x} \right) = -\frac{1}{26} \operatorname{Re} \left( (2+3i)e^x (\cos 2x + i \sin 2x) \right) = \\ &= -\frac{1}{26} e^x (2 \cos 2x - 3 \sin 2x). \end{aligned}$$

---

\* Исключение составляет лишь случай, когда  $a=0$  и когда проще искать  $v(x)$  (например, для случая а)) сразу в виде

$$v = S_n(x)\sin lx + T_n(x)\cos lx.$$

## 18. Исследование простейших колебательных процессов

**1. Свободные колебания без сопротивления.** Пусть на материальную точку с массой  $m$  действует упругая сила  $F = cx$ . Тогда уравнение движения запишется так:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx.$$

Положив  $\frac{c}{m} = k^2$ , получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0.$$

Поскольку  $\lambda_{1,2} = \pm ki$ , то общее решение:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (15.48)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находятся из начальных условий.

Перепишем (15.48) так

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left( \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos kt + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin kt \right).$$

Обозначим

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A, \quad \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos \varphi.$$

Последние два обозначения допустимы, так как, во-первых,

$$\left| \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right| \leq 1,$$

и, во-вторых,

$$\left( \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right)^2 + \left( \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right)^2 = 1.$$

Получаем теперь

$$x = A \sin(kt + \varphi).$$

Это – простое гармоническое колебание с амплитудой  $A$ , частотой  $k$  и начальной фазой  $\varphi$ .

**2. Свободные колебания в среде с сопротивлением.** Пусть на точку, кроме упругой силы, действует сила сопротивления среды  $R = \beta v$ . Тогда уравнение движения примет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\beta \frac{dx}{dt} - cx.$$

Полагая  $\frac{c}{m} = k^2$ ,  $\frac{\beta}{m} = 2h$ , будем иметь

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Обычно  $h$  бывает мало, т.е.  $h^2 - k^2 < 0$ . Обозначая  $\sqrt{k^2 - h^2} = \alpha$ , получим

$$\lambda_{1,2} = -h + \alpha i,$$

а значит

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t), \text{ т.е.}$$

$$x = Ae^{-ht} \sin(\alpha t + \varphi).$$

Итак, точка совершает затухающие колебания с амплитудой, убывающей по экспоненциальному закону, и с постоянной частотой (рис. 15.11).

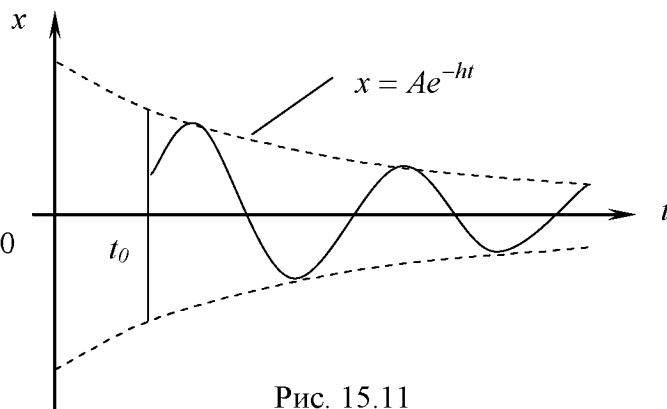


Рис. 15.11

**Примечание.** Если  $h > k$ , то  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и различны, а значит, в этом случае

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Движение в этом случае не является колебательным, но, поскольку, очевидно,  $\lambda_1 < 0$  и  $\lambda_2 < 0$ , также затухает.

Если же  $h = k$ , то  $\lambda_1 = \lambda_2 = -h$ , а значит

$$x = C_1 e^{-ht} + C_2 t e^{-ht},$$

т.е. движение также затухает (хотя и с меньшей скоростью благодаря множителю  $t$ ), но не является колебательным.

**3. Колебания при наличии синусоидальной внешней силы.** Пусть, кроме упругой силы и силы сопротивления среды, на точку действует внешняя сила, равная  $P \sin(\omega t + \psi)$ . Обозначая  $\frac{P}{m} = p$  и полагая для простоты записи  $\psi = 0$ , получим уравнение движения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + k^2 x = p \sin \omega t. \quad (15.49)$$

Очевидно, что  $x = u + v$ , причем  $u = Ae^{-ht} \sin(\alpha t + \varphi)$ . Функцию  $v$  ищем в виде

$$v = M \cos \omega t + N \sin \omega t.$$

Тогда

$$v' = \omega(-M \sin \omega t + N \cos \omega t), \quad v'' = -\omega^2(M \cos \omega t + N \sin \omega t),$$

и подстановка в уравнение дает

$$-\omega^2(M \cos \omega t + N \sin \omega t) + 2h\omega(-M \sin \omega t + N \cos \omega t) + k^2(M \cos \omega t + N \sin \omega t) = p \sin \omega t.$$

Отсюда

$$\begin{cases} -2h\omega M + (k^2 - \omega^2)N = p \\ (k^2 - \omega^2)M + 2h\omega N = 0 \end{cases},$$

т.е.

$$M = \frac{-2ph\omega}{(k^2 - \omega^2) + 4h^2\omega^2}, \quad N = \frac{p(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2) + 4h^2\omega^2},$$

а значит

$$v = -\frac{2ph\omega}{(k^2 - \omega^2) + 4h^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{p(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2) + 4h^2\omega^2} \sin \omega t. \quad (15.50)$$

Это – простое гармоническое колебание с амплитудой, равной  $\sqrt{M^2 + N^2}$ , и с начальной фазой, равной  $\operatorname{arctg} \frac{M}{N}$ .

Движения, описываемые слагаемыми  $u$  и  $v$ , называют соответственно свободными и вынужденными колебаниями. Поскольку  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u = 0$ , то при больших  $t$  движение описывается практически только вынужденными колебаниями. Их частота равна частоте внешней силы.

Предположим, что сопротивление отсутствует, т.е.  $h = 0$ . Тогда  $u = A \sin(kt + \varphi)$ , а

$$v = \frac{p}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (15.51)$$

В этом случае свободные колебания не затухают, и общее движение точки есть сумма двух простых гармонических колебаний с частотами  $k$  и  $\omega$ .

Пусть  $\omega \rightarrow k$ . Тогда из (15.51) следует, что амплитуда вынужденных колебаний делается бесконечно большой. Исследуем предельный случай, когда  $\omega = k$ . Поскольку  $h = 0$ , то  $\lambda_{1,2} = \pm ki$ , и равенство  $\omega = k$  указывает на то, что  $v$  надо искать в виде

$$v = (M \cos kt + N \sin kt)t.$$

Отсюда

$$\begin{cases} -2kM = p \\ -2kN = 0 \end{cases},$$

т.е.

$$M = -\frac{p}{2k}, \quad N = 0, \text{ а значит}$$

$$v = -\frac{p}{2k}t \cos kt,$$

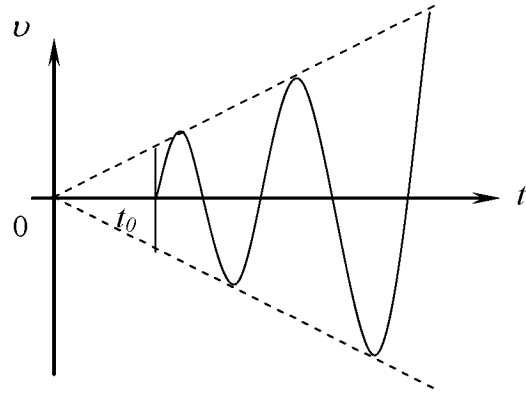


Рис. 15.12

т.е. амплитуда вынужденных колебаний растет пропорционально времени, рис. 15.12. Это явление называется резонансом.

Если же  $h \neq 0$ , то из (15.50) следует, что  $v = -\frac{p}{2k} \cos kt$ , т.е. резонанса

при  $\omega = k$  в этом случае нет. Итак, теоретически при наличии сопротивления резонанс невозможен. Однако, практически при малых  $h$  амплитуда вынужденных колебаний при  $\omega = k$  все равно становится слишком большой.

**Примечание.** Мы рассмотрели простейшие механические колебания. Однако, если на клеммы изображенной на чертеже электрической цепи (рис. 15.13) подавать напряжение  $v(t)$ , то сила тока  $i(t)$ , как легко показать, удовлетворяет уравнению

$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}v'(t).$$

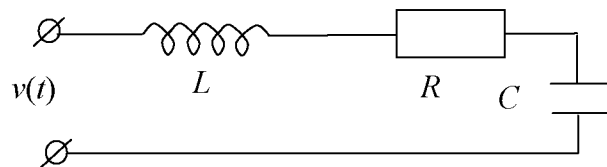


Рис. 15.13

Поэтому если  $v(t)$  меняется синусоидально, то это уравнение совершенно аналогично уравнению (15.49), а значит, в данной цепи имеют место явления, аналогичные только что описанным.

## 19. Интегрирование неоднородных линейных уравнений 2-го порядка методом варьирования произвольных постоянных

Возвратимся к уравнению

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (15.38)$$

Если его правая часть  $f(x)$  не имеет рассмотренного ранее «специального» вида, то даже в случае постоянных коэффициентов (что в данном параграфе не является обязательным) это уравнение не может быть проинтегрировано методом, описанным выше (его называют методом неопределенных коэффициентов). Мы рассмотрим сейчас более общий метод,

позволяющий находить общее решение уравнения (15.38), если известно общее решение соответствующего однородного уравнения (15.26).

Пусть  $y_1$  и  $y_2$  – линейно независимые частные решения однородного уравнения. Тогда его общее решение имеет вид

$$u = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (15.52)$$

Будем искать общее решение неоднородного уравнения (15.38) в таком же виде, а именно, положим

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2. \quad (15.53)$$

где  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  – неизвестные функции.

Однако, подставляя (15.53) в уравнение, мы не определим однозначно  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ , так как для нахождения двух неизвестных функций получим только одно условие. Поэтому необходимо еще одно, дополнительное условие, которое можно выбрать произвольно.

Из (15.53) имеем

$$y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2' + C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2.$$

В то же время из (15.52) следует, что

$$u' = C_1 y_1' + C_2 y_2'.$$

Потребуем теперь, чтобы не только  $y$  выглядело так же, как и  $u$ , но и чтобы  $y'$  выглядело так же, как и  $u'$ . Для этого надо положить

$$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \quad (15.54)$$

откуда и будет следовать, что

$$y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'. \quad (15.55)$$

Равенство (15.54) и является упомянутым выше дополнительным условием, наложенным на  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ .

Из (15.55) имеем

$$y'' = C_1(x) y_1'' + C_1'(x) y_1' + C_2(x) y_2'' + C_2'(x) y_2'.$$

Подставляя это, а также (15.55) и (15.53) в (15.38), получаем

$$C_1(x) y_1'' + C_1'(x) y_1' + C_2(x) y_2'' + C_2'(x) y_2' + p(x)(C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2') +$$

$$+ q(x)(C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2) = f(x), \text{ или}$$

$$C_1(x)(y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1) + C_2(x)(y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2) + C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x)$$

так  $y_1$  и  $y_2$  есть решения уравнения (15.26), то отсюда

$$C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x).$$

Присоединяя сюда условие (15.54), получим систему

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases} \quad (15.56)$$

Определитель этой системы есть  $W(x)$ , а так как  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы, то  $W(x) \neq 0$  при всех  $x$ . Поэтому из системы (15.56) можно найти, и притом единственным образом, неизвестные  $C_1'(x)$  и  $C_2'(x)$ :

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \quad C_2'(x) = \varphi_2(x),$$

откуда

$$C_1(x) = \Phi_1(x) + C_1, \quad C_2(x) = \Phi_2(x) + C_2.$$

Подставляя это в (15.53), имеем окончательно

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \Phi_1(x) y_1 + \Phi_2(x) y_2.$$

Описанный метод является обобщением метода, изложенного ранее для линейных уравнений 1-го порядка. Поэтому его также называют методом вариации произвольных постоянных.

**Пример 15.17.** Найдем общее решение уравнения  $y'' + y = \operatorname{tg} x$ .

Соответствующее однородное уравнение имеет общее решение

$$u = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Поэтому полагаем

$$y = C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = 0 \\ C_1'(x) \cos x - C_2'(x) \sin x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

из которой находим

$$C_1'(x) = \sin x, \quad C_2'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

а значит

$$C_1(x) = -\cos x + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} dx = \int \left( \cos x - \frac{1}{\cos x} \right) dx = \sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C_2.$$

Итак,

$$y = -\sin x \cos x + C_1 \sin x + \sin x \cos x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C_2 \cos x,$$

т.е.

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

## 20. Липейные уравнения высших порядков

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (15.57)$$

На него переносятся все определения и, как нетрудно проверить, все свойства, изученные для однородных линейных уравнений 2-го порядка.

Пусть  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_i(x)$  – некоторые функции, а  $C_1, C_2, \dots, C_i$  – постоянные числа. Выражение вида  $C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_iy_i$  называется линейной комбинацией функций  $y_1, y_2, \dots, y_i$ .

Функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_r(x)$  называются линейно независимыми, если ни одна из них не является линейной комбинацией остальных, т.е. если тождество

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ry_r \equiv 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда  $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$ .

**Пример 15.18.** Функции  $x, x^2$  и  $x^3$  линейно независимы, так как тождество  $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \equiv 0$  возможно лишь при  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ .

Функции  $\cos^2 x, \sin^2 x$  и  $\cos 2x$  линейно зависимы, так как

$$\cos 2x = 1 \cdot \cos^2 x + (-1) \sin^2 x.$$

Заметим, что при  $r = 2$  линейная независимость функций  $y_1$  и  $y_2$  означает, что  $y_2 \neq C_1y_1$ , что совпадает с прежним определением линейной независимости.

Пусть даны функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ . Их вронскианом называется определитель  $n$ -го порядка

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Предположим, что  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – частные решения уравнения (15.57). Тогда так же, как и для уравнения 2-го порядка, можно доказать, что либо  $W(x) \equiv 0$  (если  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно зависимы), либо  $W(x)$  ни при одном  $x$  не обращается в нуль (если  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно независимы). Отсюда вытекает, что если  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно независимые частные решения уравнения (15.57), то его общее решение дается формулой

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n,$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – произвольные постоянные. Обратимся к однородному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}y' + p_ny = 0. \quad (15.58)$$



Алгебраическое уравнение  $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$  называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (15.58).

Каждому простому корню  $\lambda$  характеристического уравнения отвечает частное решение  $e^{\lambda x}$ . Если  $\lambda$  –  $k$ -кратный корень характеристического уравнения, то ему отвечают  $k$  линейно независимых частных решений:  $e^{\lambda x}$ ,  $e^{\lambda x}x$ ,  $e^{\lambda x}x^2$ , ...,  $e^{\lambda x}x^{k-1}$ .

Каждой паре простых комплексных корней характеристического уравнения  $\alpha \pm \beta i$  отвечают частные решения  $e^{\alpha x} \cos \beta x$  и  $e^{\alpha x} \sin \beta x$ . Если же  $\alpha \pm \beta i$  – пара корней  $k$ -й кратности, то ей отвечают частные решения

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

**Пример 15.19.** Возьмем уравнение  $y^{IV} + 4y = 0$ . Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 4 = 0.$$

Перепишем его так:  $(\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4) - 4\lambda^2 = 0,$

т.е.

$$(\lambda^2 + 2)^2 - (2\lambda)^2 = 0,$$

или

$$(\lambda^2 + 2 + 2\lambda)(\lambda^2 + 2 - 2\lambda) = 0.$$

Решая уравнение  $\lambda^2 + 2 + 2\lambda = 0$ , получим

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i.$$

Аналогично из уравнения  $\lambda^2 - 2 + 2\lambda = 0$  имеем  $\lambda_{3,4} = 1 \pm i$ .

Этим парам простых комплексных корней отвечают частные решения  $e^{-x} \cos x$ ,  $e^{-x} \sin x$ ,  $e^x \cos x$ ,  $e^x \sin x$  соответственно. Поэтому общее решение:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x(C_3 \cos x + C_4 \sin x).$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x). \quad (15.59)$$

Его общее решение представляется как  $y = u + v$ , где  $u$  – общее решение соответствующего однородного уравнения (15.58), а  $v$  – произвольное частное решение уравнение (15.59) (этот факт, конечно, верен и для уравнений с переменными коэффициентами).

**I.** Пусть  $f(x) = e^{ax} \rho_n(x)$ , где  $\rho_n(x)$  – многочлен  $n$ -й степени. Если  $a$  не есть корень характеристического уравнения, то частное решение уравнения

(15.59) ищется в виде

$$v = e^{ax} Q_n(x),$$

где  $Q_n(x)$  – многочлен  $n$ -й степени.

Если же  $a - m$  – кратный корень характеристического уравнения, то полагаем

$$v = e^{ax} Q_n(x) x^m.$$

В частности, если  $a$  – простой корень, то  $m = 1$ .

**II.** Пусть  $f(x) = e^{ax} (\rho(x) \cos bx + Q(x) \sin bx)$ . Если  $a + bi$  и  $a - bi$  не есть корни характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде

$$v = e^{ax} (S_n(x) \cos bx + T_n(x) \sin bx),$$

где  $n$  – большая из степеней многочленов  $\rho(x)$  и  $Q(x)$ . Если же  $a \pm bi$  – пара  $m$  – кратных корней характеристического уравнения, то полагаем

$$v = e^{ax} (S_n(x) \cos bx + T_n(x) \sin bx) x^m.$$

**Ирпмер 15.20.** Возьмем уравнение  $y^{IV} - y^{II} = 2x - e^x + 5e^{2x}$ .

Характеристическое уравнение  $\lambda^4 - \lambda^2 = 0$  имеет корни  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = 1$ ,  $\lambda_4 = -1$ , а значит

$$u = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}.$$

Частное решение ищем в виде

$$v = (Ax + B)x^2 + Ce^x x + De^{2x},$$

т.е.

$$v = Ax^3 + Bx^2 + Ce^x x + De^{2x}.$$

Отсюда

$$v' = 3Ax^2 + 2Bx + Ce^x + Ce^x x + 2De^{2x},$$

$$v'' = 6Ax + 2B + 2Ce^x + Ce^x x + 4De^{2x},$$

$$v''' = 6A + 3Ce^x + Cxe^x + 8De^{2x},$$

$$v^{IV} = 4Ce^x + Cxe^x + 16De^{2x}.$$

Подстановка в уравнение дает

$$4Ce^x + Cxe^x + 16De^{2x} - 6Ax - 2B - 2Ce^x - Ce^x x - 4De^{2x} = 2x - e^x + 5e^{2x},$$

т.е.

$$2Ce^x + 12De^{2x} - 6Ax - 2B = 2x - e^x + 5e^{2x}.$$

Отсюда

$$-6Ax = 2, \quad -2B = 0, \quad 2C = -1, \quad 12D = 5,$$

т.е.

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{2}, \quad D = \frac{5}{12},$$

а значит

$$v = -\frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} e^x + \frac{5}{12} e^{2x}.$$

## XVI. Иервпчыые сведеппя о спстемах лпейных дифференциальных уравнений

Для описания многих физических процессов или явлений нередко требуется несколько функций. Отыскание этих функций может привести к нескольким дифференциальным уравнениям, образующим систему.

Будем обозначать независимое переменное буквой  $t$ , неизвестные функции –  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , а производные функций – как обычно,  $x'_1, \dots, x_1^{(m_1)}, \dots, x'_2, \dots, x_2^{(m_2)}, \dots, x'_n, x''_n, \dots, x_n^{(m_n)}$ .

**Системой обыкновенных дифференциальных уравнений** называется система уравнений вида:

$$F_i(t, x_1, x'_1, \dots, x_1^{(m_1)}, x_2, x'_2, \dots, x_2^{(m_2)}, \dots, x_n, x'_n, \dots, x_n^{(m_n)}) = 0. \quad (16.1)$$

Наибольшее из чисел  $m_1, m_2, \dots, m_n$  называется порядком системы уравнений (16.1). Например, в систему дифференциальных уравнений первого порядка могут входить лишь переменная  $t$ , неизвестные функции  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и их первые производные  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ , в систему уравнений второго порядка входят еще вторые производные  $x''_1, x''_2, \dots, x''_n$ , и т.д..

**Определение.** Набор функций  $x_i(t)$ , определенных на некотором промежутке  $T$  (конечном или бесконечном, открытом или замкнутом) оси  $t$ , имеющих на этом промежутке те производные, которые входят в уравнение (16.1), и удовлетворяющих этим уравнениям при всех  $t \in T$ , называется **решением системы уравнений** (16.1).

В дальнейшем независимая переменная  $t$  может быть интерпретирована как время, поскольку величины, характеризующие физические процессы, как правило, зависят от времени.

Для упрощения записи употребляются векторные обозначения. Так, набор функций  $x_1, x_2, \dots, x_n$  обозначается

$$\vec{x}(t) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

при этом  $\vec{x}(t)$  называется вектор-функцией скалярного аргумента  $t$ .

Производные вектор-функции определяются как обычно:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n\},$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \{\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_n\}.$$

Система дифференциальных уравнений первого порядка

$$F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) = 0 \quad (i = \overline{1, l}), \quad (16.2)$$

которая в векторных обозначениях имеет вид

$$F_i(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = 0 \quad (i = \overline{1, l}),$$

занимает особое положение среди систем дифференциальных уравнений, так как к ней приводится произвольная система уравнений (16.1) с помощью

введения новых неизвестных функций и увеличения числа уравнений. Например, рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} - y = 0 \\ t^3 \frac{dy}{dt} - 2x = 0 \end{cases}.$$

Положим

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ y &= x_3. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = x_3 \\ t^3 \frac{dx_3}{dt} = 2x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{2x_1}{t^3} \end{cases}.$$

Таким образом, система двух уравнений второго порядка приведена к системе трех уравнений первого порядка.

Рассмотрим одно дифференциальное уравнение  $m$ -го порядка с одной неизвестной функцией:

$$F(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = 0$$

Это частный случай системы (16.1), когда  $l = n = 1$ ,  $m_i = m$ . Вводя новые переменные

$$y_1 = x, \quad y_2 = x', \quad \dots, \quad y_m = x^{(m-1)},$$

получим систему  $m$  уравнений первого порядка с  $m$  неизвестными функциями

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_3 \\ \dots \\ \frac{dy_{m-1}}{dt} = y_m \end{cases}, \text{ т.е. } F(t, y_1, y_2, \dots, y_m, \dot{y}_m) = 0.$$

Если в (16.2) число уравнений равно числу неизвестных, т.е.  $n = l$ , и сами уравнения можно разрешить относительно  $x'_i$  ( $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ ), то систему

(16.2) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (16.3)$$

или сокращенно в векторной форме

$$\vec{\dot{x}} = \vec{f}(t, x).$$

Система дифференциальных уравнений (16.3) называется **нормальной системой** обыкновенных дифференциальных уравнений. Число неизвестных функций  $n$  иногда называют **порядком нормальной системы** дифференциальных уравнений (16.3)

**Решением системы** (16.3) в интервале  $(a, b)$  называется совокупность любых  $n$  функций  $x_i = \varphi_i(t)$ ,  $(i = \overline{1, n})$ , или  $\vec{x} = x(t)$ , определенных и непрерывно дифференцируемых в интервале  $(a, b)$ , если они обращают уравнения системы (16.3) в тождества, справедливые для всех значений  $t \in (a, b)$ .

## 1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

**Задачей Коши** для системы (16.3) называется задача нахождения решения  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  этой системы, удовлетворяющего начальным условиям

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0, \quad (16.4)$$

где  $t_0, x_i^0$  – заданные числа  $(i = \overline{1, n})$ .

**Теорема 16.1.** Пусть имеем нормальную систему дифференциальных уравнений (16.3), и пусть функции  $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$   $(i = \overline{1, n})$  определены в некоторой  $(n+1)$ -мерной области  $D$  изменения переменных  $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если существует окрестность  $\Omega$  точки  $M_0(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ , в которой функции  $f_i$  а) непрерывны, б) имеют ограниченные частные производные по переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то найдется интервал  $t_0 - h < t < t_0 + h$  изменения  $t$ , в котором  $\exists!$  решение нормальной системы (16.3), удовлетворяющее начальным условиям (16.4).

Доказательство этой теоремы можно найти в [11]

Система  $n$  дифференцируемых функций

$$x_i = x_i(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (i = \overline{1, n}) \quad (16.5)$$

независимой переменной  $t$  и  $n$  произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  называется **общим решением нормальной системы** (16.3), если:

- 1) при любых допустимых значениях  $C_1, C_2, \dots, C_n$  система функций (16.5) обращает уравнения (16.3) в тождества;

2) в области, где выполняются условия теоремы Коши, функции (16.5) решают любую задачу Коши.

## 2. Интегрирование системы дифференциальных уравнений (СДУ) путем сведения к одному уравнению более высокого порядка

Один из основных методов интегрирования СДУ заключается в следующем: из уравнений системы и из уравнений, получающихся дифференцированием уравнений, входящих в систему, исключают все неизвестные функции, кроме одной, для определения которой получают одно дифференциальное уравнение более высокого порядка. Интегрируя это уравнение, находят одну из неизвестных функций, а остальные неизвестные функции, по возможности, без интегрирования, определяются из исходных уравнений и уравнений, получившихся в результате их дифференцирования.

Например, рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}.$$

Дифференцируем одно из уравнений, например, первое. Тогда получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$$

Учитывая второе уравнение системы, приходим к одному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x.$$

или

$$x'' - x = 0.$$

Это уравнение с постоянными коэффициентами и решение его выполняется обычным образом, т.е. составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0, \quad k_{1,2} = \pm 1.$$

Находим фундаментальную систему решений

$$x_1 = e^t, \quad x_2 = e^{-t}.$$

Составляем общее решение

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

И так как  $y = \frac{dx}{dt}$ , то дифференцируя  $x(t)$ , находим  $y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$ .

### 3. Метод интегрируемых комбинаций

Интегрируемой комбинацией называется дифференциальное уравнение, являющееся следствием уравнений  $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ , но уже легко интегрируемое. Т.е. с помощью подходящих арифметических операций (сложение, вычитание, умножение, деление) из уравнений системы (16.1) образуют так называемые интегрируемые комбинации, т.е. достаточно просто решаемые уравнения вида

$$F\left(t, u, \frac{du}{dt}\right) = 0,$$

где  $u$  – некоторая функция от искомых функций. Каждая интегрируемая комбинация дает первый интеграл, т.е. конечное уравнение

$$\Phi_1(t, x_1, \dots, x_n) = C_1,$$

связывающее неизвестные функции и независимые переменные. Итак, первым интегралом  $\Phi(t, x_1, \dots, x_n) = C$  системы уравнений называется конечное уравнение, обращающееся в тождество при некотором значении  $C$ , если вместо  $x_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) подставлено решение системы (16.1). Если найдено  $k$  интегрируемых комбинаций, то получаем  $k$  первых интегралов:

$$\Phi_1(\dots) = C_1, \Phi_2(\dots) = C_2, \dots, \Phi_k(\dots) = C_k$$

Найденный первый интеграл позволяет выразить одну из неизвестных функций через остальные переменные, и тем самым свести задачу к интегрированию системы более низкого порядка. Если найдено  $n$  независимых первых интегралов, то интегрирование закончено. Если предположить, что интегралы  $\Phi_i$  имеют частные производные, то для независимости их относительно  $x_1, \dots, x_n$  необходимо и достаточно, чтобы якобиан функций  $\Phi_i$  по переменным  $x_i$  не обращался тождественно в 0:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0.$$

$n$  независимых первых интегралов образуют общий интеграл системы.

**Пример 16.1.** Рассмотрим СДУ вида

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y + 4z \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 5z \end{cases}.$$

Складывая уравнения, получим, что

$$\frac{d(y+z)}{dx} = 9(y+z),$$

откуда после интегрирования, получим

$$\ln(y+z) = 9x + \ln C_1,$$

т.е. первый интеграл системы имеет вид

$$y+z = C_1 e^{9x}.$$

Вычитая из первого уравнения исходной системы второе, получим вторую интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(y-z)}{dx} = y-z$$

или

$$\frac{d(y-z)}{y-z} = dx.$$

Тогда, после интегрирования, имеем

$$\ln|y-z| = x + \ln C_2,$$

$$y-z = C_2 e^x.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} y+z = C_1 e^{9x} \\ y-z = C_2 e^x \end{cases}.$$

Откуда следует выражения для неизвестных функций

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(C_1 e^{9x} + C_2 e^x) \\ z = \frac{1}{2}(C_1 e^{9x} - C_2 e^x) \end{cases}.$$

При этом первые два интеграла определяются с помощью функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , которые имеют вид

$$\Phi_1 = (y+z)e^{-9x} = C_1;$$

$$\Phi_2 = (y-z)e^{-x} = C_2.$$

Проверим, что функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  линейно независимы. С этой целью вычислим их якобиан:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-9x} & e^{-9x} \\ e^{-x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x} e^{-9x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2e^{-x} e^{-9x} \neq 0.$$

**Ирпмер 16.2.** Рассмотрим систему 3-х дифференциальных уравнений:



$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_3 - y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 - y_3 \\ \frac{dy_3}{dx} = y_2 - y_1 \end{cases}$$

**Решение.** Для нахождения первой интегрируемой комбинации сложим данные уравнения, тогда получим

$$d(y_1 + y_2 + y_3) = 0;$$

откуда имеем первый интеграл:

$$y_1 + y_2 + y_3 = C_1.$$

Для нахождения второй интегрируемой комбинации умножим первое уравнение на  $y_1$ , второе – на  $y_2$ , третье – на  $y_3$  и сложим. Тогда имеем:

$$y_1 y_1' + y_2 y_2' + y_3 y_3' = y_3 y_1 - y_1 y_2 + y_1 y_2 - y_3 y_2 + y_2 y_3 - y_1 y_3 = 0.$$

Откуда следует, что

$$\frac{1}{2} d(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 0.$$

Тогда первых два интеграла запишутся как

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_2 \\ y_1 + y_2 + y_3 = C_1 \end{cases}$$

Чтобы получить оставшийся первый интеграл, сложим второе и третье уравнения, тогда получим, что

$$\frac{d(y_2 + y_3)}{dt} = -(y_3 - y_2).$$

Заменяя выражение  $y_3 - y_2$  на  $\frac{dy_1}{dt}$ , пользуясь первым уравнением исходной системы, получим равенство

$$\frac{d(y_2 + y_3)}{dt} = \frac{dy_1}{dt}$$

или

$$d(y_2 + y_3 - y_1) = 0 \Rightarrow$$

$$y_2 + y_3 - y_1 = C_3$$

Таким образом, окончательно получим ответ:

$$y_1 + y_2 + y_3 = C_1$$

$$-y_1 + y_2 + y_3 = C_2$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_3.$$

**Пример 16.3.**

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t} \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + 1 \end{cases}.$$

**Решение.** Очевидно, что

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0;$$

Тогда первый интеграл имеет вид:

$$x_1 - x_2 = C_1.$$

Учитывая выражения для  $x_1$ , исходную систему представим в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = \frac{C_1}{x_3 - t} \\ \frac{dx_3}{dt} = C_1 + 1 \end{cases}.$$

Откуда получим, что

$$\begin{aligned} x_3 &= (C_1 + 1)t + C_2; \\ x_3 - t &= C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{C_1}{C_1 t + C_2};$$

откуда

$$x_2 = \ln|C_1 t + C_2| + C_3.$$

**Пример 16.4.** Найти решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x - t} \end{cases};$$

которое удовлетворяет заданным начальным условиям:

$$\begin{aligned} x|_{t=0} &= 1 \\ y|_{t=0} &= 1 \end{aligned}.$$

**Решение.** Имеем

$$\begin{cases} y\left(\frac{dx}{dt}-1\right)=-1 \\ \frac{dy}{dt}(x-t)=1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y\frac{d(x-t)}{dt}=-1 \\ (x-t)\frac{dy}{dt}=1 \end{cases}.$$

Сложим полученные уравнения,

$$y\frac{d(x-t)}{dt}+(x-t)\frac{dy}{dt}=0,$$

затем свернем полученное уравнение как

$$d[y(x-t)]=0,$$

тогда получим, что

$$y(x-t)=C_1.$$

Отсюда

$$x-t=\frac{C_1}{y}.$$

Из второго уравнения системы имеем, что

$$\frac{dy}{dt}=\frac{y}{C_1}.$$

Разделяя переменные, приходим к уравнению

$$\frac{dy}{y}=\frac{dt}{C_1},$$

тогда

$$\ln y=\frac{1}{C_1}t+\ln C_2.$$

Таким образом, решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y=C_2e^{\frac{t}{C_1}} \\ x=t+\frac{C_1}{C_2}e^{-\frac{t}{C_1}} \end{cases}.$$

#### 4. Симметричная форма системы дифференциальных уравнений

Для нахождения интегрируемых комбинаций при решении системы

дифференциальных уравнений иногда бывает удобно записать ее в симметричной форме:

$$\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t, x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dt}{1} \quad (16.6)$$

В такой системе переменные  $t, x_1, \dots, x_n$  равноправны, что в некоторых случаях упрощает нахождение интегрируемых комбинаций.

Для решения системы (16.6) берут либо пары отношений, допускающие разделение переменных, либо же используют производные пропорций.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_m}{b_m} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_m b_m}.$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3};$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3}.$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2};$$

$$a_1 b_2 = a_2 b_1;$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2} = \frac{\lambda_1 a_1 b_2 + \lambda_2 a_2 b_2}{\lambda_1 b_1 b_2 + \lambda_2 b_2^2} = \frac{\lambda_1 a_2 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2}{\lambda_1 b_1 b_2 + \lambda_2 b_2^2} = \frac{a_2 (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)}{b_2 (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)}.$$

**Пример 16.5.**

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z};$$

$$y = C_1 z.$$

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x^3 - xy^2 - xz^2 + 2xy^2 + 2xz^2} = \frac{dy}{2xy};$$

$$\frac{\frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2)}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy};$$

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln y + \ln C_2;$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2 \\ \frac{y}{z} = C_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{dt}{2x} &= \frac{dx}{-\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x}; \\ \frac{d(t+x+y)}{0} &= \frac{dt}{2x}; \\ t+x+y &= C_2; \\ \int \ln t dt &= -\int 2x dx; \\ t \ln t - t &= -x^2 + C_1; \\ t(\ln t - 1) + x^2 &= C_1; \end{aligned}$$

## 5. Интегрирование однородных линейных систем с постоянными коэффициентами

Однородной линейной системой с постоянными коэффициентами называется система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k(t) \quad (i = \overline{1, n}) \quad (16.7)$$

где коэффициенты  $a_{ik}$  – постоянные, а  $x_k(t)$  – искомые функции от  $t$ . Систему (16.7) можно коротко записать в виде одного матричного уравнения:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad (16.8)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}.$$

Однострочная матрица  $Y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$  называется частным решением

уравнения (16.8) в интервале  $(a, b)$ , если выполняется тождество:

$$\frac{dY}{dt} = AY(t) \quad \text{для } a < t < b$$

Система частных решений

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_1^{(2)}(t) \\ \dots \\ x_1^{(n)}(t) \end{bmatrix}, X_2(t) = \begin{bmatrix} x_2^{(1)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \\ \dots \\ x_2^{(n)}(t) \end{bmatrix}, \dots, X_n(t) = \begin{bmatrix} x_n^{(1)}(t) \\ x_n^{(2)}(t) \\ \dots \\ x_n^{(n)}(t) \end{bmatrix}.$$

(здесь в записи  $x_i^{(k)}$  – нижний индекс указывает номер решения, верхний – номер функции в решении) называется фундаментальной на интервале  $(a, b)$ , если ее определитель Вронского

$$w(t) = w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\forall t \in (a, b)$$

**Теорема 16.2.** Если система частных решений однородного уравнения (16.8) является фундаментальной, то общее решение этого уравнения имеет вид

$$\vec{X}(t) = c_1 \vec{X}_1(t) + c_2 \vec{X}_2(t) + \dots + c_n \vec{X}_n(t), \quad (16.9)$$

где  $C_i (i=1, \bar{n})$  – произвольные постоянные. Доказательство этой теоремы читатель может выполнить самостоятельно.

Линейные системы можно интегрировать различными способами, рассмотренными ранее, например методом исключения, путем нахождения интегрируемых комбинаций и т.д. Для интегрирования однородных линейных систем с постоянными коэффициентами применяется также метод Эйлера.

Рассмотрим этот метод в применении к системе трёх однородных дифференциальных уравнений (ОДУ).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases}$$

Решение системы ищем в виде

$$x = \lambda e^{rt}, y = \mu \cdot e^{rt}, z = \nu e^{rt},$$

$$\lambda, \mu, \nu, r - const$$

Подставляя это решение в систему, получим

$$\begin{aligned}\lambda r e^{rt} &= e^{rt} (3\lambda - \mu + \nu) \\ \mu r e^{rt} &= e^{rt} (-\lambda + 5\mu - \nu) \\ \nu r e^{rt} &= e^{rt} (\lambda - \mu + 3\nu) \\ \begin{cases} \lambda(3-r) - \mu + \nu = 0 \\ -\lambda + \mu(5-r) - \nu = 0 \\ \lambda - \mu + \nu(3-r) = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Система уравнений относительно  $\lambda, \mu, \nu$  имеет ненулевое решение, если её определитель равен нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-r & -1 & 1 \\ -1 & 5-r & -1 \\ 1 & -1 & 3-r \end{vmatrix} = 0.$$

Полученное уравнение называется характеристическим уравнением

$$r^3 - 11r^2 - 36r - 36 = 0.$$

Корням этого уравнения  $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 6$  соответствуют числа

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1, \mu_1 = 0, \nu_1 = -1 \\ \lambda_2 &= 1, \mu_2 = 1, \nu_2 = 1 \\ \lambda_3 &= 1, \mu_3 = -2, \nu_3 = 1.\end{aligned}$$

Выписываем частные решения

$$\begin{aligned}x_1 &= e^{2t} & y_1 &= 0 & z_1 &= -1e^{2t} \\ x_2 &= e^{3t} & y_2 &= e^{3t} & z_1 &= e^{3t} \\ x_3 &= e^{-6t} & y_3 &= -2e^{6t} & z_1 &= e^{6t}\end{aligned}$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned}x &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t} \\ y &= C_2 e^{3t} - 3C_3 e^{6t} \\ z &= -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}\end{aligned}$$

В принятых ранее обозначениях частные решения запишем как

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= e^{2t} & x_1^{(2)} &= 0 & x_1^{(3)} &= -e^{2t} \\ x_2^{(1)} &= e^{3t} & x_2^{(2)} &= e^{3t} & x_2^{(3)} &= e^{3t} \\ x_3^{(1)} &= e^{6t} & x_3^{(2)} &= -2e^{6t} & x_3^{(3)} &= e^{6t}\end{aligned}$$

Здесь верхний индекс совпадает с номером неизвестной функции, а нижний указывает номер решения, т.е.  $x_1^{(1)} = x_1, x_1^{(2)} = y_1, x_1^{(3)} = z_1$  и т.д. Тогда в векторной форме частные решения  $\vec{X}_i$  представляются как

$$\vec{X}_1 = (e^{2t}, 0, -e^{2t})^T$$

$$\vec{X}_2 = (e^{3t}, e^{3t}, e^{3t})^T$$

$$\vec{X}_3 = (e^{6t}, -2e^{6t}, e^{6t})^T$$

Общее решение  $\vec{X} = \sum C_i \vec{X}_i$ , т.е.

$$\vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -e^{2t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} e^{6t} \\ -2e^{6t} \\ e^{6t} \end{bmatrix}.$$

Откуда следует, что

$$x = x^{(1)} = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}$$

$$y = x^{(2)} = C_2 e^{3t} - 3C_3 e^{6t}$$

$$z = x^{(3)} = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}$$

Рассмотрим теперь *случай, когда корни характеристического уравнения комплексные.*

**Ирпмер 16.6.** Решить систему:

$$\frac{dx}{dt} = x - 5y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - y$$

Составим характеристическое уравнение. Система при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} (1-r)\lambda - 5\mu = 0 \\ 2\lambda - (1+r)\mu = 0 \end{cases} \quad (16.10)$$

$$\begin{vmatrix} 1-r & -5 \\ 2 & -(1+r) \end{vmatrix} = 0$$

$$-(1-r^2) + 1 = 0$$

$$r^2 + 9 = 0,$$

$$r_{1,2} = \pm 3i.$$

подставим последовательно найденные корни в полученное характеристическое уравнение (16.10):

$$\begin{cases} (1-3i)\lambda - 5\mu = 0 \\ 2\lambda - (1+3i)\mu = 0 \end{cases}$$

Одно уравнение является следствием другого, т.к.  $\Delta = 0$ .



$$5\mu = (1-3i)\lambda,$$

если  $\lambda = 5$ , то  $\mu = 1-3i$ .

Тогда первое частное решение запишется так:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5e^{3it} \\ y_1 &= (1-3i)e^{3it} \end{aligned} \quad (16.11)$$

Аналогично подставляя в (16.10) корень  $r_2 = -3i$ , получим:

$$\begin{cases} (1+3i)\lambda - 5\mu = 0 \\ 2\lambda - (1-3i)\mu = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 5; \mu = 1+3i;$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 5e^{-3it} \\ y_2 &= (1+3i)e^{-3it} \end{aligned}$$

Перейдем к новой фундаментальной системе решений

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \frac{x_1 + x_2}{2}, & \tilde{x}_2 &= \frac{x_1 - x_2}{2i} \\ \tilde{y}_1 &= \frac{y_1 + y_2}{2}, & \tilde{y}_2 &= \frac{y_1 - y_2}{2i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= 5\cos 3t, & \tilde{y}_1 &= \cos 3t + 3\cos 3t \\ \tilde{x}_2 &= 5\sin 3t, & \tilde{y}_2 &= \sin 3t - 3\cos 3t. \end{aligned}$$

Тогда общим решением системы будет

$$\begin{aligned} x &= c_1\tilde{x}_1 + c_2\tilde{x}_2 = 5c_1\cos 3t + 5c_2\sin 3t \\ y &= c_1\tilde{y}_1 + c_2\tilde{y}_2 = c_1(\cos 3t + \sin 3t) + c_2(\sin 3t - 3\cos 3t) \end{aligned}$$

**Примечание.** Найдя первое частное решение (16.11) можно было бы сразу написать общее решение системы, пользуясь формулами

$$\begin{aligned} x &= C_1 \operatorname{Re} x_1 + C_2 \operatorname{Im} x_1 \\ y &= C_1 \operatorname{Re} y_1 + C_2 \operatorname{Im} y_1 \end{aligned}$$

где  $\operatorname{Re} z$  и  $\operatorname{Im} z$  обозначают соответственно действительную и мнимую части комплексного числа  $z$ , ( $z = a + bi$ ).

Рассмотрим случай кратных корней.

**Пример 16.7.** Рассмотрим СДУ

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases}. \quad (16.12)$$

Составим характеристическое уравнение этой системы:

$$\begin{cases} (2-r)\lambda + \mu = 0 \\ -\lambda + \mu(4-r) = 0 \end{cases} \quad (16.13)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-r & 1 \\ -1 & 4-r \end{vmatrix} = 8+r^2-6r+1 = r^2-6r+9=0.$$

$$r_{1,2} = 3.$$

В этом случае решение следует искать в виде:

$$x = (\lambda_1 + \mu_1 t)e^{3t}, \quad y = (\lambda_2 + \mu_2 t)e^{3t} \quad (16.14)$$

Подставляя (16.14) в первое уравнение (16.12) и сокращая на  $e^{3t}$ , получаем:

$$(3(\lambda_1 + \mu_1 t) + \mu_1) = 2(\lambda_1 + \mu_1 t) + \lambda_2 + \mu_2 t.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\mu_1, \mu_2$  приравняем выражения при

$$\left. \begin{array}{l} t \quad | \quad 3\mu_1 = 2\mu_1 + \mu_2 \\ t^0 | \quad 3\lambda_1 + \mu_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{array} \right\}, \text{ откуда: } \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_1 + \mu_1 \\ \mu_2 = \mu_1 \end{cases}.$$

Величины  $\lambda_1$  и  $\mu_1$  остаются произвольными. Обозначая их через  $C_1$  и  $C_2$ , получаем общее решение системы (16.12):

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}$$

$$y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}$$

## 6. Неоднородные линейные системы дифференциальных уравнений (ПДСДУ)

Рассмотрим неоднородную ЛСДУ с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k(t) + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или в матричном виде:

$$\frac{dX}{dt} = AX + F,$$

где  $F$  – однострочная матрица, элементами которой являются функции  $f_i(t)$ .

**Теорема 16.3.** Общее решение  $X(t)$  неоднородной линейной системы равно сумме общего решения  $X_{oo}(t)$  соответствующей однородной системы  $\frac{dX}{dt} = AX$  и любого частного решения  $X_{чн}(t)$  данной неоднородной системы:

$$X(t) = X_{oo}(t) + X_{чн}(t) = \sum_{i=1}^n C_i X_i(t) + X_{чн}(t),$$

где  $C_i$  – произвольные постоянные. Доказательство этой теоремы может быть найдено в учебниках [11].

**Пример. 16.8.** Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \operatorname{tg} t \end{cases}$$

или

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}$$

Соответствующая однородная система имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}, \text{ характеристический многочлен } \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 1 = 0$  имеет корни  $\lambda_{1,2} = \pm i$ .

$$\text{При } \lambda = i \begin{cases} -ib_1 + b_2 = 0 \\ -b_1 - ib_2 = 0 \end{cases}, \Rightarrow -ib_1 + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = ib_1, (b_1 - \text{любое}).$$

Пусть  $b_1 = 1$ , тогда  $b_2 = i$ .

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ i \cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Вещественная и мнимая части этого решения являются решениями однородной системы, поэтому

$$X^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad X^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \bar{X}(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Частное решение будем искать, следуя методу Лагранжа, т.е. применяя метод вариации произвольных постоянных

$$\begin{aligned} X^*(t) &= C_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \\ X^{*'}(t) &= C_1'(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_1(t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_2'(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подставляя  $X^*$  и  $X^{*'}$  в исходную систему, получаем

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ -C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t = \operatorname{tg} t \end{cases},$$

откуда

$$C_1'(t) = -\cos t, \quad C_2'(t) = \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}.$$

$$C_1(t) = -\int \cos t dt = -\sin t.$$

Тогда

$$C_2(t) = \int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} dt = -\int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} d(\cos t) = \frac{1}{\cos t} + \cos t.$$

$$X^*(t) = -\sin t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \left( \frac{1}{\cos t} + \cos t \right) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\cos t \sin t \\ \sin^2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{\cos t} + \sin t \cos t \\ 1 + \cos^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение исходной системы имеет вид:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{tg} t \\ 2 \end{pmatrix},$$

или

$$x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t$$

$$x_2 = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2.$$

Частное решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами можно искать, не применяя метод вариации, а используя метод неопределённых коэффициентов в том случае, когда функции  $f_k(t)$  имеют вид сумм и произведений функций:  $P_n(t)$ ,  $e^{\alpha t}$ ,  $\cos \beta t$ ,  $\sin \beta t$ .

Это делается по тем же правилам что и для одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида со следующими изменениями:

а) Если  $F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_k(t) \end{pmatrix}$ , причем  $f_k(t) = P_{nk}(t)e^{\gamma t}$ , где  $P_{nk}$  — многочлен степени

$nk$ , то частное решение системы ищется не в виде  $t^s Q_n(t)e^{\gamma t}$  (как для одного уравнения), а в виде

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix},$$

причем

$$x_k^*(t) = Q_{n+s}^{(k)}(x)e^{\gamma t}, \quad (k=1,2,\dots,n),$$

где  $Q_{n+s}^{(k)}(x)$  – многочлен степени  $n+s$  с неизвестными коэффициентами;  $n = \max n_k$ ,  $s=0$ , если  $\gamma$  не корень характеристического уравнения; если же  $\gamma$  – корень характеристического уравнения кратности  $p$ , то  $s=p$ .

Неизвестные коэффициенты многочленов  $Q_{n+s}^{(k)}(x)$  определяются путём подстановки выражений в данную неоднородную систему и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях  $t$ .

**Пример. 16.9.** Решить систему:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + 2e^t \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + t^2 \end{cases},$$

или в матричном виде,

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая однородная система

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases}, \text{ и характеристический многочлен } \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 1 = 0$  имеет корни  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ .

При

$$\lambda_1 = 1 \begin{cases} -b_1 + b_2 = 0 \\ b_1 - b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_1 - b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = b_1, (b_1 - \text{любое}).$$

Пусть  $b_1 = 1 \Rightarrow b_2 = 1$ .

При

$$\lambda_2 = -1 \begin{cases} b_1 + b_2 = 0 \\ b_1 = b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_2 = -b_1 = 0 \Rightarrow b_2 = b_1, (b_1 - \text{любое}).$$

Пусть  $b_1 = 1 \Rightarrow b_2 = -1$ .

$X^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$  и  $X^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$  составляют фундаментальную систему

решений. Тогда общее решение линейной однородной системы

$$\bar{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

или

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ \bar{y}_2 &= C_1 e^t - C_2 e^{-t}.\end{aligned}$$

Представим правую часть в виде

$$F(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} e^{0t} = F_1(t) + F_2(t).$$

Частное решение будет равно соответственно  $X^*(t) = X_1^*(t) + X_2^*(t)$ .

Для первого слагаемого  $\gamma = 1$  и совпадает с простым корнем характеристического уравнения ( $n_1 = 0, n_2 = 0 \Rightarrow n = \max n_k = 0; s = 1$ )

$$X_1^*(t) = \begin{pmatrix} a_1 t + l_1 \\ a_2 t + l_2 \end{pmatrix} e^t.$$

Для второго слагаемого  $\gamma = 0$  и не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения ( $n_1 = 0, n_2 = 2 \Rightarrow n = \max n_k = 2; s = 0$ )

$$X_2^*(t) = \begin{pmatrix} a_3 t^2 + l_3 t + d_3 \\ a_4 t^2 + l_4 t + d_4 \end{pmatrix}.$$

В силу принципа суперпозиции решаем две системы:

$$\begin{aligned}X_1^{*'} &= AX_1^* + F_1 \text{ и } X_2^{*'} = AX_2^* + F_2 \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 t + l_1 \\ a_2 t + l_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 t + l_1 \\ a_2 t + l_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 t + l_1 \\ a_2 t + l_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 t + l_2 \\ a_1 t + l_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_1 t + l_1 + a_1 \\ a_2 t + l_2 + a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 t + l_2 + 2 \\ a_1 t + l_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 t + l_1 + a_1 = a_2 t + l_2 + 2 \\ a_2 t + l_2 + a_2 = a_1 t + l_1 \end{cases}.\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$  в каждом уравнении, получим:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \\ l_1 + a_1 = l_2 + 2 \\ l_2 + a_2 = l_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + l_1 - l_2 = 2 \\ a_1 - l_1 + l_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a_1 = 2, a_1 = 1, l_1 - l_2 = 1, (l_1 - \text{любое}).$$

$$\text{Пусть } l_1 = 0, \Rightarrow l_2 = -1. X_1^*(t) = \begin{pmatrix} t \\ t - 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Для второй системы,

$$\begin{pmatrix} 2a_3t + l_3 \\ 2a_4t + l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3t^2 + l_3t + d_3 \\ a_4t^2 + l_4t + d_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix},$$

решение проводим аналогично и получаем:

$$X_2^*(t) = \begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Окончательно, общее решение системы

$$\bar{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -2t \end{pmatrix}$$

или

$$y_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t e^t - t^2 - 2,$$

$$y_2 = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + (t-1)e^t - 2t.$$

б) если  $f_k(t) = P_{nk}(t)e^{at} \cos \beta t$  или  $f_k(t) = P_{nk}(t)e^{at} \sin \beta t$ , то частное решение системы ищется в виде

$$x_k(t) = e^{at} \left( Q_{n+s}^{(k_1)}(t) \cos \beta t + Q_{n+s}^{(k_2)}(t) \sin \beta t \right),$$

где  $s$  определяется так же, как и в случае (а), причем с корнями характеристического уравнения сравнивается число  $\gamma = \alpha + i\beta$ .

**Пример 16.10.** Решить систему:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + 2 \sin t \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 \end{cases}, \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая однородная система:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 \end{cases},$$

характеристический многочлен

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + 2.$$

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 1 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Найдем решение, соответствующее  $\lambda_1 = i$ .

$$\begin{cases} (1-i)b_1 - b_2 = 0 \\ 2b_1 - (1+i)b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1-i)b_1 - b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = (1-i)b_1, (b_1 - \text{любое}) .$$

Пусть  $b_1 = 1$ , тогда  $b_2 = 1 - i$ . Собственный вектор, соответствующий  $\lambda_1 = i$ , равен  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \cos t + i \sin t - i \cos t + \sin t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получено комплекснозначное решение системы. Вещественная и мнимая часть этого решения составляют фундаментальную систему решений.

$$X^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad X^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Общее решение линейной однородной системы имеет вид

$$\bar{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Найдем частное решение линейной неоднородной системы. Правая часть имеет вид

$$F(t) = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 0 \end{pmatrix} e^{0t} \Rightarrow$$

$\gamma = 0 + i$  — совпадает с простым корнем характеристического уравнения.

Частное решение ищем в виде

$$X^*(t) = \begin{pmatrix} a_1 t + l_1 \\ a_2 t + l_2 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} a_3 t + l_3 \\ a_4 t + l_4 \end{pmatrix} \sin t.$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} a_1 t + l_1 \\ a_2 t + l_2 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} a_3 t + l_3 \\ a_4 t + l_4 \end{pmatrix} \cos t = \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} a_2 t + l_1 \\ a_2 t + l_2 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} a_3 t + l_3 \\ a_4 t + l_4 \end{pmatrix} \sin t \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t. \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при  $t \cos t$ ,  $t \sin t$ ,  $\cos t$ ,  $\sin t$  слева и справа:



$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_1 + l_3 \\ a_2 + l_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -l_1 + a_3 \\ -l_2 + a_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\quad \text{или} \quad
\begin{cases}
a_3 = a_1 - a_2 \\
a_4 = 2a_1 - a_2 \\
-a_1 = a_3 - a_4 \\
-a_2 = 2a_3 - a_4 \\
a_1 + l_3 = l_1 - l_2 \\
a_2 + l_4 = 2l_1 - l_2 \\
-l_1 + a_3 = l_3 - l_4 + 2 \\
-l_2 + a_4 = 2l_3 - l_4
\end{cases}$$

Решая эту систему, находим:  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = -2$ ,  $a_3 = 1$ ,  $a_4 = 0$ ,

$$\begin{aligned}
l_1 &= -l_3 + l_4 - 1 \\
l_2 &= -2l_3 + l_4
\end{aligned}
\quad (l_3, l_4 - \text{любые}).$$

Выберем  $l_3 = 0$ ,  $l_4 = 1$ . Тогда  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = 1$ .

$$X^*(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -2t + 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \sin t.$$

И, окончательно,

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ -2t + 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \sin t.$$

Или

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t - t \cos t + t \sin t, \\
x_2(t) &= C_1 (\cos t + \sin t) + C_2 (\sin t - \cos t) - 2t \cos t + \cos t + \sin t.
\end{aligned}$$

## XVII. Простейшие приближенные методы интегрирования дифференциальных уравнений

### 1. Общие замечания

Пусть имеется произвольное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (17.1)$$

Требуется найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

При этом предполагается, что условия теоремы о существовании и единственности решения выполнены.

Методы интегрирования дифференциальных уравнений делятся на аналитические, графические и численные. При аналитическом методе интегрирования возможны следующие случаи:

- 1) Решение получено в виде суммы конечного числа функций (элементарных или неэлементарных).
- 2) Решение представлено интегралом от некоторой функции (или несколькими интегралами).
- 3) Решение найдено в виде некоторого функционального ряда. Аналитические решения дифференциальных уравнений принято называть точными. Однако, с точки зрения практики этот термин неудачен. Пусть, например, частное решение некоторого уравнения получено в следующем неявном виде

$$2^x + \cos y = e^y + \ln x.$$

Из подобного равенства найти значения  $y$ , отвечающие данным значениям  $x$ , обычно бывает труднее, чем если с самого начала интегрировать исходное дифференциальное уравнение каким-нибудь численным методом. Иными словами, из такого «точного» решения даже приближённые значения переменной  $y$  найти очень сложно.

Аналитические и графические методы при приближённом интегрировании дифференциальных уравнений играют вспомогательную роль, а основными являются численные методы.

### 2. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов

Пусть, для определённости, требуется проинтегрировать дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' = f(x, y, y') \quad (17.2)$$

с начальными условиями

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

Будем искать решение в виде ряда Тейлора

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Начальные условия дают

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Далее, из (17.2) имеем

$$y''(x_0) = f(x_0, y_0, y'_0).$$

Дифференцируя уравнение (17.2) по  $x$ , получим

$$y''' = f'_x(x, y, y') + f'_y(x, y, y')y' + f'_{y'}(x, y, y')y'', \quad (17.3)$$

Откуда

$$y'''(x_0) = f'_x(x_0, y_0, y'_0) + f'_y(x_0, y_0, y'_0)y'_0 + f'_{y'}(x_0, y_0, y'_0)y''_0.$$

Дифференцируя теперь равенство (17.3) по  $x$  и полагая

$$x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_0, y''' = y'''_0,$$

находим  $y^{IV}(x_0)$  и т.д.

При тех значениях  $x$ , при которых полученный ряд сходится, его сумма является решением полученного уравнения.

**Пример 17.1.** Проинтегрируем уравнение

$$y'' = (1 + x^2)y \quad (17.4)$$

при начальных условиях  $y|_{x=0} = -2$ ,  $y'|_{x=0} = 2$ .

Полагаем

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Из начальных условий имеем

$$y(0) = -2, \quad y'(0) = 2.$$

Дифференцируя уравнение (17.4), находим

$$y''' = 2xy' + (1 + x^2)y',$$

откуда

$$y'''(0) = 2.$$

Дифференцируя уравнение еще раз, имеем

$$y^{IV} = 2y + 4xy' + (1 + x^2)y'',$$

откуда

$$y^{IV}(0) = -4 - 2 = -6.$$

Аналогично,

$$y^{IV} = 6y' + 6xy'' + (1+x^2)y''',$$

а значит,

$$y^{IV}(0) = 12 + 2 = 14,$$

и т.д.

Итак,

$$y = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7x^5}{60} + \dots$$

Описанный приём интегрирования называется методом последовательного дифференцирования. Легко видеть, что он применим к произвольному уравнению вида (17.1), независимо от его порядка и от вида функции  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . Такие методы называют универсальными. Если уравнение является линейным, т.е. если оно имеет вид

$$y^{(n)} = p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y + f(x), \quad (17.5)$$

то его можно интегрировать и при помощи т. н. метода неопределенных коэффициентов. При этом предполагается, что функции  $p_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и  $f(x)$  разлагаются в ряды Тейлора в окрестности начальной точки  $x_0$ .

Метод неопределенных коэффициентов состоит в следующем. Решение уравнения ищем в виде степенного ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad (17.6)$$

Отсюда находим  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  и подставляем эти результаты в (17.5) вместе с рядами для  $p_i(x)$  и  $f(x)$ . В полученном тождестве приравниваем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях  $x - x_0$ . В результате приходим к системе бесконечного числа уравнений с неизвестными  $a_0, a_1, a_2, \dots$  (фактически  $n$  первых коэффициентов находятся из начальных условий).

Можно показать, что если ряды для функций  $p_i(x)$  и  $f(x)$  сходятся в некотором интервале  $c_R(x_0)$ , то и полученный описанным способом ряд (17.6) сходится в этом интервале. В частности, если все функции  $p_i(x)$  и  $f(x)$  – многочлены, то ряд (17.6) сходится при всех  $x$ .

Предположим, что ряд (17.6) сходится в интервале  $c_R(x_0)$ . Тогда в этом интервале его сумма является искомым решением уравнения. Действительно, во-первых, ряд (17.6) в интервале  $c_R(x_0)$  можно почленно дифференцировать любое число раз. Во-вторых, подставляя выражения для

$y, y', \dots, y^{(n-1)}$  в (17.5), мы умножаем их почленно на ряды для соответствующих функций  $p_i(x)$ , что законно, поскольку степенные ряды внутри интервала сходимости сходятся абсолютно. Наконец, коэффициенты ряда (17.6) вычислены, исходя из того, что левая часть уравнения (17.5) тождественно совпадает с правой.

**Пример 17.2.** Возьмем то же уравнение (17.4)

$$y'' = (1 + x^2)y$$

с теми же начальными условиями  $y|_{x=0} = -2$ ,  $y'|_{x=0} = 2$ .

Положим

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

В силу начальных условий,  $a_0 = -2$ ,  $a_1 = 2$ , так что

$$y = -2 + 2x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots,$$

откуда

$$y' = 2 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots,$$

$$y'' = 1 \cdot 2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + 4 \cdot 5 a_5 x^3 + \dots$$

Подставляя это в уравнение, имеем

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + 4 \cdot 5 a_5 x^3 + \dots = \\ & = (1 + x^2)(-2 + 2x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots), \end{aligned}$$

т.е.,

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + 4 \cdot 5 a_5 x^3 + \dots = \\ & = -2 + 2x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots - 2x^2 + 2x^3 + \dots, \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 a_2 &= -2 \\ 2 \cdot 3 a_3 &= 2 \\ 3 \cdot 4 a_4 &= a_2 - 2 \\ 4 \cdot 5 a_5 &= a_3 + 2 \\ &\dots \quad \dots \end{aligned}$$

а значит,

$$a_2 = -1, \quad a_3 = 1/3, \quad a_4 = -1/4, \quad a_5 = 7/60, \quad \dots$$

Следовательно,

$$y = -2 + 2x - x^2 + 1/3 x^3 - 1/4 x^4 + 7/60 x^5 + \dots, \quad (17.7)$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным ранее методом последовательного дифференцирования.

В силу сказанного выше, ряд (17.7) сходится при всех  $x$  и,

следовательно, дает решение уравнения (17.4) на всей числовой оси.

Оба описанных метода являются основными среди приближенных методов. Позже мы увидим, что эти методы могут быть использованы как составная часть некоторых численных методов.

### 3. Питегрирование дифференциальных уравнений 1-го порядка конечно-разностным методом Эйлера

Возьмем уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{17.8}$$

с начальным условием

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

Пусть  $y(x)$  – решение этой задачи. Требуется составить таблицу значений функции  $y(x)$  в точках  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$ ,  $x_3 = x_0 + 3h$  и т.д.

В равенстве (17.8) положим  $x = x_n$  и обозначим  $y(x_n) = y_n$ ,  $y'(x_n) = y'_n$ .

Получим

$$y'_n = f(x_n, y_n).$$

Заменим теперь  $y'_n$  отношением  $\frac{\Delta y_n}{h}$ . Тогда придем к равенству

$$\frac{\Delta y_n}{h} = f(x_n, y_n). \tag{17.9}$$

Это равенство называют конечно-разностным аналогом исходного дифференциального уравнения (17.8).

Перепишем (17.9) так:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$$

Отсюда

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{17.10}$$

Это – рабочая формула метода Эйлера. Полагая в ней  $n = 0, 1, 2, \dots$ , получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) \\ &\dots \end{aligned} \tag{17.11}$$

Поскольку

$$\frac{\Delta y_n}{h} = \frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h},$$

то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y_n}{h} = y'_n.$$

Следовательно, чем меньше  $h$ , тем точнее дифференциальное уравнение (17.8) заменяется конечно-разностным уравнением (17.9). Поэтому естественно предположить, что чем меньше  $h$ , тем ближе получаемые по формуле (17.10) результаты к истинным значениям неизвестной функции.

**Пример 17.3.** Рассмотрим уравнение  $y' = \sqrt{a + y}$  с начальным условием  $y|_{x=1} = 2$ . Будем интегрировать это уравнение с шагом  $h = 0,1$ . Тогда формула (17.10) запишется так

$$y_{n+1} = y_n + 0,1\sqrt{x_n + y_n}.$$

Вычисления запишем в следующую таблицу

$x$	$y$	$x + y$	$\sqrt{x + y}$	$0,1\sqrt{x + y}$
1,0	2,000	3,000	1,732	0,173
1,1	2,173	3,273	1,809	0,181
1,2	2,354	3,554	1,885	0,188
1,3	2,542	3,842	1,960	0,196
1,4	2,738			

и т.д.

Выясним геометрический смысл метода Эйлера. Для этого запишем уравнение касательной к искомой интегральной кривой в точке  $(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0),$$

или в силу (17.8),

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Положим здесь  $x = x_1$ . Получим

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h,$$

а значит

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \quad (17.12)$$

что совпадает с первым из равенств (17.11).

Итак, на первом шаге метода Эйлера мы заменяем искомую интегральную кривую в интервале  $[x_0, x_1]$  отрезком касательной к ней в точке  $(x_0, y_0)$ . Найдем порядок допускаемой при этом погрешности.

Для этого запишем формулу Тейлора 2-го порядка

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Отсюда получаем (вдоль кривой), полагая  $y(x_1) = y_1^*$ , что

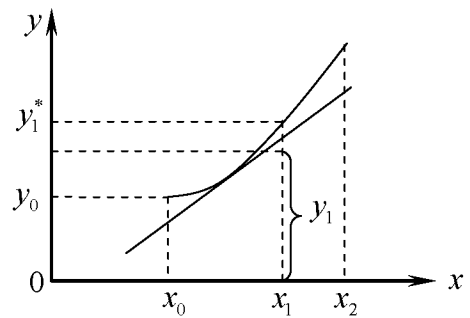


Рис. 17.1

$$y_1^* = y_0 + y_0' h + \frac{y_0''}{2!} h^2 + o(h^2),$$

т.е.

$$y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0) + o(h^2).$$

Сравнивая это с (17.12), заключаем, что погрешность, допускаемая на первом шаге, есть  $o(h^2)$ .

Сделаем следующий шаг. Для этого вычислим  $f(x_1, y_1)$ . Это число равно условному коэффициенту касательной в точке  $(x_1, y_1)$  к той интегральной кривой, которая проходит через эту точку. Эта интегральная кривая, вообще говоря, не совпадает с искомой, так как  $y_1$ , найденное по формуле (17.12), вообще говоря, не совпадает с истинным значением  $y_1^*$  величины  $y(x_1)$ . Но так как  $y_1^* = y_1 + o(h^2)$ , то при малых  $h$  будет  $y_1^* \approx y_1$ , а значит<sup>\*)</sup>

$$f(x_1, y_1) \approx f(x_1, y_1^*),$$

т.е. касательные к интегральным кривым в точках с абсциссой  $x_1$  почти параллельны между собой. Поэтому, полагая

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

мы идем из точки  $(x_1, y_1)$  почти параллельно касательной к искомой интегральной кривой в точке  $(x_1, y_1^*)$ .

Таким образом, на втором шаге погрешность возникает не только вследствие замены интегральной кривой отрезком касательной к ней, но и вследствие неточного знания углового коэффициента этой касательной. То же самое относится и ко всем последующим шагам. При этом, разумеется, к погрешности, возникающей на каждом данном шаге, прибавляется (в алгебраическом смысле) суммарная погрешность всех предыдущих шагов.

#### 4. Оценка погрешности метода Эйлера в конечном интервале

Пусть в некоторой области  $D$  плоскости  $(x, y)$  функция  $f(x, y)$  непрерывна и по переменной  $y$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $K$ , т.е.  $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq K \|y_2 - y_1\|$ . Кроме того, будем предполагать, что в области  $D$  величина  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y)$  ограничена. Тогда

---

<sup>\*)</sup> Функция  $f(x, y)$  непрерывна, так как удовлетворяет теореме Коши.



существует такое  $N > 0$ , что для всех  $(x, y) \in D$  будет

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) \right| \leq N \quad (17.13)$$

Предположим, что, пользуясь формулой (17.10), мы совершили  $n$  шагов и получили результат  $y_n$ . Будем считать, что все точки  $(x, y)$ , фигурирующие ниже, принадлежат области  $D$ .

Тогда, обозначая погрешность вычислений через  $\varepsilon_n$ , запишем

$$\Delta \varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = (y_{n+1} - y_{n+1}^*) - (y_n - y_n^*) = (y_{n+1} - y_n) - (y_{n+1}^* - y_n^*).$$

Но если  $y(x)$ -решение уравнения (8) с начальным условием  $y|_{x=x_0} = y_0$ , то интегрируя это уравнение по  $x$ , получаем

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx,$$

а значит,

$$y_n^* = y(x_n) = y_0 + \int_{x_0}^{x_n} f(x, y(x)) dx$$

и аналогично,

$$y_{n+1}^* = y_0 + \int_{x_0}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx.$$

Поэтому

$$\Delta \varepsilon_n = y_{n+1} - y_n - \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx = hf(x_n, y_n) - \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) d(x - x_{n+1}) = \\ &= f(x, y(x))(x - x_{n+1}) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} - \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1}) \frac{df}{dx} dx = \\ &= hf(x_n, y_n^*) - \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1}) \left( \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} f(x, y) \right) dx \end{aligned}$$

(осуществляем здесь интегрирование по частям). Следовательно,

$$\Delta \varepsilon_n = h \left( f(x_n, y_n) - f(x_n, y_n^*) \right) - \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1}) \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) \right) dx.$$

Отсюда

$$|\Delta \varepsilon_n| \leq h \left| f(x_n, y_n) - f(x_n, y_n^*) \right| + \int_{x_n}^{x_{n+1}} |x - x_{n+1}| \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) \right| dx.$$

Учитывая условие Липшица, а также (17.13), находим

$$|\Delta \varepsilon_n| \leq hK |y_n - y_n^*| + N \int_{x_n}^{x_{n+1}} |x - x_{n+1}| dx,$$

т.е.

$$|\Delta \varepsilon_n| \leq hK |\varepsilon_n| + \frac{1}{2} Nh^2. \quad (17.14)$$

Поскольку

$$|\Delta \varepsilon_n| = |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n| \geq \left| |\varepsilon_{n+1}| - |\varepsilon_n| \right| \geq |\varepsilon_{n+1}| - |\varepsilon_n|,$$

то из (17.14) следует, что тем более

$$|\varepsilon_{n+1}| - |\varepsilon_n| \leq hK |\varepsilon_n| + \frac{1}{2} Nh^2,$$

т.е.

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq (1 + hK) |\varepsilon_n| + \frac{1}{2} Nh^2.$$

Введем промежуточные обозначения

$$1 + hK = a, \quad \frac{1}{2} Nh^2 = b. \quad (17.15)$$

Тогда

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq a |\varepsilon_n| + b.$$

Это значит, что

$$\begin{aligned} |\varepsilon_1| &\leq b, \\ |\varepsilon_2| &\leq a |\varepsilon_1| + b \leq (a+1)b, \\ |\varepsilon_3| &\leq a |\varepsilon_2| + b \leq (a^2 + a + 1)b \end{aligned}$$

и т.д. Очевидно, что для любого натурального  $n$  будет иметь

$$|\varepsilon_n| \leq (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)b,$$

т.е.,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{a^n - 1}{a - 1} b.$$

Подставляя сюда выражения (17.15), находим

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{(1+hK)^n - 1}{hK} \cdot \frac{1}{2} \cdot NKh^2,$$

т.е.,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{Nh}{2K} \cdot [(1+hK)^n - 1].$$

Используя то, что при  $u > 0$  будет  $e^u > 1 + u$ , получим

$$|\varepsilon_n| < \frac{Nh}{2K} \cdot (e^{hK_n} - 1).$$

Или окончательно

$$|\varepsilon_n| < \frac{Nh}{2K} \cdot (e^{K(x_n - x_0)} - 1). \quad (17.15^*)$$

Отсюда, в частности, следует, что на любом конечном отрезке при  $h \rightarrow 0$  будет  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , т.е.  $y_n \rightarrow y_n^*$ . Это значит, что при указанных выше условиях метод Эйлера является сходящимся в любом конечном интервале при  $h \rightarrow 0$ .

**Пример 17.4.** Применим полученный результат к рассмотренному выше уравнению  $y' = \sqrt{x+y}$  с начальным условием  $y|_{x=1} = 2$ . При  $h = 0,1$  мы имеем  $y_4 = 2,738$ . Легко видеть, что  $y_5 < 3$ . Поскольку интервал  $[1,0;1,5]$  достаточно мал, то естественно предположить, что и  $y_5^* \leq 3$ . Поэтому рассмотрим область  $D = \{(x,y) | 1 \leq x \leq 1,5; 2 \leq y \leq 3\}$ .

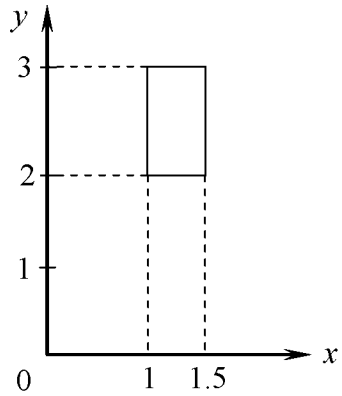


Рис. 17.2

Так как в данном случае

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \sqrt{x+y} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{x+y}} + 1 \right),$$

то

$$N = \max_D \left| \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) \right| = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{4,5}} + 1 \right) = 0,79.$$

Далее, поскольку  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$ , то для константы  $K$  имеем

$$K \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,29.$$

Таким образом, для погрешности результата 5-го шага получаем

$$|\varepsilon_5| < \frac{0,079}{0,58} (e^{0,145} - 1) \approx 0,02.$$

Если учесть, что интервал интегрирования уравнения сравнительно мал, то полученная погрешность весьма значительна. При дальнейшем увеличении интервала интегрирования погрешность, очевидно, продолжает возрастать.

Таким образом, метод Эйлера, являясь наиболее простым из численных методов, оказывается довольно грубым. Для повышения точности приходится брать очень малое  $h$ , а это приводит к увеличению числа необходимых шагов при интегрировании в данном интервале. Поэтому метод Эйлера обычно используется лишь для получения приближенного представления о виде интегральной кривой, да и то в небольшом интервале.

### 5. Интегрирование нормальных систем 1-го порядка и уравнений высших порядков методом Эйлера

Рассмотрим нормальную систему уравнений 1-го порядка

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y})$$

с начальным условием

$$\vec{y}|_{x=x_0} = \vec{y}_0.$$

Для такой системы, по аналогии с формулой (17.10), можно записать рабочую формулу

$$\vec{y}_{m+1} = \vec{y}_m + hf \vec{f}(x_m, \vec{y}_m),$$

или, в скалярной форме,

$$\begin{aligned} y_1^{(m+1)} &= y_1^{(m)} + hf_1(x_m, y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \\ y_2^{(m+1)} &= y_2^{(m)} + hf_2(x_m, y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \\ &\dots \\ &\dots \\ y_n^{(m+1)} &= y_n^{(m)} + hf_n(x_m, y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \end{aligned}$$

(здесь верхние индексы указывают на номер шага, а нижние – на номер координаты  $y_k$  вектор – функции  $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ).

В частности, для системы двух уравнений

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad z|_{x=x_0} = z_0$$

имеем

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + hg(x_n, y_n, z_n) \end{cases}. \quad (17.16)$$

Оценка погрешности для системы производится совершенно аналогично случаю одного уравнения.

Рассмотрим теперь уравнение 2-го порядка

$$y'' = f(x, y, y') \quad (17.17)$$

с начальными условиями

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

Снова вводим точки  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$ ,  $x_3 = x_0 + 3h, \dots$ . Заметим сразу, что, положив  $y = y_1$ ,  $y' = y_2$  и тем самым, сведя уравнение (17.17) к системе

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = f(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

мы могли бы сразу воспользоваться формулами (17.16). Но можно поступить и иначе.

Полагая  $x = x_n$ , получим из (17.17)

$$y''_n = f(x_n, y_n, y'_n). \quad (17.18)$$

Если  $h$  мало, то, как было показано, не только  $\frac{\Delta y_n}{h} \approx y'_n$ , но и  $\frac{\Delta^2 y_n}{h^2} \approx y''_n$ .

Поэтому из (17.18) получаем следующий конечно-разностный аналог дифференциального уравнения (17.17)

$$\frac{\Delta^2 y_n}{h^2} = f\left(x_n, y_n, \frac{\Delta y_n}{h}\right),$$

т.е.,

$$\frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}{h^2} = f\left(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_n}{h}\right).$$

Отсюда

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + h^2 f\left(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_n}{h}\right). \quad (17.19)$$

Это и есть рабочая формула метода Эйлера для уравнения 2-го порядка. Из нее видно, что для заполнения очередной строки таблицы нужно иметь заполненными не одну, а две предыдущих строки. Следовательно, для начала использования формулы (17.19) нужно иметь  $y_0$  и  $y_1$ . Первое из этих чисел даётся 1-м начальным условием. Для приближенного нахождения  $y_1$  используем 2-е начальное условие, которое приближенно запишем так:

$$\frac{\Delta y_0}{h} = y'_0$$

т.е.,

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = y'_0$$

откуда

$$y_1 = y_0 + hy'_0.$$

Имея  $y_0$  и  $y_1$ , получим из (17.19)

$$y_2 = 2y_1 - y_0 + h^2 + f\left(x_0, y_0, \frac{y_1 - y_0}{h}\right)$$

$$y_3 = 2y_2 - y_1 + h^2 + f\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_1}{h}\right)$$

и т.д.

Совершенно аналогично применяется метод Эйлера для решения уравнений 3-го порядка и более высоких порядков.

## 6. Интегрирование уравнений 1-го порядка методом Эйлера с полушагом

Будем снова рассматривать уравнение (17.8) с начальным условием  $y|_{x=x_0} = y_0$ . Малая точность метода Эйлера связана с тем, что касательная к интегральной кривой по мере удаления от точки касания, вообще говоря, всё больше удаляется от этой кривой. Гораздо естественнее на первом шаге «идти» из точки  $(x_0, y_0)$  в направлении касательной к интегральной кривой не в точке  $(x_0, y_0)$ , а в точке с абсциссой  $x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2}$ .

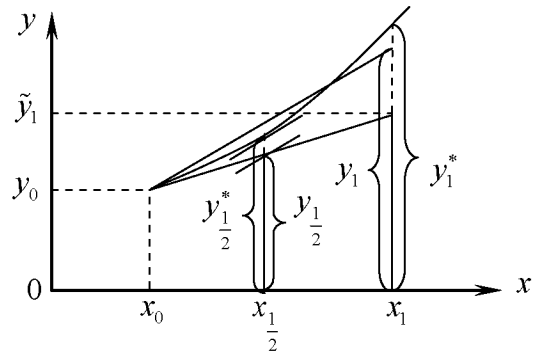


Рис. 17.3

Для приближённого нахождения углового коэффициента этой второй касательной делаем сначала из точки  $x_0$  т.н. полушаг, полагая

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0). \quad (17.20)$$

Поскольку  $y_{1/2} \approx y_{1/2}^*$ , то  $f(x_{1/2}, y_{1/2}) \approx f(x_{1/2}, y_{1/2}^*)$ , т.е. искомый угловой коэффициент приближенно равен  $f(x_{1/2}, y_{1/2})$ .

Теперь «возвращаемся» в точку  $x_0$  и совершаем из неё первый полный шаг, полагая

$$y_1 = y_0 + hf(x_{1/2}, y_{1/2}). \quad (17.21)$$

Из чертежа легко видно, что найденное таким путём  $y_1$ , вообще говоря, гораздо ближе к  $y_1^*$ , чем  $y_1$ , найденное обычным методом Эйлера. Мы покажем сейчас, что погрешность, допускаемая на первом шаге описываемого метода, есть  $O(h^3)$ , а на  $O(h^2)$ , как в обычном методе Эйлера.

Введём обозначения

$$hf(x_0, y_0) = K_{10}, \quad hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{10}}{2}\right) = K_{20} \quad (17.22)$$

Тогда

$$y_1 = y_0 + K_{20} \quad (17.23)$$

Очевидно, что формулы (17.22) и (17.23) совершенно равносильны формулам (17.20) и (17.21).

Возьмём теперь те же формулы (17.22), а формулу (17.23) заменим более общей формулой

$$y_1 = y_0 + \alpha_1 K_{10} + \alpha_2 K_{20}, \quad (17.24)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – некоторые числа. Если  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ , то приходим к обычному методу Эйлера.

Подберём  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  наивыгоднейшим образом, т.е. так, чтобы допускаемая на первом шаге погрешность имела более высокий порядок по сравнению с  $h$ . Из (17.24) и (17.22) имеем

$$y_1 = y_0 + \alpha_1 hf(x_0, y_0) + \alpha_2 hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{10}}{2}\right).$$

В силу формулы Тейлора 2-го порядка для функций двух переменных, получим отсюда

$$y_1 = y_0 + \alpha_1 hf(x_0, y_0) + \alpha_2 hf\left(f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\frac{h}{2} + f'_y(x_0, y_0)\frac{K_{10}}{2} + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(x_0, y_0)\frac{h^2}{4} + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\frac{hK_{10}}{4} + f''_{yy}(x_0, y_0)\frac{K_{10}^2}{4}\right) + O(h^2 + K_{10}^2)\right)$$

Но  $K_{10} = O(h)$ , а значит,

$$y_1 = y_0 + \alpha_1 hf(x_0, y_0) + \alpha_2 h\left(f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\frac{h}{2} + f'_y(x_0, y_0)\frac{K_{10}}{2}\right) + O(h^3),$$

т.е.,

$$y_1 = y_0 + (\alpha_1 + \alpha_2)hf(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\alpha_2 h^2 \left( f'_x(x_0, y_0) \frac{h}{2} + f'_y(x_0, y_0) \frac{K_{10}}{2} f(x_0, y_0) \right) + O(h^3). \quad (17.25)$$

С другой стороны, для искомой функции  $y(x)$  имеем

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + O((x - x_0)^3).$$

Отсюда, при  $x = x_1$ , получим

$$y_1^* = y_0 + y'_0 h + \frac{y''_0}{2!} h^2 + \frac{y'''_0}{3!} h^3 + O(h^3),$$

или

$$y_1^* = y_0 + y'_0 h + \frac{y''_0}{2} h^2 + O(h^3) \quad (17.26)$$

Но в силу исходного уравнения,  $y'_0 = f(x_0, y_0)$ . Далее, дифференцируя тождество  $y'(x) \equiv f(x, y(x))$ , будем иметь

$$y''(x) = f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x),$$

т.е.

$$y''(x) = f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))f(x, y(x)).$$

Отсюда при  $x = x_0$  находим

$$y''_0 = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0).$$

Следовательно, (17.26) принимает вид

$$y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{1}{2}h^2 \left( f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0) \right) + O(h^3).$$

Сравним это с (17.25) и потребуем, чтобы порядок малости величины  $y_1^* - y_1$  был наивысшим, т.е. чтобы было  $y_1^* - y_1 = O(h^3)$ . Получим для  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

а значит,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ . Но именно при таких  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  формула (17.24) превращается в формулу (17.23). Следовательно, если  $y_1$  вычисляется по формуле (17.23) (т.е. по формулам (17.20) и (17.21)), то  $y_1^* - y_1 = O(h^3)$ .

После того как 1-й шаг совершён, поступаем аналогично. Сначала



делаем новый полушаг по формуле

$$y_{3/2} = y_1 + \frac{h}{2} f(x_1, y_1),$$

после чего полагаем

$$y_2 = y_1 + hf(x_{3/2}, y_{3/2})$$

и т.д. Рабочие формулы метода

$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$$

Вводя обозначения

$$hf(x_n, y_n) = K_{1n}, \quad hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_{1n}}{2}\right) = K_{2n},$$

получим

$$y_{n+1} = y_n + K_{2n}. \quad (17.27)$$

Заменив эту формулу более общей формулой

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_1 K_{1n} + \alpha_2 K_{2n} \quad (17.28)$$

и потребовав, чтобы погрешность, дополнительно возникающая на  $(n+1)$ -м шаге, составляла  $O(h^3)$ , мы, очевидно, получим, что должно быть  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ , и, таким образом, из (17.28) получим именно формулу (17.27), т.е., формулу метода Эйлера с полушагом.

## 7. Общее описание метода Рунге-Кутты

Метод Рунге-Кутты является дальнейшим развитием метода Эйлера с полушагом. Положим

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_1 K_{1n} + \alpha_2 K_{2n} + \alpha_3 K_{3n} + \alpha_4 K_{4n}, \quad (17.29)$$

где

$$\begin{cases} K_{1n} = hf(x_n, y_n) \\ K_{2n} = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_{1n}}{2}\right) \\ K_{3n} = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_{2n}}{2}\right) \\ K_{4n} = hf(x_n + h, y_n + K_{3n}) \end{cases}. \quad (17.30)$$

После этого преобразуем равенство (17.29) на основании формулы

Тейлора для функций двух переменных и, сравнивая результат с непосредственным разложением  $y(x_n + h)$  по формуле Тейлора, потребуем, чтобы погрешность, дополнительно возникающая на  $(n + 1)$ -м шаге, имела наивысший порядок малости относительно  $h$ , т.е. чтобы она составляла  $O(h^5)$ . В результате получим, для  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , систему уравнений, из которой находим

$$\alpha_1 = \frac{1}{6}, \alpha_2 = \frac{1}{3}, \alpha_3 = \frac{1}{3}, \alpha_4 = \frac{1}{6}.$$

Поэтому формула (17.29) принимает вид

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_{1n} + 2K_{2n} + 2K_{3n} + K_{4n}). \quad (17.31)$$

Формулы (30) и (31) и являются рабочими формулами метода Рунге-Кутты.

Очевидно, что метод Эйлера с полушагом является как бы методом Рунге-Кутты 2-го порядка, а обычный метод Эйлера – методом Рунге-Кутты 1-го порядка. Можно рассматривать методы Рунге-Кутты 3-го, 5-го, ... порядка, но наиболее часто применяют на практике описанный только что метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

**Примечание.** Для метода Рунге-Кутты (как и для метода Эйлера с полушагом) можно вывести формулы, аналогичные формуле (17.15\*) для простого метода Эйлера и позволяющие оценить суммарную погрешность, допускаемую в некотором конечном интервале. Однако, константы, входящие в эти формулы (в формуле (17.15\*) такими константами являются  $K$  и  $N$ ) находятся, как правило, настолько сложно, что практическое использование этих оценок возможно очень редко. Поэтому на практике точность метода чаще всего контролируется в ходе самих вычислений. Для этого сначала вычисляют  $y_{n+1}$  (по известному  $y_n$ ) описанным выше способом. Затем  $y_{n+1}$  вычисляется заново, но уже путём перехода от  $x_n$  к  $x_{n+1}$  не с помощью одного шага длиной  $h$ , а с помощью двух последовательных шагов длиной по  $\frac{h}{2}$ . Если между обоими результатами получается значительное расхождение (в пределах удерживаемых десятичных знаков), то шаг уменьшают вдвое, после чего снова аналогичным образом производят контроль, и т.д. Именно таким способом автоматически регулируется длина шага при интегрировании уравнения с использованием компьютера.

Методы Рунге-Кутты (произвольного порядка), совершенно аналогично описанному, могут быть применены и к интегрированию нормальных систем дифференциальных уравнений 1-го порядка, а значит, и к интегрированию уравнений высших порядков.

## 8. Интегрирование дифференциальных уравнений методом Адамса-Штёрмера

Будем снова рассматривать уравнение (17.8) с начальным условием  $y|_{x=x_0} = y_0$ . Как и прежде, требуется составить таблицу решения этой задачи с некоторым шагом  $h$ . Предположим, что числа  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$  некоторым способом уже найдены. Покажем, как в этом случае найти  $y_4$ .

Составим следующую таблицу

$x$	$y$	$\delta y$	$y'$	$\delta y'$	$\delta^2 y'$	$\delta^3 y'$
$x_0$	$y_0$		$y'_0$			
$x_1$	$y_1$		$y'_1$	$\delta y'_1$		
$x_2$	$y_2$		$y'_2$	$\delta y'_2$	$\delta^2 y'_2$	
$x_3$	$y_3$		$y'_3$	$\delta y'_3$	$\delta^2 y'_3$	$\delta^3 y'_3$

Здесь  $y'_i$  находятся по формуле  $y'_i = f(x_i, y_i)$  ( $i=0,1,2,3$ ), а все конечные разности вычисляются обычным способом.

Для заполнения следующей строки (будем называть её 4-й) вычислим сначала  $x_4$  по формуле  $x_4 = x_3 + h$ . Далее, имеем

$$\delta y_4 = y_4 - y_3 = \int_{x_3}^{x_4} y'(x) dx.$$

Этот интеграл вычислим приближённо с помощью 1-й формулы Адамса. Получим

$$\int_{x_3}^{x_4} y'(x) dx = h \left( y'_3 + \frac{1}{2} \delta y'_3 + \frac{5}{12} \delta^2 y'_3 + \frac{3}{8} \delta^3 y'_3 \right) \quad (17.32)$$

Найденное по этой формуле  $\delta y_4$  обозначим  $\tilde{\delta} y'_4$  и запишем в 4-ю строку в графу для  $\delta y$ . После этого полагаем

$$y_4 = y_3 + \delta y_4$$

и результат записываем в графу для  $y$ . Затем вычисляем величину  $y'_4 = f(x_4, y_4)$  и записываем результат в графу для  $y'$ . Наконец обычным способом находим  $\delta y'_4$ ,  $\delta^2 y'_4$ ,  $\delta^3 y'_4$ .

Теперь необходимо уточнить значение  $y_4$ . Для этого снова вычислим интеграл  $\int_{x_3}^{x_4} y'(x) dx$ , но уже не по 1-й, а по более предпочтительной 2-й формуле Адамса (ведь значение  $y'_4$ , хотя и предварительное, теперь

известно!). Итак, полагаем

$$\int_{x_3}^{x_4} y'(x) dx = h \left( y'_4 - \frac{1}{2} \delta y'_4 - \frac{1}{12} \delta^2 y'_4 - \frac{1}{24} \delta^3 y'_4 \right). \quad (17.33)$$

Найденное по этой формуле  $\delta y_4$  сравнивается с  $\tilde{\delta} y_4$ . Возможны два случая.

1.  $\delta y_4 = \tilde{\delta} y_4$  (в пределах данного числа удерживаемых десятичных знаков). Тогда выполнение шага можно считать законченным.

2.  $\delta y_4 \neq \tilde{\delta} y_4$ . Тогда вся 4-я строка вычёркивается, и под ней вместо неё заполняется аналогичная строка, но уже не на основании  $\tilde{\delta} y_4$ , а на основании  $\delta y_4$ . После этого снова осуществляется контроль с помощью формулы (17.33), в которой фигурируют теперь данные из новой строки, и т.д. Выполнение шага считается законченным лишь тогда, когда результаты вычислений по формулам (17.32) и (17.33) совпадают.

Слишком долгое несовпадение  $\delta y_4$  с  $\tilde{\delta} y_4$  обычно свидетельствует о том, что шаг  $h$  взят недостаточно малым. В применяемых нами формулах Адамса используются разности до 3-го порядка включительно. Поэтому  $h$  должно быть взято с самого начала таким, чтобы отбрасываемая разность 4-го порядка оказалось пренебрежительно малой. При соблюдении этого условия контрольное равенство  $\delta y_4 = \tilde{\delta} y_4$  будет выполняться, как правило, сразу же или при первом повторном сравнении.

После того, как окончательное заполнение 4-й строки закончено, точно также заполняется 5-я строка и т.д. При этом может оказаться, что на некотором шаге прежняя величина  $h$  делается уже недостаточно малой (т.е. отбрасываемые разности будут уже большими). В этом случае длину шага приходится уменьшать, хотя это и связано с перезаполнением нескольких предыдущих строк.

Можно показать, что при интегрировании уравнения описываемым методом погрешность, возникающая на каждом шаге, составляет  $O(h^4)$ .

Осталось выяснить, каким образом можно вычислить  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$ , знание которых необходимо для начала использования метода Адамса-Штёрмера. Эти числа обычно находятся путём интегрирования исходного уравнения с помощью степенного ряда, поскольку этот ряд наиболее быстро сходится именно в точках, близких к  $x_0$ .

Возьмём теперь уравнение 2-го порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

с начальными условиями  $y|_{x=x_0} = y_0$ ,  $y'|_{x=x_0} = y'_0$ . Снова находим  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$  с помощью степенного ряда. Путём дифференцирования этого ряда находим  $y'_1$ ,  $y'_2$  и  $y'_3$ . После этого составляем таблицу

$x$	$y$	$\delta y$	$y'$	$\delta y'$	$\delta^2 y'$	$\delta^3 y'$	$y''$	$\delta y''$	$\delta^2 y''$	$\delta^3 y''$
$x_0$	$y_0$		$y'_0$				$y''_0$			
$x_1$	$y_1$		$y'_1$	$\delta y'_1$			$y''_1$	$\delta y''_1$		
$x_2$	$y_2$		$y'_2$	$\delta y'_2$	$\delta^2 y'_2$		$y''_2$	$\delta y''_2$	$\delta^2 y''_2$	
$x_3$	$y_3$		$y'_3$	$\delta y'_3$	$\delta^2 y'_3$	$\delta^3 y'_3$	$y''_3$	$\delta y''_3$	$\delta^2 y''_3$	$\delta^3 y''_3$

Здесь  $y''_i$  вычислены по формуле  $y''_i = f(x_i, y_i, y'_i)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ).

Для заполнения 4-й строки сначала находим  $\delta y'_4$  и вписываем в графу для  $\delta y'$ . Затем в графу для  $y'$  вписываем величину  $y'_4 = y'_3 + \delta y'_4$ . После этого обычным способом находим  $\delta^2 y'_4$  и  $\delta^3 y'_4$ .

Теперь в графу для  $\delta y$  вписываем  $\delta y_4$ , найденное по формуле

$$\delta y_4 = h \left( y'_4 - \frac{1}{2} \delta y'_4 - \frac{1}{12} \delta^2 y'_4 - \frac{1}{24} \delta^3 y'_4 \right).$$

Таким образом, величину  $\delta y_4$  мы находим не по 1-й, а сразу по 2-й формуле Адамса, так как значения  $y'_4$ ,  $\delta y'_4$ ,  $\delta^2 y'_4$  и  $\delta^3 y'_4$ , хотя и предварительные, уже известны.

Вычислив  $\delta y_4$ , находим  $y_4 = y_3 + \delta y_4$  и  $y''_4 = f(x_4, y_4, y'_4)$ ; результаты записываем в графы для  $y$  и  $y''$ . Затем заполняем графы для  $\delta y''$ ,  $\delta^2 y''$  и  $\delta^3 y''$ .

Теперь производим контроль при помощи формулы

$$\delta y'_4 = h \left( y''_4 - \frac{1}{2} \delta y''_4 - \frac{1}{12} \delta^2 y''_4 - \frac{1}{24} \delta^3 y''_4 \right)$$

Если  $\delta y'_4 = \tilde{\delta} y'_4$ , то переходим к заполнению следующей строки. В противном случае 4-я строка вычеркивается и заполняется заново на основании  $\delta y'_4$  (а не  $\tilde{\delta} y'_4$ ) и т. д. Вплоть до совпадения  $\delta y'_4$  с  $\tilde{\delta} y'_4$ . Последующие шаги производятся точно также.

Метод Адамса-Штёрмера совершенно аналогично применим и к уравнениям более высоких порядков.

## XVIII. Ряды

### 1. Иопятпе о чпсловом ряде

*Числовым рядом называется выражение вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (18.1)$$

где  $a_1, a_2, a_3, \dots$  – некоторые числа, называемые членами ряда. Если  $n$  – произвольный (текущий) номер, то число  $a_n$  называют *общим членом ряда*. Например, общий член ряда

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

равен  $\frac{1}{n^2}$ .

Сумма  $n$  первых членов ряда называется его  $n$ -й *частичной суммой* и обозначаются  $s_n$ . Имеем

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n. \end{aligned}$$

Пусть  $n \rightarrow \infty$ . Если существует предел  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , то он называется *суммой* данного ряда, а сам ряд называется *сходящимся*. Если предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  не существует (в частности, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ ), то ряд называется *расходящимся*.

Ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots,$$

получающийся из ряда (18.1) путём отбрасывания  $n$  первых его членов, называется *остатком ряда* (18.1). Так как отбрасывание (или добавление) любого конечного числа членов, очевидно, не влияет на сходимость ряда, то, если ряд (18.1) сходится, сходится и его остаток. Его сумму обозначают  $r_n$ .

Итак,  $s = s_n + r_n$ .

Очевидно, что в этом случае  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ .

**Ирпмер. 18.1.** Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots \quad (18.2)$$

Имеем

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

т.е.

$$s_n = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

Если  $|q| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1 - q} = 0$ , а значит

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q},$$

т.е. в этом случае ряд сходится.

Если  $|q| > 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1 - q} = \infty$ , а значит и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty,$$

т.е. ряд расходится.

Если  $q = 1$ , то ряд имеет вид

$$1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

и, конечно, расходится.

Наконец, при  $q = -1$  получаем ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Если  $n \rightarrow \infty$ , то  $s_n$ , принимая поочерёдно значения 1 и 0, ни к какому пределу не стремится, а значит ряд расходится.

Итак, ряд (18.2) сходится тогда и только тогда, когда  $|q| < 1$ .

**Пример. 18.2.** Возьмём ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Имеем

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

а значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1,$$

т.е. ряд сходится.

## 2. Необходимый признак сходимости ряда

**Теорема 18.1.** Если ряд (18.1) сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

По условию существует предел  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ . Но если  $n \rightarrow \infty$ , то и  $n-1 \rightarrow \infty$ , а значит и  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s$ . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0,$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0,$$

т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Из доказанной теоремы следует, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд заведомо расходится. Примером может служить ряд

$$2 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \dots + \sqrt[n]{2} + \dots,$$

поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Рассмотренный признак сходимости ряда является лишь необходимым, но не достаточным, т.е. условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  вовсе не гарантирует сходимости ряда. В качестве примера возьмём ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Имеем

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}},$$

т.е.

$$s_n > \sqrt{n},$$

а значит, если  $n \rightarrow \infty$ , то  $s_n \rightarrow \infty$ , т.е. ряд расходится, хотя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

## 3. Сравнение рядов с положительными членами

Рассмотрим два ряда с положительными членами:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (18.3)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (18.4)$$



**Теорема 18.2.** Если все члены ряда (18.3) не превосходят соответствующих членов ряда (18.4), т.е.  $a_n \leq b_n$  ( $n=1,2,3,\dots$ ), и если ряд (18.4) сходится и имеет сумму  $\sigma$ , то ряд (18.3) также сходится и его сумма  $s$  не превосходит  $\sigma$ .

Действительно, в силу условия теоремы,  $s_n \leq \sigma_n$ , а так как  $\sigma_n \leq \sigma$ , то и  $s_n \leq \sigma$ . Итак при  $n \rightarrow \infty$  переменная  $s_n$  монотонно возрастает (точнее: не убывает), но ограничена сверху числом  $\sigma$ . В силу 2-го признака существования предела, существует предел  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , и при этом  $s \leq \sigma$ .

Очевидно, что теорема верна и в том случае, если неравенство  $a_n \leq b_n$  выполняется не для всех членов, а лишь начиная с некоторого  $n$ . Однако, в этом случае уже не обязательно  $s \leq \sigma$ .

**Пример 18.3.** Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Сравним его с рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

Последний ряд сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем  $q = \frac{1}{2} < 1$ . Но при любом  $n > 2$

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

а значит, первый ряд также сходится. Ниже мы увидим, что его сумма равна  $e - 1$ .

**Теорема 18.3.** Если все члены ряда (18.3) не меньше соответствующих членов ряда (18.4) и если ряд (18.4) расходится, то расходится и ряд (18.3).

Действительно, по условию

$$s_n \geq \sigma_n,$$

а так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = +\infty$ , то тем более  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ .

**Пример 18.4.** Возьмём ряд

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$$

и сравним его с рядом

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Последний ряд, как мы видели, расходится, а так как для всех  $n=1,2,3,\dots$

будет  $\ln(n+1) < \sqrt{n}$ , т.е.  $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ , то первый ряд тем более расходится.

**Теорема 18.4. (предельный признак сходимости)** Если при  $n \rightarrow \infty$  общие члены рядов (18.3) и (18.4) есть бесконечно малые одного порядка:  $a_n = O^*(b_n)$ , то оба ряда одновременно или сходятся или расходятся.

По условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = m,$$

где  $m > 0$ . Следовательно, начиная с некоторого  $n$ , будет

$$p \leq \frac{a_n}{b_n} \leq q, \quad (18.5)$$

где  $0 < p < m < q$ .

Из (18.5) имеем  $0 < pb_n \leq a_n \leq qb_n$ .

Пусть ряд (18.3) сходится. Тогда, в силу теоремы 18.2, сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} pb_n$ , а значит и ряд (18.4). Если же ряд (18.3) расходится, то, в силу

теоремы 2, расходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} qb_n$ , а значит и ряд (18.4).

Заметим, что теоремы 18.2-18.4 совершенно аналогичны соответствующим свойствам несобственных интегралов 1-го рода. Несколько позже мы увидим что между рядами и несобственными интегралами 1-го рода существует тесная связь.

#### 4. Признак Даламбера и радикальный признак Коши

Возьмем ряд (18.1) с положительными членами и предположим, что существует предел

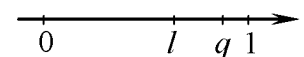
$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Это значит, что если  $n$  велико, то  $a_{n+1} \approx la_n$ , т.е. что при больших  $n$  ряд (18.1) почти не отличается от геометрической прогрессии со знаменателем  $l$ . Поэтому естественно предположить, что при  $l < 1$  ряд сходится, а при  $l > 1$  расходится. Докажем, что так и есть, т.е. что имеет место теорема, называемая признаками Даламбера.

**Теорема 18.5.** Если в ряде (18.1) все члены положительны и существует предел  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , то при  $l < 1$  ряд сходится, а при  $l > 1$  ряд расходится.

Пусть  $l < 1$ . Тогда, начиная с некоторого  $n = N$ , будет

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$$



где  $q < 1$ , так что

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{N+1}}{a_N} \leq q \\ \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \leq q \\ \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \leq q \\ \dots \end{array} \right., \quad \text{т.е.} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{N+1} \leq qa_N \\ a_{N+2} \leq qa_{N+1} \\ a_{N+3} \leq qa_{N+2} \\ \dots \end{array} \right.,$$

т.е.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{N+1} \leq qa_N \\ a_{N+2} \leq q^2 a_N \\ a_{N+3} \leq q^3 a_N \\ \dots \end{array} \right. \quad (18.6)$$

Сравним теперь два ряда

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots \\ a_N + qa_N + q^2 a_N + \dots \end{aligned}$$

Второй ряд есть геометрическая прогрессия со знаменателем  $q < 1$ , т.е. этот ряд сходится. Но тогда из (18.6) следует, что сходится и первый ряд, т.е. ряд (18.1).

Пусть теперь  $l > 1$ . Это значит, что, начиная с некоторого  $n = N$  будет

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \quad \text{т.е.} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{0} \quad \text{1} \quad \text{l} \\ \text{---} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{N+1}}{a_N} > 1 \\ \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} > 1 \\ \dots \end{array} \right.,$$

откуда

$$a_N < a_{N+1} < a_{N+2} < \dots,$$

а это значит, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , т.е. что ряд расходится.

**Пример 18.5.** Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} = 2 + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots$$

Имеем

$$a_n = \frac{2^n n!}{n^n}, \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}},$$

откуда

$$\begin{aligned} l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} 2^n n!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \\ &= \frac{2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1, \end{aligned}$$

а значит, ряд сходится.

**Примечание.** Если  $l=1$ , то ряд (18.1) может сходиться, но может и расходиться. Например, ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots,$$

как мы видели, расходится, а ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

сходится, поскольку его члены, начиная с  $n=2$ , меньше соответствующих членов сходящегося ряда

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots$$

Между тем, для обоих этих рядов  $l=1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Итак, если  $l=1$ , то признак Даламбера неприменим, и сходимость ряда надо исследовать при помощи какого-нибудь другого признака.

Для исследования сходимости рядов с положительными числами иногда удобно применять радикальный признак Коши, который формулируется следующим образом: если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ , то при  $l < 1$  ряд сходится, а при  $l > 1$  ряд расходится. Если же  $l = 1$ , то этот признак неприменим для данного ряда.

**Пример.** Исследуем на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n$ . Применяя

радикальный признак Коши, получим, что

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1,$$

т.е.  $l < 1$ , следовательно данный ряд сходится.

### 5. Интегральный признак Коши

Возьмём ряд (18.1) с положительными членами и введём в рассмотрение функцию  $f(x)$ , неотрицательную при всех  $x > 0$  и такую, что

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$$

Имея  $f(x)$  и полагая в ней  $x = 1, 2, 3, \dots$ , мы получим все члены ряда. Поэтому функцию  $f(x)$  называют производящей функцией ряда (18.1). Во многих случаях эта функция получается из  $a_n$  путем замены в нём  $n$  на  $x$ . Например для ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \dots + \frac{n}{1+n^2} + \dots$$

будет

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

**Теорема 18.6 (интегральный признак Коши).** Пусть члены ряда (18.1) положительны и не возрастают при  $n \rightarrow \infty$ , а  $f(x)$  – производящая функция этого ряда, так же монотонно не возрастающая при  $x \rightarrow +\infty$ . Тогда:

- 1) Если несобственный интеграл  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  сходится, то сходится и ряд (18.1).
- 2) Если этот интеграл расходится, то ряд (18.1) также расходится.

■ Пусть интеграл  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  сходится. Это значит, что

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = Q,$$

где  $Q$  – некоторое число. Строим точки  $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n)$ , через которые, очевидно, проходит график функции  $f(x)$  (рис. 18.1). Так как основания всех прямоугольников равны 1, то их площади равны  $a_2, a_3, \dots, a_n$ , а значит сумма этих площадей равна

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n = s_n - a_1.$$

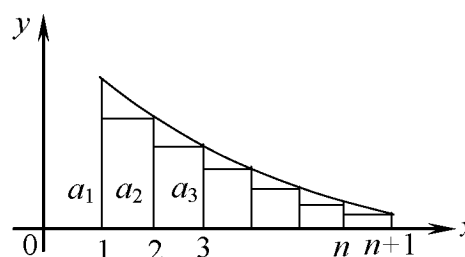


Рис. 18.1

Легко видеть, что

$$s_n - a_1 \leq \int_1^n f(x) dx,$$

а значит тем более

$$s_n - a_1 \leq Q,$$

откуда

$$s_n \leq Q + a_1.$$

Итак, при  $n \rightarrow \infty$  величина  $s_n$  возрастает, но ограничена сверху числом  $Q + a_1$ . Поэтому существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , т.е. ряд (18.1) сходится.

Пусть теперь интеграл  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  расходится. Это значит, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = +\infty,$$

а так как, в силу чертежа,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > \int_1^{n+1} f(x) dx,$$

т.е.

$$s_n > \int_1^{n+1} f(x) dx,$$

то тем более

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty,$$

а значит ряд (18.1) расходится.  $\square$

**Следствие.** Возьмем ряд

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots \quad (18.7)$$

Мы уже видели, что при  $k = \frac{1}{2}$  он расходится, а при  $k = 2$  – сходится.

Исследуем этот вопрос в общем виде. Для данного ряда будет  $f(x) = \frac{1}{x^k}$ .

Поэтому вводим интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k}$ . Он, как было доказано, сходится при  $k > 1$  и

расходится при  $k \leq 1$ . В силу интегрального признака Коши, ряд (18.7) также сходится при  $k > 1$  и расходится при  $k \leq 1$ .

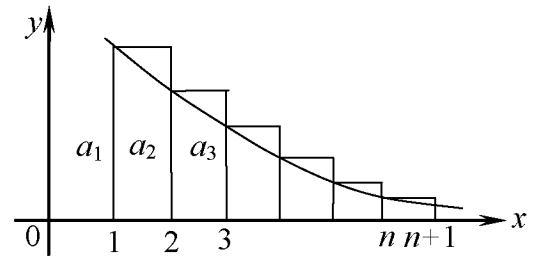


Рис. 18.2

При  $k = 1$  ряд (18.7) имеет вид

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Этот ряд называют гармоническим. По только что доказанному, он расходится. Но в то же время он занимает особое, «пограничное» положение среди всех расходящихся рядов вида (18.7).

Из рассмотренного следствия и из соответствующего свойства несобственных интегралов 1-го рода вытекает, что если члены ряда (18.1) положительны, монотонно не возрастают с ростом  $n$  и такие, что  $a_n = O^*\left(\frac{1}{n^k}\right)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то ряд (18.1) сходится при  $k > 1$  и расходится при  $k \leq 1$ .

**Пример 18.6.** Исследуем на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{4n^4 + 3n^2 - 2}}$ . Имеем

при  $n \rightarrow \infty$

$$a_n = \sqrt{\frac{n+1}{4n^4 + 3n^2 - 2}} \sim \sqrt{\frac{n}{4n^4}} = \frac{1}{2n^{3/2}} = O^*\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

а так как  $\frac{3}{2} > 1$ , то ряд сходится.

**Примечание.** Пусть ряд (18.1) сходится на основе интегрального признака Коши. Тогда для его остатка  $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots$  имеем (рис. 18.3)

$$r_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx$$

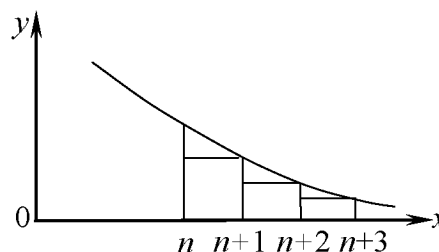


Рис. 18.3

**Пример 18.7.** Для приближенного вычисления суммы сходящегося ряда

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots$$

обозначим

$$s \approx 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{10^3}.$$

Тогда для оценки погрешности имеем

$$r_{10} < \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2x^2} \Big|_{10}^{\infty} = \frac{1}{2 \cdot 10^2} = 0,005.$$

## 6. Знакочередующиеся ряды

Рассмотрим ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots, \quad (18.8)$$

где  $a_1, a_2, a_3, \dots$  — положительные числа. Такой ряд называют знакочередующимся.

**Теорема 18.7. (признак Лейбница)** Если в знакочередующемся ряде (18.8) члены монотонно убывают по модулю, причём  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то этот ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит  $a_1$ .

Пусть сначала  $n$  — чётное число, т.е.  $n = 2m$ . Тогда

$$s_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Каждая из разностей, по условию, неотрицательна, а значит и  $s_{2m} > 0$ . Кроме того, если  $m$  растёт, то и  $s_{2m}$  не убывает.

С другой стороны,

$$s_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m},$$

а так как все разности и число  $a_{2m}$  неотрицательны, то  $s_{2m} < a_1$ .

Пусть  $m \rightarrow \infty$ . Тогда величина  $s_{2m}$  возрастает, но остаётся меньше числа  $a_1$ . Следовательно, существует предел  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = s$ , причём  $s \leq a_1$ .

Итак, если  $n$  неограниченно растёт, оставаясь чётным, то величина  $s_n$  имеет некоторый предел  $s$ .

Пусть теперь  $n$  — нечётное число, т.е.  $n = 2m + 1$ . Тогда

$$s_{2m+1} = s_{2m} + a_{2m+1},$$

а значит

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = s + 0 = s.$$

Таким образом,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  как при чётных, так и при нечётных  $n$ , что и доказывает теорему.

Если ряд (18.8) сходится, то сходится и ряд

$$(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \dots$$

и его сумма равна остатку  $r_n$ . Применяя к этому ряду только что доказанную теорему, получим

$$|r_n| \leq a_{n+1}.$$

Итак, погрешность, допускаемая при замене суммы знакочередующегося ряда его частичной суммой, не превосходит по модулю модуля первого отброшенного члена.

**Пример 18.8.** Ряд



$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

сходится, так как  $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Если мы для суммы этого ряда положим

$$s \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99},$$

то совершаемая при этом погрешность, на основании только что сделанного замечания, не превосходит по модулю 0,01.

## 7. Знакопеременные ряды

Рассмотрим ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (18.9)$$

где среди чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  есть как положительные, так и отрицательные.

Такой ряд называют знакопеременным. Очевидно, знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного.

Предположим, что ряд (18.9) сходится и имеет сумму  $S$ . Тогда сходится и ряд, полученный из него объединением соседних членов,

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}) + \dots + \\ & + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \dots + a_{n_k}) + \dots, \end{aligned} \quad (18.10)$$

и его сумма также равна  $S$ .

Действительно, по условию для ряда (18.9) будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S. \quad (18.11)$$

Частичные же суммы ряда (18.10) равны:

$$\sigma_1 = S_{n_1}, \quad \sigma_2 = S_{n_2}, \quad \dots, \quad \sigma_k = S_{n_k}, \quad \dots,$$

а, значит, последовательность  $\{\sigma_k\}$  есть подпоследовательность  $\{S_{n_k}\}$  последовательности  $\{S_n\}$ . Но тогда из (18.11) следует, что и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k} = S,$$

т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = S.$$

Доказанный факт называют сочетательным свойством сходящегося ряда.

Утверждение, обратное этому свойству, неверно, т.е. из сходимости ряда (18.10), вообще говоря, не следует сходимость ряда (18.9).

Например, ряд

$$(1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots$$

сходится (поскольку все его члены равны нулю), а ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

расходится.

**Теорема 18.8.** Если в ряде (18.10) внутри каждой пары скобок находятся слагаемые одного знака, то из сходимости ряда (18.10) следует сходимость ряда (18.9), причём суммы обоих рядов одинаковы.

Пусть  $\sigma$  – сумма ряда (18.10), а  $S_n$  – частичная сумма ряда (18.9). Если  $n$  возрастает от  $n_{k-1}$  до  $n_k$ , то  $S_n$  монотонно (в силу одинаковости знаков слагаемых в скобках) изменяется от  $S_{n_{k-1}}$  до  $S_{n_k}$ . Но  $S_{n_{k-1}}$  и  $S_{n_k}$ , как отмечалось, есть частичные суммы  $\sigma_{k-1}$  и  $\sigma_k$  ряда (18.10). При  $k \rightarrow \infty$  будет  $\sigma_{k-1} \rightarrow \sigma$  и  $\sigma_k \rightarrow \sigma$ , а так как  $S_n$  находится между  $\sigma_{k-1}$  и  $\sigma_k$ , то и  $S_n \rightarrow \sigma$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Доказанная теорема верна, в частности, для рядов с положительными членами.

Составим по ряду (18.9) следующий ряд

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (18.12)$$

**Теорема 18.9.** Если ряд (18.12) сходится, то сходится и ряд (18.9).

Эта теорема есть частный случай теоремы 18.10, которая будет доказана позже.

Если ряд (18.12), составленный из модулей членов ряда (18.9), сходится, то говорят, что ряд (18.9) сходится абсолютно. Поэтому теорема 18.9 гласит, что если ряд сходится абсолютно, то он сходится и в обычном смысле. Однако возможен и случай, когда ряд (18.9) сходится, а ряд (18.12) расходится. В этом случае говорят, что ряд (18.9) сходится, но не абсолютно.

Таким образом, знакопеременный ряд может:

- а) сходиться, и притом абсолютно;
- б) сходиться, но не абсолютно;
- в) расходиться.

**Пример 18.9.** Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

сходится, но не абсолютно, так как ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  расходится.

**Пример 18.10.** Ряд

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots$$

сходится абсолютно, так как сходится и ряд  $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots$

**Пример 18.11.** Ряд

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n}{2n-1} + \dots$$

расходится, так как для него  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ , а значит и  $a_n$  не стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$ .

**Примечание.** Предположим, что для ряда (18.9) существует предел  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ . Тогда, в силу признака Даламбера, при  $l < 1$  ряд (18.12) сходится, а значит ряд (18.9) сходится абсолютно. Если же  $l > 1$ , то (см. доказательство второй части признака Даламбера) будет  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$ , а значит и равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  не выполнено, т.е. ряд (18.9) расходится.

Итак, если для ряда (18.9) предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  существует и не равен 1, то этот ряд либо сходится абсолютно, либо расходится.

## 8. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Будем теперь рассматривать ряды

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (18.13)$$

где числа  $a_1, a_2, a_3, \dots$  вообще говоря, комплексные. Как и в случае ряда (18.9) с вещественными членами, ряд (18.13) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (18.14)$$

(члены этого ряда, очевидно, вещественны и положительны).

**Пример 18.12.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n\sqrt{n}} i \right)$  абсолютно сходящийся, так как

$$|a_n| = \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^3}},$$

а значит

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow |a_n| \sim \frac{2}{n\sqrt{n}} = 0 * \left( \frac{1}{n^{3/2}} \right)$$

так что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  в данном случае сходится.

**Теорема 18.10.** Если ряд (18.13) сходится абсолютно, то он сходится и в обычном смысле.

По условию ряд (18.14) сходится. Тогда для его остатка  $\rho_n$  будет  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| = 0. \quad (18.15)$$

Но

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|,$$

а, значит, из (18.15) следует, что тем более

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| = 0 \quad (18.16)$$

Поскольку  $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$  есть остаток ряда (18.13), то равенство (18.16) означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n| = 0$ , откуда следует, что и  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ , а это равносильно сходимости ряда (18.13).

Доказанная теорема верна, в частности, для знакопеременных рядов с вещественными членами (см. теорему 18.9).

Пусть ряд (18.13) сходится. Если переставить в нём конечное число членов, то это не нарушит его сходимости и не изменит его сумму. Если же в ряде (18.13) переставить бесконечное число членов, то его сумма может и измениться.

В качестве примера возьмём ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (18.17)$$

Он сходится на основании признака Лейбница. Обозначим его сумму через  $S$ .

Переставим теперь члены ряда (18.17) так, чтобы за одним положительным членом следовали два отрицательных. Получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \quad (18.18)$$

Пусть  $S_n$  и  $\sigma_n$  частичные суммы рядов (18.17) и (18.18). Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{3k} &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2K-1} - \frac{1}{4K-2} - \frac{1}{4K}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4K-2} - \frac{1}{4K}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2K-1} - \frac{1}{2K}\right) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2K-1} - \frac{1}{2K} \right),$$

т.е.

$$\sigma_{3k} = \frac{1}{2} S_{2k}.$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{3k} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = \frac{1}{2} S,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{3k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sigma_{3k} + \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} S - 0 = \frac{1}{2} S,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{3k+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sigma_{3k+1} - \frac{1}{4k+2} \right) = \frac{1}{2} S - 0 = \frac{1}{2} S.$$

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{2} S,$$

т.е. ряд (18.18) сходится, как и ряд (18.17), но имеет сумму, вдвое меньшую по сравнению с исходным рядом.

Пусть ряд (18.13) сходится, а ряд

$$a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n + \dots \quad (18.19)$$

получен из него путём произвольной перестановки бесконечного числа его членов. Иными словами, каждый из членов  $a'_m$  есть член  $a_n$  ряда (18.13) с некоторым конкретным номером.

**Теорема 18.11.** Если ряд (18.13) сходится абсолютно, то ряд (18.19) также сходится абсолютно и имеет ту же сумму.

По условию ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  сходится. Пусть  $\sigma$  – его сумма, а  $\sigma_n$  – частичная

сумма. Возьмём произвольную частичную сумму  $\sigma'_m$  ряда  $\sum_{m=1}^{\infty} |a'_m|$ . Входящие в

неё числа  $|a'_m|$  – это члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  с некоторыми номерами. Пусть

$n$  – наибольший из этих номеров. Тогда  $\sigma'_m \leq \sigma_n$ , а так как  $\sigma_n \leq \sigma$ , то и  $\sigma'_m \leq \sigma$ .

Таким образом, при  $m \rightarrow \infty$  величина  $\sigma'_m$  монотонно возрастает, но ограничена сверху числом  $\sigma$ . Следовательно, существует предел  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma'_m$ , это

значит, что ряд (18.19) сходится абсолютно.

Предположим теперь, что сумма ряда (18.13) равна  $S$ , а  $S_n$  – его частичная сумма. Далее, поскольку ряд (18.14) в данном случае также

сходится, то для его остатка будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$$

Возьмём некоторое  $\varepsilon > 0$ . Для него существует такой номер  $N(\varepsilon)$ , что  $\rho_N < \frac{\varepsilon}{2}$ , т.е.

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (18.20)$$

Но тогда тем более

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

т.е.

$$|S - S_N| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (18.21)$$

В сумму  $S_N$  входят члены ряда (18.19) с различными номерами. Пусть  $N'$  наибольший из этих номеров. Возьмём  $m \geq N'$ . Тогда

$$|S'_m - S_N| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$$

а значит, на основании неравенства (18.20),

$$|S'_m - S_N| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Отсюда и из (18.21) при  $m \geq N'$  будем иметь

$$|S - S'_m| = |(S - S_N) + (S_N - S'_m)| \leq |S - S_N| + |S_N - S'_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

а это и означает, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} S'_m = S$ .

Рассмотрим теперь два ряда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (18.22)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (18.23)$$

Формально перемножая их почленно, получим сумму бесконечного числа слагаемых:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 b_1, & a_1 b_2, & a_1 b_3, & \dots, & a_1 b_n, & \dots & \\ a_2 b_1, & a_2 b_2, & a_2 b_3, & \dots, & a_2 b_n, & \dots & \\ a_3 b_1, & a_3 b_2, & a_3 b_3, & \dots, & a_3 b_n, & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_n b_1, & a_n b_2, & a_n b_3, & \dots, & a_n b_n, & \dots & \end{array}$$

Будем объединять члены, стоящие вдоль каждой из диагоналей, тогда получим ряд

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \dots \\ + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + a_3b_{n-2} + \dots + a_nb_1) + \dots \quad (18.24)$$

**Теорема 18.12.** Если ряды (18.22) и (18.23) сходятся абсолютно, то полученный их почленным перемножением ряд (18.24) также сходится абсолютно, и его сумма равна произведению сумм перемножаемых рядов.

Пусть  $\sigma$  и  $\tau$  – суммы рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ .

Составим ряд

$$|a_1||b_1| + (|a_1||b_2| + |a_2||b_1|) + (|a_1||b_3| + |a_2||b_2| + |a_3||b_1|) + \dots + \\ + (|a_1||b_n| + |a_2||b_{n-1}| + |a_3||b_{n-2}| + \dots + |a_n||b_1|) + \dots \quad (18.25)$$

Его частичная сумма равна

$$\theta_n = |a_1||b_1| + (|a_1||b_2| + |a_2||b_1|) + (|a_1||b_3| + |a_2||b_2| + |a_3||b_1|) + \dots + \\ + (|a_1||b_n| + |a_2||b_{n-1}| + |a_3||b_{n-2}| + \dots + |a_n||b_1|),$$

откуда легко следует, что

$$\theta_n < (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|)(|b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|),$$

а значит тем более

$$\theta_n < \sigma\tau$$

Таким образом, при  $n \rightarrow \infty$  величина  $\theta_n$  монотонно возрастает, но ограничена сверху. Следовательно, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$ , а это значит,

что ряд (18.25) сходится. Поскольку все его члены положительны, то скобки в нём можно отбросить, а значит можно говорить, что абсолютно сходится ряд

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + \dots \quad (18.26)$$

На основании теоремы 18.11 члены этого ряда можно располагать в произвольном порядке, и при этом его сумма не изменится. Кроме того, поскольку вновь полученный ряд сходится, то его соседние члены можно объединять в группы. Объединяя их по следующему принципу:

$$\begin{array}{cccc} \hline a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots \\ \hline a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots \\ \hline a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

получим вместо ряда (18.26) ряд

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \dots \quad (18.27)$$

Пусть  $\bar{S}$  и  $\overline{\bar{S}}$  суммы рядов (18.22) и (18.23), а  $\bar{S}_n$  и  $\overline{\bar{S}}_n$  их частичные суммы. Тогда для частичных сумм ряда (18.27) имеем

$$\mu_1 = a_1 b_1 = \bar{S}_1 \overline{\bar{S}}_1,$$

$$\mu_2 = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = \bar{S}_2 \overline{\bar{S}}_2,$$

и точно так же

$$\mu_3 = \bar{S}_3 \overline{\bar{S}}_3, \quad \mu_4 = \bar{S}_4 \overline{\bar{S}}_4, \quad \dots, \quad \mu_n = \bar{S}_n \overline{\bar{S}}_n, \quad \dots$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{S}_n \overline{\bar{S}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\bar{S}}_n = \bar{S} \overline{\bar{S}},$$

т.е. сумма ряда (18.27), а значит и ряда (18.26), равна произведению сумм рядов (18.22) и (18.23).

### Задачи и упражнения к главе XVIII

Исследовать на сходимость ряды:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 + 2n - 1}{n^2 - 4n + 5} \right)^{n(n+1)}$
3.  $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})^{3/2} \ln \frac{n^2 + n - 1}{n^2 - 3n + 2}$
4.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{\ln n}}$
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cos \frac{n\pi}{2n+1}$
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{4}}{3} \right)^{n^2}$
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[3]{n^3 + 6n^2 - 1} - n \right) \left( 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt[n]{5} + 1}{2} \right)^{n^k}$
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[4]{n^2 + n} - \sqrt{n} \right) \sin \frac{n\pi}{n+1}$
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} - 1) \ln \frac{n^2 + n + 3}{n^2 - 3n + 4}$
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{(\ln)^n}$
13.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$
14.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2} \right)^{n^2}$
15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$
16.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$



При каких  $p$  сходятся ряды:

$$17. \sum_{n=5}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^p \left( \ln \cos \frac{\pi}{4n} \right)^2$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})^p (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln^p \sec \frac{\pi}{n}$$

$$19. \sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \ln^p \frac{n+1}{n-1}$$

Исследовать на сходимость и на абсолютную сходимость ряды:

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \sqrt[n]{5} - \frac{\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{2}}{2} \right)$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2+n+1}) \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$$

$$24. \frac{100}{1} - \frac{100 \cdot 101}{1 \cdot 3} + \frac{100 \cdot 101 \cdot 102}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1}) \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$$

# ХІХ. Функциональные ряды

## 1. Понятие о функциональном ряде

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad (19.1)$$

где  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$  – некоторые функции (вообще говоря, комплекснозначные), называется функциональным рядом. Придавая переменной  $x$  конкретные значения, будем получать из ряда (19.1) различные числовые ряды, сходящиеся или расходящиеся.

Совокупность значений  $x$ , при которых ряд (19.1) сходится, называется областью сходимости этого ряда.

**Пример 19.1.** Найдем область сходимости ряда

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \dots + \frac{1}{1+x^n} + \dots \quad (19.2)$$

Если  $|x| > 1$ , то при  $n \rightarrow \infty$  будет

$$u_n(x) \sim \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n,$$

а значит ряд сходится, поскольку сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$  (как геометрическая

прогрессия, для которой  $|q| = \frac{1}{|x|} < 1$ ).

Если  $|x| < 1$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} = 1 \neq 0,$$

а значит, ряд расходится.

Если  $x = 1$ , то ряд имеет вид

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots$$

и, следовательно, расходится.

Наконец, при  $x = -1$  все члены ряда с нечётными номерами обращаются в бесконечность, а значит ряд расходится.

Итак, область сходимости ряда (19.2) является множество  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

Если  $E$  – область сходимости функционального ряда (19.1), то говорят, что ряд (19.1) сходится на множестве  $E$ . Поскольку при  $x \in E$  сумма ряда

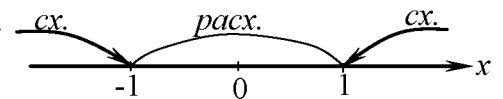


Рис. 19.1

(19.1) есть, вообще говоря, функция переменной  $x$ , то её обозначают  $s_n(x)$ , а остаток –  $r_n(x)$ . Таким образом, при любом  $x \in E$  и любом  $n$

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

или, что то же самое,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0. \quad (19.3)$$

Так же, как и для числового ряда, для функциональных рядов вводится понятие абсолютной сходимости. В частности, ряд (19.2), как легко видеть, является абсолютно сходящимся в своей области сходимости.

## 2. Равномерная сходимость функционального ряда

Пусть ряд (19.1) имеет в области  $E$  сумму  $s(x)$ . Возникает вопрос, в какой степени сумма этого ряда «наследует» свойства членов этого ряда, т.е.  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ . Например, если все функции  $u_n(x)$  непрерывны на множестве  $E$ , то будет ли такой же и функция  $s(x)$ ? Этот же вопрос можно поставить также о дифференцируемости или интегрируемости функции  $s(x)$  и т.д.

Возьмём в качестве примера ряд

$$(1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \dots + x^{n-1}(1-x) + \dots \quad (19.4)$$

Легко видеть, что для него  $E = [-1, 1]$ . Мы будем рассматривать лишь часть области сходимости, а именно: отрезок  $[0, 1]$ .

Если  $x \neq 1$ , то

$$s(x) = \frac{1-x}{1-x} = 1.$$

Если же  $x = 1$ , то, очевидно,  $s(x) = 0$ .

Итак, для отрезка  $[0, 1]$  будет

$$s(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 1 \\ 0, & \text{если } x = 1 \end{cases}.$$

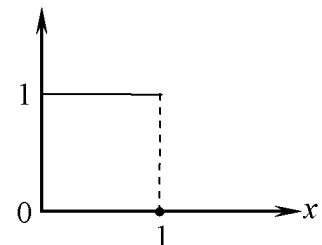


Рис. 19.2

Следовательно, функция  $s(x)$  не непрерывна на отрезке  $[0, 1]$ , хотя члены ряда есть функции, непрерывные на нём. Ниже мы выясним причину этого явления.

Пусть ряд (19.1) сходится на множестве  $E$ . Тогда для всех  $x \in E$  выполняется равенство (19.3). Оно означает, что при любом фиксированном  $x_0 \in E$  для любого  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $N(\varepsilon, x_0)$ , что

$$(n > N) \Rightarrow (|r_n(x_0)| < \varepsilon).$$

Функциональный ряд (19.1), сходящийся на множестве  $E$ , называется

равномерно сходящимся на нём, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такой номер  $N(\varepsilon)$ , что для всех  $n > N$  и для всех  $x \in E$  будет

$$(n > N) \Rightarrow (|r_n(x)| < \varepsilon),$$

т.е.

$$(n > N) \Rightarrow (|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon). \quad (19.5)$$

Если члены ряда (19.1) есть вещественные функции, то соотношение (19.5) означает геометрически, что, начиная с  $n = N + 1$ , графики функций  $s_n(x)$  содержатся внутри « $\varepsilon$  – полоски», серединой которой является график функции  $s(x)$ .

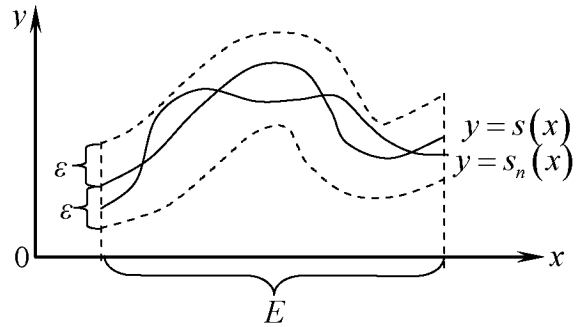


Рис. 19.3

Для ряда (19.4) имеем

$$s_1(x) = 1 - x, \quad s_2(x) = 1 - x^2,$$

$$s_3(x) = 1 - x^3, \dots$$

Легко видеть, что этот ряд сходится на отрезке  $[0, 1]$  не равномерно, хотя в любом промежутке  $[0, a]$ , где  $a < 1$ , его сходимость – равномерная.

Возьмём теперь ряд (19.1), сходящийся на множестве  $E$ , и сходящийся числовой ряд

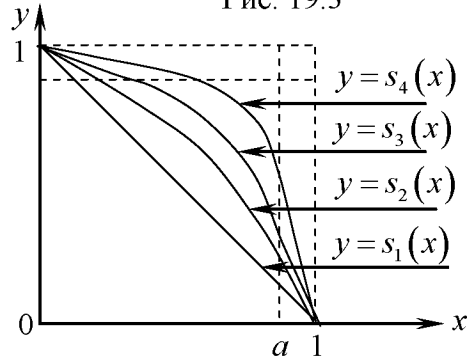


Рис. 19.4

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (19.6)$$

с положительными членами. Если для всех  $n = 1, 2, 3, \dots$  и для всех  $x \in E$  будет

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad (19.7)$$

то говорят, что функциональный ряд (19.1) мажорируется на множестве  $E$  сходящимся числовым рядом (19.6).

**Теорема 19.1. (признак Вейерштрасса)** Если функциональный ряд (19.1) мажорируется на множестве  $E$  сходящимся числовым рядом (19.6), то он сходится на множестве  $E$  равномерно.

■ Поскольку ряд (19.6) сходится, то для его остатка имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0.$$

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . По нему найдётся такое  $N(\varepsilon)$ , что

$$(n > N) \Rightarrow (\rho_n < \varepsilon),$$

т.е.

$$(n > N) \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon. \quad (19.8)$$

Но, в силу (19.7), для ряда (19.1) имеем при всех  $x \in E$

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \rho_n$$

а значит, на основании (19.8), для всех  $x \in E$  получим

$$(n > N) \Rightarrow (|r_n(x)| < \varepsilon),$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**Пример 19.2.** В силу теоремы 19.1, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$  сходится равномерно на всей числовой оси, поскольку при любом  $x$  он мажорируется сходящимся числовым рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

### 3. Непрерывность суммы функционального ряда

**Теорема 19.2.** Если функции  $u_n(x)$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) непрерывны на множестве  $E$  и ряд (19.1) сходится на этом множестве равномерно, то его сумма  $s(x)$  также непрерывна на множестве  $E$ .

■ Пусть  $x_0 \in E$  – произвольная точка. Докажем, что в этой точке функция  $s(x)$  непрерывна.

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . По нему найдём такое  $N(\varepsilon)$ , что для всех  $x \in E$  (в том числе и для  $x = x_0$ ) будет

$$(n > N) \Rightarrow (|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon). \quad (19.9)$$

Далее, функция  $s_n(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  как сумма конечного числа непрерывных функций. Следовательно, существует такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что для всех  $x \in C_\delta(x_0) \cap E$  будет

$$|s_n(x) - s_n(x_0)| < \varepsilon. \quad (19.10)$$

Но

$$s(x) - s(x_0) = (s(x) - s_n(x)) + (s_n(x) - s_n(x_0)) + (s_n(x_0) - s(x_0)).$$

Отсюда

$$|s(x) - s(x_0)| \leq |s(x) - s_n(x)| + |s_n(x) - s_n(x_0)| + |s_n(x_0) - s(x_0)|.$$

Следовательно, если  $x \in E$ , то, в силу (19.9) и (19.10), получим

$$(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|s(x) - s(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon),$$

а так как  $\varepsilon$  можно взять сколь угодно малым, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} s(x) = s(x_0), \quad (19.11)$$

что и доказывает теорему.  $\square$

Теперь можно сказать, что разрывность суммы ряда (19.4) на отрезке  $[0, 1]$  вызвана именно тем, что этот ряд сходится на данном отрезке к своей сумме не равномерно.

**Примечание.** Перепишем равенство (19.11) так

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

или, благодаря непрерывности функций  $u_n(x)$  в точке  $x_0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x).$$

Следовательно, теорема 19.2 обобщает (при указанных в ней условиях) правило вычисления предела суммы на случай бесконечного числа слагаемых.

#### 4. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов

**Теорема 19.3.** Если функции  $u_n(x)$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) непрерывны на множестве  $E = [a, b]$ , и ряд (19.1), составленный из этих функций, сходится на этом множестве равномерно и имеет на нём сумму  $s(x)$ , то для любого отрезка  $[a, x] \subset E$  ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt \quad (19.12)$$

также сходится равномерно на отрезке  $[a, b]$  и имеет на нём сумму равную

$$\int_a^x s(t) dt, \text{ т.е.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt = \int_a^x s(t) dt. \quad (19.13)$$

■ Запишем равенство

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x). \quad (19.14)$$

Функция  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$  непрерывна на  $E$  как сумма конечного числа непрерывных функций. Функция же  $s(x)$  непрерывна на  $E$  на основании теоремы 19.2. Но тогда и функция  $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$  непрерывна на множестве  $E$ .

Беря произвольное  $x \in E$ , получим из (19.14)

$$\int_a^x s(t) dt = \int_a^x s_n(t) dt + \int_a^x r_n(t) dt,$$

т.е.

$$\int_a^x s(t) dt = \int_a^x \sum_{k=1}^n u_k(t) dt + \int_a^x r_n(t) dt,$$

или

$$\int_a^x s(t) dt = \int_a^x u_1(t) dt + \int_a^x u_2(t) dt + \dots + \int_a^x u_n(t) dt + \int_a^x r_n(t) dt \quad (19.15)$$

(существование всех интегралов обеспечивается непрерывностью подынтегральных функций).

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . В силу равномерной сходимости ряда (19.1), существует такое  $N(\varepsilon)$ , что для всех  $t \in [a, x]$  будет

$$(n > N) \Rightarrow (|r_n(t)| < \varepsilon).$$

Но тогда, при  $n > N$ , получим

$$\left| \int_a^x r_n(t) dt \right| \leq \int_a^x |r_n(t)| dt < \int_a^x \varepsilon dt = \varepsilon(x - a) \leq \varepsilon(b - a).$$

Отсюда следует, в силу (19.15), что ряд (19.12) сходится и имеет сумму, равную  $\int_a^x s(t) dt$  (т.е. выполняется равенство (19.13)), а так как для остатка

$\int_a^x r_n(t) dt$  ряда (19.12) получена, при  $n \rightarrow \infty$ , равномерная малость для всего

отрезка  $[a, b]$ , то сходимость ряда (19.12) на этом отрезке – равномерная.  $\square$

**Примечание.** В равенстве (19.13) можно, в частности, положить  $x = b$ . В качестве же нижнего предела интегрирования можно, очевидно, взять любое число  $c \in (a, b)$ .

**Теорема 19.4.** Пусть функции  $u_n(x)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) имеют на отрезке  $[a, b]$  непрерывные производные  $u'_n(x)$  и пусть на этом отрезке равномерно сходятся не только ряд (19.1), но и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \quad (19.16)$$

Тогда, если сумма ряда (19.1) на отрезке  $[a, b]$  равна  $s(x)$ , то сумма ряда (19.16) на этом отрезке равна  $s'(x)$ , т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = s'(x). \quad (19.17)$$

■ Пусть  $\sigma(x)$  – сумма ряда (19.16). Это значит, что для всех  $x \in [a, b]$  будет

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \sigma(x). \quad (19.18)$$

На основании теоремы 19.2, функция  $\sigma(x)$  непрерывна, а значит и интегрируема, на любом отрезке  $[a, x] \subset [a, b]$ . Интегрируя равенство (19.18), в силу теоремы 19.3, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t) dt = \int_a^x \sigma(t) dt,$$

т.е.

$$(19.19)$$

С другой стороны, вычитая из равенства

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

равенство

$$s(a) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a),$$

получим

$$s(x) - s(a) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a)),$$

а значит равенство (19.19) примет вид

$$\int_a^x \sigma(t) dt = s(x) - s(a). \quad (19.20)$$

Поскольку функция  $\sigma(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то функция  $\int_a^x \sigma(t) dt$  дифференцируема на этом отрезке, а значит и функция  $s(x)$  имеет производную на отрезке  $[a, b]$ . Дифференцируя обе части равенства (19.20), получим, на основании теоремы Барроу,



$$\sigma(x) = s'(x),$$

после чего равенство (19.18) превращается в требуемое равенство (19.17).  $\square$

**Примечание.** Теоремы 19.3 19.4 показывают, что при определённых условиях правила дифференцирования, и интегрирования суммы функций могут быть распространены и на случай бесконечного числа слагаемых.

## 5. Последовательности функций и их свойства

Теория функциональных рядов позволяет сформулировать основные свойства т.н. функциональных последовательностей.

Пусть имеется последовательность функций

$$\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (19.21)$$

Её можно рассматривать как последовательность частичных сумм функционального ряда

$$f_1(x) + (f_2(x) - f_1(x)) + (f_3(x) - f_2(x)) + \dots + (f_n(x) - f_{n-1}(x)) + \dots \quad (19.22)$$

Если для каждого  $x \in E$  выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

то говорят, что функциональная последовательность (19.21) сходится на множестве  $E$  к предельной функции  $f(x)$ . В этом случае, как легко видеть, ряд (19.22) сходится на множестве  $E$  и имеет на нём сумму равную  $f(x)$ .

Если сходимость ряда (19.22) к функции  $f(x)$  – равномерная на множестве  $E$ , то последовательность (19.21) называется равномерно сходящейся на множестве  $E$  к функции  $f(x)$ . Это значит, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N(\varepsilon)$ , что для всех  $x \in E$  будет

$$(n > N) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

И этом случае пишут, что  $\{f_n(x)\} \xrightarrow[E]{} f(x)$

**Теорема 19.5** Если последовательность (19.21) непрерывных на множестве  $E = [a, b]$  функций сходится к функции  $f(x)$  равномерно на

отрезке  $[a, b]$ , то и последовательность  $\left\{ \int_a^x f_n(t) dt \right\}$  сходится равномерно на

отрезке  $[a, b]$  к предельной функции  $\int_a^x f(t) dt$ , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x f(t) dt.$$

Перепишав последнее равенство так

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt,$$

заключаем, что в условиях теоремы возможен предельный переход под знаком интеграла.

**Теорема 19.6.** Если последовательность (19.21) функций с непрерывными на отрезке  $[a, b]$  производными сходится на нём, а последовательность  $\{f'_n(x)\}$  сходится на отрезке  $[a, b]$  равномерно, то последовательность (19.20) сходится на  $[a, b]$  также равномерно, её предельная функция имеет на отрезке  $[a, b]$  непрерывную производную, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x).$$

Перепишав последнее равенство так

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)',$$

заключаем, что при условиях теоремы возможен предельный переход под знаком производной.

Каждая из теорем 19.5 и 19.6 является простой перефразировкой соответствующей теоремы для функционального ряда и поэтому не нуждается в отдельном доказательстве.

### Задачи и упражнения к главе XIX

Найти области сходимости рядов:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$

3. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$  и вычислить его сумму в этой области.

4. Доказать, что ряд  $x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \dots$  сходится неравномерно на отрезке  $[0, 1]$  и равномерно – на отрезке  $[2, 3]$ . При каком  $n$  для всех  $x \in [2, 3]$  будет  $|r_n(x)| < 0,001$ ?

## XX. Степенные ряды

### 1. Степенной ряд и область его сходимости

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (20.1)$$

где  $a_0, a_1, a_2, \dots$  – числа (вообще говоря, комплексные), называемые коэффициентами ряда.

Очевидно, любой степенной ряд сходится, по крайней мере в одной точке:  $x = 0$ .

**Теорема 20.1. (Абеля)** Если степенной ряд (20.1) сходится при некотором значении  $x_0 \neq 0$ , то он абсолютно сходится при всяком  $x$ , для которого  $|x| < |x_0|$ .

■ По условию ряд

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n + \dots$$

сходится, а значит его общий член стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , т.е.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_nx_0^n = 0$ . Иными словами, последовательность  $\{a_nx_0^n\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) имеет предел, равный нулю. Следовательно, эта последовательность ограничена, т.е. существует такое число  $M > 0$ , что  $|a_nx_0^n| \leq M$  при всех  $n = 0, 1, 2, \dots$

Перепишем исходный ряд (20.1) так

$$a_0 + a_1x_0 \frac{x}{x_0} + a_2x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \dots + a_nx_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \dots \quad (20.2)$$

и составим ряд из модулей его членов

$$|a_0| + |a_1x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2x_0^2| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \dots + |a_nx_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots \quad (20.3)$$

Сравним его с рядом

$$M + M \left|\frac{x}{x_0}\right| + M \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \dots + M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots \quad (20.4)$$

Если  $|x| < |x_0|$ , то ряд (20.4) есть геометрическая прогрессия со знаменателем  $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ , а значит этот ряд сходится. В силу неравенства

$|a_nx_0^n| \leq M$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) сходится и ряд (20.3). Но это значит, что ряд (20.2),

или, что то же самое, ряд (20.1), сходится абсолютно. □

**Следствие.** Если ряд (20.1) расходится при некотором  $x_0$ , то он

расходится и при всяком  $x$ , для которого  $|x| > |x_0|$ .

Действительно, пусть при вышеупомянутом  $x$  ряд (20.1) сходится. Тогда, по теореме 20.1, он сходится и при  $x = x_0$  (так как  $|x| > |x_0|$ ), а это противоречит условию.  $\square$

Из теоремы Абеля и её следствия легко получим, что область сходимости ряда (20.1) представляет собой промежуток с концами в точках  $x = -R$  и  $x = R$ . Его называют интервалом сходимости данного степенного ряда. Число  $R$  называют радиусом сходимости.

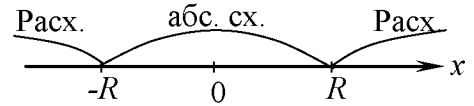


Рис. 20.1

Если ряд (20.1) сходится на всей числовой оси, то можно положить  $R = +\infty$ . Если же ряд (20.1) сходится только в точке  $x = 0$ , то, очевидно,  $R = 0$ .

На каждом из концов интервала сходимости (в случае конечного  $R$ ) ряд (20.1) может как сходиться, так и расходиться. В этом случае рассуждения, основанные на теореме Абеля, неприменимы, и для выяснения вопроса о сходимости необходимо дополнительное исследование.

Во многих случаях радиус сходимости степенного ряда может быть вычислен по простой формуле. Предположим, что для ряда (20.1) существует

предел  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ . Тогда

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}} = \frac{|x|}{\rho}.$$

Если  $|x| < \rho$ , то  $l < 1$ , а значит (см. замечание об абсолютной сходимости рядов) ряд (20.1) сходится абсолютно. Если же  $|x| > \rho$ , то  $l > 1$ , и ряд (20.1) расходится. Следовательно, число  $\rho$  есть не что иное, как радиус сходимости ряда (20.1). Поэтому в данном случае радиус сходимости может быть вычислен по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad (20.5)$$

**Пример 20.1.** Для ряда

$$1 + \frac{3}{2}x + \frac{3^2}{3}x^2 + \frac{3^3}{4}x^3 + \dots + \frac{3^n}{n+1}x^n + \dots \quad (20.6)$$

формула (20.5) даёт

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{\frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{3}.$$

Исследуем поведение ряда на концах интервала  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ . При  $x = \frac{1}{3}$  ряд имеет вид

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

и, следовательно, расходится. Если же  $x = -\frac{1}{3}$ , то имеем ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

являющийся сходящимся.

Итак, ряд (20.2) сходится абсолютно в интервале  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ , сходится, но не абсолютно,

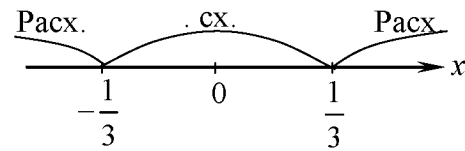


Рис. 20.2

на левом его конце и расходится на правом.

**Примечание.** В основе формулы (20.5), как легко видеть, лежит признак Даламбера. Точно так же из *радикального признака* Коши легко следует другая формула для радиуса сходимости степенного ряда

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (20.7)$$

(предел, стоящий в знаменателе, предполагается существующим). Формулу (20.7) называют *формулой Коши-Адамара*.

## 2. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

**Лемма 20.1.** Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, лежащем внутри его интервала сходимости.

■ Пусть  $R$  – радиус сходимости ряда (20.1), а  $\rho < R$  – произвольное положительное число. Возьмём некоторое  $x \in [-\rho, \rho]$ . Тогда для всех  $n$

$$|a_n x^n| \leq |a_n| \rho^n$$

Но ряд

$$|a_0| + |a_1| \rho + |a_2| \rho^2 + \dots + |a_n| \rho^n + \dots$$

сходится на основании теоремы Абеля.

Следовательно, на отрезке  $[-\rho, \rho]$  ряд мажорируется сходящимся числовым

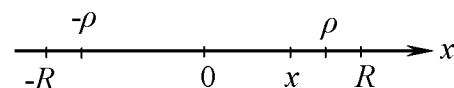


Рис. 20.3

рядом. В силу признака Вейерштрасса, ряд (20.1) сходится на отрезке  $[-1,1]$  равномерно.  $\square$

Из доказанной леммы, в частности, следует, что сумма степенного ряда внутри его интервала сходимости есть непрерывная функция.

**Теорема 20.2.** Пусть  $s(x)$  – сумма ряда (20.2) в интервале  $(-R, R)$ . Тогда ряд

$$a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n}x^{n+1} + \dots \quad (20.8)$$

полученный из ряда (20.1) почленным интегрированием от 0 до  $x$ , сходится в этом интервале, и его сумма равна  $\int_0^x s(t)dt$ .

Эта теорема сразу следует из леммы 20.1 и из теоремы 15.3.

**Теорема 20.3.** Если ряд (20.1) имеет интервал сходимости  $(-R, R)$  и его сумма в нём равна  $s(x)$ , то полученный из него почленным дифференцированием ряд

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \quad (20.9)$$

имеет тот же интервал сходимости, и его сумма в нём равна  $s'(x)$ .

■ Докажем сначала, что ряд (20.9) сходится равномерно на любом отрезке  $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$ . Пусть  $\xi \in (\rho, R)$  – произвольное число. При  $x = \xi$  ряд (20.1) сходится, а значит  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \xi^n = 0$ . Поэтому существует такое число  $M > 0$ , что для всех  $n = 0, 1, 2, \dots$  будет  $|a_n| \xi^n \leq M$ .

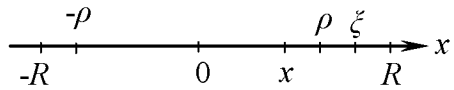


Рис. 20.4

Возьмём произвольное  $x \in [-\rho, \rho]$ . Тогда

$$|na_nx^{n-1}| \leq n|a_n|\rho^{n-1} = n \frac{|a_n|\xi^n}{\xi} \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{n-1} \leq n \frac{M}{\xi} \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{n-1}.$$

Обозначив  $\frac{\rho}{\xi} = q$ , получим

$$|na_nx^{n-1}| \leq \frac{M}{\xi} nq^{n-1}.$$

Ряд с общим членом  $nq^{n-1}$  сходится, в силу признака Даламбера. Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = q < 1.$$

Следовательно, ряд (20.1) мажорируется на отрезке  $[-\rho, \rho]$  сходящимся числовым рядом, откуда и вытекает его равномерная сходимость на этом отрезке. Из теоремы (15.4) следует, что сумма ряда (20.10) на отрезке  $[-\rho, \rho]$  равна  $s'(x)$ . А так как  $\rho$  можно взять сколь угодно близким к  $R$ , то под  $[-\rho, \rho]$  можно подразумевать любой отрезок, лежащий внутри интервала сходимости ряда (20.1).

Докажем теперь, что при  $|x| > R$  ряд (20.9) расходится. Предположим, что он сходится при  $x_1 > R$ , а  $x_2 \in (R, x_1)$  – произвольное число. Тогда в силу теоремы Абеля, ряд (20.10) сходится и при  $x = x_2$ . Интегрируя этот ряд почленно от 0 до  $x_2$ , получим, на основании теоремы 20.2, что ряд (20.1) сходится в точке  $x = x_2$ , что неверно.

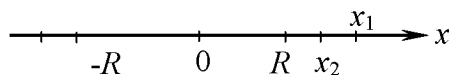


Рис. 20.5

Итак,  $(-R, R)$  есть интервал сходимости (с точностью до концов) не только ряда (20.1), но и ряда (20.9). Тем самым теорема полностью доказана.  $\square$

Применяя теорему 20.3 нужное число раз, убеждаемся, что степенной ряд можно дифференцировать внутри интервала сходимости любое число раз.

**Примечание.** Поскольку при почленном дифференцировании степенного ряда его радиус сходимости не меняется, то он не меняется и при почленном интегрировании этого ряда. Действительно, пусть  $R_1$  – радиус сходимости ряда (20.9). Тогда, по только что доказанному, и радиус сходимости ряда (20.1) равна  $R_1$ , а это и значит, что  $R_1 = R$ .

Итак, можно считать доказанным следующее утверждение:

**Теорема 20.4.** При почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда внутри интервала сходимости его сумма также соответственно дифференцируется и интегрируется, а радиус сходимости при этом не меняется.

### 3. Ряд Маклорена

Пусть ряд (20.1) имеет радиус сходимости  $R$ , и его сумма в интервале сходимости равна  $s(x)$ . Иными словами, пусть в интервале  $(-R, R)$  выполняется равенство

$$s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (20.10)$$

Полагая здесь  $x = 0$ , получим

$$a_0 = s(0).$$

Дифференцируя (20.10) почленно, получим, в силу теоремы 20.3

$$s'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots,$$

откуда

$$a_1 = s'(0).$$

Дифференцируя (20.10) ещё раз, находим

$$s''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \dots + (n-1)na_nx^{n-2} + \dots,$$

откуда

$$s''(0) = 1 \cdot 2a_2,$$

т.е.

$$a_2 = \frac{s''(0)}{2!}.$$

Совершенно аналогично будем иметь

$$a_3 = \frac{s'''(0)}{3!}, a_4 = \frac{s^{IV}(0)}{4!}, \dots, a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!}, \dots$$

Итак, в этом случае

$$s(x) = s(0) + s'(0)x + \frac{s''(0)}{2!}x^2 + \frac{s'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{s^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (20.11)$$

Иными словами, если функция  $s(x)$  в интервале  $(-R, R)$  представима в виде суммы некоторого степенного ряда, то она имеет внутри этого интервала производные всех порядков, а коэффициенты этого ряда находятся на основании формулы (20.11).

Возьмём теперь произвольную функцию  $f(x)$ , имеющую в точке  $x=0$  производные всех порядков, и по аналогии с формулой (20.11) составим для неё ряд

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (20.12)$$

Он называется *рядом Маклорена для функции  $f(x)$* . Из предыдущего не следует, что этот ряд сходится в некотором интервале и при том именно к функции  $f(x)$ . Действительно, выше мы с самого начала предполагали выполнение равенства (20.10), т.е. заранее предполагали степенной ряд сходящимся к известной функции, и на этом основании лишь нашли этот ряд. Теперь же мы имеем дело с рядом (20.12), построенным искусственно по известной функции  $f(x)$ , и поэтому о его сходимости заранее ничего не известно.

Исследуем вопрос о сходимости ряда Маклорена (20.12) к породившей его функции  $f(x)$ , т.е. вопрос об условиях выполнения равенства



$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (20.13)$$

С этой целью запишем для функции  $f(x)$  формулу Маклорена (см. гл. V)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x).$$

Здесь  $n$  может быть сколь угодно большим, в силу бесконечной дифференцируемости функции  $f(x)$ . В связи с этим мы приходим к следующему очевидному утверждению.

**Теорема 20.5.** Ряд (20.12) сходится в некотором интервале  $(-R, R)$  к функции  $f(x)$  тогда и только тогда, когда для каждого  $x \in (-R, R)$  будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0. \quad (20.14)$$

Установим одно достаточное (но не необходимое) условие выполнения равенства (20.14). Предположим, что существует число  $M > 0$ , такое, что для всех  $x \in (-R, R)$  и для всех  $n$  будет

$$|f^{(n)}(x)| \leq M. \quad (20.15)$$

Представим  $r_n(x)$  в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Откуда

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Поскольку  $\xi$  находится между 0 и  $x$ , то  $(x \in (-R, R)) \Rightarrow (\xi \in (-R, R))$ .

Следовательно, если  $x \in (-R, R)$ , то, в силу (20.15)

$$|r_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} R^{n+1},$$

и выполнение равенства (20.14) будет доказано, если мы установим соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

или, что то же самое,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^n}{n!} = 0. \quad (20.16)$$

Составим ряд

$$1 + R + \frac{R^2}{2!} + \dots + \frac{R^n}{n!} + \dots \quad (20.17)$$

Имеем для него

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{R^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R}{n+1} = 0 < 1.$$

На основании признака Даламбера, ряд (20.17) сходится, а значит, его общий член стремится к нулю, что и означает выполнение равенства (20.16), а вместе с ним и равенства (20.14).

#### 4. Разложение функций $e^x$ , $\sin x$ , и $\cos x$ в ряд Маклорена

1°. Пусть  $f(x) = e^x$ . Тогда

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x, \dots,$$

а значит

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1.$$

Далее для любого интервала  $(-h, h)$  имеем

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^h,$$

т.е. в любом интервале  $(-h, h)$  для функции  $e^x$  выполняется равенство (20.14), а значит и равенство (20.13), которое в данном случае имеет вид

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (20.18)$$

В силу произвольности  $h$ , эта формула верна при всех  $x$ .

Например,

$$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + \dots,$$

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2!} + \frac{1}{2^3 3!} + \dots + \frac{1}{2^n n!} + \dots$$

и т.д.

При  $x = 1$  получаем из (20.18) формулу для вычисления числа  $e$ :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Взяв, например,  $n = 8$ , находим

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = 2,71827.$$

Оценим погрешность этого результата. Очевидно, она равна

$$r_8(1) = \frac{f^{(9)}(\xi)}{9!} \cdot 1^9 = \frac{e^\xi}{9!}.$$

Поскольку  $\xi \in (0,1)$ , то  $\xi < 1$ , а значит

$$r_8(1) < \frac{e}{9!} < \frac{3}{9!} < 0,00005.$$

Итак, в полученном результате для числа  $e$  верны, по крайней мере, 4 десятичных знака. Взяв больше членов ряда, получим значение  $e$  с большей точностью.

2°. Пусть теперь  $f(x) = \sin x$ . Тогда

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{IV}(x) = \sin x, f^{V}(x) = \cos x, \dots,$$

а значит

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{IV}(0) = 0, f^{V}(0) = 1, \dots$$

Далее, в любом интервале  $(-h, h)$ , очевидно, будет  $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ , а значит при всех  $x$  для функции  $\sin x$  имеет место формула (20.13), которая в данном случае принимает вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots \quad (20.19)$$

**Пример 20.2.** Вычислим приближенно  $\sin 10^\circ$ . В этом случае  $x = \frac{3,14159}{18} = 0,17453$ .

Беря  $n = 3$ , получим

$$\sin 10^\circ \approx 0,17453 - \frac{0,17453^3}{3!} = 0,17364.$$

Оценим погрешность этого результата. Поскольку для функции  $\sin x$

$$r_3(x) = \frac{(\sin x)^{IV} \Big|_{x=\xi}}{4!} x^4 = \frac{\sin \xi}{4!} x^4,$$

то

$$|r_3(0,17453)| < \frac{1}{4!} 0,17453^4 < 0,00005,$$

т.е. в полученном результате верны, по крайней мере, 4 десятичных знака. В действительности же точность здесь значительно выше. В самом деле, при любом  $x$  ряд (20.19) – знакочередующийся. Поэтому на основании следствия признака Лейбница, погрешность при замене  $\sin 10^\circ$  числом 0,17364 не

превосходит по модулю числа  $\frac{0,17453^5}{5!} < 0,000005$ , а значит в полученном результате верны все 5 десятичных знаков.

3°. Пусть, наконец,  $f(x) = \cos x$ . Можно было бы, рассуждая так же, как и в случае синуса, получить соответствующий ряд для  $\cos x$ . Однако проще воспользоваться тем, что  $\cos x = (\sin x)'$ . Тогда из формулы (20.14) получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (20.20)$$

Поскольку при дифференцировании радиус сходимости степенного ряда не меняется, то разложение (20.20) также верно при всех  $x$ .

**Примечание.** Напомним, что во всех последних рассмотрениях переменная  $x$  является вещественной. Заменим теперь формально  $x$  в формуле (20.18) на  $xi$ . Получим

$$e^{xi} = 1 + xi + \frac{x^2 i^2}{2!} + \frac{x^3 i^3}{3!} + \frac{x^4 i^4}{4!} + \frac{x^5 i^5}{5!} + \dots = 1 + xi - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} i + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} i - \dots$$

Благодаря абсолютной сходимости этого ряда (вытекающей из теоремы Абеля), в нем возможна перегруппировка членов. Имеем

$$e^{xi} = \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) + i \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right),$$

или, на основании формул (20.19) и (20.20),

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x.$$

Мы получим знакомую формулу, полученную ранее (см. гл. VI) совершенно иным способом.

## 5. Ряд Маклорена для функций $(1+x)^m$ и $\arcsin x$

Пусть  $f(x) = (1+x)^m$ , где  $m$  – любое вещественное число (не обязательно целое и не обязательно положительное). Тогда

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(1+x)^{m-1}, f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \dots \\ \dots, f^{(n)}(x) &= m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-(n-1))(1+x)^{m-n}, \end{aligned}$$

а значит

$$f(0) = 1, f'(0) = m, f''(0) = m(m-1), \dots, f^{(n)}(0) = m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-(n-1)).$$

Поэтому ряд Маклорена в данном случае имеет вид

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-(n-1))}{n!} x^n + \dots \quad (20.21)$$

Найдём радиус сходимости этого ряда. Поскольку

$$a_{n+1} = \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!},$$

то формула (20.5) даёт

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-(n-1))(n+1)!}{n! m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-(n-1))(m-n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1.$$

Итак, ряд (20.21) сходится только в интервале с концами  $x = \pm 1$ , а значит, функция  $(1+x)^m$  может быть суммой этого ряда только в упомянутом интервале. Докажем, что при  $x \in (-1, 1)$  формула

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-(n-1))}{n!} x^n + \dots \quad (20.22)$$

действительно имеет место, для чего проверим выполнение при  $x \in (-1, 1)$  равенства (20.14).

Остаток в данном случае запишем в интегральной форме Коши (см. гл. VII)

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt.$$

Поскольку

$$f^{(n+1)}(x) = m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n)(1+x)^{m-n-1},$$

то

$$r_n(x) = \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n)}{n!} \int_0^x (1+t)^{m-n-1} (x-t)^n dt,$$

или, в силу теоремы о среднем,

$$r_n(x) = \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n)}{n!} (1+\xi)^{m-n-1} (x-\xi)^n x.$$

Здесь  $\xi \in (0, x)$ , т.е.  $\xi = \theta x$ ,  $0 < \theta < 1$ . Следовательно

$$r_n(x) = \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n)}{n!} (1+\theta x)^{m-n-1} x^n (1-\theta)^n x,$$

или

$$r_n(x) = \frac{(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-n)}{n!} x^n \left( \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n (1+\theta x)^{m-1} mx. \quad (20.23)$$

Если  $x \in (-1, 1)$ , то

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1,$$

а значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} \right)^n = 0.$$

Далее, множитель  $\frac{(m-1)(m-2) \cdots (m-n)}{n!} x^n$  в выражении (20.23)

представляет собой общий член сходящегося ряда (20.21), в котором показатель  $m$  заменён на  $m-1$ , а значит и он стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Наконец, множитель  $(1 + \theta x)^{m-1} mx$  вообще не зависит от  $n$ , а значит при  $n \rightarrow \infty$  он ограничен. Поэтому из равенства (23) следует, что при  $n \rightarrow \infty$  будет (при  $x \in (-1, 1)$ )  $r_n(x) \rightarrow 0$ , что и доказывает формулу (20.22) для  $x \in (-1, 1)$ .

Пусть, например,  $m = -\frac{1}{2}$ . Тогда получим

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \dots,$$

т.е.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad (20.24)$$

**Примечание.** Пусть  $m > 0$  и целое. Тогда ряд (20.21) обрывается на члене с  $x^m$ , поскольку коэффициент при  $x^{m+1}$  равен

$$\frac{m(m-1) \cdots (m-(m-1))(m-m)}{(m+1)!} = 0,$$

а значит и все последующие члены этого ряда равны нулю. Таким образом, в этом случае из формулы (20.22) получим

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \cdots (m-(m-1))}{m!}x^m,$$

т.е.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1) \cdot (m-2)}{3!}x^3 + \dots + x^m,$$

а это есть формула бинома Ньютона, которая оказывается, следовательно, частным случаем формулы (20.22). Обратное, формула (20.22) является обобщением формулы бинома Ньютона на случай произвольного показателя. В связи с этим ряд (20.21) обычно называют биномиальным рядом.

Возвратимся теперь к равенству (20.24) и заменим в нём  $x$  на  $-x^2$ . Получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$$

Интегрируя это равенство от 0 до  $x$ , и учитывая, что  $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ ,

придём к ряду Маклорена для функции  $\arcsin x$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

Эта формула, разумеется, имеет место в том же интервале  $(-1,1)$ .

## 6. Ряд Маклорена для функций $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg}x$

Положив в (20.22)  $m = -1$ , будем иметь

$$\frac{1}{1+x} = 1 + (-1)x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \dots,$$

т.е.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (20.25)$$

Интегрируя это равенство от 0 до  $x$  и учитывая, что  $\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)$ ,

получим

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (20.26)$$

Эта формула, как и формула (20.22) верна в интервале  $(-1,1)^*$ .

Заметим, что при конкретных  $x \in (-1,1)$  ряд (20.26) сходится очень медленно, в связи с чем существуют другие способы вычисления логарифмов.

Заменим теперь  $x$  в разложении (20.25) на  $x^2$ . Получим

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots,$$

откуда, интегрируя от 0 до  $x$ , находим

$$\operatorname{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Эта формула также верна при  $-1 < x < 1$ .

## 7. Вычисление интегралов ири помощи рядов

Полученные выше ряды Маклорена для конкретных функций

---

\*) Нетрудно проверить, что она верна и при  $x=1$ , откуда следует, что

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

позволяют вычислять многие интегралы, которые не выражаются в конечном виде через элементарные функции. Для этого подынтегральная функция раскладывается в ряд Маклорена, который затем интегрируется почленно.

**Пример 20.3.** Вычислим интеграл  $\int_0^x e^{-x^2} dx$ . На основании (20.18) имеем

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots,$$

а значит

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots$$

Эта формула верна при всех  $x$ .

**Пример 20.4.** Вычислим интеграл  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$  с точностью до 0,001.

Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x^4 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^8 + \dots = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 - \dots,$$

откуда

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \left( x - \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{24} - \dots \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{320} + \frac{1}{512 \cdot 24} - \dots$$

Поскольку  $\frac{1}{512 \cdot 24} < 0,0005$ , то, отбрасывая этот и все последующие члены, мы вычислим интеграл, на основании следствия признака Лейбница, с погрешностью, не превышающей по модулю числа 0,0005, т.е. именно с требуемой точностью. Итак, с точностью до 0,001

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{320} = 0,500 - 0,003 = 0,497.$$

## 8. Ряд Тейлора как обобщение ряда Маклорена

Такая функция, как, например,  $\ln x$ , не может быть разложена в ряд Маклорена, поскольку, ни она, ни её производные не определены в точке  $x = 0$ .

Однако, если положить

$$x = 1 + t,$$



откуда

$$t = x - 1,$$

то получим

$$\ln x = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots$$

т.е.

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$

Итак, мы разложили функцию  $\ln x$  в ряд, но не по степеням  $x$ , а по степеням  $x-1$ . Этот ряд имеет интервал сходимости того же радиуса  $R=1$ , но с центром в точке  $x=1$ .

Возьмем теперь произвольную функцию  $\varphi(x)$  и положим  $x=t+a$ . Будем считать, что функция  $\varphi(t) = f(t+a)$  в некотором интервале  $(-R, R)$  разложима в ряд Маклорена, т.е. при  $t \in (-R, R)$  будет

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + \dots$$

Тогда, возвращаясь к переменной  $x$ , получим, что функция  $f(x)$  в интервале  $(a-R, a+R)$  представима в виде

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (20.27)$$

Стоящий справа ряд называется рядом Тейлора для функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x=a$

При  $a=0$  ряд Тейлора превращается в ряд Маклорена.

Заметим, что разложение (20.27) очень часто записывают в следующем виде

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \dots$$

## Задачи и упражнения к главе XX

Найти область сходимости степенного ряда

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \qquad 2. 1 + \frac{2x}{3^2\sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}} + \dots$$

Вычислить сумму степенного ряда

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} \qquad 4. \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n.$$

5. Найти интервал сходимости ряда

$$1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \dots$$

и найти его сумму в этом интервале.

6. Составив ряд Маклорена для  $\operatorname{Arsh} \frac{1}{2}$ , вычислить  $\operatorname{Arsh} \frac{1}{2}$  с точностью до 0,001.

7. Вычислить  $\sqrt[5]{e}$  с точностью до 0,0005.

8. Вычислить  $\frac{1}{\sqrt{e}}$ , беря 4 первых члена соответствующего ряда Маклорена.

Определить число верных знаков в полученном результате.

9. Вычислить  $\sin 12^\circ$  с точностью до 0,001.

10. Вычислить  $\sqrt[3]{9}$  с точностью до 0,001.

11. При помощи разложения функций в ряд Маклорена вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x - \operatorname{arctg} x}.$$

12. То же для предела  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}$ .

13. Вычислить интеграл  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ , взяв три первых члена разложения подынтегральной функции в степенной ряд. Оценить погрешность результата.

14. Вычислить интеграл  $\int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx$ , взяв два первых члена ряда для подынтегральной функции. Указать число верных десятичных знаков в полученном результате.

15. Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x} dx$  с точностью до 0,001.

16. Вычислить интеграл  $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \sqrt{x} dx$  с точностью до 0,001.

17. Функцию  $y = \sqrt{x}$  разложить в ряд Тейлора по степеням  $x - 4$  и указать область сходимости полученного ряда.

18. Функцию  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  разложить в ряд Тейлора по степеням  $x - 1$ . При каких  $x$  это разложение справедливо?

## XXI. Ряды Фурье

### 1. Некоторые предварительные сведения

Одна из функциональных идей математического анализа – аппроксимации, т.е. приближение сложных математических объектов более простыми. Реализацию этой идеи можно проследить на примере формулы Тейлора, которая позволяет заменить дифференцируемую достаточно число раз функцию с необходимой точностью многочленом. Формула Тейлора наиболее удобна на малых промежутках изменения аргумента, чем меньше окрестность, тем точнее формула. Иногда, однако, многочлены не являются естественным материалом, из которого удобно строить функции.

Многие процессы, возникающие в природе и технике, имеют периодический характер и, следовательно, функции, описывающие их – периодические. Для таких функций использовать в качестве приближающих функций многочлены неестественно, т.к. многочлены растут в возрастании аргумента, а периодические функции ведут себя очевидно иначе. Естественно попытаться приближать периодические функции простейшими периодическими.

Напомним (см. курс линейной алгебры), что функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , непрерывные или кусочно-непрерывные, называются ортогональными на отрезке  $[a, b]$ , если

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Система функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ , непрерывных или кусочно-непрерывных на отрезке  $[a, b]$ , называется ортогональной на этом отрезке, если любые две ее функции попарно ортогональны на нем, т.е. если при любых  $m$  и  $n$  ( $m \neq n$ ) будет

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0$$

Возьмем т.н. тригонометрическую систему функций:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (21.1)$$

и докажем, что она ортогональна на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Для этого надо проверить равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, (m \neq n; m, n = 0, 1, 2, 3, \dots);$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0, (m \neq n; m, n = 1, 2, 3, \dots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nxdx = 0, (m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, 3, \dots).$$

■Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx &= 2 \int_0^{\pi} \cos mx \cos nxdx = \int_0^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx =, \\ &= \left( \frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\sin(m+n)\pi}{m+n} + \frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} = 0 \end{aligned}$$

поскольку числа  $m \neq n$  целые.

Точно так же проверяем и второе равенство. Что же касается третьего равенства, то оно сразу очевидно ввиду нечетности подынтегральной функции. □

Далее, имеем (для случая  $m=n$ )

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mxdx = 2 \int_0^{\pi} \cos^2 mxdx = \int_0^{\pi} (1 + \cos 2mx) dx = \left( x + \frac{\sin 2mx}{m} \right) \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

и точно так же

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mxdx = \pi$$

Возьмем систему (21.1) и составим по ней ряд

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots, \quad (21.2)$$

где  $a_0, a_1, b_1, b_2, \dots$  – некоторые вещественные числа. Этот функциональный ряд называют тригонометрическим рядом.

Предположим, что на некотором множестве ряд (21.2) сходится и имеет сумму  $f(x)$ . Поскольку функции  $\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$  имеют соответственно периоды  $2\pi, \frac{2\pi}{2}, \dots, \frac{2\pi}{n}, \dots$  то и функция  $f(x)$  должна иметь период  $2\pi$ .

Отметим в заключение еще один факт. Пусть функция  $f(x)$  имеет период  $2\pi$ .

Докажем, что тогда при любом  $\alpha$  будет

$$\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (21.3)$$

Иными словами, интегралы периодической функции по всем промежуткам, длина которых равна периоду этой функции, равны между собой.

■ Действительно, при любом

$$\alpha \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} f(x)dx = \int_{-\pi+\alpha}^{-\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{\pi+\alpha} f(x)dx.$$

В первом интеграле справа положим  $x = t - 2\pi$ . Получим

$$\int_{-\pi+\alpha}^{-\pi} f(x)dx = \int_{\pi+\alpha}^{\pi} f(t - 2\pi)dt,$$

или, в силу периодичности функции  $f(x)$

$$\int_{-\pi+\alpha}^{-\pi} f(x)dx = \int_{\pi+\alpha}^{\pi} f(t)dt.$$

Следовательно

$$\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} f(x)dx = \int_{-\pi+\alpha}^{-\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{\pi+\alpha} f(x)dx,$$

откуда и следует соотношение (21.3).  $\square$

**Примечание.** Производя замену переменной в интеграле, мы молча предполагали функцию  $f(x)$  непрерывной в интервале  $(-\pi, \pi)$ . Однако легко показать, что равенство (21.3) верно и для кусочно-непрерывных функций.

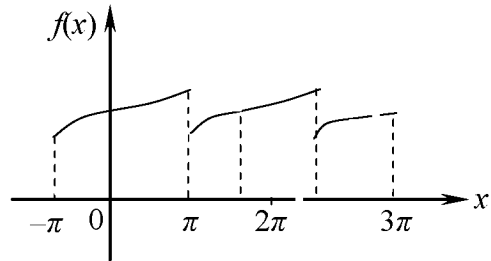


Рис. 21.1

Геометрически формула (21.3) выражает тот очевидный факт, что площади обеих заштрихованных фигур одинаковы.

В частности, полагая  $\alpha = \pi$ , получим из (21.3)

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad (21.4)$$

## 2. Ряд Фурье для функции с периодом $2\pi$

Пусть функция  $f(x)$  с периодом  $2\pi$  есть сумма некоторого ряда вида (21.2), т.е. пусть

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (21.5)$$

Покажем, как в этом случае, при указанных ниже условиях, найти коэффициенты этого ряда. Представим, что ряд (21.5) сходится равномерно

(это будет, в частности, тогда, когда числовые ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , сходятся

абсолютно). Тогда, интегрируя равенство (21.5) на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , будем иметь:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right).$$

Но, на основании ортогональности системы (21.1), для всех  $n=1,2,3,\dots$  будет  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$ , а значит  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0$ , откуда

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Далее, умножая обе части равенства (21.5) на  $\cos mx$ , где  $m$  – произвольное, но конкретное, натуральное число, получим

$$f(x) \cos mx = a_0 \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx).$$

Отсюда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right),$$

или, на основании ортогональности системы (21.1).

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi a_m,$$

а значит

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx.$$

Аналогично, умножая равенство (21.5) почленно на  $\sin mx$ , и интегрируя на отрезке  $[-\pi; \pi]$ , будем иметь

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx.$$

Итак, если функция  $f(x)$  с периодом  $2\pi$  есть сумма равномерно сходящегося тригонометрического ряда (21.2), то коэффициенты этого ряда даются формулами

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad *)$$

---

\*) На основании равенства (21.4) интегралы по отрезку  $[-\pi, \pi]$  можно заменить интегралами по отрезку  $[0, 2\pi]$

Эти формулы называют формулами Эйлера-Фурье. Первую из них можно объединить со второй, если в ряде (21.2) заменить  $a_0$  на  $\frac{a_0}{2}$ , т.е. если вместо выражения (21.5) писать

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

В этом случае для  $a_n$  и  $b_n$  получим формулы:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3); \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (21.6)$$

Именно так мы и будем поступать в дальнейшем.

Возьмем теперь произвольную функцию  $f(x)$  с периодом  $2\pi$  и составим для нее ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (21.7)$$

коэффициенты которого найдены по формулам (21.6). Этот ряд называют рядом Фурье для функции  $f(x)$ . Из предыдущего вовсе не следует, что ряд Фурье (21.7) сходится и притом – именно к породившей его функции  $f(x)$ . Действительно, при выводе формул (21.6) мы с самого начала предполагали сходимость ряда (21.7) к функции  $f(x)$ .

Исследованию вопроса о сходимости ряда Фурье к породившей его функции посвящены несколько последующих параграфов.

### 3. Теорема Римана-Лебега и ее следствия

Функция  $\varphi(x)$  называется ступенчатой, или кусочно-постоянной, если существует конечный отрезок  $[a, b]$  и такое его разбиение на  $k$  частей точками  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ , что она постоянна в каждом из промежутков  $[x_{i-1}, x_i]$  и равна нулю вне отрезка  $[a, b]$ , т.е. (рис. 21.2)

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} m_i, & x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, k \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Функция  $f(x)$  называется абсолютно интегрируемой в промежутке

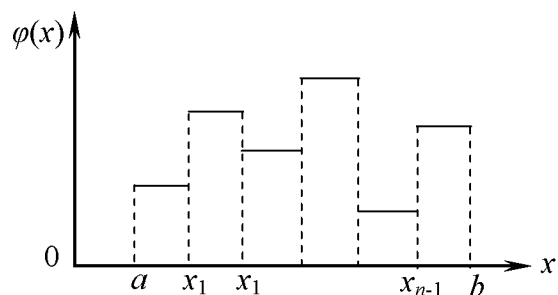


Рис. 21.2

$[a, b]$ , если существует интеграл  $\int_a^b |f(x)| dx$ . Этот интеграл может быть либо собственным, либо сходящимся несобственным. При этом промежуток  $[a, b]$  может быть и бесконечным. В частности, может быть  $[a, b] = (-\infty, +\infty)$ , в этом случае функция  $f(x)$  называется абсолютно интегрируемой на всей числовой оси.

Заметим, что если интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  – собственный, то, как известно, интеграл  $\int_a^b |f(x)| dx$  также существует, поскольку, из обычной интегрируемости функции вытекает ее абсолютная интегрируемость. Для несобственных же интегралов, наоборот, из абсолютной сходимости вытекает ее обычная сходимость.

**Лемма 21.1.** Если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $[a, b]$ , конечном или бесконечном, и интегрируема на любом отрезке  $[c, d] \subset [a, b]$ , то существует такая ступенчатая функция  $\varphi(x)$ , что интеграл  $\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx$  будет сколь угодно мал.

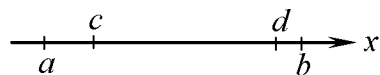


Рис. 21.3

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда существуют такие  $c$  и  $d$  ( $c > a$ ,  $d < b$ ), что

$$\int_a^c |f(x)| dx + \int_d^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.8)$$

Пусть  $s_\lambda$  нижняя сумма Дарбу функции  $f(x)$  на отрезке  $[c, d]$ , отвечающая разбиению отрезка точками  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ .

Поскольку функция  $f(x)$  интегрируема на этом отрезке, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} s_\lambda = \int_c^d f(x) dx.$$

Следовательно, существует такое  $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ , что при  $\Delta x_i < \lambda$ , ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) будет

$$0 \leq \int_c^d f(x) dx - s_\lambda < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (21.9)$$

Обозначим

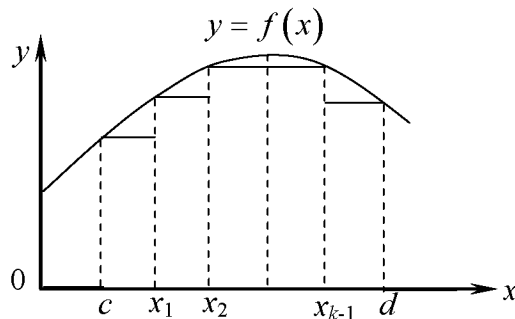


Рис. 21.4



$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), i=1, 2, \dots, k$$

и введем ступенчатую функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_i, x \in [x_{i-1}, x_i), i=1, 2, \dots, k \\ 0, x \notin [c, d] \end{cases}$$

Имеем

$$\int_c^d \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i dx = \sum_{i=1}^k m_i \Delta x_i = s_\lambda.$$

Следовательно, выражение (21.9) приобретает вид:

$$0 \leq \int_c^d f(x) dx - \int_c^d \varphi(x) dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

т.е.

$$0 \leq \int_c^d (f(x) - \varphi(x)) dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из неравенства (21.8) находим

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^d (f(x) - \varphi(x)) dx + \int_d^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 21.1. (Римаиа-Лебега)** Если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $[a, b]$ , конечном или бесконечном, и интегрируема на любом отрезке  $[c, d] \subset [a, b]$ , то

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \omega x dx = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \omega x dx = 0.$$

■ Очевидно, достаточно доказать первое из этих равенств.

Возьмем произвольный отрезок  $[c, d] \subset [a, b]$ , разобьем его точками  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$  и введем так называемую одноступенчатую функцию

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1, x \in (x_{i-1}, x_i] \\ 0, x \notin (x_{i-1}, x_i] \end{cases}, i=1, 2, \dots, k.$$

Имеем для всех  $i=1, 2, 3, \dots, k$

$$\int_a^b \psi_i(x) \cos \omega x dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \omega x dx = \frac{\sin \omega x_i - \sin \omega x_{i-1}}{\omega},$$

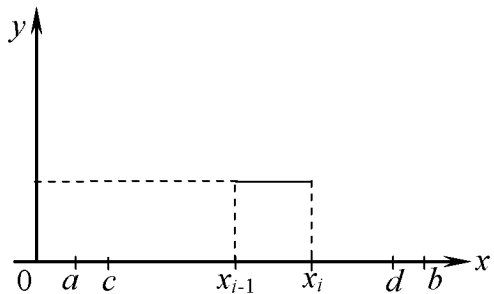


Рис. 21.5

откуда

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_i(x) \cos \omega x dx = 0.$$

Поскольку любая ступенчатая функция  $\varphi(x)$  есть линейная комбинация одноступенчатых функций, то и для нее

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \cos \omega x dx = 0.$$

Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  и для любой ступенчатой функции  $\varphi(x)$  существует такое  $\Omega(\varepsilon) > 0$ , что при  $|\omega| > \Omega$  будет

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \cos \omega x dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $[a, b]$  и интегрируема на любом отрезке  $[c, d] \subset [a, b]$ . Тогда, на основании леммы 1, существует такая ступенчатая функция  $\varphi(x)$ , что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Находя для этой функции соответствующее  $\Omega$ , получим, что при  $|\omega| > \Omega$  будет

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_a^b f(x) \cos \omega x dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \cos \omega x dx + \int_a^b \varphi(x) \cos \omega x dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \cos \omega x dx \right| + \left| \int_a^b \varphi(x) \cos \omega x dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx + \left| \int_a^b \varphi(x) \cos \omega x dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

а так как  $\varepsilon$  можно взять сколь угодно малым, то  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \omega x dx = 0$ , что и

требовалось доказать.  $\square$

Если функция  $f(x)$  неотрицательна и непрерывна в промежутке  $[a, b]$ , то доказанная теорема имеет простой геометрический смысл. Очевидно, график функции  $f(x) \cos \omega x$  есть косинусоида, “модулированная” линией

$y = f(x)$ . Интеграл  $\int_a^b f(x) \cos \omega x dx$  есть алгебраическая сумма площадей

“языков”. Если  $\omega \rightarrow \infty$ , то языки становятся бесконечно узкими, и площади соседних языков в пределе “погашают” друг друга.

Учитывая формулы (21.6), заключаем, что из теоремы Римана-Лебега вытекает

**Следствие:** если функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям теоремы Римана-Лебега, то коэффициенты ее ряда Фурье  $a_n$  и  $b_n$  стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

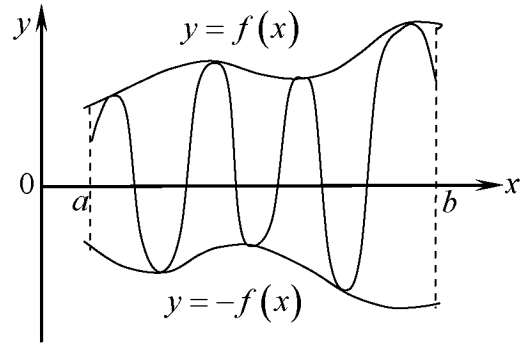


Рис. 21.6

#### 4. Интеграл Дирихле

Пусть  $f(x)$  – функция с периодом  $2\pi$ . Составим для нее ряд Фурье (21.7). Пусть  $s_n(x)$  – его частичная сумма, а  $x_0$  – некоторая точка.

Используя формулу (21.6), получим

$$\begin{aligned} s_n(x_0) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \left( \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \right) \cos kx_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \right) \sin kx_0 \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos kt \cos kx_0 + \sin kt \sin kx_0) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos k(t - x_0) \right) dt. \end{aligned}$$

Обозначим

$$D_n(u) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos ku. \quad (21.10)$$

Тогда

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t - x_0) dt. \quad (21.11)$$

Стоящий справа интеграл называют интегралом Дирихле для функции  $f(x)$ , а функцию  $D_n(t - x_0)$  – ядром Дирихле. Отметим несколько свойств ядра Дирихле:

1. Функция  $D_n(u)$  – четная, т.е.  $D_n(-u) = D_n(u)$ . Это непосредственно

следует из выражения (21.10).

2. Далее

$$\int_0^{\pi} D_n(u) du = \int_0^{\pi} du + 2 \sum_{k=1}^n \int_0^{\pi} \cos ku du = \pi + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin k\pi}{k} = \pi,$$

а значит,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(u) du = 1. \quad (21.12)$$

3. Функция  $D_n(u)$  имеет период  $2\pi$ . Это также непосредственно следует из формулы (21.10).

4. Сумма (21.10) легко “сворачивается”. Имеем

$$\begin{aligned} D_n(u) &= \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} \left( \sin \frac{u}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \cos ku \sin \frac{u}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} \left( \sin \frac{u}{2} + \sum_{k=1}^n \left( \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) u - \sin \left( k - \frac{1}{2} \right) u \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} \left( \sin \frac{u}{2} + \left( \left( \sin \frac{3}{2} u - \sin \frac{1}{2} u \right) + \left( \sin \frac{5}{2} u - \sin \frac{3}{2} u \right) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots + \left( \sin \frac{2n+1}{2} u - \sin \frac{2n-1}{2} u \right) \right) \right), \end{aligned}$$

т.е.

$$D_n(u) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}}. \quad (21.13)$$

Используя периодичность функции  $D_n(u)$ , а также свойство (21.3), перепишем (21.11) так

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(t) D_n(t-x_0) dt.$$

Положив  $t - x_0 = u$ , получим

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x_0) D_n(u) du.$$

$$\text{Но } \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x_0) D_n(u) du = \int_{-\pi}^0 f(u+x_0) D_n(u) du + \int_0^{\pi} f(u+x_0) D_n(u) du.$$

В первом интеграле справа положим  $u = -z$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 f(u+x_0)D_n(u)du &= \int_{-\pi}^0 f(-z+x_0)D_n(-z)dz = \\ &= \int_0^{\pi} f(x_0-z)D_n(-z)dz = \int_0^{\pi} f(x_0-z)D_n(z)dz. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} s_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} f(x_0-u)D_n(u)du + \int_0^{\pi} f(x_0+u)D_n(u)du \right), \text{ т.е.} \\ s_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2} D_n(u)du, \end{aligned} \quad (21.14)$$

это и есть окончательное выражение для интеграла Дирихле.

## 5. Ириции локализации

Возьмем произвольное число  $h \in (0, \pi)$  и разобьем интеграл в выражении (21.14) на два интеграла, по отрезкам  $[0, h]$  и  $[h, \pi]$  соответственно. Используя выражение (21.13), перепишем интеграл Дирихле в виде

$$\int_h^{\pi} \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \frac{(2n+1)u}{2} du. \quad (21.15)$$

Поскольку функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , то, в силу периодичности, она абсолютно интегрируема и на любом другом конечном отрезке.

Поэтому первый множитель под интегралом абсолютно интегрируем на отрезке  $[h, \pi]$  (поскольку знаменатель не обращается на этом отрезке в нуль). В силу теоремы Римана-Лебега, интеграл (21.15) стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом, существование и величина предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0)$

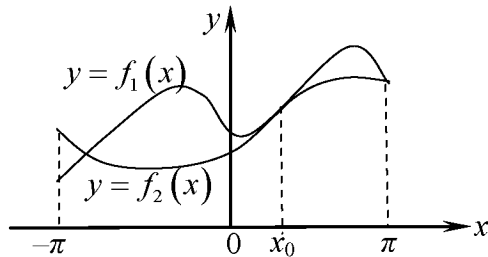


Рис. 21.7

зависят от существования и величины предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2} D_n(u)du.$$

Но подынтегральная функция в последнем интеграле зависит от

значений функции  $f(x)$  лишь в некоторой окрестности (могущей быть сколь угодно малой) точки  $x_0$ . Следовательно, поведение ряда Фурье функции в некоторой точке зависит только от значений этой функции в непосредственной близости данной точки. Иными словами, если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  с периодом  $2\pi$  совпадают в малой окрестности точки  $x_0$ , то их ряды Фурье в этой точке либо одновременно сходятся и при этом имеют одну и ту же сумму, либо одновременно расходятся.

Этот факт называют принципом локализации. Он является неожиданным в том смысле, что, на основании формулы (21.6), коэффициенты ряда Фурье данной функции учитывают ее значения на всем отрезке  $[-\pi, \pi]$  и, следовательно, эти коэффициенты для функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  будут, вообще говоря, различными, т.е. различными будут ряды Фурье этих функций.

## 6. Сходимость ряда Фурье для кусочно-гладкой функции

Функция называется кусочно-гладкой, или кусочно-дифференцируемой, на данном промежутке, если этот промежуток можно разбить на конечное число промежутков, таких, что внутри каждого из них функция дифференцируема, а на их концах имеет не только односторонние пределы, но и односторонние производные. Очевидно,

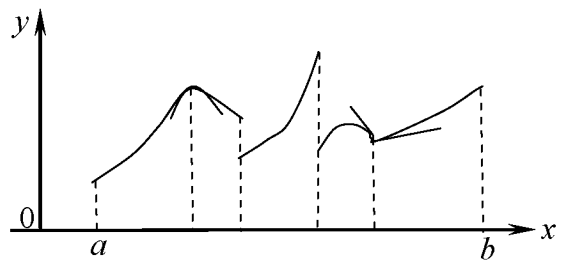


Рис. 21.8

что кусочно-гладкая функция либо непрерывна, либо кусочно-непрерывна, а значит, она удовлетворяет условиям теоремы Римана-Лебега.

**Теорема 21.2.** Если функция  $f(x)$  имеет период  $2\pi$  и на отрезке  $[-\pi, \pi]$  является кусочно-гладкой, то ее ряд Фурье сходится при всех  $x$ . В случае, когда  $x_0$  - точка непрерывности функции  $f(x)$ , то сумма ряда Фурье в этой точке равна  $f(x_0)$ . Если же в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  совершает конечный скачок, то сумма ее ряда Фурье в этой точке равна  $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ , где  $f(x_0 \pm 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x)$ .

■ Поскольку первое утверждение теоремы есть частный случай второго, то будем доказывать сразу второе утверждение. Имеем, в силу (21.14), (21.12) и (21.13),

$$\begin{aligned}
& s_n(x_0) - \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+u) + f(x_0-u)}{2} D_n(u) du - \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(u) du = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \frac{(2n+1)u}{2} du + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \frac{(2n+1)u}{2} du.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{2 \sin \frac{u}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u} = f'(x_0+0) < +\infty,$$

то подынтегральная функция в первом интеграле ограничена и, следовательно, в силу условия, она удовлетворяет теореме Римана-Лебега, так, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \frac{(2n+1)u}{2} du = 0.$$

Совершенно аналогично

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \frac{(2n+1)u}{2} du = 0.$$

Из двух последних равенств и следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2},$$

в чем и следовало убедиться.  $\square$

**Пример 21.1.** Разложим в ряд Фурье функцию, заданную графически (Рис. 21.9).

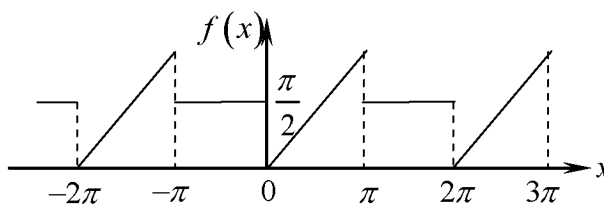


Рис. 21.9

Имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \frac{\pi}{2} dx + \int_0^\pi x dx \right) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} \pi + \frac{\pi^2}{2} \right) = \pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \frac{\pi}{2} \cos nxdx + \int_0^\pi x \cos nxdx \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2n} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \\
&= \frac{1}{n^2 \pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2 \pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} = \begin{cases} 0, n - \text{четное} \\ -\frac{2}{n^2 \pi}, n - \text{нечетное;} \end{cases} \\
b_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \frac{\pi}{2} \sin nx dx + \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\pi}{2n} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\pi}{2n} (1 - \cos n\pi) - \frac{\pi \cos n\pi}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right) = \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{2n} - \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n + 1}{2n} = \begin{cases} 0, n - \text{нечетное} \\ -\frac{1}{n}, n - \text{четное.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Итак, для всех  $x$ , кроме точек  $x = 0, x = \pm\pi, x = \pm 2\pi, \dots$ , будет

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \cos x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{3^2 \pi} \cos 3x - \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{2}{5^2 \pi} \cos 5x - \frac{1}{6} \sin 6x - \dots, \text{ т.е.} \\
f(x) &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2 \cos(2k-1)x}{\pi(2k-1)^2} - \frac{\sin 2kx}{2k} \right) \quad (21.16)
\end{aligned}$$

В точках  $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$  сумма ряда Фурье равна  $\frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2} = \frac{\pi}{4}$ . Наконец, в

точках  $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$  сумма ряда равна  $\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$ .

**Примечание.** Если в равенстве (21.16) положить  $x = 0$ , то получим

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right),$$

т.е.

$$\frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) = \frac{\pi}{4},$$

а значит

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Таким образом, теория ряда Фурье позволяет находить суммы некоторых числовых рядов.



## 7. Скорость убывания коэффициентов ряда Фурье

**Лемма 21.2.** Пусть функция  $f(x)$  с периодом  $2\pi$  непрерывна на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и имеет на нем кусочно-непрерывную производную. Тогда если

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (21.17)$$

есть ряд Фурье для функции  $f(x)$ , то ряд Фурье для функции  $f'(x)$  имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx), \quad (21.18)$$

т.е. ряд Фурье производной получается путем почленного дифференцирования ряда Фурье исходной функции.

■ Пусть  $f'(x)$  имеет ряд Фурье

$$\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n \cos nx + \mu_n \sin nx). \quad (21.19)$$

Тогда, учитывая, что  $f(-\pi) = f(\pi)$ , получим

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = nb_n,$$

$$\mu_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} f(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = -na_n.$$

Подставляя это в ряд (21.19), получим из него ряд (21.18).

**Теорема 21.3.** Пусть функция  $f(x)$  с периодом  $2\pi$  имеет на отрезке  $[-\pi, \pi]$  производные до  $k$ -го порядка включительно ( $k \geq 1$ ), причем  $f(x)$ ,  $f'(x)$ , ...,  $f^{(k-1)}(x)$  непрерывны на этом отрезке, а функция  $f^{(k)}(x)$  кусочно-непрерывна на нем. Тогда, если (21.17) – ряд Фурье для функции  $f(x)$ , то при  $n \rightarrow \infty$  будет

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

■ Применяя лемму 2 к ряду (21.17)  $k$  раз, получим, что функция  $f^{(k)}(x)$  имеет ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n \cos nx + \mu_n \sin nx),$$

где либо  $|\lambda_n| = n^k |a_n|$ ,  $|\mu_n| = n^k |b_n|$ , либо  $|\lambda_n| = n^k |b_n|$ ,  $|\mu_n| = n^k |a_n|$ . Пусть для определенности, имеет место первый случай. Тогда

$$|a_n| = \frac{|\lambda_n|}{n^k}, |b_n| = \frac{|\mu_n|}{n^k}. \quad (21.20)$$

Поскольку функция  $f^{(k)}(x)$  кусочно-непрерывна, то она удовлетворяет условиям теоремы Римана-Лебега, а значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0.$$

Отсюда и из соотношений (21.20) и следует утверждение теоремы.  $\square$

Доказанная теорема означает, что чем “глаже” функция, тем быстрее убывают коэффициенты ее ряда Фурье, а значит тем быстрее сходится этот ряд к данной функции.

## 8. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

В этом и в трех последующих параграфах мы, не оговаривая этого каждый раз особо, будем рассматривать только функции, кусочно-гладкие в любом конечном промежутке. На этом основании мы будем приравнивать каждую такую функцию сумме её ряда Фурье.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (21.21)$$

помня о том, что это равенство выполняется во всех точках непрерывности функции.

Предположим, что функция  $f(x)$  с периодом  $2\pi$  – четная. Тогда функция  $f(x)\sin nx$  оказывается нечетной, а значит, в силу (21.6),  $b_n = 0$  для всех  $n=1, 2, 3, \dots$

Следовательно, ряд Фурье четной функции имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

т.е. в нем отсутствуют члены с синусами (нечетными функциями!).

Далее, функция  $f(x)\cos nx$  в данном случае – четная, а значит числа  $a_n$  можно вычислить по формуле

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Пусть теперь  $f(x)$  – нечетная функция с тем же периодом. Тогда

функция  $f(x)\cos nx$  – также нечетная, так что  $a_n = 0$   $n = 0, 1, 2, \dots$  и ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

При этом, благодаря четности функции  $f(x)\sin nx$ , числа  $b_n$  можно находить по формуле

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

### 9. Ряд Фурье функции с произвольным периодом

Пусть функция  $f(x)$  имеет период  $2l \neq 2\pi$ . Положив  $x = \frac{l}{\pi}t$ , где  $t$  – новый аргумент, получим, что  $(x = 2l) \Leftrightarrow (t = 2\pi)$ , т.е. функция  $\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$  имеет по переменной  $t$  период  $2\pi$ . Иными словами, мы, по существу, так изменили масштаб на оси абсцисс, что в новом масштабе функция стала иметь период  $2\pi$ . Поэтому

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin ntdt.$$

Возвращаясь теперь к переменной  $x$ , имеем

$$t = \frac{\pi x}{l}, \quad dt = \frac{\pi}{l} dx,$$

а значит

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (21.22)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot \frac{\pi}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

и аналогично

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Равенство (21.22) и последние формулы для  $a_n$  и  $b_n$  обобщают формулу (21.21) и формулу (21.6) на случай производного периода и превращаются в них при  $l = \pi$ .

В случае произвольного периода формула (21.22) и выражения для  $a_n$  и  $b_n$  очевидным образом преобразуются, если функция  $f(x)$  – четная или нечетная.

**Пример 21.2.** Представим рядом Фурье функцию, заданную графически (Рис. 21.10). Эта функция – нечетная, а значит

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x,$$

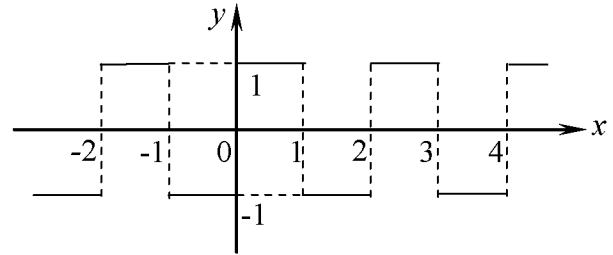


Рис. 21.10

где

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 \sin n\pi x dx = \frac{-2}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, n - \text{четное}, \\ \frac{4}{n\pi}, n - \text{нечетное}. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, для всех  $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , будет

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \pi x + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 5\pi x}{5} + \dots \right).$$

## 10. Тригонометрические ряды для функций, заданных на отрезке $[-l, l]$

Пусть функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[-l, l]$ . Построим вспомогательную функцию  $F(x)$ , совпадающую с  $f(x)$  в промежутке  $[-l, l]$ , равную  $f(l)$  в точке  $x = -l$  и имеющую период  $2l$ . Ее называют периодическим продолжением функции  $f(x)$ . Благодаря

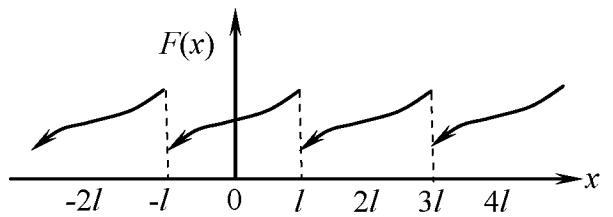


Рис. 21.11

периодичности функции  $F(x)$ , ее можно разложить в ряд Фурье

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \cos \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (21.23)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Но, поскольку  $F(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [-l, l]$  то последние формулы можно переписать так

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

а равенству (21.23) можно придать вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

В таких случаях говорят, что заданная в промежутке  $[-l, l]$  функция  $f(x)$  разложена внутри него в ряд Фурье.

Напомним, что в точках же  $x = \pm l, \pm 3l, \dots$  сумма полученного ряда, очевидно, равна  $\frac{f(-l) + f(l)}{2}$ .

Пусть теперь функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[0, l]$ . Продолжим ее четным образом на отрезок  $[-l, 0]$ , а затем распространим периодически на всю ось. Полученную функцию  $F(x)$  разложим в ряд Фурье

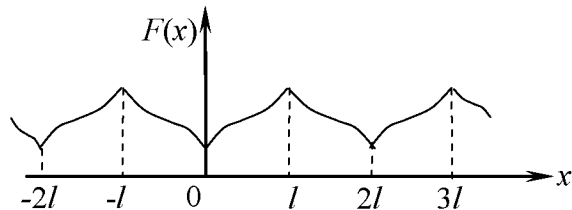


Рис. 21.12

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2},$$

где, на основании четности функции  $F(x)$ ,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Эти же равенства можно переписать так

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

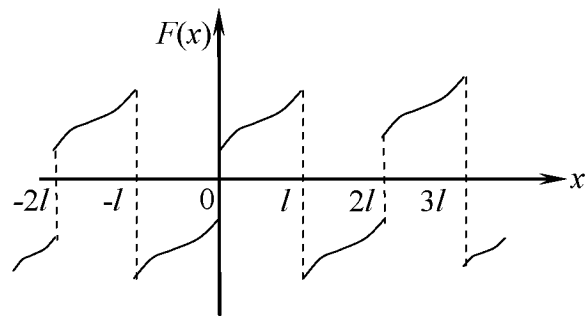


Рис. 21.13

В таких случаях говорят, что функция  $f(x)$ , заданная на отрезке  $[0, l]$ , разложена на нем в ряд по косинусам.

Аналогично ту же функцию  $f(x)$  можно разложить в интервале  $[0, l]$  в

ряд по синусам:

$$f(x) = \sum_{(0,l)n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

**Пример 21.3.** Разложим функцию  $f(x) = x$  на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  в ряд по косинусам. Имеем

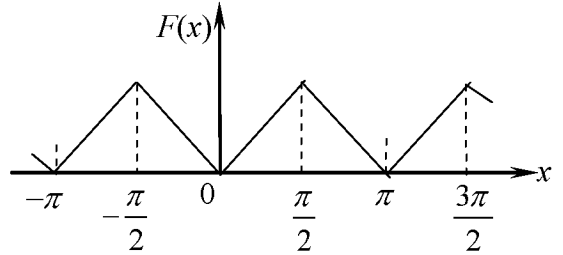


Рис. 21.14

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2nx dx = \frac{4}{\pi} \left( \frac{x \sin 2nx}{2n} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2nx dx \right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2} \cos 2nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1) = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} = \begin{cases} 0, & n - \text{четное} \\ -\frac{2}{n^2 \pi}, & n - \text{нечетное} \end{cases}.$$

Итак,

$$x \Big|_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left( \cos 2x + \frac{1}{9} \cos 6x + \frac{1}{25} \cos 10x + \dots \right). \quad (21.24)$$

**Примечание.** Сопоставим результаты последнего примера с теоремой (2.3). В данном примере  $f(x)$  имеет кусочно-непрерывную производную, т.е.  $k = 1$ , а значит, в силу этой теоремы, должно быть  $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , что согласуется с равенством (21.24), поскольку из него следует, что  $a_n = o^*\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

## 11. Комплексная форма ряда Фурье

Пусть функция  $f(x)$  имеет период  $2\pi$ . Тогда во всех ее точках непрерывности выполняется равенство (21.21). Используя формулы Эйлера, перепишем его так

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{nxi} + e^{-nxi}}{2} + b_n \frac{e^{nxi} - e^{-nxi}}{2i} \right) = \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n e^{nxi} + a_n e^{-nxi} - ib_n e^{nxi} + ib_n e^{-nxi} \right),
\end{aligned}$$

т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{nxi} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-nxi} \right).$$

Обозначим

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Тогда получим

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{nxi} + c_{-n} e^{-nxi}). \quad (21.25)$$

Частичная сумма стоящего справа ряда равна

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k e^{kxi} + c_{-k} e^{-kxi}) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{kxi} + \sum_{k=1}^n c_{-k} e^{-kxi} = \\
&= c_0 e^{0 \cdot xi} + \sum_{k=1}^n c_k e^{kxi} + \sum_{k=-n}^{-1} c_k e^{kxi} = \sum_{k=-n}^n c_k e^{kxi}.
\end{aligned}$$

Поэтому правую часть равенства (21.25) условно записывают так

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{nxi}$$

и называют комплексной формой ряда Фурье, а само равенство (21.25) принимает теперь вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{nxi}. \quad (21.26)$$

Еще раз подчеркнем, что сходимость комплексного ряда Фурье надо понимать в смысле существования предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{kxi}$$

(это аналогично существованию главного значения несобственного интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ ).

Получим теперь окончательные формулы для чисел  $c_n$

1. Пусть  $n = 0$ , тогда

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{0 \cdot xi} dx ;$$

2. Пусть  $n = 1, 2, 3, \dots$ , тогда

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx - i \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nxi} dx ; \end{aligned}$$

3. Пусть  $n = -1, -2, -3, \dots$  в частности

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \frac{1}{2} (a_1 + ib_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos x + i \sin x) dx = ; \\ &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{xi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-(-1)x i} dx , \end{aligned}$$

аналогично

$$c_{-2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{2xi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-(-2)x i} dx$$

и т.д. Это можно записать так

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nxi} dx, n = -1, -2, -3, \dots$$

Итак, для всех  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  числа  $c_n$  находятся по одной и той же формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nxi} dx . \quad (21.27)$$

В случае произвольного периода  $2l$  комплексный ряд Фурье, очевидно, записывается так  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{n\pi xi}{l}}$ , где  $c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{n\pi xi}{l}} dx$ .

Комплексная форма ряда Фурье имеет то достоинство, что в ней ряд Фурье записывается компактнее, чем в вещественной форме. Кроме того, как отмечалось, все коэффициенты комплексного ряда Фурье находятся по единой формуле. Правда, в отличие от вещественного, комплексный ряд Фурье в случае четной или нечетной функций не упрощается по сравнению с общим случаем.

**Пример 21.4.** Разложим функцию  $f(x) = e^x$  в интервале  $(-\pi, \pi)$  в комплексный ряд Фурье. Имеем



$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-nxi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-ni)x} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{(1-ni)x}}{1-ni} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1-ni)\pi} - e^{-(1-ni)\pi}}{1-ni} =$$

$$= \frac{e^{\pi} (\cos n\pi - i \sin n\pi) - e^{-\pi} (\cos n\pi + i \sin n\pi)}{2\pi(1-ni)} =$$

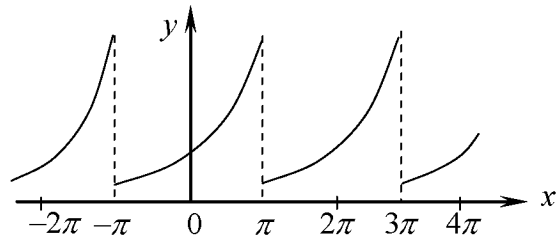


Рис. 21.15

$$= \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1-ni)} = (-1)^n \frac{\text{sh}\pi}{\pi} \cdot \frac{1+ni}{1+n^2}$$

Итак

$$e^x \underset{(-\pi, \pi)}{=} \frac{\text{sh}\pi}{\pi} \left( \dots + \frac{1-2i}{5} e^{-2xi} - \frac{1-i}{2} e^{-xi} + 1 + \frac{1+i}{2} e^{2xi} + \frac{1+2i}{5} e^{2xi} + \dots \right).$$

## 12. Ряды Фурье по произвольным ортогональным и по ортонормированным системам функций

Пусть система функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots, \quad (21.28)$$

непрерывных или кусочно-непрерывных на отрезке  $[a, b]$ , ортогональна на этом отрезке. Пусть, далее, о некоторой функции  $f(x)$ , также непрерывной или кусочно-непрерывной на  $[a, b]$ , известно, что она разложена в ряд по системе (21.28), т.е., что во всех точках непрерывности функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  будет

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \quad (21.29)$$

Покажем, как найти отсюда числа  $c_1, c_2, c_3, \dots$

Для этого умножим равенство (21.29) на  $\varphi_m(x)$ , где  $m$  – конкретное число и проинтегрируем его почленно от  $a$  до  $b$  (почленное интегрирование функционального ряда (21.29) предполагается законным). Получим

$$\int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx,$$

или, на основании ортогональности системы (21.28),

$$\int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx = c_m \int_a^b (\varphi_m(x))^2 dx,$$

откуда

$$c_m = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx}{\int_a^b (\varphi_m(x))^2 dx}. \quad (21.30)$$

Число

$$\|\varphi_m\| = \sqrt{\int_a^b (\varphi_m(x))^2 dx} \quad (21.31)$$

называют нормой функции  $\varphi_m(x)$ . Вспоминая метрику пространства  $L_c^2[a, b]$  (см. курс линейной алгебры), заключаем, что величина  $\|\varphi_m\|$  есть аналог модуля функции  $\varphi_m(x)$  как элемента пространства  $L_c^2[a, b]$ .

Формулу (21.30) можно теперь переписать так (заменяя в ней  $m$  на  $n$ )

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx. \quad (21.32)$$

Система (21.1) и формулы (21.6) являются, очевидно, частными случаями системы (21.28) и формулы (21.32). В связи с этим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ , в котором числа  $c_n$  найдены по формуле (21.32), называется обобщенным рядом Фурье функции  $f(x)$  по ортогональной системе (21.28).

В общем случае, как и в случае тригонометрической системы (21.1), сходимость ряда Фурье к породившей его функции является предметом специального исследования. Мы на этом вопросе не будем останавливаться, поскольку ниже мы придадим сходимости ряда (21.29) несколько иной смысл.

Ортогональную систему (21.28) называют ортонормированной, если для всех  $n=1, 2, 3, \dots$  будет  $\|\varphi_n\|=1$ . Очевидно, любую ортогональную систему (21.28) можно нормировать, разделив каждую функцию  $\varphi_n(x)$  на  $\|\varphi_n\|$ . В результате получим

$$\frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1\|}, \frac{\varphi_2(x)}{\|\varphi_2\|}, \dots, \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|}, \dots$$

Возьмем, в частности, тригонометрическую систему (21.1)

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

Она, как мы видели, ортогональна на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Но  $\|1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx} = \sqrt{2\pi}$ ,

$$\|\cos nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx} = \sqrt{\pi},$$

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx} = \sqrt{\pi},$$

т.е. эта система не нормирована. Соответствующая ортонормированная система выглядит так

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}.$$

Заметим, что если система (21.28) ортонормированна, то формула (21.30) принимает наиболее простой вид

$$c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx. \quad (21.33)$$

### 13. О разных понятиях близости двух функций в промежутке

Функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , непрерывные или кусочно-непрерывные на отрезке  $[a, b]$ , будем считать близкими на этом отрезке, если величина

$$\sup_{[a,b]} |f(x) - g(x)| \quad (21.34)$$

мала. Такую близость называют равномерной. Она означает, что  $f(x)$  близко к  $g(x)$  всюду на  $[a, b]$ .

Однако возможен и другой подход к понятию близости двух функций. В качестве меры близости функций можно считать не величину (21.34), а площадь между графиками этих функций на отрезке  $[a, b]$  т.е. величину

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

В этом случае отклонение  $g(x)$  от  $f(x)$  на отдельных участках отрезка  $[a, b]$  может быть и значительным; однако общая доля этих участков на всем отрезке мала. Такую близость называют близостью в среднем.

Для аналитического исследования удобнее в качестве подинтегральной функции взять не модуль разности функций, а квадрат этой разности. Величину

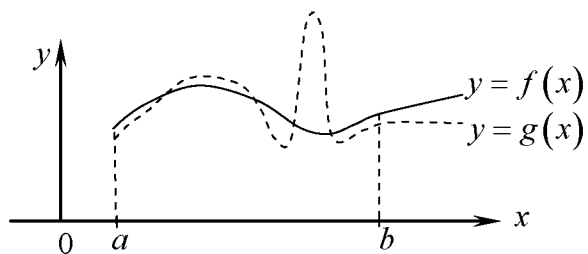


Рис. 21.16

$$\Delta(f, g) = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \quad (21.35)$$

называют *квадратичным (или среднеквадратичным) отклонением функции*  $f(x)$  от функции  $g(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Если величина  $\Delta(f, g)$  мала, то, как говорилось, в отдельных точках  $x \in [a, b]$  разность  $|f(x) - g(x)|$  может и не быть мала, но в целом по отрезку  $[a, b]$  будет  $f(x) \approx g(x)$ . Именно такую близость функций  $f(x)$  и  $g(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и называют близостью в среднем.

Очевидно, различие между двумя рассматриваемыми подходами к понятию близости функций объясняется тем, что на множестве рассматриваемых функций, мы по-разному вводим метрику. В первом случае мы, согласно (21.34), в качестве меры отклонения  $f(x)$  от  $g(x)$  брали, по существу,

$$\|f - g\| = \max_{[a, b]} |f(x) - g(x)|,$$

а во втором, в качестве меры расхождения мы взяли величину (21.35), т.е. на основании (21.31)

$$\Delta(f, g) = \|f - g\|^2.$$

Последовательность  $\{\varphi_n(x)\}$  называется сходящейся к функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , в среднем (это записывается так:  $\{\varphi_n(x)\} \xrightarrow{cp.} f(x)$ ),

если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(f, \varphi_n) = 0,$$

т.е. если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(x) - \varphi_n(x))^2 dx = 0. \quad (21.36)$$

Легко видеть, что если  $\{\varphi_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ , то тем более  $\{\varphi_n(x)\} \xrightarrow{cp.} f(x)$ , но обратное, вообще говоря, неверно, поскольку равенство (21.36), например, в случае непрерывности функций  $f(x)$  и  $\varphi_n(x)$  предполагает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$  выполняется при всех  $x \in [a, b]$ .

#### 14. Минимальное свойство коэффициентов ряда Фурье

Введем пространство  $E$  элементов  $f = f(x)$ , где функции  $f(x)$  непрерывны или кусочно-непрерывны на отрезке  $[a, b]$ . Положим в этом

пространстве

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Тем самым пространство  $E$  оказывается евклидовым пространством. Теперь можно говорить, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  ортогональны на отрезке  $[a, b]$  тогда и только тогда, когда элементы  $f$  и  $g$  ортогональны в пространстве  $E$ .

Возьмем в  $E$  ортогональную систему

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x). \quad (21.37)$$

Выбрав некоторое конкретное конечное  $n$ , рассмотрим функции

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x).$$

Пусть  $L$ -линейная оболочка элементов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , а  $f(x)$  – произвольная функция из  $E (f \notin L)$ . Найдем в  $L$  элемент  $y$ , наиболее близкий к  $f$ , т.е. такой, что величина

$$\|f - y\| = \sqrt{\int_a^b (f(x) - y(x))^2 dx}$$

минимальна по сравнению со всеми другими  $y \in L$ .

В курсе линейной алгебры мы видели, что искомым элемент  $y$  есть ортогональная проекция элемента  $f$  на подпространство  $L$ . Следовательно,

$$g = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n,$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  находятся из линейной системы, матрицей которой является матрица Грама, а так как элементы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  взаимно ортогональны, то это матрица – диагональная, а значит

$$\begin{cases} (\varphi_1, \varphi_1)c_1 = (f, \varphi_1) \\ (\varphi_2, \varphi_2)c_2 = (f, \varphi_2) \\ \dots \\ (\varphi_n, \varphi_n)c_n = (f, \varphi_n), \end{cases}$$

откуда

$$c_1 = \frac{(f, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2}, c_2 = \frac{(f, \varphi_2)}{\|\varphi_2\|^2}, \dots, c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2},$$

т.е. для любого  $k = 1, 2, \dots, n$  будет

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx}{\int_a^b (\varphi_k(x))^2 dx},$$

что фактически совпадает с выражением (21.30). Итак, мы видим, что из всех функций вида

$$g(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) \quad (21.38)$$

к наперед заданной функции  $f(x)$  наиболее близка (в смысле указанной выше метрики пространства  $E$ ) та, в которой числа  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , есть коэффициенты обобщенного ряда Фурье этой функции. Иными словами, из всех функций вида (21.34) к функции  $f(x)$  наиболее близка частичная сумма  $s_n(x)$  ее ряда Фурье (рис.21.17).

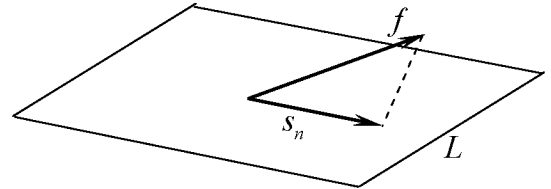


Рис. 21.17

Поскольку норма функции  $f(x)$ , как отмечалось выше, есть аналог модуля “вектора”  $f$  как элемента пространства  $E$ , то в качестве ошибки замены  $f(x)$  на  $s_n(x)$  естественно взять число

$$\Delta_n = \|f - s_n\|^2,$$

т.е.

$$\Delta_n = \int_a^b (f(x) - s_n(x))^2 dx. \quad (21.39)$$

Из линейной алгебры известно (теорема Пифагора), что

$$\Delta_n = \|f\|^2 - \|s_n\|^2.$$

Но, на основании ортогональности системы (21.37),

$$\|s_n\|^2 = (s_n, s_n) = \left( \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i, \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2,$$

а значит

$$\Delta_n = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2. \quad (21.40)$$

## 15. Замкнутые системы функций

Поскольку, в силу (21.39), всегда  $\Delta_n \geq 0$ , то из (21.40) следует, что для любой функции  $f(x)$  будет

$$\sum_{k=1}^n \|\varphi_k\|^2 c_k^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Здесь  $n$  может быть любым, а значит и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 c_n^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Это неравенство называют *неравенством Бесселя*. Из него, в частности, следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 c_n^2$$

всегда сходится, а значит, если не будет  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\| = 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ . Ранее этот факт был доказан для тригонометрического ряда Фурье.

Далее, из (21.40) следует, что при  $n \rightarrow \infty$  величина  $\Delta_n$  убывает. Следовательно, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n \geq 0$ . Возникает вопрос: не будет ли

$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$ ? Последнее равенство равносильно следующему

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 c_n^2 = \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (21.41)$$

Это равенство называется *уравнением замкнутости*, или *равенством Стеклова*. Если при данной ортогональной системе (21.37) уравнение замкнутости выполняется для любой функции  $f(x)$ , непрерывной или кусочно-непрерывной, то система (21.37) называется замкнутой.

Имеют место следующие утверждения.

1. Если для функции  $f(x)$  выполняется равенство (21.41), то оно выполняется и для функции  $\lambda f(x)$ , где  $\lambda$  – любое число.

Это утверждение очевидно на основании формулы (21.30).

2. Если равенство (21.41) выполняется для каждой из функций  $\overline{f}(x)$  и  $\overline{\overline{f}}(x)$ , то оно выполняется и для функции  $f(x) = \overline{f}(x) + \overline{\overline{f}}(x)$ .

■ Отметим сначала, что для любых вещественных  $a$  и  $b$  будет

$$(a \pm b)^2 \geq 0,$$

т.е.

$$a^2 + b^2 \geq \mp 2ab,$$

или

$$2|ab| \leq a^2 + b^2.$$

Прибавляя к обеим частям величину  $a^2 + b^2$ , получим

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \quad (21.42)$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} f(x) - s_n(x) &= (\overline{f}(x) + \overline{\overline{f}}(x)) - (\overline{s_n}(x) + \overline{\overline{s_n}}(x)) = \\ &= (\overline{f}(x) - \overline{s_n}(x)) + (\overline{\overline{f}}(x) - \overline{\overline{s_n}}(x)), \end{aligned}$$

откуда

$$(f(x) - s_n(x))^2 = \left( (\overline{f}(x) - \overline{s}_n(x)) + (\overline{\overline{f}}(x) - \overline{\overline{s}}_n(x)) \right)^2,$$

а значит на основании (21.42),

$$(f(x) - s_n(x))^2 \leq 2 \left( (\overline{f}(x) - \overline{s}_n(x))^2 + (\overline{\overline{f}}(x) - \overline{\overline{s}}_n(x))^2 \right).$$

Следовательно,

$$\int_a^b (f(x) - s_n(x))^2 dx \leq 2 \left( \int_a^b (\overline{f}(x) - \overline{s}_n(x))^2 dx + \int_a^b (\overline{\overline{f}}(x) - \overline{\overline{s}}_n(x))^2 dx \right). \quad (21.43)$$

Если  $n \rightarrow \infty$ , то оба интеграла в правой части, по условию, стремятся к нулю. Но тогда стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  и стоящий слева интеграл, что и доказывает утверждение.  $\square$

Из двух последних утверждений следует, что если функции  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  удовлетворяют равенству (21.41), то ему удовлетворяет и любая линейная комбинация этих функций.

**Примечание.** Поскольку равенство (21.41) равносильно тому, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(x) - s_n(x))^2 dx = 0,$$

то, следовательно, ряд Фурье для функции  $f(x)$  по замкнутой системе (21.37) сходится на отрезке  $[a, b]$  к функции  $f(x)$  в среднем.

## 16. Замкнутость системы тригонометрических функций

Возьмем тригонометрическую систему (21.1). Она ортогональна на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , но мы для большего удобства, на основании формулы (21.4), будем вместо отрезка  $[-\pi, \pi]$  рассматривать отрезок  $[0, 2\pi]$ . Для системы (21.1) равенство (21.41) запишется так

$$2\pi \frac{a_0^2}{4} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx,$$

т.е.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx. \quad (21.44)$$

Это равенство называют *формулой Ляпунова-Парсеваля*. Докажем, что оно действительно имеет место, т.е. что система тригонометрических функций замкнута.



Доказательство проведем в несколько этапов. Начнем с конкретного примера.

Разложим функцию  $f(x) = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4}$  на отрезке  $[0, 2\pi]$  в ряд Фурье по косинусам.

Имеем

$$\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_{[0, 2\pi]} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{nx}{2},$$

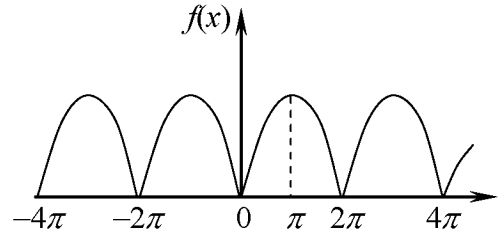


Рис. 21.18

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi x^2}{4} - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{4\pi^3}{4} - \frac{8\pi^3}{12} \right) = \pi^2 - \frac{2}{3}\pi^2 = \frac{\pi^2}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) \cos \frac{nx}{2} dx = \frac{1}{\pi} \left( \left( \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) \frac{2}{n} \sin \frac{nx}{2} \Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \sin \frac{nx}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \sin \frac{nx}{2} dx \right) = -\frac{1}{n\pi} \left( \frac{2}{n} (\pi - x) \cos \frac{nx}{2} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{2}{n} \cos \frac{nx}{2} dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} (\pi - x) \cos \frac{nx}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{\pi n^2} (-\pi(-1)^n - \pi) = -\frac{2}{n^2} ((-1)^n + 1) = \begin{cases} -\frac{4}{n^2}, n = 2, 4, \dots; \\ 0, n = 1, 3, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Итак

$$\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_{[0, 2\pi]} = \frac{\pi^2}{6} - 4 \left( \frac{\cos x}{2^2} + \frac{\cos 2x}{4^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{6} - \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots \right),$$

т.е.

$$\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_{[0, 2\pi]} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (21.45)$$

В частности, при  $x = 0$  имеем отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Поэтому выражение (21.45) можно переписать так:

$$\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_{[0, 2\pi]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2},$$

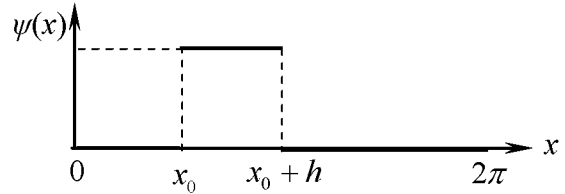
т.е.

$$\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \underset{[0, 2\pi]}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nx}{n^2}. \quad (21.46)$$

**Лемма 21.3.** Для любой ступенчатой функции уравнение замкнутости (21.44) имеет место.

■ Возьмем сначала одноступенчатую функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_0, x_0 + h], \\ 0, & x \notin [x_0, x_0 + h]. \end{cases}$$



Имеем для нее

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+h} dx = \frac{h}{\pi},$$

Рис. 21.19

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+h} \cos nx dx = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin nx_0}{n\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+h} \sin nx dx = \frac{\cos nx_0 - \cos(x_0 + h)}{n\pi},$$

а значит

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \frac{h^2}{2\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n(x_0 + h) - \sin nx_0)^2 + (\cos nx_0 - \cos(x_0 + h))^2}{n^2} = \\ &= \frac{h^2}{2\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2\sin n(x_0 + h)\sin nx_0 - 2\cos nx_0 \cos n(x_0 + h)}{n^2} = \\ &= \frac{h^2}{2\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2\cos(n(x_0 + h) - nx_0)}{n^2} = \frac{h^2}{2\pi^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nh}{n^2}, \end{aligned}$$

или, на основании (21.46)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{h^2}{2\pi^2} + \frac{2}{\pi^2} \left( \frac{\pi h}{2} - \frac{h^2}{4} \right) = \frac{h^2}{2\pi^2} + \frac{h}{\pi} - \frac{h^2}{2\pi^2} = \frac{h}{\pi}.$$

С другой стороны

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\psi(x))^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+h} dx = \frac{h}{\pi}.$$

Итак, для функции  $\psi(x)$  равенство Ляпунова-Парсеваля выполнено. Но тогда оно выполняется и для любой ступенчатой функции, поскольку ее можно представить в виде линейной комбинации одноступенчатых функций.

□

**Теорема 21.4.** Система тригонометрических функций замкнута.

■ Пусть  $f(x)$  – произвольная кусочно-непрерывная на отрезке  $[0, 2\pi]$  функция. Тогда ее можно представить в виде суммы конечного числа функций, каждая из которых непрерывна на соответствующей части отрезка, а на остальных частях равна нулю. Такое представление кусочно – непрерывной функции в виде суммы непрерывных функций не будет выполняться лишь в конечном числе точек разрыва, однако значения функции в конечном числе точек

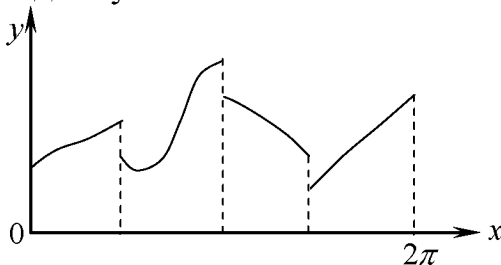


Рис. 21.20

разрыва (1-го рода!) не влияет на значение интеграла  $\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx$ , а значит и на выполнение подлежащего доказательству равенства (21.44).

В силу сделанного замечания, достаточно доказать формулу (21.44) лишь для функции  $f(x)$ , непрерывной на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[0, 2\pi]$ , то она и интегрируема на нем.

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и построим для интеграла  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ , например,

нижнюю сумму Дарбу  $s_\lambda$ . Тогда при достаточно малом  $\lambda$  будет

$$f(x) - s_\lambda < \varepsilon$$

Функция  $s_\lambda = \bar{f}(x)$  является ступенчатой.

Обозначим

$$\overline{\overline{f}}(x) = f(x) - \bar{f}(x).$$

Тогда, на основании соотношения (21.43),

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx \leq 2 \left( \int_0^{2\pi} (\bar{f}(x) - \bar{s}_n(x))^2 dx + \int_0^{2\pi} (\overline{\overline{f}}(x) - \overline{\overline{s}}_n(x))^2 dx \right) \quad (21.47)$$

В силу леммы 21.1, первый интеграл справа мал при достаточно больших  $n$ .

Далее, из равенства

$$\|\overline{\overline{f}} - \overline{\overline{s}}_n\|^2 = \|\overline{\overline{f}}\|^2 - \|\overline{\overline{s}}_n\|^2$$

следует, что

$$\|\overline{\overline{f}} - \overline{\overline{s}}_n\|^2 < \|\overline{\overline{f}}\|^2,$$

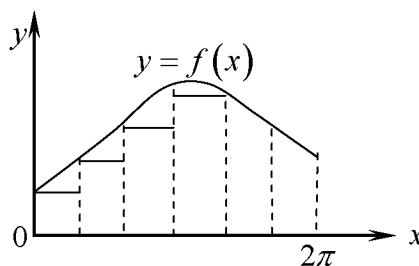


Рис. 21.21

т.е.

$$\int_0^{2\pi} (\overline{f}(x) - \overline{s}_n(x))^2 dx \leq \int_0^{2\pi} (\overline{f}(x))^2 dx.$$

Последний интеграл мал благодаря близости  $\overline{f}(x)$  к  $f(x)$ , а значит и второй интеграл справа в (21.47) мал. Таким образом, из неравенства (21.47) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx = 0,$$

а это равносильно уравнению замкнутости, т.е. равенство (21.44) доказано.

**Примечание 1.** При помощи формулы (21.44), беря конкретные функции  $f(x)$ , можно находить суммы некоторых числовых рядов.

Например, для функции  $f(x) = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4}$ , заданной на отрезке  $[0, 2\pi]$ , мы

$$\begin{aligned} \text{имеем } \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx &= 2 \int_0^{\pi} \left( \frac{\pi^2 x^2}{4} - \frac{\pi x^3}{4} + \frac{x^4}{16} \right) dx = \\ &= 2 \left( \frac{\pi^2 x^3}{12} - \frac{\pi x^4}{16} + \frac{x^5}{80} \right) \Big|_0^{\pi} = 2\pi^5 \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{16} + \frac{1}{80} \right) = \frac{\pi^5}{15}. \end{aligned}$$

Следовательно, формула (2.44) дает в этом случае

$$\frac{\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{15},$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \left( \frac{1}{15} - \frac{1}{18} \right) \pi^4,$$

т.е.

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}.$$

**Примечание 2.** Формулу Ляпунова-Парсеваля можно перенести и на случай комплексного ряда Фурье. Действительно, левой части формулы (21.44) можно придать вид, на основании равенств

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_{\pm n} = \frac{1}{2}(a_n \mp ib_n),$$

$$2c_0^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 2|c_0|^2 + 2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_{-n}|^2 \right) =$$

$$= 2 \left( |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + \sum_{n=-1}^{-\infty} |c_{-n}|^2 \right) = 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Причем, как и в п. 11, последняя сумма понимается в смысле “главного значения”.

Таким образом, равенство (21.44) запишется теперь так

$$2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx,$$

т.е.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx. \quad (21.48)$$

## 17. Полнота системы тригонометрических функций

**Теорема 21.5.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[0, 2\pi]$ , и все коэффициенты ее ряда Фурье равны нулю, то и сама функция равна нулю на этом отрезке.

■ Действительно, непрерывность функции  $f(x)$  обеспечивает выполнение уравнения замкнутости (2.44), которое в данном случае запишется так

$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = 0,$$

откуда следует, что  $f(x) = 0, \forall x \in [0, 2\pi]$ . □

Доказанная теорема, на основании формул (21.6), означает, что не существует непрерывной функции, не равной тождественно нулю, которая была бы на отрезке  $[0, 2\pi]$  ортогонально ко всем функциям системы (21.1):

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

Это свойство тригонометрической системы называют ее полнотой (в классе непрерывных функций). Мы показали, таким образом, что полнота системы тригонометрических функций является следствием ее замкнутости.

**Следствие.** Если две непрерывные функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  имеют один и тот же ряд Фурье, то они совпадают.

■ Действительно, для функции  $f_1(x) - f_2(x)$  все коэффициенты ряда Фурье равны нулю, а значит  $f_1(x) - f_2(x) \equiv 0$ , т.е.  $f_1(x) \equiv f_2(x)$ . □

Итак, непрерывная функция определяется своим рядом Фурье однозначно.

Все сказанное, очевидно, переносится и на случай произвольной замкнутой системы функций, ортогональной на некотором отрезке  $[a, b]$ .

### 18. Обобщенное уравнение замкнутости

Пусть система  $\{\varphi_n(x)\}$  ортогональна на отрезке  $[a, b]$  и замкнута. Пусть, далее,  $f(x)$  и  $g(x)$  – произвольные функции, непрерывные или кусочно-непрерывные на отрезке  $[a, b]$ , а  $c_n$  и  $d_n$  – коэффициенты их рядов Фурье. Тогда для функции  $f(x) + g(x)$  коэффициенты ряда Фурье равны  $c_n + d_n$ , и уравнение замкнутости для нее запишется так:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 (c_n + d_n)^2$$

т.е.

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x))^2 dx + 2 \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b (g(x))^2 dx = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 c_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 d_n^2 \end{aligned}$$

Учитывая уравнения замкнутости для каждой из функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , получим отсюда

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 c_n d_n. \quad (21.49)$$

Это равенство называют обобщенным уравнением замкнутости. Оно переходит в равенство (21.41) при  $g(x) = f(x)$ .

### 19. Геометрическая аналогия разложения функции в ряд Фурье

Пусть (21.37) есть ортогональная на отрезке  $[a, b]$  система функций. В пространстве  $E$  ее можно трактовать как систему ортогональных векторов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Поскольку любая подсистема системы (21.37) ортогональна, то векторы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  линейно независимы в пространстве  $E$ , а значит, это пространство является бесконечномерным. Предположим, что система (21.37) замкнута. Тогда она, как мы видели, является и полной, т.е. не существует функции  $f(x) \neq 0$ , ортогональной ко всем функциям  $\varphi_n(x)$ . Таким образом, полнота системы векторов  $\{\varphi_n\}$  означает, что не существует ненулевого вектора  $f$ , ортогонального ко всем векторам  $\varphi_n$ .

**Пример 21.5.** В трехмерном пространстве тройка векторов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , очевидно, образует полную систему. В то же время система двух взаимно перпендикулярных векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  не является полной, поскольку существует, например, вектор  $\begin{bmatrix} \vec{p} & \vec{q} \end{bmatrix} \neq 0$ , перпендикулярный одновременно вектору  $\vec{p}$  и вектору  $\vec{q}$ .

**Пример 21.6.** В рассматриваемом пространстве  $E$  с метрикой

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

не является полной, поскольку существует функция  $\sin x \neq 0$ , ортогональная ко всем функциям этой системы.

Обратимся снова к пространству  $E$  непрерывных или кусочно-непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций. Пусть

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \quad (21.50)$$

– ортонормированная замкнутая система функций. Возьмем произвольную функцию  $f(x) \in E$  и составим для нее ряд Фурье по функциям системы (21.50):

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x);$$

пусть  $s_n(x)$  – его частичная сумма. Тогда, в силу замкнутости системы (21.50),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(x) - s_n(x))^2 dx = 0, \quad (21.51)$$

т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\| = 0$ , а это значит, что в метрике пространства  $E$  будет

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f$ , т.е.

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n. \quad (21.52)$$

Но  $f(x)$  – произвольная функция из  $E$ , а значит каждый элемент  $f \in E$  можно представить в виде (21.52). Иными словами, любой элемент  $f \in E$  может быть разложен по элементам ортонормированного базиса  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Бесчисленность векторов этого базиса иллюстрирует бесконечномерность

пространства  $E$ . Итак, выполнение равенства (21.52), т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (21.53)$$

следует понимать не в смысле обычной, поточечной, сходимости стоящего справа ряда, а в смысле равенства (21.51), т.е. в том, более слабом, смысле, что данный ряд сходится к породившей его функции  $f(x)$  в среднем.

С точки же зрения “геометрии” пространства  $E$  разложение (21.53) функции  $f(x)$  в ряд Фурье есть не что иное, как разложение соответствующего элемента  $f$  по элементам ортонормированного базиса  $\{\varphi_n\}$ . При этом коэффициенты Фурье оказываются координатами элемента  $f$  в этом базисе. Действительно, из выражения (21.33) следует, что эти координаты равны

$$c_n = (f, \varphi_n) = \|f\| \cdot \|\varphi_n\| \cdot \cos(f, \varphi_n) = \text{Пр}_{\varphi_n} f.$$

Уравнение замкнутости для ортонормированной системы примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b (f(x))^2 dx, \text{ т.е. } \|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2.$$

Таким образом, уравнение замкнутости с геометрической точки зрения выражает тот факт, что квадрат длины элемента (вектора) равен сумме квадратов всех его проекций на взаимно ортогональные оси.

Если же система  $\{\varphi_n\}$  – не полная, то уравнение замкнутости превращается в неравенство Бесселя, которое в случае ортонормированной системы примет вид

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2,$$

а это означает, что неполная сумма квадратов проекций вектора меньше квадрата его длины.

Обратимся в заключение к обобщенному уравнению замкнутости. В случае ортонормированной системы равенство (21.49) примет вид

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n, \text{ т.е. } (f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n.$$

Таким образом, обобщенное уравнение замкнутости выражает теперь тот факт, что скалярное произведение векторов пространства  $E$  равно сумме попарных произведений одноименных координат этих векторов в некотором ортонормированном базисе.

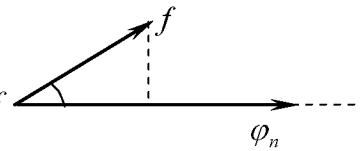


Рис. 21.22



## 20. Разложение функций в ряд Фурье по системе, ортогональной с весом

Система функций  $\{\varphi_n(x)\}$  называется ортогональной на отрезке  $[a, b]$  с весом  $p(x)$ , если при любых различных  $i$  и  $k$  будет

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) p(x) dx = 0. \quad (21.54)$$

При этом предполагается, что функция  $p(x)$  непрерывна и неотрицательна на отрезке  $[a, b]$ , причем  $p(x) = 0$  не во всех точках  $x \in [a, b]$ .

Левую часть равенства (21.54) вновь будем называть скалярным произведением функций  $\varphi_i(x)$  и  $\varphi_k(x)$  и обозначать  $(\varphi_i, \varphi_k)$ . Нормой функции  $f(x)$ , непрерывной или кусочно-непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , естественно назвать величину

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 p(x) dx}.$$

Если  $p \equiv 1$ , то приходим к прежней метрике пространства  $E$ .

Предположим, что для всех  $x \in [a, b]$  выполняется равенство

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad (21.55)$$

где система  $\{\varphi_n(x)\}$  ортогональна на отрезке  $[a, b]$  с весом  $p(x)$ . Найдем отсюда числа  $c_n$ . Для этого умножим обе части равенства (21.55) на  $\varphi_m(x)$ , где  $m$  – конкретное натуральное число, и проинтегрируем почленно от  $a$  до  $b$  (предполагается, что последнее действие законно). Получим

$$(f, \varphi_m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi_n, \varphi_m),$$

или, на основании ортогональности системы  $\{\varphi_n(x)\}$ ,

$$(f, \varphi_m) = c_m \|\varphi_m\|^2,$$

откуда

$$c_m = \frac{(f, \varphi_m)}{\|\varphi_m\|^2}.$$

Заменяя здесь  $m$  на  $n$ , получим окончательно

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_n(x) p(x) dx}{\int_a^b (\varphi_n(x))^2 p(x) dx}.$$

Для систем, ортогональных с весом, также можно ввести понятие замкнутости и полноты и доказать утверждения, полученные ранее для систем, ортогональных в обычном смысле, т.е. с весом  $p(x) \equiv 1$ .

### Задания к разделу XXI

1. Разложить функцию  $f(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$  в ряд Фурье по указанной тригонометрической системе функций. Начертить график суммы полученного ряда Фурье.
2. Функцию  $f(x)$  разложить в ряд Фурье на заданном промежутке.
3. Функцию  $f(x)$  разложить в ряд Фурье на  $[-\pi, \pi]$ . Записать равенство Парсеваля–Ляпунова.

#### Вариант 1.

$$1.1. f(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ x - \frac{\pi}{2}, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

$\{\cos nx\}$

$$1.2. f(x) = \sin 2x, x \in (-1, 1)$$

$$1.3. f(x) = e^{|x|}$$

#### Вариант 3.

$$3.1. f(x) = \begin{cases} 0, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 2x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

$\{\cos nx\}$

$$3.2. f(x) = \sin \frac{x}{3}, x \in [-1, 1]$$

$$3.3. f(x) = x(\pi - x)$$

#### Вариант 5.

$$5.1. f(x) = \begin{cases} x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

$\{\cos nx\}$

#### Вариант 2.

$$2.1. f(x) = \begin{cases} -1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

$\{\sin nx\}$

$$2.2. f(x) = \cos \frac{5x}{2}, x \in [-2, 2]$$

$$2.3. f(x) = \operatorname{sh} x$$

#### Вариант 4.

$$4.1. f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

$\{\sin nx\}$

$$4.2. f(x) = |x|, x \in [-3, 1]$$

$$4.3. f(x) = x \sin x$$

#### Вариант 6.

$$6.1. f(x) = \begin{cases} x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ -x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$\{\cos nx\}$

$$5.2. f(x) = 1 - |x|, x \in [-3, 1]$$

$$5.3. f(x) = \sin \frac{x}{2}$$

**Вариант 7.**

$$7.1. f(x) = \left| x - \frac{\pi}{2} \right|, x \in [0, \pi]$$

$$\{\sin nx\}$$

$$7.2. f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ \operatorname{sign} x, & |x| \in (1, 3] \end{cases}$$

$$7.3. f(x) = \operatorname{ch} x$$

**Вариант 9.**

$$9.1. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \pi - x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$$\{\cos nx\}$$

$$9.2. f(x) = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 3]$$

$$9.3. f(x) = \operatorname{ch} 3x$$

**Вариант 11.**

$$11.1. f(x) = \begin{cases} 2, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$$\{\sin nx\}$$

$$11.2. f(x) = \sin \frac{x}{3}, x \in [-1, 1]$$

$$11.3. f(x) = x|x|$$

**Вариант 13.**

$$6.2. f(x) = \cos \frac{5x}{2}, x \in [-2, 2]$$

$$6.3. f(x) = \operatorname{sh} 2x$$

**Вариант 8.**

$$8.1. f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$$\{\sin nx\}$$

$$8.2. f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \in [1, 4] \end{cases}$$

$$8.3. f(x) = (\pi + x) \sin x$$

**Вариант 10.**

$$10.1. f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$$\{\cos nx\}$$

$$10.2. f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sign} x, & |x| \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\right] \end{cases}$$

$$10.3. f(x) = \pi^2 - x^2$$

**Вариант 12.**

$$12.1. f(x) = \begin{cases} -2, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$$\{\cos nx\}$$

$$12.2. f(x) = \sin \frac{x}{3}, x \in [-1, 1]$$

$$12.3. f(x) = x - |x|$$

**Вариант 14.**

$$13.1. f(x) = \begin{cases} 0, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ -2x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

{sin nx}

$$13.2. f(x) = \begin{cases} 3, |x| \leq 1 \\ 3|x|, |x| \in [1, 3] \end{cases}$$

$$13.3. f(x) = \cos \frac{x}{3}.$$

**Вариант 15.**

$$15.1. f(x) = \begin{cases} x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

{sin nx}

$$15.2. f(x) = 2 - 3x, x \in [0, 2]$$

$$15.3. f(x) = \sin \frac{2x}{3}$$

**Вариант 17.**

$$17.1. f(x) = \left|x - \frac{\pi}{2}\right|, x \in [0, \pi]$$

{cos nx}

$$17.2. f(x) = x + |x|, x \in [-1, 2]$$

$$17.3. f(x) = \sin \pi x$$

**Вариант 19.**

$$19.1. f(x) = \begin{cases} -1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \pi - x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

{sin nx}

$$14.1. f(x) = \begin{cases} 0, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ -2x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

{cos nx}

$$14.2. f(x) = \begin{cases} |x|, |x| \leq 2 \\ \text{sign} x, |x| \in (2, 3] \end{cases}$$

$$14.3. f(x) \cos \pi x$$

**Вариант 16.**

$$16.1. f(x) = \begin{cases} -x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

{sin nx}

$$16.2. f(x) = \cos \frac{x}{3}, x \in [-1, 1]$$

$$16.3. f(x) = e^{-x}$$

**Вариант 18.**

$$18.1. f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \pi, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

{cos nx}

$$18.2. f(x) = |x| - x, x \in [-1, 1]$$

$$18.3. f(x) = \text{ch} 2x$$

**Вариант 20.**

$$20.1. f(x) = \begin{cases} -1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \pi - x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

{sin nx}

$$19.2. f(x) = x, x \in [-1, 2]$$

$$19.3. f(x) = \cos \frac{x}{2}$$

**Вариант 21.**

$$21.1. f(x) = \begin{cases} x+1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 2, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$$\{\cos nx\}$$

$$21.2. f(x) = 1 + |x|, x \in [-1, 2]$$

$$21.3. f(x) = \sin \pi x$$

**Вариант 23.**

$$23.1. f(x) = \begin{cases} 3-x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$$\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$$

$$23.2. f(x) = \cos 3x, x \in [-1, 1]$$

$$23.3. f(x) = e^{\frac{x}{2}}$$

**Вариант 25.**

$$25.1. f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases},$$

$$\{\cos nx\}$$

$$20.2. f(x) = 1 + 3x, x \in [0, 2]$$

$$20.3. f(x) = \cos \pi x$$

**Вариант 22.**

$$22.1. f(x) = \begin{cases} x-1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$$\{\cos nx\}$$

$$22.2. f(x) = 1 - |x|, x \in [-1, 2]$$

$$22.3. f(x) = e^{-3x}$$

**Вариант 24.**

$$24.1. f(x) = \begin{cases} 2+x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$$\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$$

$$24.2. f(x) = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 3]$$

$$24.3. f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$$

$$25.2. f(x) = 2 + |x|, x \in [-1, 2]$$

$$25.3. f(x) = \cos \frac{x}{3}$$

## XXII. Интеграл Фурье и преобразования Фурье

### 1. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье

Пусть функция  $f(x)$ , заданная на отрезке  $[-l, l]$ , представлена внутри него рядом Фурье.

$$f(x) \underset{(-l, l)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (22.1)$$

Предположим теперь, что отрезок  $[-l, l]$  “растягивается” на всю числовую ось, т.е., что  $l \rightarrow \infty$ . Посмотрим, как будет меняться при этом ряд (22.1). Для этого, используя формулы для  $a_n$  и  $b_n$ , перепишем равенство (22.1) так

$$f(x) \underset{(-l, l)}{=} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \right) \cos \frac{n\pi x}{l} + \left( \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

или

$$f(x) \underset{(-l, l)}{=} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \left( \cos \frac{n\pi t}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} + \sin \frac{n\pi t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) dt \right),$$

т.е.

$$f(x) \underset{(-l, l)}{=} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi(x-t)}{l} dt \right). \quad (22.2)$$

Будем считать теперь, что  $l \rightarrow +\infty$ . Тогда в пределе получим функцию  $f(x)$ , заданную во всей числовой оси. Далее, всюду ниже будем предполагать, что функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т.е., что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = A, \quad (22.3)$$

где  $A$  – некоторое число. Тогда тем более сходится интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ , а

значит

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(x) dx = 0.$$

Поэтому из (22.2) будем иметь

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi(x-t)}{l} dt \right). \quad (22.4)$$

Введем дискретную переменную  $\omega$ , принимающую значения

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}, \omega_2 = \frac{2\pi}{l}, \omega_3 = \frac{3\pi}{l}, \dots, \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \dots$$

Тогда

$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l},$$

так что

$$(l \rightarrow +\infty) \Leftrightarrow (\Delta\omega_n \rightarrow 0).$$

Поэтому равенству (22.4) можно придать вид

$$f(x) = \lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) \cos \omega_n(x-t) dt \right) \frac{\pi}{l},$$

т.е.

$$f = \lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) \cos \omega_n(x-t) dt \right) \Delta\omega_n.$$

Обозначим

$$\Phi_l(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) \cos \omega(x-t) dt. \quad (22.5)$$

Тогда получим

$$f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_l(\omega_n) \Delta\omega_n, \quad (22.6)$$

где  $\delta$  – наибольшее значение всех  $\Delta\omega_n$ .

Покажем, что  $\Phi_l(\omega)$  имеет предел при  $l \rightarrow +\infty$ . Из (22.3) и из того, что  $|\cos \omega(x-t)| \leq 1$ , вытекает абсолютная сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt,$$

а значит, существует предел

$$\Phi(\omega) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \Phi_l(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt. \quad (22.7)$$

Далее, сумма (22.6) напоминает интегральную сумму для функции

$\Phi_l(\omega)$  в промежутке  $(0, +\infty)$ . Поэтому можно предположить, что она при  $l \rightarrow \infty$  будет стремиться к несобственному интегралу  $\int_0^{\infty} \Phi(\omega) d\omega$ . Если это так, то в пределе из (22.6) будем иметь

$$f(x) = \int_0^{\infty} \Phi(\omega) d\omega, \quad (22.8)$$

т.е.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt \right) d\omega. \quad (22.9)$$

Стоящий справа интеграл называется интегралом Фурье для функции  $f(x)$ . Прделанный выше переход от “интегральной” суммы к несобственному интегралу, разумеется, не был строгим. Поэтому формулу (22.9) еще никак нельзя считать доказанной (не доказана покамест даже сходимость интеграла  $\int_0^{\infty} \Phi(\omega) d\omega$ ). Выкладки, произведенные здесь, требовались лишь для получения вида интеграла Фурье. Для обоснования формулы (22.9) потребуются дополнительные исследования.

## 2. Одна предварительная формула

Поскольку в настоящем параграфе, как и в предыдущем, величина  $x$  фактически играет роль константы, то положим  $x = x_0$ , где  $x_0$  – произвольное фиксированное значение. Рассмотрим интеграл

$$I(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^v \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(x_0 - t) dt \right) d\omega,$$

где  $v > 0$  – произвольное число. Если  $v \rightarrow +\infty$ , то  $I(v)$  стремится к интегралу Фурье функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ . Поэтому  $I(v)$  есть аналог частичной суммы ряда Фурье (в том же смысле, в котором сам интеграл Фурье есть аналог ряда Фурье).

Имеем, в силу теоремы,

$$\begin{aligned} \int_0^v \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x_0 - t) dt \right) d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^v f(t) \cos \omega(x_0 - t) d\omega \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( f(t) \int_0^v \cos \omega(x_0 - t) d\omega \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin \omega(x_0 - t)}{x_0 - t} \Big|_0^v dt, \end{aligned}$$

т.е.



$$\int_0^{\nu} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x_0 - t) dt \right) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin \nu(x_0 - t)}{x_0 - t} dt.$$

Имеем,

$$I(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin \nu(x_0 - t)}{x_0 - t} dt.$$

Положив  $t - x_0 = u$ , откуда  $t = x_0 + u$ , будем иметь

$$I(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0 + u) \frac{\sin \nu u}{u} du.$$

Перепишем это так

$$I(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x_0 + u) \frac{\sin \nu u}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x_0 + u) \frac{\sin \nu u}{u} du.$$

В первом интеграле положим  $u = -z$ . Тогда он примет вид

$$-\int_{+\infty}^0 f(x_0 - z) \frac{\sin \nu z}{z} dz = \int_0^{+\infty} f(x_0 - z) \frac{\sin \nu z}{z} dz.$$

Следовательно,

$$I(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x_0 + u) \frac{\sin \nu u}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x_0 - u) \frac{\sin \nu u}{u} du,$$

или

$$I(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (f(x_0 + u) + f(x_0 - u)) \frac{\sin \nu u}{u} du. \quad (22.10)$$

Правая часть напоминает интеграл Дирихле для частичной суммы ряда Фурье.

### 3. Представление функции интегралом Фурье

**Теорема 22.1.** Пусть функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей числовой оси и является кусочно-гладкой в любом конечном промежутке. Тогда ее интеграл Фурье сходится при всех  $x$ . Если  $x_0$  – точка непрерывности функции  $f(x)$ , то интеграл Фурье в этой точке равен  $f(x_0)$ . Если же в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  имеет конечный скачок, то ее интеграл Фурье в этой точке равен  $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ .

■ Как и в случае ряда Фурье, достаточно доказать лишь последнее утверждение. При этом мы используем ранее полученную формулу (17.23)

(интеграл Эйлера-Дирихле), в силу которой при всех  $\nu > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \nu x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

а значит

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \nu x}{x} dx = \frac{1}{2}. \quad (22.11)$$

На основании формулы (22.10), учитывая соотношение (22.11), получаем

$$\begin{aligned} I(\nu) - \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f(x_0 + u) + f(x_0 - u)) \frac{\sin \nu u}{u} du - (f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)) \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \nu u}{u} du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u} \sin \nu u du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{u} \sin \nu u du. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u} = f'(x_0 + 0),$$

то первый множитель в первом интеграле справа непрерывен или кусочно-непрерывен в промежутке  $[0, +\infty)$ , а значит, на основании (22.3), удовлетворяется условие теоремы Римана-Лебега. Следовательно,

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u} \sin \nu u du = 0$$

и точно так же

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{u} \sin \nu u du = 0.$$

В результате получим

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} I(\nu) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2},$$

т.е.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x_0 - t) dt \right) d\omega = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2},$$

что и доказывает теорему.  $\square$

Заметим еще раз, что если в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  непрерывна, то последняя формула дает

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x_0 - t) dt \right) d\omega.$$

Заменяя здесь фиксированное  $x_0$  на “текущее”  $x$ , приходим к формуле (22.9).

#### 4. Аналогия между интегралом Фурье и рядами Фурье

Здесь и ниже мы будем для простоты записей считать, что функция  $f(x)$  не только удовлетворяет условиям теоремы 22.1, но и непрерывна при всех  $x$ . Тогда для нее имеет место формула (22.9), которую перепишем теперь так

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) \cos \omega x \cos \omega t + f(t) \sin \omega x \sin \omega t) dt \right) d\omega,$$

т.е.

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left( \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \right) \cos \omega x + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \right) \sin \omega x \right) d\omega,$$

или окончательно

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x) d\omega, \quad (22.12)$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (22.13)$$

Итак, если функция  $f(x)$  с периодом  $2l$  при определенных условиях может быть представлена суммой ряда Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(t) \cos \omega_n t dt, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(t) \sin \omega_n t dt,$$

то непрерывная функция  $f(x)$ , абсолютно интегрируемая на всей числовой оси, при аналогичных предположениях может быть представлена интегралом Фурье (22.12).

Тем самым формулы (22.12), и (22.13) иллюстрируют аналогию между интегралом Фурье и рядом Фурье. В частности, если  $f(x)$  – четная

функция, то  $b(\omega) = 0$ , и

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega x d\omega,$$

где

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt.$$

Если же функция  $f(x)$  – нечетная, то  $a(\omega) \equiv 0$ , и

$$f(x) = \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega x d\omega,$$

где

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

## 5. Комплексная форма интеграла Фурье

Из выражения (22.7) легко усматривается, что функция  $\Phi(\omega)$  четная. Поэтому формулу (22.8) можно переписать так

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) d\omega. \quad (22.14)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega(x-t) dt.$$

Она имеет смысл, поскольку стоящий справа интеграл, в силу (22.3), сходится абсолютно при всех  $t$ . Далее, функция  $\Psi(\omega)$ , очевидно, нечетная, и значит при любом  $v$ .

$$\int_{-v}^v \Psi(\omega) d\omega = 0.$$

Отсюда в пределе при  $v \rightarrow +\infty$  получим, что и

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\omega) d\omega = 0. \quad (22.15)$$

При этом сам интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega) d\omega$  может и не сходиться вообще.

Однако мы для простоты записи будем ниже, вместо

v.p.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\omega) d\omega$ , писать просто  $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega) d\omega$ .

Тогда равенство (22.15) запишется так

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\omega) d\omega = 0.$$

Благодаря этому формуле (22.14) можно придать вид

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) d\omega + i \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\omega) d\omega \right),$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos \omega(x-t) + i \sin \omega(x-t)) dt \right) d\omega,$$

т.е.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt \right) d\omega$$

или

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega.$$

Обозначим

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (22.16)$$

Тогда

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (22.17)$$

Правая часть и представляет собой комплексную форму интеграла Фурье. Напомним еще раз, что интеграл в последней формуле понимается лишь в смысле его главного значения.

Формулы (22.17) и (22.16) аналогичны соответствующим формулам

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n x},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

для случая комплексного ряда Фурье.

**Пример 22.1.** Представим комплексным интегралом Фурье функцию  $f(x) = e^{-|x|}$ .

Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 2 < +\infty$$

т.е. для данной функции выполняется условие (22.3), а значит ее представление интегралом Фурье возможно. Получим

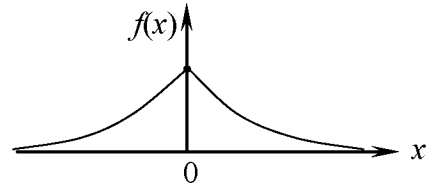


Рис. 22.1

$$\begin{aligned} c(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^0 e^{(1-i\omega)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\omega)t} dt \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-(1+i\omega)t}}{1+i\omega} \Big|_0^{+\infty} \right) \end{aligned}$$

Поскольку

$$e^{(1-i\omega)t} = e^t (\cos \omega t - i \sin \omega t), \quad e^{-(1+i\omega)t} = e^{-t} (\cos \omega t - i \sin \omega t),$$

то соответственно, при  $t \rightarrow -\infty$  и при  $t \rightarrow +\infty$ , первые множители стремятся к нулю, а вторые – ограничены. Поэтому

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} \right) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)},$$

а значит

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{1+\omega^2} d\omega. \quad (22.18)$$

Физический (спектральный) смысл этого равенства будет раскрыт в следующем разделе. Ниже, в теории функций комплексной переменной, будет решена задача, обратная только что решенной, т.е., грубо говоря, по правой части равенства (22.18) будет воспроизведена его левая часть.

## 6. Преобразование Фурье и его простейшие свойства

В предыдущем параграфе вместо формулы (22.16) мы могли положить

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (22.19)$$

Тогда вместо (22.17) получили бы

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (22.20)$$

Очевидно, что пары формул (22.16), (22.17) и (22.19), (22.20)

совершенно равносильны. В дальнейшем мы будем пользоваться второй парой этих формул, а формулы (22.16) и (22.17) нам понадобятся лишь из-за их аналогии с формулами для комплексного ряда Фурье.

Функцию  $F(i\omega)$ , определяемую формулой (22.19), называют преобразованием Фурье функции  $f(x)$ . Тем самым формула (22.19) выражает преобразование Фурье через исходную функцию  $f(x)$ . Обратная формула (22.20) выражает функцию через ее преобразование Фурье. Поэтому формулу (22.20) называют формулой обратного преобразования Фурье. Следует обратить внимание на то, что формулы прямого и обратного преобразований Фурье сходны по своему виду. Это сходство можно было бы еще более усилить, заменяя формулу (22.19) формулой

$$F(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

откуда вместо (22.20) следовало бы

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) e^{i\omega x} dx.$$

Однако мы, как уже говорилось, будем пользоваться именно формулами (22.19) и (22.20).

Отметим следующие свойства преобразования Фурье:

1.  $F(-i\omega) = \overline{F(i\omega)}$ .

■ Действительно

$$F(-i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt} = \overline{F(i\omega)}. \square$$

2. Вещественная функция  $|F(i\omega)|$  является четной

■ Действительно, в силу свойства 1

$$|F(-i\omega)| = |\overline{F(i\omega)}| = |F(i\omega)|. \square$$

3. Функция  $F(i\omega)$  либо комплекснозначная, либо вещественная и четная.

■ Действительно, из (22.19) имеем

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Если  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \neq 0$  то  $F(i\omega)$  – комплекснозначная функция. Если

же  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \equiv 0$ , то

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt.$$

При замене  $\omega$  на  $-\omega$  последнее выражение не изменится, а значит функция  $F(i\omega)$  в этом случае не только вещественная, но и четная.  $\square$

4. Если функция  $f(x)$  – четная, то и функция  $F(i\omega)$  – вещественная, а значит и четная.

■ Действительно, если функция  $f(x)$  – четная, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = 0,$$

После чего остается повторить вторую часть доказательства свойства 3.  $\square$

5. Функция  $F(i\omega)$  равномерно ограничена на всей числовой оси.

■ Действительно, в силу (3.3) имеем

$$|F(i\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-i\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = A < +\infty. \square$$

6. Для любой функции  $f(x)$  будет  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(i\omega) = 0$ .

Это сразу следует из (22.21) и из теоремы Римана–Лебега. Свойства 4–6 хорошо иллюстрируются на примере функции  $f(x) = e^{-|x|}$ . Действительно, для нее мы имеем

$$c(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}, \text{ а значит}$$

$$F(i\omega) = 2\pi \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

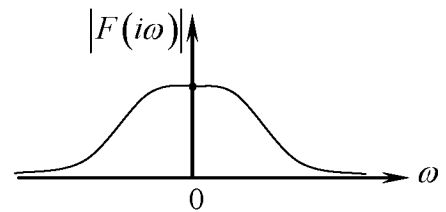


Рис. 22.2



# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ К ОБЩЕМУ КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

## XXIII. Элементы спектральной теории сигналов

### 1. Спектральные характеристики периодических сигналов

Сигналом будем называть любую функцию  $f(t)$ , где  $t$  – время. При этом будем предполагать, что функция  $f(t)$  удовлетворяет условиям представимости рядом или интегралом Фурье.

Пусть сигнал  $f(t)$  имеет период  $T = 2l$ . Тогда, полагая, как и прежде

$\frac{n\pi}{l} = \omega_n$ , получим

$$f(t) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t). \quad (23.1)$$

Но

$$a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left( \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos \omega_n t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin \omega_n t \right).$$

Обозначим

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \sin \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \cos \varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad *)$$

(из двух последних равенств следует, что  $\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$ ). Тогда

$$a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t = A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n).$$

Это – простое гармоническое колебание с амплитудой  $A_n$ , частотой  $\omega_n$  и начальной фазой  $\varphi_n$ . Поэтому выражение вида  $a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t$  называют *гармоникой*.

Положив дополнительно  $\frac{a_0}{2} = A_0$  придадим равенству (23.1) вид

---

\*) Эти обозначения допустимы, так как, во-первых,  $\left| \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right| \leq 1$ ,  $\left| \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right| \leq 1$ , а во-вторых

$$\left( \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right)^2 + \left( \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right)^2 = 1.$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n). \quad (23.2)$$

Это значит, что любой (в указанном выше смысле) периодический сигнал можно представить в виде суммы бесконечного числа простых гармонических колебаний, частоты которых кратны т.н. основной частоте  $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$ . Очевидно, что

$$T = 2l = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , то и  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ . Это значит, что амплитуды высокочастотных гармоник весьма малы, и ими практически можно пренебречь. Следовательно, периодический сигнал с любой степенью точности может быть представлен в виде суммы некоторого конечного числа гармоник.

Совокупность чисел  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ , называют *спектром* частот данного периодического сигнала. Поскольку переменная  $\omega$  является здесь дискретной, то говорят, что периодический сигнал имеет дискретный, или линейчатый спектр. При этом, поскольку  $\omega_n - \omega_{n-1} = \frac{\pi}{l}, (n=1, 2, 3, \dots)$ , то спектр периодического сигнала тем “гуще”, чем больше  $l$ , т.е. чем больше период сигнала.

Зависимость амплитуд гармоник от их частот называют *амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)* данного сигнала. Аналогично зависимость начальных фаз от частот называют *фазочастотной характеристикой сигнала (ФЧХ)*. Очевидно, каждая из этих характеристик дает лишь частичное представление о сигнале. Совокупность же обеих характеристик, благодаря выражению (23.2), полностью описывает этот сигнал.

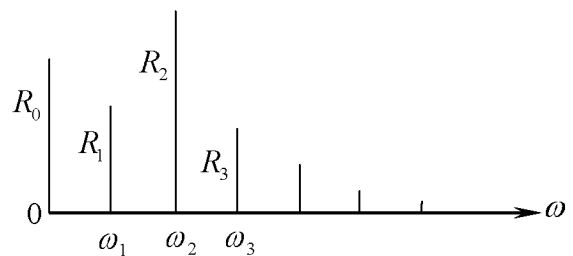


Рис. 23.1

## 2. О комплексном спектре периодического сигнала

Величину вида  $ce^{i\omega t}$  называют комплексной гармоникой. Мы видим, что

$$a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t = c_n e^{i\omega_n t} + c_{-n} e^{-i\omega_n t},$$

где  $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ . Следовательно, вещественная гармоника с частотой  $\omega_n$  и амплитудой  $A_n$  может быть представлена в виде суммы двух комплексных гармоник с частотами  $\omega_n$  и  $-\omega_n$  и амплитудами  $|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2}A_n$ . Отрицательные частоты, разумеется, не имеют физического смысла, но являются удобной математической абстракцией.

Комплексное число  $c_n$  называют иногда комплексной амплитудой гармоники  $c_n e^{i\omega_n t}$ . Пусть  $f(t)$  – периодический сигнал. Тогда его можно представить в виде

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}. \quad (23.3)$$

Совокупность чисел  $\omega_n (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$  называют *комплексным спектром* частот сигнала (23.3), а совокупность чисел  $c_n$  называют *амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ)* этого сигнала. Очевидно, что АФХ несет в себе всю информацию о сигнале, поскольку, имея величины  $\{c_n\}$  и  $\{\omega_n\}$ , мы можем, на основании формулы (23.3) построить полностью сигнал.

**Примечание.** Поскольку  $c_n = |c_n|(\cos(\arg c_n) + i \sin(\arg c_n))$ , то совокупность чисел  $\{c_n\}$  содержит в себе как совокупность чисел  $|c_n|$ , так и совокупность чисел  $\{\arg c_n\}$ , которые называют соответственно АХЧ и ФЧХ сигнала. Легко видеть, что эти определения не противоречат ранее данным определениям для сигнала (23.1).

### 3. Спектр непереродического сигнала

Пусть  $f(t)$  – непериодический сигнал. Представим его интегралом Фурье

$$f(t) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t) d\omega. \quad (23.4)$$

Поскольку это равенство получается из (23.1) при  $l \rightarrow +\infty$ , т.е. при  $\Delta\omega_n \rightarrow 0, (n = 1, 2, 3, \dots)$ , то в пределе спектр непериодического сигнала оказывается уже не дискретным, а непрерывным (или сплошным). Поэтому, в отличие от формулы (23.1), для периодического сигнала, мы имеем теперь в (23.4) не суммирование по отдельным частотам, а интегрирование по всем частотам, непрерывно меняющимся от нуля до бесконечности.

Перепишем формулу (23.4) так:

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega,$$

где

$$A(\omega) = \sqrt{(a(\omega))^2 + (b(\omega))^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{a(\omega)}{b(\omega)}. \quad (23.5)$$

Следовательно, формула (23.4) представляет непериодический сигнал  $f(t)$  как результат слияния бесконечного множества гармонических колебаний с бесконечно малыми амплитудами  $A(\omega)d\omega$  и с бесконечно близкими частотами.

В дальнейшем будем представлять непериодический сигнал в виде комплексного интеграла Фурье.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (23.6)$$

Величина  $\frac{1}{2\pi} F(i\omega) d\omega$ , очевидно, играет здесь роль комплексной амплитуды, отвечающей частоте  $\omega$ .

Для выяснения физического смысла функции  $F(i\omega)$  возьмем на оси частот малый отрезок  $[\omega_0, \omega_0 + \Delta\omega]$ . Его “вклад” в значение функции  $f(t)$  в данный момент  $t$  равен

$$\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Delta\omega} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

или, в силу теоремы о среднем,

$$\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi} F(iv) e^{ivt} \Delta\omega,$$

где  $v \in [\omega_0, \omega_0 + \Delta\omega]$ . Поскольку  $\Delta\omega$  предполагается малым, то  $v \approx \omega_0$ , а значит

$$\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi} F(i\omega_0) e^{i\omega_0 t} \Delta\omega.$$

Таким образом, вклад отрезка  $[\omega_0, \omega_0 + \Delta\omega]$  в общее значение  $f(t)$  прямо пропорционален значению  $F(i\omega)$  на этом отрезке. Это аналогично тому, как вклад малого участка стержня в общую массу стержня пропорционален плотности этого участка. Поэтому функцию  $F(i\omega)$  называют *спектральной плотностью* (или просто спектром) данного непериодического сигнала.

Функция  $F(i\omega)$ , как отмечалось ранее, является, вообще говоря,

комплекснозначной. Вещественные функции  $|F(i\omega)|$  и  $\arg F(i\omega)$  называют соответственно АХЧ и ФЧХ сигнала (ср. с формулами (23.5)). Первая из этих функций, очевидно, характеризует распределение интенсивности сигнала по частотам. Из свойств преобразования Фурье следует, что функция  $|F(i\omega)|$  является четной, равномерно ограниченной на всей оси частот и стремящейся к нулю при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Обратимся еще раз к паре формул

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

и (23.6). Первая из них, описывая распределение спектральной плотности по частотам, осуществляет спектральный анализ сигнала  $f(t)$ . Вторая же формула, наоборот, показывает, как сигнал  $f(t)$  складывается (“синтезируется”) из отдельных своих гармоник. Таким образом, с физической точки зрения формулы прямого и обратного преобразований Фурье решают две противоположные задачи: спектрального анализа и синтеза сигналов.

**Пример 23.1.** Возьмем т.н. прямоугольный импульс

$$f(x) = \begin{cases} h, & t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right], \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

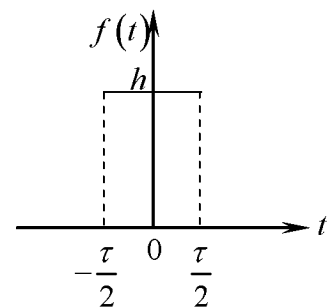


Рис. 23.2

Имеем для него

$$\begin{aligned} F(i\omega) &= h \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{h}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{h}{\omega} \frac{e^{i\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-i\frac{\omega\tau}{2}}}{i} = \frac{2h}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2}, \end{aligned}$$

а значит

$$|F(i\omega)| = 2h \frac{\left| \sin \frac{\omega\tau}{2} \right|}{|\omega|}.$$

**Пример 23.2.** Возьмем т.н. колокольный импульс

$$f(t) = e^{-\beta^2 t^2},$$

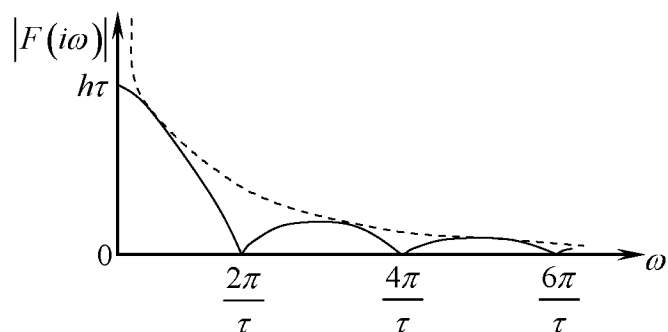
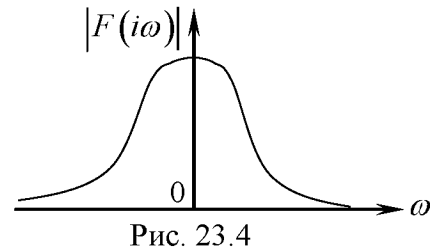


Рис. 23.3

где  $\beta = const$ . Имеем

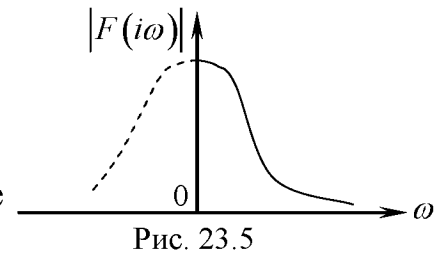
$$\begin{aligned}
 F(i\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2 t^2} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta^2 t^2 + i\omega t)} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\left(\beta t + \frac{i\omega}{2\beta}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4\beta^2}\right)} dt = e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\beta t + \frac{i\omega}{2\beta}\right)^2} dt = \\
 &= \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}
 \end{aligned}$$



Поскольку здесь величина  $F(i\omega)$  не только вещественна, но и положительна, то и

$$|F(i\omega)| = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}.$$

Итак, АЧХ колокольного импульса также имеет 'колокольную' форму.



#### 4. Теорема Рэлея и ее физический смысл

Напомним (ср. с формулой (22.48)), что для сигнала с периодом  $2l$ , представленного комплексным рядом Фурье, имеет место формула Ляпунова-Парсеваля

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l (f(t))^2 dt.$$

На основании аналогии между комплексным рядом Фурье и интегралом Фурье можно предположить, что для непериодического сигнала (17.17) должна иметь место аналогичная формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |c(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt,$$

а так как  $c(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(i\omega)$ , то ее можно переписать следующим образом

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt,$$

т.е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt. \quad (23.7)$$

Докажем, что эта формула действительно имеет место. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega)e^{i\omega t} d\omega \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)F(i\omega)e^{i\omega t} d\omega \right) dt \end{aligned}$$

В последнем интеграле обе пары пределов бесконечны. Поэтому к данному интегралу следует применить теорему об изменении порядка интегрирования.

Учитывая условие (22.3), нетрудно убедиться в выполнении всех требований этой теоремы, в результате чего будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)F(i\omega)e^{i\omega t} dt \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega)\overline{F(i\omega)}d\omega, \end{aligned}$$

откуда и следует (23.7).

Формула (23.7), являющаяся непрерывным аналогом формулы Ляпунова-Парсеваля, выражает факт, называемый теоремой Рэлея.

**Пример 23.3.** Проиллюстрируем теорему Рэлея на примере сигнала  $f(t) = e^{-|t|}$ . В данном случае  $F(i\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$ , а значит

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4d\omega}{(1 + \omega^2)^2} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(1 + \omega^2)^2} = \left| \omega = \operatorname{tg} u \right| = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^4 u} \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u) du = \frac{2}{\pi} \left( u + \frac{1}{2} \sin 2u \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = e^{-2t} \Big|_{\infty}^0 = 1,$$

т.е. оба интеграла действительно равны между собой.

**Примечание.** Во многих случаях функция  $|F(i\omega)|^2$  не интегрируется в конечном виде, а интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt$  может быть вычислен. Тогда, на

основании (23.7), может быть вычислен и интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega$ . Таким

образом, теорему Рэлея можно использовать для вычисления некоторых несобственных интегралов (подобно тому, как при помощи формулы Ляпунова-Парсеваля можно находить суммы некоторых числовых рядов).

Установим физический смысл теоремы Рэлея. Для этого предположим, что по проводнику с сопротивлением  $R=1$  течет ток  $I(t)$ . Тогда величина  $(I(t))^2$  численно равна мощности этого тока, а значит  $(I(t))^2 \Delta t$  есть энергия, выделяемая током за время  $[t, t + \Delta t]$ . Энергия, выделяемая током за все время от  $t = -\infty$  до  $t = +\infty$  равна  $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt$ .

Аналогично для любого сигнала  $f(t)$ , независимо от его физической природы, величину  $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt$  называют энергией этого сигнала. На основании формулы (23.7), и интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega$  прямо пропорционален энергии сигнала.

Далее, имеем

$$\int_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} |F(i\omega)|^2 d\omega \approx |F(i\omega)|^2 \Delta\omega.$$

Отсюда следует, что функция  $|F(i\omega)|^2$  характеризует плотность распределения энергии в спектре сигнала по частотам.

Итак, теорема Рэлея выражает тот физический факт, что полная энергия сигнала может быть вычислена либо путем суммирования по всему времени действия сигнала, либо путем суммирования по всем частотам спектра этого сигнала.

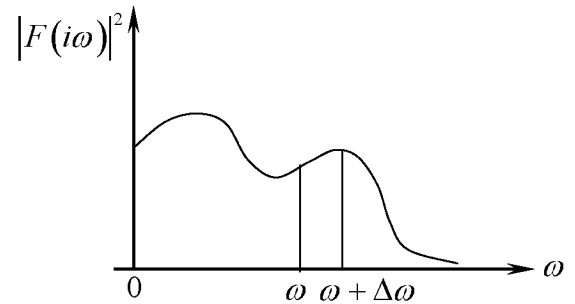


Рис. 23.6



## XXIV. Системы линейных дифференциальных уравнений

Теория систем дифференциальных линейных уравнений составляет важную часть курса дифференциальных уравнений. В этом разделе органически сплетены все ранее прочитанные математические дисциплины и, соответственно, все «столбовые» понятия современной инженерной математики: производные, интегралы, ряды, преобразования Фурье – (математический анализ); векторы, матрицы, линейные операторы – (линейная алгебра); вычеты, операционное исчисление, векторно-матричный анализ, функции от матриц, теория функций комплексного переменного (ТФКП); теория линейных дифференциальных уравнений – (общая часть курса теории дифференциальных уравнений). В связи с этим содержание этого раздела представляет собой «узловую» часть всего математического образования студента по основным специальностям и в частности по «Прикладная математика».

Поскольку ниже теория линейных систем дифференциальных уравнений излагается в векторно-матричном виде и существенно использует понятия норм векторов и матриц, а также функций от матриц, то материал этого раздела существенно опирается на раздел «Векторный и матричный анализ». В связи с этим перед основной частью представлено краткое напоминание главных положений теории вектор-функций, матриц-функций и функций от матриц. Если читатель не был ранее знаком с этим разделом курса высшей математики, то вводная часть является необходимой для дальнейшего понимания этого раздела.

### 1. Основные сведения из векторно-матричного анализа

Нормой вектора  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$ -мерного пространства  $K$  над полем  $R$  называется число  $\|\vec{x}\|$ , обладающее следующими свойствами:

1.  $\|\vec{x}\| \geq 0$ ,  $\forall \vec{x} \in K$ , причем  $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
2.  $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$ ,  $\forall \vec{x} \in K$ ,  $\forall \alpha \in R$
3.  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ ,  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in K$

В частности, используются нормы:

$$\|\vec{x}\|_1 = \max_i |x_i|; \quad \|\vec{x}\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i|; \quad \|\vec{x}\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Аналогично, для квадратных матриц  $A = (a_{ik})_{i,k=1}^n$ , в общем случае с комплексными элементами, вводится норма  $\|A\|$ , удовлетворяющая тем же условиям 1-3, и, в частности, нормы

$$\|A\|_1 = \max_{i,k} |a_{ik}|; \quad \|A\|_2 = \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|; \quad \|A\|_3 = \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2}$$

Норма матрицы называется *кольцевой*, если для любых матриц  $A$  и  $B$  будет

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

В частности кольцевыми оказываются нормы  $\|A\|_2$  и  $\|A\|_3$ , а также норма

$$\|A\|_4 = n \cdot \|A\|_1 = n \cdot \max_{i,k} |a_{ik}|.$$

Норма  $\|A\|$  матрицы называется *согласованной с нормой*  $\|\vec{x}\|$  вектора, если для любых  $\vec{x} \in K$  и  $A$  будет

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{x}\|.$$

Например, норма  $\|A\|_4$  согласована с нормами  $\|\vec{x}\|_1, \|\vec{x}\|_2, \|\vec{x}\|_3$ . Кроме того, норма  $\|A\|_3$  согласована с нормой  $\|\vec{x}\|_3$ .

Пусть имеется последовательность векторов  $\{\vec{x}_m\}$ , где

$$\vec{x}_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}).$$

Вектор  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *пределом последовательности*  $\{\vec{x}_m\}$

$$\vec{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_m,$$

если  $\vec{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_m, \forall i = \overline{1, n}$ .

Вектор-функция определяется так:

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad (24.1)$$

где  $x_i(t), i = \overline{1, n}$  – скалярные функции.

Аналогично определяется *матрица-функция*:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nm}(t) \end{pmatrix}. \quad (24.2)$$

Для их норм имеет место свойство непрерывности:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{x}(t)\| = \|\vec{x}(t_0)\|; \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \|A(t)\| = \|A(t_0)\|.$$

Производная и интеграл вектор-функции (24.1) и матрицы-функции (24.2) определяются по координатам (поэлементно), т.е.

$$\vec{x}'(t) = \left( x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t) \right); \int_{\alpha}^{\beta} \vec{x}(t) dt = \left( \int_{\alpha}^{\beta} x_1(t) dt, \dots, \int_{\alpha}^{\beta} x_n(t) dt \right);$$

$$A'(t) = (a'_{ik}(t))_{i,k=1}^n; \int_{\alpha}^{\beta} A(t) dt = \left( \int_{\alpha}^{\beta} a_{ik}(t) dt \right)_{i,k=1}^n.$$

Для любой нормы вектор-функции (24.1) и матрицы-функции (24.2) легко получаются оценки:

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} \vec{x}(t) dt \right\| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|\vec{x}(t)\| dt; \left\| \int_{\alpha}^{\beta} A(t) dt \right\| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|A(t)\| dt, \beta > \alpha \quad (24.3)$$

Сходимость ряда из векторов

$$\sum_{m=1}^{\infty} \vec{x}_m \quad (24.4)$$

определяется как существование предела  $\vec{s} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \vec{x}_k$ .

Точно так же определяются ряд из матриц

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \quad (24.5)$$

и его сходимость.

Ряды (24.4) и (24.5) называются *абсолютно сходящимися*, если сходятся числовые ряды  $\sum_{m=1}^{\infty} \|\vec{x}_m\|$  и  $\sum_{m=1}^{\infty} \|A_m\|$ .

Норма вектора  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *правильной*, если  $|x_i| \leq \|\vec{x}\|$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$ . В частности нормы  $\|\vec{x}\|_1, \|\vec{x}\|_2, \|\vec{x}\|_3$  являются правильными.

Точно также определяется правильная норма матрицы  $A = (a_{ik})_{i,k=1}^n$

$$\|a_{ik}\| \leq \|A\|, \forall i, k = \overline{1, n}.$$

В частности, правильными являются нормы  $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_3, \|A\|_4$ .

Если норма вектора – правильная, то из абсолютной сходимости ряда (24.4) следует его обычная сходимость. То же относится и к матричному ряду (24.5).

Пусть  $f(z)$  – функция, аналитическая в круге  $|z| < r$ . Тогда ее ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

абсолютно сходится в круге  $|z| < r$ . В этом случае для любой матрицы  $A$  по определению

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} A^k, \quad (24.6)$$

причем этот матричный степенной ряд сходится абсолютно при условии  $\|A\| < r$ , где  $\|A\|$  – произвольная правильная кольцевая норма.

В частности,

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots, \quad (24.7)$$

$$\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \dots, \quad \cos A = E - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \dots,$$

причем все три ряда сходятся при любой матрице  $A$ .

Из формулы (24.7) легко следует, что  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ , т.е. что матрица  $e^A$  неособенна при любой матрице  $A$ .

Для произвольной квадратной матрицы  $A$  резольвента определяется формулой

$$R_A(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}.$$

Отсюда, в частности, следует, что точки спектра матрицы  $A$  являются полюсами матрицы  $R_A(\lambda)$ .

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  – все различные собственные значения матрицы  $A$ . Тогда на основании определения (24.6) можно получить другую равносильную ему формулу:

$$f(A) = -\sum_{\lambda_k} \text{Res}[f(\lambda)R_A(\lambda)], \quad (24.8)$$

которая в отличие от формулы (24.6), удобна для вычисления  $f(A)$  в каждом конкретном случае.

Из равенства (24.8), в частности, легко получается существенное для дальнейшего утверждение (тождество Гамильтона-Кели): если  $D(\lambda)$  – характеристический многочлен матрицы  $A$ , то  $D(A) = 0$ .

Рассмотрим теперь важный случай, когда  $A$  – матрица простой структуры. В этом случае существует неособенная матрица  $P$ , такая, что

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – весь спектр матрицы  $A$ . В этом случае получим более простую по сравнению с (24.8) формулу для вычисления  $f(A)$ :



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \varphi_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \varphi_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + \varphi_n(t) \end{cases} \quad (24.13)$$

Здесь  $a_{ik} = a_{ik}(t)$  – известные функции (коэффициенты системы), заданные на некотором отрезке  $[t_0, t]$ , а  $\varphi_i(t)$  – известные функции, играющие роль свободных членов. В дальнейшем будем считать все функции  $a_{ik}(t)$  и  $\varphi_i(t)$  непрерывными в промежутке  $[t_0, t]$ .

Если  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \dots = \varphi_n(t) = 0$ , т.е., если система (24.13) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}, \quad (24.14)$$

то ее называют *однородной линейной системой*.

Если же  $\varphi_i(t) \neq 0$  хотя бы для одного  $i$ , то система (24.13) называется неоднородной.

Введем вектор-функцию  $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , откуда сразу следует, что  $\frac{d\vec{x}}{dt} = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t))$ , а также матрицу-функцию

$$A(t) = (a_{ik}(t))_{i,k=1}^n,$$

и вектор-функцию  $\vec{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ .

Тогда

$$A\vec{x} + \vec{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \dots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \varphi_1(t) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \varphi_2(t) \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + \varphi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix},$$

т.е. системе (24.13) можно придать следующий векторно-матричный вид:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{\varphi}(t) \quad (24.15)$$

Соответственно однородная система (24.14) также получает компактную форму записи:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} \quad (24.16)$$

Отметим сразу, что однородная система (24.16) всегда имеет тривиальное нулевое решение  $\vec{x}(t) = 0$ .

Для получения конкретного частного решения системы (24.15) задаются начальные условия:

$$x_1|_{t=t_0} = x_1^{(0)}, x_2|_{t=t_0} = x_2^{(0)}, x_n|_{t=t_0} = x_n^{(0)},$$

Или, в векторной форме,

$$\vec{x}|_{t=t_0} = \vec{x}_0. \quad (24.17)$$

Ранее, в общей части курса, у нас была сформулирована и доказана теорема о существовании и единственности решения произвольной системы вида (24.12) или, в векторном виде,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x})$$

с начальным условием вида (24.17). На основании этой теоремы мы могли бы очень легко проверить выполнение условий для данного конкретного уравнения (24.16). Однако, рассматривая этот раздел как самостоятельную часть курса дифференциальных уравнений и учитывая, что существование и единственность решения уравнений (24.15) и (24.16) будет вскоре играть «конструктивную» роль, мы специально приведем доказательство теоремы о существовании и единственности решения уравнений (24.15) и (24.16).

### 3. Теорема Коши о существовании и единственности решения нормальной системы дифференциальных уравнений

**Теорема 24.1.** Пусть матрица  $A(t)$  непрерывна на отрезке  $[t_0, t]$ . Тогда однородное уравнение (24.16) имеет решение, удовлетворяющее начальному условию (24.17), и это решение единственно.

■ Доказательство этой теоремы разобьем на несколько этапов.

1. Заменяем дифференциальное уравнение (24.16) уравнением

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t A(s)\vec{x}(s) ds \quad (24.18)$$

Имеем из (24.18)

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A(t)\bar{x}(t), \quad (24.19)$$

т.е. вектор-функция (24.18) удовлетворяет дифференциальному уравнению (24.16). Далее, на основании (24.18) получим, что

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0,$$

т.е., и начальное условие (24.17) для вектор-функции (24.18) выполняется.

Обратно, пусть  $\bar{x}(t)$  удовлетворяет тождеству (24.19). Тогда, интегрируя его, будем иметь:

$$\bar{x}(t) - \bar{x}(t_0) = \int_{t_0}^t A(s)\bar{x}(s)ds$$

Отсюда, на основании начального условия (24.17), и получим тождество (24.18).

Таким образом, интегральное уравнение (24.18) равносильно дифференциальному уравнению (24.16) с начальным условием (24.17). В связи с этим ниже мы будем доказывать существование и единственность решения именно интегрального уравнения (24.18).

2. Строим последовательность вектор-функций:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0(t) &= \bar{x}_0, & \bar{x}_1 &= \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t A(s)\bar{x}_0 ds, \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t A(s)\bar{x}_1(s) ds, \dots \end{aligned}$$

и вообще для любого натурального  $m$

$$\bar{x}_m(t) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t A(s)\bar{x}_{m-1}(s)ds \quad (24.20)$$

3. Составим теперь ряд вектор-функций:

$$\sum_{m=0}^{\infty} [\bar{x}_m(t) - \bar{x}_{m-1}(t)], \quad (24.21)$$

т.е.

$$[\bar{x}_1(t) - \bar{x}_0(t)] + [\bar{x}_2(t) - \bar{x}_1(t)] + [\bar{x}_3(t) - \bar{x}_2(t)] + \dots + [\bar{x}_m(t) - \bar{x}_{m-1}(t)] + \dots$$

Оценим нормы членов этого ряда. Имеем на основании неравенства (24.3):

$$\|\bar{x}_1(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq \left\| \int_{t_0}^t A(s)\bar{x}_0 ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)\bar{x}_0\| ds$$

Будем считать, что норма матрицы согласована с нормой вектора (это будет, например, если  $\|A(t)\| = \|A(t)\|_4$ ,  $\|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t)\|_1$ ). Тогда получим



$$\|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_0(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|\vec{x}_0\| ds$$

На основании непрерывности матрицы  $A(t)$  все ее элементы ограничены, а значит ограничена и ее норма. Следовательно, существует число  $c = \max_{[t, t_0]} \|A(t)\|$ . Но тогда (здесь и далее для определенности принимаем, что  $t > t_0$ )

$$\|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_0(t)\| \leq c \|\vec{x}_0\| \int_{t_0}^t ds = c \|\vec{x}_0\| (t - t_0).$$

Аналогично, учитывая уже полученный результат, находим:

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\| &\leq \left\| \left[ \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t A(s) \vec{x}_1(s) ds \right] - \left[ \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t A(s) \vec{x}_0(s) ds \right] \right\| = \\ &= \left\| \int_{t_0}^t A(s) [\vec{x}_1(s) - \vec{x}_0(s)] ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|\vec{x}_1(s) - \vec{x}_0(s)\| ds \leq \\ &\leq c \int_{t_0}^t c \|\vec{x}_0\| (s - t_0) ds = c^2 \|\vec{x}_0\| \frac{(t - t_0)^2}{2!}. \end{aligned}$$

Точно так же

$$\|\vec{x}_3(t) - \vec{x}_2(t)\| \leq \left\| \int_{t_0}^t A(s) [\vec{x}_2(s) - \vec{x}_1(s)] ds \right\| \leq c^3 \|\vec{x}_0\| \frac{(t - t_0)^3}{3!},$$

И вообще при любом натуральном  $m$

$$\|\vec{x}_m(t) - \vec{x}_{m-1}(t)\| \leq c^m \|\vec{x}_0\| \frac{(t - t_0)^m}{m!}. \quad (24.22)$$

Таким образом, векторный ряд (24.21) на отрезке  $[t_0, t]$  мажорируется скалярным степенным рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty} c^m \|\vec{x}_0\| \frac{(t - t_0)^m}{m!} = \|\vec{x}_0\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[c(t - t_0)]^m}{m!}.$$

Этот степенной ряд, как известно, сходится равномерно на любом конечном отрезке; его сумма, очевидно, равна  $\|\vec{x}_0\| e^{c(t-t_0)}$ .

С другой стороны, частичная сумма ряда (24.21) есть  $[\vec{x}_1(t) - \vec{x}_0(t)] + [\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)] + [\vec{x}_3(t) - \vec{x}_2(t)] + \dots + [\vec{x}_m(t) - \vec{x}_{m-1}(t)],$

т.е.

$$\vec{s}_m(t) = \vec{x}_m(t).$$

Поэтому равномерная сходимость ряда (24.21) означает равномерную сходимость последовательности  $\{\vec{x}_m(t)\}$  к некоторой предельной вектор-функции  $\vec{x}(t)$ , т.е.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_m(t) = \vec{x}(t)$ . Благодаря этому в рекуррентной формуле (24.20) можно совершить предельный переход при  $m \rightarrow \infty$ , в результате чего получим

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t A(s) \vec{x}(s) ds,$$

а это совпадает с выражением (24.18). Таким образом, предельная функция  $\vec{x}(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_m(t)$  является решением уравнения (24.18), а значит, и решением дифференциального уравнения (24.16) при начальном условии (24.17).

4. Остается доказать единственность этого решения. Как обычно в подобных случаях, предположим существование другого решения  $\vec{y}(t)$ . Оно удовлетворяет тому же интегральному уравнению

$$\vec{y}(t) = \int_{t_0}^t A(s) \vec{y}(s) ds \quad (24.23)$$

Отсюда, на основании соотношения (24.20), получим

$$\|\vec{y}(t) - \vec{x}_m(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t A(s) [\vec{y}(s) - \vec{x}_{m-1}(s)] ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|\vec{y}(s) - \vec{x}_{m-1}(s)\| ds$$

Но

$$\|\vec{y}(t) - \vec{x}_0(t)\| \leq \|\vec{y}(t)\| + \|\vec{x}_0\|.$$

Вектор-функция  $\vec{y}(t)$ , удовлетворяющая уравнению (24.23), ограничена на отрезке  $[t_0, t]$ . Обозначая  $c_1 = \max_{[t_0, t]} \|\vec{y}(s)\|$ , получим

$$\|\vec{y}(t) - \vec{x}_0(t)\| \leq c_1 + \|\vec{x}_0\|.$$

Следовательно,

$$\|\vec{y}(t) - \vec{x}_1(t)\| \leq \int_{t_0}^t c(c_1 + \|\vec{x}_0\|) ds = c(c_1 + \|\vec{x}_0\|)(t - t_0).$$

Аналогично будем иметь

$$\|\vec{y}(t) - \vec{x}_2(t)\| \leq \int_{t_0}^t c \|A(s)\| c(c_1 + \|\vec{x}_0\|)(t - t_0) ds \leq c^2 (c_1 + \|\vec{x}_0\|) \frac{(t - t_0)^2}{2!},$$

и вообще, при любом натуральном  $m$

$$\|\bar{y}(t) - \bar{x}_m(t)\| \leq c^m (c_1 + \|\bar{x}_0\|) \frac{(t-t_0)^m}{m!}.$$

Отсюда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\bar{y}(t) - \bar{x}_m(t)\| = 0.$$

На основании непрерывности нормы, учитывая также, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{x}_m(t) = \bar{x}$ , получим

$$\|\bar{y}(t) - \bar{x}(t)\| = 0,$$

а это значит, что  $\bar{y}(t) = \bar{x}(t)$ , что и доказывает единственность решения.  $\square$

**Примечание.** Мы доказали существование и единственность решения для случая однородного линейного уравнения (24.16). Теперь совсем не трудно доказать то же самое и для неоднородного уравнения (24.15). При этом доказывать существование решения нет необходимости, поскольку для последнего мы получим в дальнейшем, например, формулу (24.59), а значит следует доказать лишь единственность решения. Так как уравнение (24.15) с начальным условием (24.17), очевидно, равносильно интегральному уравнению

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \bar{x}(s) A(s) ds + \int_{t_0}^t \bar{\varphi}(s) ds,$$

то, предположив существование двух различных решений  $\bar{x}(t)$  и  $\bar{y}(t)$ , мы получим

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \bar{x}(s) A(s) ds + \int_{t_0}^t \bar{\varphi}(s) ds \\ \bar{y}(t) &= \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \bar{y}(s) A(s) ds + \int_{t_0}^t \bar{\varphi}(s) ds \end{aligned}$$

а значит

$$\bar{x}(t) - \bar{y}(t) \equiv \int_{t_0}^t [\bar{x}(s) - \bar{y}(s)] A(s) ds.$$

На основании (24.18) отсюда следует, что  $\bar{x}(t) - \bar{y}(t)$  есть решение уравнения (24.16) при начальном условии  $\bar{x}|_{t=t_0} = \vec{0}$ , а так как этому же начальному условию отвечает и тривиальное решение, то получим, что

$$\bar{x}(t) - \bar{y}(t) \equiv \vec{0},$$

что и доказывает единственность решения.

Будем рассматривать только однородные уравнения (24.16), т.е. однородные линейные системы.

#### 4. Пространство решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка

**Теорема 24.2.** Если  $\vec{x}_1(t)$  и  $\vec{x}_2(t)$  – решения однородного уравнения (24.16), то  $\vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t)$  также есть решение этого уравнения.

■ Действительно, по условию

$$\frac{d\vec{x}_1(t)}{dt} \equiv A(t)\vec{x}_1(t), \quad \frac{d\vec{x}_2(t)}{dt} \equiv A(t)\vec{x}_2(t).$$

Складывая эти тождества, получим

$$\frac{d(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)}{dt} \equiv A(t)[\vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t)],$$

что и требовалось доказать. □

**Теорема 24.3.** Если  $\vec{x}(t)$  – решение уравнения (24.16), а  $\alpha = const$  – любое число, то и  $\alpha\vec{x}(t)$  есть решение этого уравнения.

■ Действительно, умножая тождество  $\frac{d\vec{x}}{dt} \equiv A(t)\vec{x}(t)$  на число  $\alpha$ , будем иметь

$$\frac{d(\alpha\vec{x}(t))}{dt} \equiv A(t)(\alpha\vec{x}(t)),$$

что и требовалось получить. □

**Следствие.** Любая линейная комбинация решений уравнения (24.16) является решением этого уравнения.

Это следствие означает, что множество всех решений уравнения (24.16) есть линейное векторное пространство.

Вектор-функции  $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_m(t)$ , заданные в интервале  $[\alpha, \beta]$ , называются *линейно независимыми*, если тождество

$$c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + \dots + c_m\vec{x}_m(t) \equiv \vec{0} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (24.24)$$

имеет место только тогда, когда  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ . Если же это тождество (24.24) возможно и тогда, когда среди чисел  $c_1, c_2, \dots, c_m$  не все равны нулю, то вектор-функции  $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_m(t)$  являются *линейно зависимыми*. В этом случае хотя бы одна из вектор-функций  $\vec{x}_i(t)$  есть линейная комбинация остальных.

**Теорема 24.4.** Если решения  $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_m(t)$  уравнения (24.16) линейно зависимы в некоторый момент  $t_0$ , то они вообще линейно зависимы при всех  $t$ .

■ По условию, постоянные векторы  $\vec{x}_1(t_0), \vec{x}_2(t_0), \dots, \vec{x}_m(t_0)$  линейно зависимы. Это значит, что выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^n c_k \bar{x}_k(t_0) = \bar{0}, \quad (24.25)$$

где среди чисел  $c_1, c_2, \dots, c_m$  не все равны нулю.

Составим вектор-функцию

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \bar{x}_k(t) \quad (24.26)$$

Она является решением уравнения (24.16) как линейная комбинация его решений. Далее, на основании равенства (24.25),

$$\bar{x}(t_0) = \bar{0}.$$

Таким образом, решение (24.26) уравнения (24.16) удовлетворяет начальному условию  $\bar{x}|_{t=t_0}$ . Но этому же начальному условию удовлетворяет и

тривиальное решение  $\bar{x}^*(t) \equiv \bar{0}$ . На основании единственности решения (теорема 24.3) оба решения совпадают  $\bar{x}(t) \equiv \bar{x}^*(t)$ , т.е.

$$\sum_{k=1}^m c_k \bar{x}_k(t) \equiv \bar{0}.$$

В этом тождестве не все числа  $c_1, c_2, \dots, c_m$  равны нулю, а это значит, что вектор-функции  $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_m(t)$  линейно зависимы при всех  $t$ .  $\square$

**Следствие.** Если решения  $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_n(t)$  линейно независимы в некоторый момент  $t_0$ , то они линейно независимы при всех  $t$ .

■ Действительно, если бы эти решения при некотором  $t = t_1$  были линейно зависимы, то, по только что доказанному, они были бы линейно зависимы при всех  $t$ , в том числе и при  $t = t_0$ . Полученное противоречие и доказывает утверждение.  $\square$

**Теорема 24.5.** Пусть  $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_n(t)$  – линейно независимые решения уравнения (24.16). Тогда любое его решение представимо в виде линейной комбинации этих решений.

Пусть  $\bar{x}(t)$  – произвольное решение уравнения (24.16). Оно удовлетворяет некоторому начальному условию  $\bar{x}|_{t=t_0}$ . Обозначим:

$$\bar{x}_1(t_0) = \bar{g}_1, \bar{x}_2(t_0) = \bar{g}_2, \dots, \bar{x}_n(t_0) = \bar{g}_n. \quad (24.27)$$

Векторы  $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n$  – линейно независимы, поскольку вектор-функции  $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_n(t)$  линейно независимы при всех  $t$ , а значит, и при  $t = t_0$ . Следовательно, векторы  $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n$  образуют базис в пространстве  $T_n$ .

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  – координаты вектора  $\bar{x}_0$  в этом базисе, т.е. пусть

$$\bar{x}_0 = \xi_1 \bar{g}_1 + \xi_2 \bar{g}_2 + \dots + \xi_n \bar{g}_n.$$

Составим теперь вектор-функцию

$$\vec{x}^*(t) = \xi_1 \vec{x}_1(t) + \xi_2 \vec{x}_2(t) + \dots + \xi_n \vec{x}_n(t).$$

Будучи линейной комбинацией решений  $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ , она также является его решением. При этом, в силу обозначений (24.27),

$$\vec{x}^*(t_0) = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \dots + \xi_n \vec{g}_n,$$

т.е.,  $\vec{x}^*(t_0) = \vec{x}_0$ . Таким образом, решение  $\vec{x}^*(t)$  удовлетворяет начальному условию  $\vec{x}|_{t=t_0} = \vec{x}_0$ . Но этому же начальному условию удовлетворяет и исходное решение  $\vec{x}(t)$ . В силу единственности решения получим:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}^*(t),$$

т.е.

$$\vec{x}(t) = \xi_1 \vec{x}_1(t) + \xi_2 \vec{x}_2(t) + \dots + \xi_n \vec{x}_n(t),$$

а значит, любое решение  $\vec{x}(t)$  действительно является линейной комбинацией линейно независимых его решений  $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ , т.е., любые  $n$  линейно независимых решений уравнений (24.16) образуют базис в пространстве его решений. Иными словами, пространство решений нормальной линейной системы (24.14) уравнений первого порядка является  $n$ -мерным.

Итак, доказано, что любая система линейно независимых решений системы (24.14) образует базис в пространстве его решений. Такой набор решений системы (24.14), или, что то же самое, уравнения (24.16), называется фундаментальной системой решений (ФСР) этого уравнения.

## 5. Фундаментальная матрица и ее свойства

Пусть  $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  – фундаментальная система решений уравнения (24.16) (необязательно линейно независимые). Обозначим  $x_{ik}(t)$  –  $i$ -я координата вектора  $\vec{x}_k(t)$ . Составим матрицу-функцию

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (24.28)$$

Такую матрицу, столбцы которой образованы координатами решений  $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  уравнения (24.16), называют матрицей решений этого уравнения. Если же эти  $n$  решений линейно независимы, т.е. если они образуют фундаментальную систему решений, то и матрицу (24.28) называют фундаментальной матрицей этого уравнения.

Рассмотрим матрицу  $\frac{dX}{dt}$ . Ее элементами являются функции  $\frac{dx_{ik}}{dt}$ . Но функция  $x_{ik}(t)$  удовлетворяет  $i$ -му уравнению системы (24.14), а значит

$$\frac{dx_{ik}}{dt} \equiv a_{i1}(t)x_{1k} + a_{i2}(t)x_{2k} + \dots + a_{in}(t)x_{nk}. \quad (24.29)$$

С другой стороны, правая часть этого тождества есть  $k$ -й элемент  $i$ -й строки матрицы  $A(t)X(t)$ . Поскольку тождество (24.29) выполняется при всех  $i, k = \overline{1, n}$ , то из (24.29) следует, что

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X(t). \quad (24.30)$$

Рассуждая в обратном порядке, получим, что тождество (24.30) равносильно тождеству (24.29) при всех  $i, k = \overline{1, n}$ , а это значит, что столбцы матрицы (24.28) есть решения уравнения (24.16).

Далее, если решения  $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  линейно независимы, то линейно независимы столбцы матрицы (24.28), так что  $\text{Det } X(t) \neq 0, \forall t$ , и, наоборот, если матрица  $X(t)$  неособенна при всех  $t$ , то ее столбцы образуют фундаментальную систему решений. Это позволяет считать доказанным следующее утверждение.

**Теорема.24.6.** Матрица  $X(t)$  есть фундаментальная матрица уравнения (24.16) тогда и только тогда, когда она неособенна при всех  $t$  и удовлетворяет аналогичному уравнению (24.16) матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X. \quad (24.31)$$

Эта теорема по существу есть теорема о существовании решения матричного дифференциального уравнения (24.31). Покажем, что для этого уравнения справедлива и теорема единственности решения.

**Теорема.24.7.** Если две фундаментальные матрицы уравнения (24.16) совпадают в некоторый момент  $t_0$ , то они вообще совпадают.

Пусть  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  – две фундаментальные матрицы уравнения (24.16), такие, что  $X_1(t_0) = X_2(t_0)$ . Это значит, что соответствующие столбцы этих матриц есть решения уравнения (24.16), удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям (24.17). На основании единственности решения эти столбцы вообще совпадают, а значит  $X_1(t) \equiv X_2(t)$ .

**Теорема.24.8.** Если  $X(t)$  – фундаментальная матрица уравнения (24.16), а  $C$  – любая постоянная неособенная матрица, то и матрица  $X(t)C$  – фундаментальная.

Действительно,

$$\frac{d(X(t)C)}{dt} = \frac{dX(t)}{dt}C + X(t)\frac{dC}{dt} = \frac{dX(t)}{dt}C.$$

Но, поскольку матрица  $X(t)$  – фундаментальная, то она удовлетворяет тождеству (24.30). Следовательно,

$$\frac{d(X(t)C)}{dt} \equiv A(t)X(t)C,$$

или

$$\frac{d(X(t)C)}{dt} \equiv A(t)(X(t)C).$$

Таким образом, и матрица  $X(t)C$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (24.31), а значит, она тоже является матрицей решений.

Заметим, что если  $X(t)C$  заменить матрицей  $CX(t)$ , то тождество (24.30) выполняться не будет.

Далее,  $\text{Det}(X(t)C) = \text{Det} X(t) \cdot \text{Det} C$ . Но  $\text{Det} X(t) \neq 0, \forall t$ , и по условию,  $\text{Det} C \neq 0$ . Следовательно,  $\text{Det}(X(t)C) \neq 0, \forall t$ , т.е. матрица  $X(t)C$  неособенна при всех  $t$ . Поэтому она также является фундаментальной.

Итак, если  $X(t)$  – фундаментальная матрица, то при любой неособенной матрице  $C$  и матрица  $X(t)C$  – фундаментальная. Беря различные неособенные матрицы  $C$ , будем получать различные фундаментальные матрицы. Возникает вопрос: если в качестве  $C$  брать всевозможные неособенные матрицы, то будет ли выражение  $X(t)C$  охватывать множество всех фундаментальных матриц? Докажем, что это так и есть, т.е. что матрица  $X(t)C$ , где  $C$  – произвольная постоянная неособенная матрица, есть общее решение матричного дифференциального уравнения (24.31).

**Теорема.24.9.** Если  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  – две фундаментальные матрицы уравнения (24.16), то существует такая неособенная матрица  $C$ , что

$$X_2(t) = X_1(t)C.$$

■ Возьмем произвольное  $t_0 = \text{const}$  и составим матрицу

$$X_3(t) = X_1(t)X_1^{-1}(t_0)X_2(t_0).$$

В силу теоремы 24.8, она является фундаментальной. В то же время

$$X_3(t_0) = X_1(t_0)X_1^{-1}(t_0)X_2(t_0) = EX_2(t_0) = X_2(t_0).$$

На основании теоремы 24.7, матрицы  $X_3(t)$  и  $X_2(t)$  вообще совпадают, а это значит, что



$$X_3(t) \equiv X_2(t),$$

т.е.

$$X_2(t) = X_1(t) \left( X_1^{-1}(t_0) X_2(t_0) \right),$$

и остается положить

$$C = X_1^{-1}(t_0) X_2(t_0). \quad \square$$

## 6. Выражение решения однородной линейной системы через ее фундаментальную матрицу

Пусть для уравнения (24.16) известна какая-нибудь ее фундаментальная матрица  $X(t)$ . Докажем, что тогда при любом постоянном векторе  $\vec{d}$  вектор-функция

$$\vec{x}(t) = X(t) \vec{d} \tag{24.32}$$

есть решение того же уравнения (24.16).

■ Действительно, из (24.32), на основании (24.30), находим

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{dX(t)}{dt} \vec{d} \equiv A(t) X(t) \vec{d} = A(t) (X(t) \vec{d}),$$

а значит, вектор-функция (24.32) удовлетворяет уравнению (24.16).  $\square$

Пусть теперь решение (24.32) удовлетворяет и начальному условию (24.17). Тогда получим и выражения (24.32)

$$X(t_0) \vec{d} = \vec{x}_0,$$

а так как матрица  $X(t_0)$  – неособенная, то отсюда

$$\vec{d} = X^{-1}(t_0) \vec{x}_0.$$

Подставляя это в выражение (24.32), будем иметь, что частное решение уравнения (24.16), удовлетворяющее начальному условию (24.17), дается формулой

$$\vec{x}(t) = X(t) X^{-1}(t_0) \vec{x}_0 \tag{24.33}$$

На основании утверждения о единственности решения, другого решения уравнения (24.16), удовлетворяющего начальному условию (24.17), кроме решения (24.33), нет.

**Примечание 1.** Среди всех фундаментальных матриц уравнения (24.16) особое место занимает та, для которой  $X(t_0) = E$ . Ее называют матрицантом;

будем обозначать ее  $X^0(t)$ . В некотором смысле матрица  $X^0(t)$  играет роль орта на множестве всех фундаментальных матриц данного уравнения (24.16).

Если  $X(t) = X^0(t)$ , то формула (24.33) принимает наиболее простой вид

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{x}_0. \quad (24.34)$$

Заметим, что для получения матрицы  $X(t)$  надо решить уравнение (24.16) при каждом из следующих начальных условий:

$$\vec{x}|_{t=t_0} = \vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\vec{x}|_{t=t_0} = \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\vec{x}|_{t=t_0} = \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

(каждое из этих решений существует на основании теоремы 24.2). Затем остается составить матрицу из столбцов, отвечающих  $n$  найденным решениям.

**Примечание.2.** Формула (24.33) позволяет получить и общее решение уравнения (24.16). Для этого в выражении (24.33) следует конкретный начальный вектор  $\vec{x}_0$  заменить произвольным постоянным вектором  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ . Получим тогда

$$\vec{x}(t, \vec{c}) = X(t)X^{-1}(t_0)\vec{c},$$

или, что то же самое,

$$\vec{x}(t, \vec{c}) = X(t)\vec{c}. \quad (24.35)$$

Пусть, как и ранее,  $X(t) = (x_{ik}(t))_{i,k=1,\dots,n}$ . Тогда формуле (24.35) можно придать следующий развернутый вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} \vec{x}_1(t) = c_1x_{11}(t) + c_2x_{12}(t) + \dots + c_nx_{1n}(t) \\ \vec{x}_2(t) = c_1x_{21}(t) + c_2x_{22}(t) + \dots + c_nx_{2n}(t) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \vec{x}_n(t) = c_1x_{n1}(t) + c_2x_{n2}(t) + \dots + c_nx_{nn}(t) \end{cases}.$$

Объединяя здесь столбцы, получим

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + \dots + c_n\vec{x}_n(t).$$

Это равенство выражает уже известный факт: любое решение уравнения (24.16) можно представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений.

## 7. Вронскиан и формула Лиувилля

Пусть  $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  – решения уравнения (24.16), а  $X(t)$  – построенная по ним матрица решений. Рассмотрим определитель  $W(t) = \text{Det}X(t)$ , т.е.

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}. \quad (24.36)$$

Его называют *вронскианом* вектор-функций  $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ .

Покажем, что определение (24.36) эквивалентно определению, ранее вводимому для линейных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка.

■ Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} = b_1(t)x^{(n-1)} + b_2(t)x^{(n-2)} + \dots + b_{n-1}(t)x' + b_n(t)x. \quad (24.37)$$

Вводя обозначения

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = x'', \quad \dots, \quad x_n = x^{(n-1)}, \quad (24.38)$$

получим, что уравнение (24.37) равносильно следующей нормальной системе уравнений 1-го порядка.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = b_n(t)x_1 + b_{n-1}(t)x_2 + \dots + b_2(t)x_{n-1} + b_1(t)x_n \end{cases} \quad (24.39)$$

Пусть  $x_{ik}(t)$  –  $i$ -я координата  $k$ -го решения системы (24.39). Тогда, на основании равенства (24.38),

$$x_i^{(k-1)} = x_{ik}.$$

Следовательно, если для решений  $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  уравнения (24.37) мы полагали

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_1' & x_1'' & \dots & x_1^{(n-1)} \\ x_2 & x_2' & x_2'' & \dots & x_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & x_n' & x_n'' & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

то теперь отсюда для системы (24.39) получим выражение (24.36). □

Возвращаясь к определению (24.36), предположим, что при некотором  $t_0$  будет  $W(t_0) = 0$ . Тогда векторы  $\bar{x}_1(t_0), \bar{x}_2(t_0), \dots, \bar{x}_n(t_0)$  линейно зависимы. На основании теоремы 24.4, решения  $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_n(t)$  линейно зависимы при всех  $t$ , а значит, при всех  $t$  будет  $W(t) = 0$ .

Обратно, пусть  $W(t_0) \neq 0$ . Тогда векторы  $\bar{x}_1(t_0), \bar{x}_2(t_0), \dots, \bar{x}_n(t_0)$  линейно независимы. Но в этом случае решения  $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_n(t)$  вообще линейно независимы при всех  $t$ , т.е. матрица решений (24.25) есть фундаментальная матрица, и тогда при всех  $t$  будет  $W(t) \neq 0$ . Тем самым получено следующее утверждение.

**Теорема. 24.10.** Если  $W(t)$  – вронскиан решений  $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_n(t)$  уравнения (24.16), то либо  $W(t) \equiv 0$  (когда эти решения линейно зависимы), либо  $W(t)$  ни при одном  $t$  не обращается в нуль (если решения линейно независимы).

Получим одну формулу для вронскиана. Предварительно сформулируем правило дифференцирования определителей с функциональными элементами. Напомним, что

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^s x_{1p_1} x_{2p_2} \dots x_{np_n}, \quad (24.40)$$

где суммирование производится по всем возможным перестановкам вторых индексов  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , а  $N$  – число инверсий в каждой такой перестановке. Если элементы  $x_{ik}(t)$  есть дифференцируемая функция, то из выражения (24.40) получим

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^N \frac{dx_{1p_1}}{dt} x_{2p_2} \dots x_{np_n} +$$

$$+ \sum (-1)^N x_{1p_1} \frac{dx_{2p_2}}{dt} \cdots x_{np_n} + \sum (-1)^N x_{1p_1} x_{2p_2} \cdots \frac{dx_{np_n}}{dt}.$$

Каждая сумма справа есть определитель, полученный из исходного путем дифференцирования элементов соответствующей строки. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{dx_{11}}{dt} & \frac{dx_{12}}{dt} & \cdots & \frac{dx_{1n}}{dt} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \frac{dx_{21}}{dt} & \frac{dx_{22}}{dt} & \cdots & \frac{dx_{2n}}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} &+ \cdots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dx_{n1}}{dt} & \frac{dx_{n2}}{dt} & \cdots & \frac{dx_{nn}}{dt} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (24.41)$$

Применим теперь формулу (24.41) к вронскиану  $W(t)$ . Тогда получим  $\frac{dW}{dt}$  в виде суммы определителей. Возьмем, например, первый из них

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} \frac{dx_{11}}{dt} & \frac{dx_{12}}{dt} & \cdots & \frac{dx_{1n}}{dt} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поскольку  $x_{11}(t), x_{12}(t), \dots, x_{1n}(t)$  – первые координаты решений уравнения (24.16), то они удовлетворяют уравнению (24.29) при  $i = 1$ , т.е.

$$\frac{dx_{1k}}{dt} = a_{11}x_{1k} + a_{12}x_{2k} + \cdots + a_{1n}x_{nk}.$$

Следовательно,

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} a_{11}x_{11} + \cdots + a_{1n}x_{n1} & \cdots & a_{11}x_{1n} + \cdots + a_{1n}x_{nn} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель, в свою очередь, равен сумме  $n$  определителей. Первый из них равен

$$a_{11} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} W(t),$$

а все остальные равны нулю, так как элементы их первой строки пропорциональны элементам одной из последующих строк. Итак,

$$\Delta_1(t) = a_{11}W(t).$$

Точно так же получим

$$\Delta_2(t) = a_{22}W(t), \dots, \Delta_n(t) = a_{nn}W(t).$$

Следовательно, выражение (24.41) дает

$$\frac{dW}{dt} = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})W(t),$$

т.е.,

$$\frac{dW}{dt} = SpA(t)W(t).$$

Это – дифференциальное уравнение первого порядка относительно  $W(t)$ . Разделяя в нем переменные, получим

$$\frac{dW}{W} = SpA(t)dt,$$

откуда

$$\ln W(t) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t SpA(s)ds,$$

т.е.

$$\ln W(t) = \ln W(t_0) + \int_{t_0}^t SpA(s)ds.$$

Окончательно

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t SpA(s)ds}. \quad (24.42)$$

Эту формулу называют *формулой Лиувилля*. Из нее, между прочим, еще раз следует утверждение теоремы 24.10.

## 8. Однородные линейные системы с постоянными коэффициентами

Пусть в системе (24.14) все коэффициенты  $a_{ik}$  есть постоянные числа. Тогда вместо уравнения (24.16) с матрицей-функцией  $A(t)$  получим

уравнение с постоянной матрицей

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad (24.43)$$

Ранее, в общей части курса, мы занимались решением конкретных систем вида (24.43). Прежде всего, уравнения системы (24.14) в случае постоянных коэффициентов мы подвергали повторному дифференцированию, в результате чего, последовательно исключая все неизвестные функции, кроме одной, приходили к равносильному ей однородному линейному дифференциальному уравнению высшего порядка, которое затем решали по найденным корням характеристического уравнения. Во-вторых, к системе (24.43) при заданных начальных условиях можно было применить операционный метод, т.е. от исходной системы перейти к СЛАУ (системе линейных алгебраических уравнений) операторных уравнений, решая которую, мы находили бы изображения всех неизвестных функций, а по ним – и сами неизвестные функции.

Методы, которые мы изложим ниже, по существу и есть эти два указанных метода, однако, благодаря использованию матричного аппарата, мы сможем придать им более четкую очерченность и, главное, большую алгоритмичность.

Предположим, что  $\vec{x}(t)$  есть решение уравнения (24.43), т.е. пусть

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \equiv A\vec{x}(t).$$

Тогда

$$\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} \equiv \frac{d}{dt} \left[ \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right] \equiv \frac{d}{dt} [A\vec{x}(t)].$$

Но каждая координата вектора  $A\vec{x}(t)$  есть линейная комбинация координат вектора  $\vec{x}(t)$ , а так как все коэффициенты этой линейной комбинации постоянны, то производная линейной комбинации есть соответствующая линейная комбинация производных, в результате чего последний результат можно переписать так

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \equiv A \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \equiv A[A\vec{x}(t)] \equiv A^2\vec{x}(t)$$

и точно так же

$$\frac{d^3\vec{x}(t)}{dt^3} \equiv A\vec{x}^3(t), \dots, \frac{d^n\vec{x}(t)}{dt^n} \equiv A^n\vec{x}(t).$$

Итак, если  $\vec{x}(t)$  – решение уравнения (24.43), то

$$\begin{cases} \bar{x} = E\bar{x} \\ \frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} \\ \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = A^2\bar{x} \\ \dots \\ \frac{d^n\bar{x}}{dt^n} = A^n\bar{x} \end{cases} \quad (24.44)$$

Пусть  $D(\lambda) = h_0\lambda^n + h_1\lambda^{n-1} + \dots + h_{n-1}\lambda + h_n$  – характеристический многочлен матрицы  $A$  (напомним, что в частности,  $h_0 = (-1)^n$ ,  $h_1 = SpA$ ,  $h_n = \lambda_1\lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ , где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – спектр матрицы  $A$ ).

Умножим тождества (24.44) соответственно на  $h_n, h_{n-1}, h_{n-2}, \dots, h_0$  и сложим. Получим

$$h_0 \frac{d^n \bar{x}}{dt^n} + h_1 \frac{d^{n-1} \bar{x}}{dt^{n-1}} + \dots + h_{n-1} \frac{d\bar{x}}{dt} + h_n \bar{x} = (h_0 A^n + h_1 A_{n-1} + \dots + h_{n-1} A + h_n E) \bar{x}.$$

Правая часть есть  $D(A)\bar{x}$ , и, в силу тождества Гамильтона-Кели,

$$h_0 \frac{d^n \bar{x}}{dt^n} + h_1 \frac{d^{n-1} \bar{x}}{dt^{n-1}} + \dots + h_{n-1} \frac{d\bar{x}}{dt} + h_n \bar{x} = 0. \quad (24.45)$$

Этому уравнению удовлетворяет любое решение уравнения (24.43). Но векторное дифференциальное уравнение (24.45) распадается на  $n$  одинаковых скалярных уравнений. Следовательно, каждая координата  $x_i(t)$  решения  $\bar{x}(t)$  уравнения (24.45) удовлетворяет уравнению

$$h_0 x_i^{(n)} + h_1 x_i^{(n-1)} + \dots + h_{n-1} x_i' + h_n x_i = 0. \quad (24.46)$$

*Характеристическим уравнением* этого однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами является уравнение

$$h_0 \lambda^n + h_1 \lambda^{n-1} + \dots + h_{n-1} \lambda + h_n = 0, \quad (24.47)$$

т.е.

$$D(\lambda) = 0.$$

В связи с этим полезно отметить следующий любопытный факт. Впервые термин «характеристическое уравнение» встретился в линейной алгебре в связи с нахождением собственных значений и собственных векторов оператора (матрицы). Затем, уже в курсе дифференциальных уравнений этот же термин фигурировал – в другом контексте – при решении однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Мы убедились сейчас, что эти два внешне разнородных



термина имеют не только общее «звучание», но и глубокую взаимосвязь. Действительно, мы видим теперь, что если от однородной линейной системы (24.43) с постоянной матрицей  $A$  перейти – путем последовательного дифференцирования – к однородному линейному дифференциальному уравнению (24.46) высшего порядка, то характеристическое уравнение (24.47) уравнения (24.46) совпадает с характеристическим уравнением для матрицы  $A$ .

Пусть  $\lambda_k$  – один из корней этого уравнения (24.47). Тогда функция  $e^{\lambda_k t}$  есть одно из решений уравнения (24.46). Ввиду однородности этого уравнения, уравнение (24.45) имеет решение вида  $\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \vec{g}$ , где  $\vec{g}$  – любой постоянный вектор.

Покажем теперь, что для того, чтобы выражение

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \vec{g} \quad (24.48)$$

было решением не только уравнения (24.45), но и исходного уравнения (24.43), вектор  $\vec{g}$  уже не может быть произвольным.

■ Действительно, требуя, чтобы вектор-функция (24.48) удовлетворяла уравнению (24.43), получим

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} \vec{g}) \equiv A(e^{\lambda t} \vec{g}),$$

т.е.

$$\lambda e^{\lambda t} \vec{g} \equiv e^{\lambda t} A \vec{g},$$

а так как  $e^{\lambda t} \neq 0$ , то должно быть

$$A \vec{g} = \lambda \vec{g}.$$

Итак, вектор-функция (24.48) есть решение уравнения (24.43), тогда и только тогда, когда вектор  $\vec{g}$  есть собственный вектор матрицы  $A$ , отвечающий собственному значению  $\lambda$ . □

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – собственные значения матрицы  $A$ . Возможны следующие случаи:

1.) Спектр матрицы  $A$  – простой, т.е. собственные  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  попарно различны. Им, согласно формуле (24.48), отвечают  $n$  решений:

$$\vec{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \vec{g}_1, \vec{x}_2(t) = e^{\lambda_2 t} \vec{g}_2, \dots, \vec{x}_n(t) = e^{\lambda_n t} \vec{g}_n, \quad (24.49)$$

где  $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$  – собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . При  $t = 0$  решения (24.49) превращаются в векторы  $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ . Они линейно независимы как собственные векторы, отвечающие попарно различным собственным значениям. Но если решения (24.49) линейно независимы в момент  $t = 0$ , то в силу следствия теоремы 24.4, они вообще линейно независимы, т.е. образуют фундаментальную систему решений.

Пусть  $g_{ik}$  –  $i$ -я координата вектора  $\vec{g}_k$ . Тогда, на основании выражений (24.49), получим следующую фундаментальную матрицу:

$$X(t) = \begin{pmatrix} g_{11}e^{\lambda_1 t} & g_{12}e^{\lambda_2 t} & \dots & g_{1n}e^{\lambda_n t} \\ g_{21}e^{\lambda_1 t} & g_{22}e^{\lambda_2 t} & \dots & g_{2n}e^{\lambda_n t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1}e^{\lambda_1 t} & g_{n2}e^{\lambda_2 t} & \dots & g_{nn}e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \quad (24.50)$$

Для нахождения решения, удовлетворяющего начальным условиям (24.17), достаточно воспользоваться формулой (24.33), а общее решение, на основании формул (24.35) и (24.50), имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = c_1 g_{11} e^{\lambda_1 t} + c_2 g_{12} e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n g_{1n} e^{\lambda_n t} \\ x_2 = c_1 g_{21} e^{\lambda_1 t} + c_2 g_{22} e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n g_{2n} e^{\lambda_n t} \\ \dots \\ x_n = c_1 g_{n1} e^{\lambda_1 t} + c_2 g_{n2} e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n g_{nn} e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

**Пример 24.1.** Возьмем систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x_1 - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}.$$

В данном случае

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т.е.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Его корни  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Для  $\lambda = 1$  имеем уравнение:

$$-g_{11} - 2g_{21} = g_{11}$$

или

$$2g_{11} = -2g_{21},$$

и получаем первый собственный вектор  $\vec{g}_1 = (1, -1)$ .

Аналогично для  $\lambda = 2$  получим

$$-g_{12} - 2g_{22} = 2g_{22},$$

т.е.

$$3g_{12} = -2g_{22},$$

а значит  $\vec{g}_2 = (2, -3)$ . На основании (24.50), получим фундаментальную матрицу

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ -e^t & -3e^t \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ -e^t & -3e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} \\ y = -c_1 e^t - 3c_2 e^{2t} \end{cases}.$$

Зададим теперь начальные условия:  $x|_{t=0} = -1$ ,  $y|_{t=0} = 2$ . Поскольку

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

то

$$X^{-1}(0) = -\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, на основании формулы (24.35),

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ -e^t & -3e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ -e^t & -3e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} x = e^t - 2e^{2t} \\ y = -e^t + 3e^{2t} \end{cases}.$$

**Примечание.** Заслуживает отдельного разговора случай, когда среди собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  есть комплексные. Проиллюстрируем этот случай на конкретном примере.

**Пример 24.2.** Возьмем систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}.$$

Ее матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения  $\lambda = 3 \pm i$ . Для  $\lambda = 3 + i$  имеем

$$4g_{11} - g_{21} = (3 + i)g_{11},$$

т.е.

$$(1 - i)g_{11} - g_{21} = 0,$$

и получаем собственный вектор  $\vec{g}_1 = (1, 1 - i)$ .

Заменяя теперь  $i$  на  $-i$ , находим, на основании вещественности элементов матрицы  $A$ , и второй ее собственный вектор  $\vec{g}_2 = (1, 1 + i)$ .

Следовательно, фундаментальная матрица:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{(3+i)t} & e^{(3-i)t} \\ (1-i)e^{(3+i)t} & (1+i)e^{(3-i)t} \end{pmatrix}.$$

Отсюда легко, как и в предыдущем примере, получить общее решение системы. Однако часто бывает целесообразнее записывать решение в вещественной форме. С целью перехода к вещественной форме столбцы  $\vec{x}_1(t)$

и  $\vec{x}_2(t)$  матрицы  $X(t)$  заменим решениями  $\vec{x}^*(t) = \frac{1}{2}(\vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t))$  и

$\vec{x}^{**}(t) = \frac{1}{2i}(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t))$ , откуда следует, что  $\vec{x}^*(t) = \text{Re } \vec{x}_1(t)$ ,

$\vec{x}^{**}(t) = \text{Im } \vec{x}_1(t)$ . Эти новые решения получены из первоначальных в результате неособенного линейного преобразования, определитель матрицы которого есть

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = -1 \frac{1}{2i} \neq 0,$$

а значит новые решения  $\vec{x}^*(t)$  и  $\vec{x}^{**}(t)$  также линейно независимы (см. общую часть курса). Таким образом, вместо  $X(t)$  получим новую фундаментальную матрицу

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \text{Re } e^{(3+i)t} & \text{Im } e^{(3+i)t} \\ \text{Re}(1-i)e^{(3+i)t} & \text{Im}(1-i)e^{(3+i)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \cos t & e^{3t} \sin t \\ e^{3t} (\cos t + \sin t) & e^{3t} (\sin t - \cos t) \end{pmatrix}$$

Следовательно, общее решение:

$$\begin{cases} x = e^{3t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t) \\ y = e^{3t} ((c_1 - c_2) \cos t + (c_2 - c_1) \sin t) \end{cases}$$

2.) Среди чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  есть кратные, но матрица  $A$  есть матрица простой структуры. Этот случай практически не отличается от предыдущего, поскольку базис  $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$  все равно существует. Формально отличие состоит лишь в том, что в матрице (24.50) экспоненты в некоторых столбцах могут быть одинаковыми.

Обращаясь к общему случаю, предположим, что среди чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  имеются кратные, и базиса из собственных векторов не существует. В этом случае применим операционный метод.

Пусть уравнение (24.43) сопровождается начальным условием (24.17). Тогда, применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, получим

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = L\{A\vec{x}\},$$

или

$$pL\{\vec{x}(t)\} - \vec{x}_0 = AL\{\vec{x}(t)\},$$

т.е.

$$(A - pE)L\{\vec{x}(t)\} = -\vec{x}_0,$$

откуда

$$L\{\vec{x}(t)\} = -(A - pE)^{-1} \vec{x}_0 = -R_A(p) \vec{x}_0,$$

где  $R_A(p)$  – резольвента матрицы  $A$ . На основании формулы Римана-Меллина,

$$\vec{x}(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} R_A(p) e^{pt} \vec{x}_0 dp, \quad (24.51)$$

где весь спектр матрицы  $A$  лежит левее контура Бромвича. Следовательно, из выражения (24.51) получим:

$$\vec{x}(t) = -\sum_{j=1}^m \operatorname{Res}_{\lambda_j} (R_A(p) e^{pt}) \vec{x}_0; \quad (24.52)$$

здесь  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  – различные собственные значения матрицы  $A$ .

Заменяя в формуле (24.52) конкретный вектор  $\vec{x}_0$  на произвольный постоянный вектор  $\vec{c}$ , получим формулу для общего решения уравнения (24.43):

$$\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}_{\lambda_j} (R_A(p) e^{pt}) \vec{c} \quad (24.53)$$

**Пример 24.3.** Возьмем систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$$

В этом случае

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 21\lambda - 18 = 0$$

откуда  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$ .

Для  $\lambda_1 = 2$  получаем СЛАУ

$$\begin{cases} 4g_{11} - g_{21} - g_{31} = 2g_{11} \\ g_{11} + 2g_{21} - g_{31} = 2g_{21} \\ g_{11} - g_{21} + 2g_{31} = 2g_{21} \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} 2g_{11} - g_{21} - g_{31} = 0 \\ g_{11} - g_{31} = 0 \end{cases},$$

откуда  $g_{11} = g_{21} = g_{31}$ , и находим собственный вектор  $\vec{g}_1 = (1, 1, 1)$ .

Далее, для  $\lambda = 3$

$$\begin{cases} 4g_{12} - g_{22} - g_{32} = 2g_{12} \\ g_{12} + 2g_{22} - g_{32} = 2g_{22} \\ g_{12} - g_{22} + 2g_{32} = 2g_{32} \end{cases}$$

Ранг этой СЛАУ равен единице, поскольку она сводится к единственному уравнению

$$g_{12} - g_{22} - g_{32} = 0,$$

т.е.

$$g_{12} = g_{22} + g_{32},$$

и получаем собственные векторы

$$\bar{g}_2 = (2, 1, 1), \quad \bar{g}_3 = (3, 1, 2)$$

Фундаментальная матрица:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 2e^{3t} & 3e^{3t} \\ e^{2t} & e^{3t} & e^{3t} \\ e^{2t} & e^{3t} & 2e^{3t} \end{pmatrix},$$

а значит, общее решение:

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + (2c_2 + 3c_3) e^{3t} \\ y = c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3) e^{3t} \\ z = c_1 e^{2t} + (c_2 + 2c_3) e^{3t} \end{cases}.$$

**Пример 24.4.** Возьмем систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т.е.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

откуда  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ .

Далее,

$$R_A(p) = \begin{pmatrix} 1-p & -1 \\ 1 & 3-p \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3-p}{(p-2)^2} & \frac{1}{(p-2)^2} \\ -\frac{1}{(p-2)^2} & \frac{1-p}{(p-2)^2} \end{pmatrix}.$$

Из формулы (24.53) получаем теперь:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{Res}_2 \begin{pmatrix} \frac{(3-p)e^{pt}}{(p-2)^2} & \frac{pe^{pt}}{(p-2)^2} \\ -\frac{e^{pt}}{(p-2)^2} & \frac{(1-p)e^{pt}}{(p-2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} (3-p)e^{pt} & e^{pt} \\ -e^{pt} & (1-p)e^{pt} \end{pmatrix} \right) \Big|_{p=2} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$\left( \begin{array}{cc} -e^{pt} + (3-p)te^{pt} & te^{pt} \\ -te^{pt} & -e^{pt} + (1-p)e^{pt} \end{array} \right) \Big|_{p=2} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2t} + te^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & -e^{2t} + te^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} t-1 & t \\ -t & t-1 \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x = (c_1(t-1) + c_2t)e^{2t} \\ y = (-c_1t + (t-1)c_2)e^{2t} \end{cases}.$$

**Примечание 1.** Поскольку из выражения (24.52), в силу формулы (24.8), следует, что

$$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{x}_0, \quad (24.54)$$

или

$$X(t) = e^{At}, \quad (24.55)$$

откуда  $X(0) = e^0 = E$ , то получаемая при использовании данного метода фундаментальная матрица есть не что иное, как *матрицант*. В связи с этим в последнем примере мы имели бы:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} e^{2t},$$

и, например, при начальных условиях  $x|_{t=0} = 3$ ,  $y|_{t=0} = 2$  мы получили бы, на основании формулы (24.34),

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \begin{cases} x = (3(1-t) - 2t)e^{2t} \\ y = (3t + 2(1-t))e^{2t} \end{cases}.$$

**Примечание 2.** Нетрудно видеть, что два изложенных выше способа интегрирования уравнений вида (24.43), по существу, соответствуют двум различным подходам к нахождению функций от матриц: формула (24.50) отвечает формуле (24.10) для случая матрицы  $A$  простой структуры, а формула (24.52), на основании выражения (24.54), получается из формулы (24.8) при  $f(\lambda) = e^{2t}$ .

## 9. Представление фундаментальной матрицы однородной линейной системы с постоянными коэффициентами при помощи матричной экспоненты

Формулу (24.54), или, что то же самое, выражение  $X(t) = e^{At}$  можно получить и непосредственно.



■ Действительно, на основании формулы (24.7),

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{A^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

Этот степенной ряд с матричными коэффициентами допускает почленное дифференцирование, а поэтому

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^{n+1} t^n}{n!} + \dots = A \left( E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots \right) = A e^{At}$$

Иными словами, матрица  $X(t) = e^{At}$  есть решение дифференциального уравнения (24.31) при начальном условии  $X|_{t=0} = E$ . □

Доказанный факт совершенно аналогичен тому, что скалярное дифференциальное уравнение  $\frac{dx}{dt} = ax$  с начальным условием  $x|_{t=0} = 1$  имеет, как легко видеть, решение  $x(t) = e^{at}$ .

**Следствие.** Мы видели, что для любого уравнения (24.16) произвольная фундаментальная матрица выражается через ее матрицант формулой  $X(x) = X(t) X(t_0)$ . Следовательно, положив  $t_0 = 0$ , для фундаментальной матрицы уравнения (24.43) будем иметь:

$$X(t) = e^{At} X(0).$$

## 10. Устойчивость и ограниченность решений одиородной линейной системы с постоянными коэффициентами

Мы видели, что любое решение уравнения (24.43) имеет вид (24.54), т.е. любая фундаментальная матрица этого уравнения дается формулой (24.55). Исследуем структуру элементов матрицы  $X(t)$  на основании формулы (24.52).

Пусть  $\lambda_k$  – собственные значения матрицы  $A$ . Тогда элементы матрицы  $X(t)$  есть линейные комбинации слагаемых вида  $e^{\lambda_k t} t^s$ , где  $s \leq n-1$  – натуральное число, получаемое в результате дифференцирования по  $p$  элементов матрицы  $R_A(p) e^{pt}$  с подстановкой  $p = \lambda_k$ , т.е. в случае наличия кратных собственных значений. Если же  $A$  – матрица простой структуры, то очевидно, все  $s$  равны нулю.

Если  $\lambda_k$  – комплексное, т.е.  $\lambda_k = \alpha_k + \beta_k i$ , то комплекснозначное слагаемое  $e^{\lambda_k t} t^s$  распадается на два вещественных:  $e^{\alpha_k t} t^s \cos \beta_k t$  и  $e^{\alpha_k t} t^s \sin \beta_k t$ .

Предположим, что  $\alpha_k < 0$ . Тогда  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha_k t} t^s = 0$  при любом  $s$ . Таким образом, если для  $\lambda_k$  будет  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ , то, очевидно  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$ , а значит при любом начальном условии и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = 0$ .

Обратно, пусть для любого решения уравнения (24.43) будет  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = 0$ . Если бы было  $\operatorname{Re} \lambda_k \geq 0$  хотя бы при одном  $k$ , то координаты вектора  $\vec{x}(t)$  содержали бы слагаемые либо неограниченные, либо ограниченные, но не стремящиеся к нулю (к последнему случаю относятся и постоянные слагаемые).

Итак, доказано следующее утверждение.

**Теорема 24.11.** Для того, чтобы все решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами стремились к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы вещественные части всех собственных значений матрицы этой системы были отрицательны.

Геометрически, условия этой теоремы означает, что весь спектр матрицы этой системы располагается левее мнимой оси (рис. 24.1). Системы, обладающие этим свойством, называются устойчивыми.

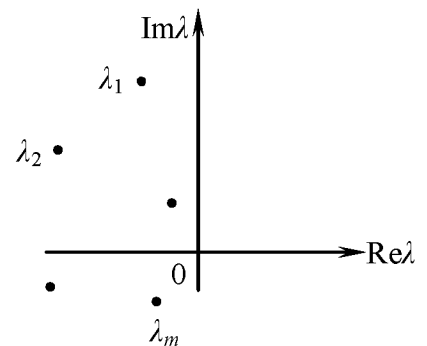


Рис. 24.1

Очевидно, система (24.43) устойчива тогда и только тогда, когда устойчив многочлен  $D(\lambda) = \operatorname{Det}(A - \lambda E)$ . Тем самым устойчивость (или неустойчивость) системы можно установить и не находя числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , а применив к  $D(\lambda)$  критерии устойчивости Рауса или Гурвица (см. курс ТФКП).

Другим существенным свойством системы (24.43) является ограниченность всех ее решений при  $t \rightarrow \infty$ . Это свойство, очевидно, слабее условия устойчивости, а поэтому и критерий ограниченности решений менее жесток, чем теорема 24.11. Пусть  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \forall k = \overline{1, m}$  (случай  $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$  здесь не исключается). Если  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \forall k = \overline{1, m}$ , то система (24.43) устойчива, а значит, все ее решения ограничены. Если же  $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ , то элементы матрицы  $X(t)$  есть линейные комбинации слагаемых вида  $t^s \cos \beta_k t$  и  $t^s \sin \beta_k t$ . Но если при этом все  $s$  равны нулю, т.е. если  $A$  – матрица простой структуры, то получим линейные комбинации слагаемых вида  $\cos \beta_k t$  и  $\sin \beta_k t$ , откуда следует ограниченность всех элементов матрицы  $X(t)$ , а значит и всех решений уравнения (24.43). Обратно, если  $A$  – матрица простой структуры, то из ограниченности всех решений уравнения (24.43) следует, что

$\alpha_k \leq 0, \forall k = \overline{1, m}$ . Тем самым, можно считать доказанным следующее утверждение.

**Теорема 24.12.** Если матрица однородной линейной системы с постоянными коэффициентами имеет простую структуру, то для ограниченности всех решений этой системы необходимо и достаточно, чтобы вещественные части всех ее собственных значений были неположительны.

**Пример 24.5.** Для системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$$

имеем матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Для нее  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$ , т.е.  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ , откуда следует устойчивость системы.

**Пример 24.6.** Для системы  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y \end{cases}$  из матрицы  $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

находим  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ , а поскольку  $-1 < 0$ , то система устойчива.

**Пример 24.7.** Система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 2y \end{cases}$$

имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},$$

собственные значения которой  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Условие теоремы 24.12 выполнено, а значит, все решения этой системы ограничены при  $t \rightarrow \infty$ .

## 11. Общее решение неоднородной линейной системы

Обратимся теперь к неоднородному уравнению (24.15). Одновременно будем рассматривать соответствующее однородное уравнение (24.16).

**Лемма 24.1.** Сумма решения неоднородного уравнения (24.15) и

решения соответствующего однородного уравнения (24.16) есть новое решение неоднородного уравнения (24.15).

■ Пусть  $\bar{u}(t)$  – решение однородного уравнения (24.16), а  $\bar{v}(t)$  – решение неоднородного уравнения (24.15). Тогда

$$\frac{d\bar{u}(t)}{dt} \equiv A(t)\bar{u}(t); \quad \frac{d\bar{v}(t)}{dt} \equiv A(t)\bar{u}(t) + \bar{\varphi}(t).$$

Складывая, получим

$$\frac{d(\bar{u}(t) + \bar{v}(t))}{dt} = A(t)(\bar{u}(t) + \bar{v}(t)) + \bar{\varphi}(t),$$

а значит,  $\bar{x}(t) = \bar{u}(t) + \bar{v}(t)$  – удовлетворяет уравнению (24.15). □

**Теорема 24.13.** Общее решение неоднородной системы есть сумма общего решения соответствующей однородной системы и какого-нибудь частного решения неоднородной системы.

Пусть  $\bar{u}(t, \bar{c})$  – общее решение однородного уравнения (24.16). Докажем, что тогда  $\bar{x}(t, \bar{c}) = \bar{u}(t, \bar{c}) + \bar{v}(t)$  будет общим решением неоднородного уравнения (24.15) при любом частном ее решении  $\bar{v}(t)$ . Для этого зададим произвольное начальное условие (24.17) и докажем, что найдется, и притом единственный, вектор  $\bar{c}$ , такой, что решение  $\bar{x}(t, \bar{c})$  будет удовлетворять этому начальному условию.

Пусть  $X(t)$  – какая-нибудь фундаментальная матрица уравнения (24.16). Тогда, на основании формулы (24.35),  $\bar{u}(t, \bar{c}) = X(t)\bar{c}$ , а значит,

$$\bar{x}(t, \bar{c}) = X(t)\bar{c} + \bar{v}(t)$$

Начальное условие дает:

$$X(t_0)\bar{c} + \bar{v}(t_0) = \bar{x}_0,$$

откуда

$$X(t_0)\bar{c} = \bar{x}_0 - \bar{v}(t_0),$$

а поскольку матрица  $X(t)$  – неособенная, то

$$\bar{c} = X^{-1}(t_0)(\bar{x}_0 - \bar{v}(t_0)),$$

причем вектор  $\bar{c}$  находится единственным образом.

## 12. Выражение решения неоднородной линейной системы при помощи матрицы Коши

Пусть требуется проинтегрировать уравнение (24.15) при начальном условии (24.17). Для решения этой задачи используем матричный вариант метода вариации произвольных постоянных.

Пусть  $X(t)$  – какая-нибудь фундаментальная матрица, однородного

уравнения (24.16). Тогда общее решение этого уравнения:

$$\vec{u}(t) = X(t)\vec{c}.$$

Согласно методу вариации произвольных постоянных, будем искать решение неоднородного уравнения в таком же виде, т.е. положим

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c}(t), \quad (24.56)$$

где  $\vec{c}(t)$  – неизвестная вектор-функция. Подставляя выражение (24.56) в (24.16), имеем

$$\frac{dX(t)}{dt}\vec{c}(t) + X(t)\frac{d\vec{c}(t)}{dt} = A(t)X(t)\vec{c}(t) + \vec{\varphi}(t),$$

а так как

$$\frac{dX(t)}{dt} \equiv A(t)X(t),$$

то

$$A(t)X(t)\vec{c}(t) + X(t)\frac{d\vec{c}(t)}{dt} = A(t)X(t)\vec{c}(t) + \vec{\varphi}(t),$$

а так как матрица  $X(t)$  неособенная при всех  $t$ , то

$$\frac{d\vec{c}(t)}{dt} = X^{-1}(t)\vec{\varphi}(t),$$

откуда

$$\vec{c}(t) = \vec{c}(t_0) + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)\vec{\varphi}(s)ds,$$

Но, из соотношения (24.56), в силу начального условия (24.17),

$$X(t_0)\vec{c}(t_0) = \vec{x}_0,$$

так что

$$\vec{c}(t_0) = X^{-1}(t_0)\vec{x}_0.$$

Следовательно, выражение (24.57) примет вид

$$\vec{c}(t) = X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)\vec{\varphi}(s)ds.$$

Теперь, в силу (24.56), будем иметь

$$\vec{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 + X(t)\int_{t_0}^t X^{-1}(s)\vec{\varphi}(s)ds,$$

т.е.

$$\vec{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)\vec{\varphi}(s)ds. \quad (24.58)$$

Введем обозначение

$$K(t, s) = X(t)X^{-1}(s).$$

Матрицу  $K(t, s)$  называют *матрицей Коши*. Очевидно, что при каждом фиксированном  $s$  она является фундаментальной матрицей уравнения (24.16). При этом  $K(s, s) = E$ . Таким образом, матрица  $K(t, s)$  есть решение матричного уравнения

$$\frac{dK}{dt} = A(t)K$$

при начальном условии  $K|_{t=s} = E$ .

Итак, формуле (24.58) можно придать теперь следующий вид

$$\bar{x}(t) = K(t, t_0)\bar{x}_0 + \int_{t_0}^t K(t, s)\bar{\varphi}(s)ds. \quad (24.59)$$

**Примечание.** Заменяя в формуле (24.58) конкретный вектор  $\bar{x}_0$  на произвольный вектор  $\bar{c}$  и полагая  $X^{-1}(t_0)\bar{c} = \vec{C}$ , получим

$$\bar{x}(t, \bar{c}) = X(t)\vec{C} + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)\bar{\varphi}(s)ds. \quad (24.60)$$

Первое слагаемое справа есть общее решение однородного уравнения (24.16), а второе – решение уравнения (24.15) при начальном условии  $\bar{x}|_{t=t_0} = \vec{0}$ . На основании теоремы 24.13, формула (24.60) дает общее решение уравнения (24.15).

При конкретном же  $\bar{x}_0$  формула (24.58) представляет частное решение неоднородного уравнения в виде суммы частного решения соответствующего однородного уравнения (24.16), удовлетворяющего тому же начальному условию, и частного решения неоднородного уравнения, удовлетворяющего нулевому начальному условию.

### 13. Неоднородные линейные системы с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{\varphi}(t), \quad (24.61)$$

где  $A$  – постоянная матрица. Применим к этому уравнению формулу (24.60). При этом, как и в случае однородного уравнения, будем считать, что  $t_0 = 0$ .

Пусть  $X(t)$  – фундаментальная матрица однородного уравнения (24.61). Тогда, как мы видели (см. формулу (24.55)),  $X(t) = e^{At}X(0)$ , а значит

$X^{-1}(t) = X^{-1}(0)e^{-At}$ . Поэтому

$$K(t, s) = e^{At}X(0)X^{-1}(0)e^{-As} = e^{At}e^{-As} = e^{A(t-s)} = \overset{0}{X}(t-s).$$

Итак, в случае системы с постоянными коэффициентами матрица Коши  $K(t, s)$  зависит не от каждого из своих аргументов, а лишь от их разности, т.е.  $K(t, s) = K(t-s)$ .

Формула (24.59) принимает теперь вид:

$$\bar{x}(t) = \overset{0}{X}(t)\bar{x}_0 + \int_0^t \overset{0}{X}(t-s)\bar{\varphi}(s)ds.$$

Отбрасывая индекс «0», получим окончательно

$$\bar{x}(t) = X(t-0)\bar{x}_0 + \int_0^t X(t-s)\bar{\varphi}(s)ds. \quad (24.62)$$

В частности, при  $\bar{x}_0 = \vec{0}$  имеем:

$$\bar{x}(t) = \int_0^t X(t-s)\bar{\varphi}(s)ds.$$

Правая часть есть свертка матрицы  $X(t)$  и вектор-функции  $\bar{\varphi}(t)$ . Поэтому последнее равенство есть обобщение интеграла Дюамеля на случай системы уравнений.

**Пример.24.8.** Пусть требуется проинтегрировать систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y + t^2 \end{cases},$$

при начальном условии  $x|_{t=0} = -1, y|_{t=0} = 2$ .

Для соответствующей однородной системы мы уже имели фундаментальную матрицу

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ -e^t & -3e^t \end{pmatrix},$$

откуда следовало, что

$$X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

а значит,

$$X^0(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ -e^t & -3e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & 2e^t - 2e^{2t} \\ -3e^t + 3e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Формула (24.62) дает теперь

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & 2e^t - 2e^{2t} \\ -3e^t + 3e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 3e^{t-s} - 2e^{2(t-s)} & 2e^{t-s} - 2e^{2(t-s)} \\ -3e^{t-s} + 3e^{2(t-s)} & -2e^{t-s} + 3e^{2(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2s} \\ s^2 \end{pmatrix} ds$$

и осталось лишь выполнить перемножение матриц и интегрирование.

**Примечание.** Применять формулу (24.62) в каждом конкретном случае, как правило, нецелесообразно, так как более простыми могут оказаться либо сведение системы к одному уравнению высшего порядка, либо операционный метод. Последний метод в общем, виде выглядит так.

Для дифференциального уравнения (24.61) операторное уравнение имеет вид:

$$pL\{\bar{x}(t)\} - \bar{x}_0 = AL\{\bar{x}(t)\} + L\{\bar{\varphi}(t)\},$$

т.е.  $(A - pE)L\{\bar{x}(t)\} = -L\{\bar{\varphi}(t)\} - \bar{x}_0,$

откуда

$$L\{\bar{x}(t)\} = -(A - pE)^{-1} (L\{\bar{x}(t)\} + \bar{x}_0) = R_A(p) [L\{\bar{\varphi}(t)\} + \bar{x}_0],$$

а значит,

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{\lambda_k} \left( R_A(p) (L\{\bar{\varphi}(t)\} + \bar{x}_0) \right),$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  – различные собственные значения матрицы  $A$ .

Что же касается формулы (24.62), то она будет играть существенную роль в дальнейших теоретических выкладках.

#### 14. Понятие о резонансе в линейной динамической системе

Предположим, что в уравнении (24.62) свободный член  $\bar{\varphi}(t)$  имеет синусоидальный вид:  $\bar{\varphi}(t) = \bar{a} \cos \omega t$  или  $\bar{\varphi}(t) = \bar{a} \sin \omega t$ . Оба эти случая можно объединить в один, положив  $\bar{\varphi}(t) = \bar{a} e^{i\omega t}$ .

Итак, пусть имеется уравнение

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{a} e^{i\omega t} \quad (24.63)$$

Операторное уравнение:

$$pL(\bar{x}(t)) - \bar{x}_0 = AL(\bar{x}(t)) + \frac{\bar{a}}{p - i\omega},$$

откуда



$$(A - pE)L(\vec{x}(t)) = -\left(\frac{\vec{a}}{p - i\omega} + \vec{x}_0\right),$$

а значит,

$$L(\vec{x}(t)) = R_A(p) - \left(\frac{\vec{a}}{p - i\omega} + \vec{x}_0\right),$$

так что

$$\vec{x}(t) = -\sum \text{Res} \left( R_A(p) \left( \frac{\vec{a}}{p - i\omega} + \vec{x}_0 \right) e^{pt} \right), \quad (24.64)$$

где сумма берется по всем полюсам выражения в скобках.

Предположим, что уравнение  $\text{Det}(A - \lambda E) = 0$  имеет простой корень равный  $\omega$  (с физической точки зрения это означает, что одна из собственных частот системы совпадает с частотой внешней силы). В этом случае справа в выражении (24.64) после разложения выражения в скобках на простейшие дроби будет присутствовать слагаемое вида  $\text{Res}_{i\omega} \frac{\vec{b}e^{pt}}{(p - i\omega)^2}$ , где  $\vec{b}$  – некоторый

определенный вектор. Это слагаемое равно

$$\vec{b} \left( e^{pt} \right)'_p \Big|_{p=i\omega} = \vec{b} t e^{i\omega t}.$$

Это значит, что решение уравнения (24.63) в этом случае содержит колебательное слагаемое, амплитуда которого растет пропорционально времени, т.е. в этой системе имеет место резонанс. Очевидно, что если  $\lambda = i\omega$  есть, например, двукратное собственное значение матрицы  $A$ , то  $\vec{x}(t)$  содержит член  $t^2 e^{i\omega t}$  (резонанс 2-го порядка) и т.д.

## 15. Устойчивость и асимптотическое поведение решений систем линейных уравнений Устойчивость и ограниченность решений однородных линейных систем с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad (24.65)$$

где  $A$  – постоянная матрица. Мы видели, что любое решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^m \left[ \frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!} \vec{x}_1^{(k)} + \frac{t^{m_k-2}}{(m_k-2)!} \vec{x}_2^{(k)} + \dots + \vec{x}_{m_k}^{(k)} \right] e^{\lambda_k t}, \quad (24.66)$$

где  $\vec{x}_i^{(k)}$  – некоторые постоянные векторы, а  $\lambda_k$  – корни характеристического

уравнения кратности  $m_k$ . Если не все  $\lambda_k$  – простые корни, то координаты вектора  $\vec{x}(t)$  содержат в себе слагаемые вида  $bt^s e^{\lambda t}$ , где  $b = const$ ,  $s$  – натуральное число, а  $\lambda$  – кратный корень характеристического уравнения. Если  $\lambda$  – комплексное число, т.е.  $\lambda = \alpha + \beta i$ , то каждое из упомянутых слагаемых распадается на два:  $bt^s e^{\alpha t} \cos \beta t$  и  $bt^s e^{\alpha t} \sin \beta t$ .

Предположим, что  $\alpha < 0$ . Тогда оба слагаемых стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$  (поскольку  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^s e^{\alpha t} = 0$  при любом  $s > 0$  и любом  $\alpha < 0$ ). Если для всех  $\lambda_k$  будет  $\alpha_k = \operatorname{Re} \lambda_k < 0$ , то, в силу (2),

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{x}(t) = \vec{0}.$$

Обратно, пусть для любого решения  $\vec{x}(t)$  уравнения (24.65) будет  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{x}(t) = \vec{0}$ . Если бы было  $\operatorname{Re} \lambda_k \geq 0$  хотя бы для одного  $k$ , то координаты вектора  $\vec{x}(t)$  содержали бы слагаемые, которые при  $t \rightarrow +\infty$  были бы либо неограниченными, либо ограниченными, но не стремящимися к нулю (к последнему типу относятся и постоянные слагаемые).

Итак, доказана следующая

**Теорема 24.14.** Для того чтобы все решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами стремились к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ , необходимо и достаточно, чтобы вещественные части всех корней характеристического уравнения этой системы были отрицательны. Системы, удовлетворяющие условию этой теоремы, называются устойчивыми. Устойчивость системы  $\Leftrightarrow$  устойчивость  $D(\lambda)$ .

Условие ограниченности всех решений уравнения (24.65) несколько менее жестко, чем условие устойчивости.

Пусть, например,  $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$  для всех  $k$  (равенства  $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$  для некоторых  $k$  здесь, в отличие от предыдущего случая, допускаются). Если  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ , то получаем в  $\vec{x}(t)$  слагаемые уже рассмотренного вида. Если же  $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$  (для данного  $k$ ), то координаты вектора  $\vec{x}(t)$  содержат слагаемые вида  $bt^s \cos \beta t$  или  $bt^s \sin \beta t$ . При  $t \rightarrow +\infty$  эти слагаемые неограниченны. Однако, если предположить дополнительно, что все корни  $\lambda_k$  – простые, то  $s = 0$  и мы получим лишь слагаемые вида  $b \cos \beta t$  (в частности, постоянные слагаемые при  $b = 0$ ) или  $b \sin \beta t$ , а эти слагаемые – ограниченные. Обратно, если все корни  $\lambda_k$  – простые, и все решения – ограниченные, то  $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$  для всех  $k$ .

Таким образом, верна следующая

**Теорема 24.15.** Если матрица коэффициентов однородной линейной системы имеет простой спектр, то для того чтобы все решения этой системы

при  $t \rightarrow +\infty$  были ограничены, необходимо и достаточно, чтобы вещественные части всех собственных значений были неположительны.

### 16. Поиятие о возмущенной системе и ее устойчивости

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = [A + B(t)]\bar{x}, \tag{24.67}$$

где  $A$  – постоянная матрица, а  $B(t)$  – матрица, в некотором смысле малая при  $t \rightarrow +\infty$ . Последнее может означать, например, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|B(t)\| = 0$  или что

$\int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty$ . Система, описываемая уравнением (24.67), называется *возмущенной* по отношению к системе, описываемой уравнением (24.65), а матрицу  $B(t)$  называют *возмущающей матрицей*, или просто *возмущением системы*.

Естественно ожидать, что при  $t \rightarrow +\infty$  решения уравнения (24.67) в некотором смысле близки к решениям невозмущенного уравнения (24.65). Ниже мы увидим, что во многих случаях это так и есть.

Пусть все решения невозмущенного уравнения обладают некоторым свойством  $R$ . Если при достаточно малых (в том или ином смысле) возмущениях  $B(t)$  свойством  $R$  обладают и все решения уравнения (24.67), то говорят, что в этом случае система устойчива по отношению к свойству  $R$ .

**Пример 24.9.** Возьмем два уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = -ax \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt} = [-a + b(t)]x.$$

Они имеют соответственно решения  $x_1 = C_1 e^{-at}$ ,  $x_2 = C_2 e^{-at + \int_0^t b(t) dt}$ .

Предположим, что  $a > 0$ , а  $b(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Тогда, очевидно,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0,$$

т.е. свойство стремления к нулю при  $t \rightarrow +\infty$  в этом случае устойчиво.

Пусть теперь  $a = i\omega$ , где  $\omega$  – вещественное число, а  $b(t) = \frac{1}{t+1}$  (условие  $b(t) \rightarrow 0$  в этом случае выполнено). Тогда

$$x_1 = C_1 e^{-i\omega t}, \quad x_2 = C_2 e^{-i\omega t + \ln(t+1)} = C_2 (t+1) e^{-i\omega t}.$$

Если  $t \rightarrow +\infty$ , то функция  $x_1(t)$  ограничена, а функция  $x_2(t)$  – нет. Следовательно, в этом случае система по отношению к свойству

ограниченности решений неустойчива.

В двух последующих параграфах мы рассмотрим условия устойчивости линейных систем именно по отношению к упомянутым в примере свойствам решений: свойству стремления к нулю при  $t \rightarrow +\infty$  и свойству ограниченности.

### 17. Лемма об интегральном неравенстве

**Лемма 24.2.** Пусть  $u(t) \geq 0$  и  $v(t) \geq 0$  при всех  $t > 0$ . Тогда, если для всех  $t \geq 0$  будет

$$u(t) \leq c_1 + \int_0^t u(s)v(s)ds, \quad (24.68)$$

то для всех  $t \geq 0$

$$u(t) \leq c_1 e^{\int_0^t v(s)ds}. \quad (24.69)$$

■ Для доказательства перепишем (24.68) так

$$\frac{u(t)}{c_1 + \int_0^t u(s)v(s)ds} \leq 1, \quad (24.70)$$

или, учитывая, что  $v(t) \geq 0$ , обе части неравенства (24.70) умножим на  $v(t)$ , тогда получим

$$\frac{u(t)v(t)}{c_1 + \int_0^t u(s)v(s)ds} \leq v(t).$$

Интегрируя обе части неравенства, получим

$$\ln \left( c_1 + \int_0^t u(s)v(s)ds \right) - \ln c_1 \leq \int_0^t v(s)ds,$$

откуда

$$c_1 + \int_0^t u(s)v(s)ds \leq c_1 e^{\int_0^t v(s)ds},$$

а значит, в силу (24.68), тем более выполняется неравенство (24.69). □

### 18. Теоремы о решении линейных систем с малыми возмущениями

**Теорема 24.16.** Если все решения невозмущенного уравнения (24.43)

ограничены, и  $\int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty$ , то все решения уравнения (24.67) ограничены.

■ Приступая к доказательству, перепишем уравнение (24.67) так

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + B(t)\bar{x}.$$

Последнее уравнение формально можно рассматривать как неоднородное, а значит, на основании формулы (24.62),

$$\bar{x}(t) = X(t)\bar{x}_0 + \int_0^t X(t-s)B(s)\bar{x}(s)ds,$$

где  $X(t)$  – фундаментальная матрица уравнения (24.43). Отсюда, при обычных предположениях о нормах,

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \|X(t)\| \cdot \|\bar{x}_0\| + \int_0^t \|X(t-s)\| \cdot \|B(s)\| \|\bar{x}(s)\| ds. \quad (24.71)$$

Из условия следует, что все элементы матрицы  $X(t)$  ограничены, а значит, при всех  $t \geq 0$  будет  $\|X(t)\| \leq c_1$ , где  $c_1$  – некоторое число. Тогда из неравенства (24.71) получим

$$\|\bar{x}(t)\| \leq c_1 \|\bar{x}_0\| + \int_0^t c_1 \|B(s)\| \cdot \|\bar{x}(s)\| ds$$

или

$$\|\bar{x}(t)\| \leq c_1 \|\bar{x}_0\| + \int_0^t \|\bar{x}(s)\| \cdot (c_1 \|B(s)\|) ds.$$

Отсюда, в силу доказанной выше леммы, следует, что

$$\|\bar{x}(t)\| \leq c_1 \|\bar{x}_0\| e^{c_1 \int_0^t \|B(s)\| ds},$$

а так как  $\int_0^{\infty} \|B(s)\| ds < \infty$ , то и  $\|\bar{x}(t)\|$  при всех  $t \geq 0$  не превосходит некоторой константы,

$$\|\bar{x}(t)\| \leq c_1 \|\bar{x}_0\| e^{c_1 \int_0^{\infty} \|B(s)\| ds},$$

откуда и следует ограниченность всех вектор-функций  $\bar{x}(t)$ . □

**Пример 24.10.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + \frac{1}{t^2 + 1}x \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 2y - \frac{2}{(t+1)^2}y \end{cases}. \quad (24.72)$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

имеет собственное значение  $\lambda_{1,2} = \pm i$ , а значит, все решения невозмущенной системы, на основании теоремы 24.12, ограничены.

Далее,

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2 + 1} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{(t+1)^2} \end{pmatrix},$$

откуда легко следует, что  $\int_0^{\infty} \|B(s)\| ds < \infty$ . На основании теоремы 24.16, все решения возмущенной системы (24.72) ограничены.

**Теорема 24.17.** Пусть все решения уравнения (24.43) стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ . Тогда можно указать такую константу  $c > 0$ , что условие  $\|B(t)\| \leq c$  повлечет за собой стремление к нулю и всех решений возмущенного уравнения (24.67).

■ Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – собственные значения матрицы  $A$ . Поскольку все решения уравнения (24.43) стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , то на основании теоремы 24.11  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \forall k = \overline{1, n}$ .

Обозначим  $a = \min |\operatorname{Re} \lambda_k|$ , т.е.  $a$  – расстояние спектра от мнимой оси.

Норма каждого решения уравнения (24.43), как отмечалось выше, не превосходит величины  $c_k e^{-at} t^n$ . По тогда существует такое число  $h > 0$ , что при всех  $t \geq 0$  будет и

$$\|X(t)\| \leq h e^{-at} t^n.$$

Перепишем это так:

$$\|X(t)\| \leq h e^{-at} e^{-\gamma t} t^n,$$

где  $\gamma = a_1 - a$  – достаточно малое число. По, очевидно, существует такое  $M > 0$ , что  $e^{-\gamma t} t^n \leq M, \forall t \geq 0$  (рис. 24.2).

Следовательно, при всех  $t \geq 0$

$$\|X(t)\| \leq c M e^{-at},$$

т.е.

$$\|X(t)\| \leq c_2 e^{-at}.$$

Поэтому из неравенства (24.71) получим

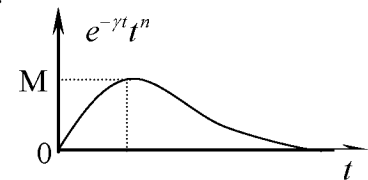


Рис. 24.2

$$\|\bar{x}(t)\| \leq c_2 e^{-a_1 t} \|\bar{x}_0\| + \int_0^t c_2 e^{-a_1(t-s)} c_1 \|\bar{x}(s)\| ds,$$

или

$$e^{a_1 t} \|\bar{x}(t)\| \leq c_2 \|\bar{x}_0\| + \int_0^t e^{a_1 s} \|\bar{x}(s)\| c_1 c_2 ds,$$

а значит, на основании леммы 24.2,

$$e^{a_1 t} \|\bar{x}(t)\| \leq c_2 \|\bar{x}_0\| e^{\int_0^t c_1 c_2 ds},$$

т.е.

$$e^{a_1 t} \|\bar{x}(t)\| \leq c_2 \|\bar{x}_0\| e^{c_1 c_2 t},$$

а значит,

$$\|\bar{x}(t)\| \leq c_2 \|\bar{x}_0\| e^{(c_1 c_2 - a_1)t}.$$

Отсюда следует, что если  $c_1 < \frac{a_1}{c_2}$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}(t)\| = 0$ . По числа  $a_1$  и  $c_2$  зависят от матрицы  $A$ , а значит, и число  $c_1$ , удовлетворяющее неравенству  $c_1 < \frac{a_1}{c_2}$ , зависит от матрицы  $A$ . Тем самым теорема доказана.  $\square$

Возьмем теперь уравнение с переменной матрицей

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A(t)\bar{x}$$

и «возмутим» ее матрицей  $B(t)$ . Получим уравнение

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = [A(t) + B(t)]\bar{x}. \quad (24.73)$$

**Теорема 24.18.** Пусть все решения невозмущенного уравнения (24.15) ограничены и пусть

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty; \quad \text{б) } \int_{t_0}^{\infty} SpA(t) dt \geq c_1,$$

где  $c_1$  – некоторое число. Тогда и все решения уравнения (24.73) ограничены.

■Поскольку матрица  $A(t)$  – переменная, то следует воспользоваться не формулой (24.62), и более общей формулой (24.58). Для матрицы  $X$  эта формула запишется так:

$$\bar{x}(t) = X(t)\bar{x}_0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)\bar{\varphi}(s)ds.$$

Поэтому, записав возмущенное уравнение в виде неоднородного со

свободным членом  $\bar{\varphi}(t) = B(t)\bar{x}$ , получим

$$\bar{x}(t) = X(t)\bar{x}_0 + \int_0^t X(t)X^{-1}(s)B(s)\bar{\varphi}(s)ds,$$

откуда

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \|X(t)\| \cdot \|\bar{x}_0\| + \int_0^t \|X(t)\| \cdot \|X^{-1}(s)\| \cdot \|B(s)\| \cdot \|\bar{x}(s)\| ds. \quad (24.74)$$

Из условия теоремы следует, что  $\|X(t)\| \leq c$ , где  $c$  – некоторое число. Далее, пусть  $W(t) = \text{Det}X(t)$ . Тогда  $W(t) = 1$ , и формула Лиувилля (24.42) дает

$$W(t) = e^{\int_0^t \text{Sp}A(s)ds}. \quad (24.75)$$

Условие б) означает, что при  $t \rightarrow \infty$  величина  $\int_{t_0}^t \text{Sp}A(s)ds$  не стремится к  $-\infty$ , а значит, на основании равенства (24.75), не будет  $W(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

$$\text{Det}X(t) \geq c_1 > 0.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что матрица  $X^{-1}(t)$  остается ограниченной при  $t \rightarrow +\infty$ , т.е. существует такое  $c_3$ , что  $\|X^{-1}(t)\| \leq c_3, \forall t \geq t_0$ .

Учитывая все сказанное, получим из (24.74)

$$\|\bar{x}(t)\| \leq c\|\bar{x}_0\| + \int_{t_0}^t c\|\bar{x}(s)\|c_3\|B(s)\|ds.$$

а значит, на основании леммы 24.2,

$$\|\bar{x}(t)\| \leq c\|\bar{x}_0\|e^{\int_{t_0}^t cc_3\|B(s)\|ds},$$

и, тем более,

$$\|\bar{x}(t)\| \leq c\|\bar{x}_0\|e^{cc_3 \int_{t_0}^{\infty} \|B(s)\| ds}.$$

Это неравенство, благодаря условию а), свидетельствует об ограниченности всех  $\bar{x}(t)$ . □

## 19. Теоремы об ограниченности решений некоторых линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка

Рассмотрим уравнение



$$\frac{d^2x}{dt^2} + [1 + \psi(t)]x = 0. \quad (24.76)$$

Если  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$ , то это уравнение при больших  $t$  «близко» к уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0,$$

каждое решение, которого имеет вид  $x = M \cos t + N \sin t$ , а значит ограничено. Возникает вопрос: будут ли в этом случае ограничены и все решения уравнения (24.76). Можно привести пример, показывающий, что одного только условия  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = 0$  недостаточно для ограниченности всех решений уравнения (24.76).

Уравнение (24.76) можно заменить эквивалентной ему системой двух уравнений 1-го порядка, и применить к ним теоремы 24.16 и 24.17. Однако, благодаря специальному виду уравнения (24.76) (в основном, благодаря отсутствию члена с  $\frac{dx}{dt}$ ), для него можно получить некоторые дополнительные результаты.

**Теорема 24.19.** Пусть в уравнении (24.76) выполнены условия:

а)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = 0$ ;

б)  $\int_0^{\infty} |\psi'(t)| dt < \infty$ .

Тогда все решения этого уравнения ограничены.

■ Умножим обе части уравнения (24.76) на  $\frac{dx}{dt}$  и проинтегрируем в интервале  $[t_0, t]$ .

Получим

$$\int_{t_0}^t \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} dt - \int_{t_0}^t x \frac{dx}{dt} dt + \int_{t_0}^t \psi(t) x \frac{dx}{dt} dt = 0,$$

т.е.

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{x^2}{2} + \int_{t_0}^t \psi(t) x \frac{dx}{dt} dt = 0,$$

или, после интегрирования по частям,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \psi(t) x^2 - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \psi'(t) x^2 dt = c_1. \quad (24.77)$$

Возьмем  $t_0$  настолько большим, чтобы при  $t \geq t_0$  было  $1 + \psi(t) \geq \frac{1}{2}$  (это

возможно в силу условия а)). Тогда для  $t \geq t_0$  будем иметь

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \psi'(t) x^2 dt \leq c_1.$$

В частности,

$$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \psi'(t) x^2 dt \leq c_2,$$

т.е.

$$x^2 \leq 4c_2 + 2 \int_{t_0}^t \psi'(t) x^2 dt$$

и, тем более,

$$x^2 \leq 4c_2 + 2 \int_{t_0}^t |\psi'(t)| x^2 dt,$$

причем, как легко проверить,  $c_2 \geq 0$ . Тогда, в силу леммы 24.2

$$x^2 \leq 4c_2 e^{\int_{t_0}^t |\psi'(t)| dt}, \text{ и, тем более, } x^2 \leq 4c_2 e^{\int_{t_0}^{\infty} |\psi'(t)| dt}$$

откуда на основании условия б), следует ограниченность функции  $x(t)$ .

Заметим, что из неравенства (24.76) легко следует, что в условиях теоремы величина  $\frac{dx}{dt}$  также остается ограниченной.

Обратимся теперь к уравнению более общего вида, чем (10),

$$\frac{dx}{dt} + [1 + \varphi(t) + \psi(t)]x = 0. \quad (24.78)$$

**Теорема 24.20.** Пусть выполняются условия

$$\text{а) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = 0, \text{ б) } \int_0^{\infty} |\psi'(t)| dt < \infty, \text{ в) } \int_0^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty.$$

Тогда все решения уравнения (24.78) ограничены.

Заметим, что формально уравнение (24.78) имеет тот же вид, что и (24.76). Однако из условий б) и в) следует, что  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  – это функции, вообще говоря, различного вида.

■ На основании теоремы 24.19 и замечания к ней, все решения уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + [1 + \psi(t)]u = 0 \quad (24.79)$$

ограничены вместе со своими производными. Полагая  $u = u_1, \frac{du}{dt} = u_2,$

получим вместо уравнения (24.79) систему

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1 \\ \frac{du_2}{dt} = -(1 + \psi(t))u_1 \end{cases}, \quad (24.80)$$

все решения которого ограничены.

Уравнение же (24.78) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -(1 + \psi(t) + \varphi(t))x_1 \end{cases}. \quad (24.81)$$

Матрица этой системы отличается от матрицы системы (24.80) на матрицу

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\varphi(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая  $\|B(t)\| = \|B(t)\|_2$ , получим  $\|B(t)\| = 2|\varphi(t)|$ , и, в силу условия в),

$\int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty$ . Далее, в данном случае

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + \psi(t)) & 0 \end{pmatrix},$$

а значит,  $SpA(t) = 0$ , так что и  $\int_0^{\infty} SpA(t) dt = 0 \geq c_1$ , где  $c$  – любое

неположительное число. Таким образом, для системы (24.81) выполняются условия теоремы 24.18. В силу этой теоремы, на основании установленной выше ограниченности всех решений системы (24.80) приходим к ограниченности всех решений системы (24.81), и даже вместе со своими производными.

**Пример 24.11.** Для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{t+1}} + \frac{\sin(e^t)}{\sqrt{(t+1)^3}} \right) x = 0$$

условия теоремы 24.20 выполняются, а значит, все решения этого уравнения ограничены вместе со своими производными. При этом, используя теорему 24.20, мы не можем поменять ролями функции  $\psi(t)$  и  $\varphi(t)$ , поскольку для

функции  $\frac{1}{\sqrt{t+1}}$  выполняется условие б), но не выполняется условие в), а для функции  $\frac{\sin(e')}{\sqrt{(t+1)^2}}$ , наоборот, не выполняется условие б), но выполняется условие в).

## 20. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Общие понятия

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (24.82)$$

с начальными условиями

$$y|_{x=a} = y_0, \quad y'|_{x=a} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=a} = y_0^{(n-1)}. \quad (24.83)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (24.84)$$

На основании (24.83) получим отсюда

$$\begin{cases} \varphi(a, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0 \\ \varphi'(a, C_1, C_2, \dots, C_n) = y'_0 \\ \dots \\ \dots \\ \varphi^{(n-1)}(a, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0^{(n-1)} \end{cases}.$$

Если условия теоремы о существовании и единственности решения выполнены, то из этой системы можно найти, и притом единственным образом, значения  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , подставляя которые в (24.84), получим искомое частное решение.

Задачу (24.82), (24.83), т.е. задачу с начальными условиями, называют *задачей Коши*. Она является *одноточечной* в том смысле, что в (24.83) входит только одна точка:  $x = a$ .

Задача называется *двухточечной*, если уравнение (24.82) сопровождается условиями, содержащими две фиксированные точки:  $a$  и  $b$ , т.е. если они имеют вид:

$$\begin{cases} g_1(y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a); y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)) = 0 \\ g_2(y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a); y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)) = 0 \\ \dots \\ g_n(y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a); y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)) = 0 \end{cases} \quad (24.85)$$

При этом предполагается, что решение задачи (24.82), (24.85) ищется на отрезке  $[a, b]$ . Тем самым условия (24.85) являются условиями на концах отрезка, в связи с чем их называют *краевыми*. Задачу (24.82), (24.85), в отличие от задачи Коши, называют *краевой задачей*.

Краевые условия называют *разделёнными*, если каждое из них содержит только одну из точек  $a$  и  $b$ .

**Пример 24.12.** Пусть имеется уравнение

$$y'' = f(x, y, y')$$

с краевыми условиями

$$y(a) = A, \quad y'(b) = B.$$

Это значит, что ищется интегральная кривая, проходящая через точку  $(a, A)$  и пересекающая прямую  $x = b$  над углом  $\varphi$ , таким, что  $\operatorname{tg} \varphi = B$ .

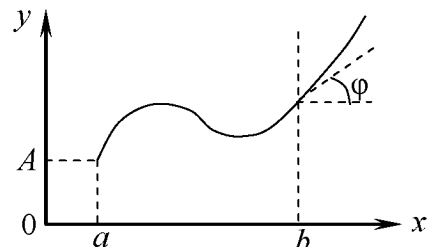


Рис. 24.3

2. Пусть балка длины  $l$  левым концом горизонтально заделана в стену, а правый ее конец свободен. Уравнение прогиба имеет вид

$$ay^{IV} + q(x) = 0,$$

где  $a$  зависит от жёсткости балки, а  $q(x)$  – от её плотности.



Рис. 24.4

Краевые условия имеют в этом случае вид:

$$y(0) = 0,$$

$$y'(0) = 0 \text{ – в силу горизонтальности заделки,}$$

$$y''(l) = 0 \text{ – в силу отсутствия изгибающего момента на свободном конце,}$$

$$y'''(l) = 0 \text{ – в силу отсутствия тангенциальной силы.}$$

Если изменить физические условия на концах, то изменятся и краевые условия.

Папример, если балка стоит концами на опорах,

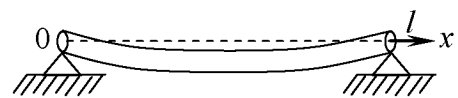


Рис. 24.5

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y''(l) = 0.$$

*Краевая задача может:*

- 1) иметь единственное решение;
- 2) иметь свыше одного решения;
- 3) не иметь решения.

**Пример 24.13.** Рассмотрим уравнение  $y'' + y = 0$ . Его общее решение:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Зададим краевые условия:

- 1)  $y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ . Тогда имеется единственное решение:  $y = \sin x$ .
- 2)  $y(0) = 0, y(\pi) = 0$ . Тогда существует бесчисленное множество решений:  $y = C \sin x$ .
- 3)  $y(0) = 0, y(\pi) = 1$ . В этом случае решения нет.

В дальнейшем всегда будем предполагать, что рассматриваемая краевая задача имеет решение и притом – единственное.

Краевая задача называется линейной, если и уравнение (24.82) и краевые условия (24.85) линейны относительно неизвестной функции. Папример, линейная краевая задача для уравнений 2-го порядка имеет в общем случае вид

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (24.86)$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + \beta_{11}y(b) + \beta_{12}y'(b) = \gamma_1 \\ \alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + \beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b) = \gamma_2 \end{cases} \quad (24.87)$$

Если  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ , то линейные краевые условия (24.82) называются однородными.

## 21. Редукция линейной краевой задачи к задаче Коши

Для простоты записей будем рассматривать задачу 2-го порядка, т.е. задачу (24.86), (24.87).

Решим сначала соответствующее уравнению (24.86) однородное уравнение

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0 \quad (24.88)$$

с начальными условиями

$$u(a) = 1, u'(a) = 0. \quad (24.89)$$

Это задача Коши, и её можно решить любым из известных методов (вообще говоря, численных). Пусть  $u_1(x)$  – решение задачи (24.88), (24.89).

Решим теперь это уравнение (24.87), но с начальными условиями

$$u(a) = 0, u'(a) = 1. \quad (24.90)$$

Пусть  $u_2(x)$  – соответствующее решение.

Из (24.89) и (24.90) следует, что  $u_2(x) \neq cu_1(x)$ , а значит,  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  линейно независимы. По тогда общее решение уравнения (24.88):

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

Следовательно, общее решение уравнения (5) запишется так

$$y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + v(x), \quad (24.91)$$

где  $v(x)$  – какое-нибудь частное решение уравнения (24.86), например, удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$y(a) = 0, \quad y'(a) = 0. \quad (24.92)$$

Теперь надо подобрать  $c_1$  и  $c_2$  так, чтобы удовлетворялись краевые условия (24.87). Имеем из (24.91) в силу (24.89), (24.90) и (24.92)

$$\begin{aligned} y(a) &= c_1 \\ y(b) &= c_1 u_1(b) + c_2 u_2(b) + v(b) \\ y'(a) &= c_1 \\ y'(b) &= c_1 u_1'(b) + c_2 u_2'(b) + v'(b). \end{aligned}$$

Подставляя это в (24.87), получим систему вида

$$\begin{cases} \gamma_{11}c_1 + \gamma_{12}c_2 = \delta_1 \\ \gamma_{21}c_1 + \gamma_{22}c_2 = \delta_2 \end{cases}$$

откуда находятся  $c_1$  и  $c_2$ .

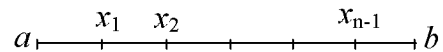


Рис. 24.6

**Примечание.** Предположим, что  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  и  $v(x)$  найдены численным методом с шагом  $h$ . Тогда для нахождения, например,  $v'(b)$  можно приближённо положить

$$v'(b) = \frac{v(b) - v(x_{n-1})}{h}.$$

Существует и более точная формула для производной на конце отрезка (см. ниже).

## 22. Редукция краевой задачи к уравнениям в конечных разностях

Возьмём сначала нелинейное уравнение

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (24.93)$$

но с линейными краевыми условиями (24.87). Разобьём  $[a, b]$  на  $n$  равных

частей точками  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  с шагом  $h = \frac{b-a}{n}$ . Тогда для каждого

$k = 1, 2, \dots, n-1$  получим

$$y_k'' = f(x_k, y_k, y_k'). \quad (24.94)$$

где  $y_k = y(x_k)$ . Здесь надо приближённо выразить  $y_k'$  и  $y_k''$  через значения  $y(x)$  в узлах  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Для этого запишем ряды Тейлора

$$y_{k+1} = y_k + y_k' h + \frac{y_k''}{2!} h^2 + \frac{y_k'''}{3!} h^3 + \dots$$

$$y_{k-1} = y_k - y_k' h + \frac{y_k''}{2!} h^2 - \frac{y_k'''}{3!} h^3 + \dots$$

отсюда

$$y_{k+1} - y_{k-1} = 2y_k' h + O(h^3),$$

$$y_{k+1} + y_{k-1} = 2y_k h + y_k'' h^2 + O(h^4),$$

а значит

$$y_k' = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O(h^2), \quad y_k'' = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O(h^2).$$

Итак, с одинаковой степенью точности, а именно, с точностью до  $O(h^2)$ , можно положить

$$y_k' = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}, \quad y_k'' = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}. \quad (24.95)$$

Подставляя это в (24.94), получим

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = f\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}\right). \quad (24.96)$$

Это – т.н. конечно-разностный аналог дифференциального уравнения (24.93).

Поскольку в (24.96) будет  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , то (24.96) есть система  $n-1$  уравнений с  $n+1$  неизвестными:  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , причем каждое уравнение содержит только три неизвестных. Два недостающих уравнения получим из краевых условий. По в них входят  $y'(a)$  и  $y'(b)$ . Для нахождения  $y'(a)$  первая из формул (24.95) не годится, т.к. она требует введения  $y_{-1}$ . Поэтому запишем равенства

$$y_1 = y_0 + y_0' h + \frac{y_0''}{2!} h^2 + \frac{y_0'''}{3!} h^3 + \dots$$

$$y_2 = y_0 + y_0'(2h) + \frac{y_0''}{2!} (2h)^2 + \frac{y_0'''}{3!} (2h)^3 + \dots$$

Отсюда

$$4y_1 - y_2 = 3y_0 + 2hy_0' + O(h^3),$$

значит



$$y'_0 = \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{2h} + o(h^2).$$

Аналогично поступаем и в точке  $x = b$ . Имеем

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= y_n + y'_n h + \frac{y''_n}{2!} h^2 + \frac{y'''_n}{3!} h^3 + \dots \\ y_{n-2} &= y_n + y'_n (2h) + \frac{y''_n}{2!} (2h)^2 + \frac{y'''_n}{3!} (2h)^3 + \dots, \end{aligned}$$

откуда

$$y_{n-2} - 4y_{n-1} = -3y_n + 2y'_n h + o(h^3),$$

а значит

$$y'_n = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h} + o(h^2).$$

Итак, с той же степенью точности:  $o(h^2)$  будем иметь

$$y'(a) = \frac{4y_1 - 3y_0 - y_2}{2h}, \quad y'(b) = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h}.$$

Подставляя это в (24.87), получим два уравнения с неизвестными  $y_0, y_1, y_2, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$ . Следовательно, для неизвестных  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  получим замкнутую систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} &= f\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_0}{2h}\right) \\ \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} &= f\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}\right) \\ \dots & \\ \dots & \\ \dots & \\ \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} &= f\left(x_{n-1}, y_{n-1}, \frac{y_n - y_{n-2}}{2h}\right) \\ L_1(y_0, y_1, y_2, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n) &= 0 \\ L_2(y_0, y_1, y_2, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (24.97)$$

Эта система, вообще говоря, не является алгебраической. Однако, если исходное уравнение линейно,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

то соответствующее конечно-разностное уравнение имеет вид

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p(x_k) \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q(x_k)y_k = f(x_k), \quad (24.98)$$

причём  $p(x_k)$ ,  $q(x_k)$ ,  $f(x_k)$  – известные числа. В этом случае система (24.97) – линейная. Чем точнее требуется найти решение исходной задачи, тем меньше надо брать  $h$ , а значит, тем большим будет порядок линейной системы.

### 23. Метод прогонки решения конечно-разностных уравнений линейной краевой задачи

Возьмём линейное уравнение (24.86). Ему отвечает конечно-разностное уравнение (24.98). Краевые условия для простоты записей возьмём следующие:

$$y(a) = r, \quad y(b) = s,$$

где  $r$  и  $s$  – известные числа.

Перепишем (24.98) так

$$a_k y_{k+1} - 2b_k y_k + c_k y_{k-1} = f_k.$$

При  $k = 1$  имеем

$$a_1 y_2 - 2b_1 y_1 + c_1 y_0 = f_1,$$

откуда

$$y_1 = \frac{a_1}{2b_1} y_2 + \frac{c_1 r - f_1}{2b_1}.$$

При  $k = 2$  получим

$$a_2 y_3 - 2b_2 y_2 + c_2 y_1 = f_2,$$

т.е.

$$a_2 y_3 - 2b_2 y_2 + c_2 \left( \frac{a_1}{2b_1} y_2 + \frac{c_1 r - f_1}{2b_1} \right) = f_2,$$

откуда

$$y_2 = \frac{a_2}{2b_2 - c_2 \frac{a_1}{2b_1}} y_3 + \frac{c_2 \frac{c_1 r - f_1}{2b_1} - f_2}{2b_2 - c_2 \frac{a_1}{2b_1}}.$$

Теперь выражаем  $y_3$  через  $y_4$  и т. д. В результате получим

$$\begin{aligned}
y_1 &= A_1 y_2 + B_1 \\
y_2 &= A_2 y_3 + B_2 \\
&\dots \dots \dots \\
&\dots \dots \dots \\
y_{n-2} &= A_{n-2} y_{n-1} + B_{n-2} \\
y_{n-1} &= A_{n-1} s + B_{n-1},
\end{aligned}$$

причём

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{a_1}{2b_1}, \quad B_1 = \frac{c_1 r - f_1}{2b_1}, \\
A_2 &= \frac{a_2}{2b_2 - c_2 A_1}, \quad B_2 = \frac{c_2 B_1 - f_2}{2b_2 - c_2 A_1}, \\
&\dots \dots \dots \\
&\dots \dots \dots \\
A_{n-1} &= \frac{a_{n-1}}{2b_{n-1} - c_{n-1} A_{n-2}}, \quad B_{n-1} = \frac{c_{n-1} B_{n-2} - f_{n-1}}{2b_{n-1} - c_{n-1} A_{n-2}}
\end{aligned}$$

По этим формулам вычисляем  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_{n-1}, B_{n-1}$ . Теперь из равенств

$$\begin{aligned}
y_{n-1} &= A_{n-1} s + B_{n-1} \\
y_{n-2} &= A_{n-2} y_{n-1} + B_{n-2} \\
&\dots \dots \dots \\
&\dots \dots \dots \\
y_1 &= A_1 y_2 + B_1
\end{aligned}$$

последовательно находим  $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1$ .

Вычисление чисел  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_{n-1}, B_{n-1}$  называют прямым ходом прогонки, а нахождение  $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1$  – обратным ходом.

Метод прогонки применим и в случае линейных краевых условий общего вида. При изменении краевых условий меняются только формулы прямого и обратного хода.

***Достоинства метода прогонки:***

- 1) число арифметических операций пропорционально числу узлов;
- 2) все вычисления легко запрограммировать;
- 3) погрешности вычислений, как можно доказать, не накапливаются.

## 24. Дифференциальные уравнения в частных производных 1-го порядка. Общие сведения

Уравнение в частных производных 1-го порядка имеет вид

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \quad (24.99)$$

Здесь  $x$  и  $y$  – независимые переменные, а  $z(x, y)$  – неизвестная функция.

Решением уравнения (24.99) называется каждая функция  $z = f(x, y)$ , которая, будучи подставлена в это уравнение вместе со своими частными производными, обращает его в тождество.

Возьмём конкретное уравнение

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Покажем, что его решением является функция  $z = \Phi(x^2 + y^2)$ , где  $\Phi(t)$  – произвольная дифференцируемая функция. Действительно, в этом случае

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \Phi'(x^2 + y^2)2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \Phi'(x^2 + y^2)2y,$$

а значит

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 2\Phi'(x^2 + y^2)(yx - xy) \equiv 0.$$

Итак, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, здесь общее решение содержит в себе не произвольную постоянную, а произвольную функцию.

Для нахождения конкретного частного решения можно задать начальное условие, например, такого вида:

$$z|_{y=y_0} = \varphi(x), \quad (24.100)$$

где  $\varphi(x)$  – известная функция. При определённых условиях для уравнения (24.99) выполняется теорема о существовании и единственности решения.

Выясним геометрический смысл уравнения (24.99). Пусть  $f(x, y)$  – решение этого уравнения. Тогда поверхность  $z = f(x, y)$  называется интегральной поверхностью уравнения (24.99). Возьмём на ней некоторую точку  $(x_0, y_0, z_0)$ . Тогда

$$F\left(x_0, y_0, z_0, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right) = 0 \quad (24.101)$$

Касательная плоскость в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  имеет уравнение

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

Следовательно,

$$\vec{N}_0 = \left\{ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1 \right\} \quad \text{есть вектор}$$

нормали к интегральной поверхности. Его проекции связаны с  $x_0, y_0, z_0$  соотношением (24.101).

Таким образом, уравнение (24.99), с геометрической точки зрения, показывает, как ориентирована в каждой данной точке  $(x, y, z)$  касательная плоскость к проходящей через эту

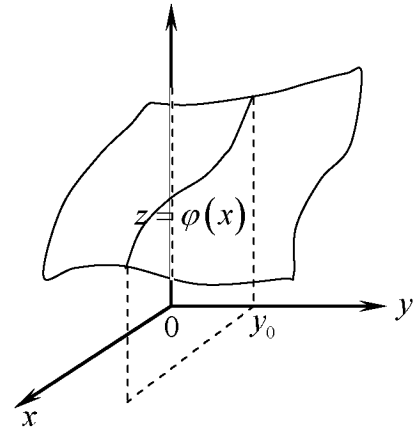


Рис. 24.7

точку интегральной поверхности уравнения. Начальное условие вида (24.100) означает, что искомая интегральная поверхность должна пересекать плоскость  $y = y_0$  по заданной линии  $z = \varphi(x)$ .

## 25. Интегрирование линейных уравнений в частных производных 1-го порядка

Уравнение (1) называется линейным, если оно имеет вид

$$P(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + J(x, y)z = H(x, y), \quad (24.102)$$

где  $P(x, y), Q(x, y), J(x, y)$  и  $H(x, y)$  – известные функции. В частности, при  $H(x, y) \equiv 0$ , линейное уравнение называется однородным.

Если функции  $P, Q, J$ , и  $H$  зависят не только от  $x$  и  $y$ , но и от  $z$ , то уравнение называют квазилинейным.

Возьмём сначала простейшее однородное линейное уравнение вида

$$P(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (24.103)$$

где  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  не обращаются одновременно в нуль.

Составим по нему обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)} \quad (24.104)$$

Его называют *характеристическим уравнением* для уравнения (5).

Пусть

$$\varphi(x,y) = c \quad (24.105)$$

– общий интеграл уравнения (24.104). Покажем, что тогда  $z = \varphi(x,y)$  есть решение уравнения (24.103).

Дифференцируя (24.105), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \equiv 0. \quad (24.106)$$

По, в силу (24.104),  $dx$  и  $dy$  пропорциональны величинам  $P(x,y)$  и  $Q(x,y)$ .

Поэтому из (24.106) имеем

$$P(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + Q(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \equiv 0$$

Отсюда и следует, что  $z = \varphi(x,y)$  удовлетворяет уравнению (24.103).

Покажем, что и  $z = \Phi(\varphi(x,y))$ , где  $\Phi(t)$  – произвольная дифференцируемая функция, является решением уравнения (24.103). Имеем для этого  $z$

$$\begin{aligned} P(x,y) \frac{\partial z}{\partial x} dx + Q(x,y) \frac{\partial z}{\partial y} dy &= \Phi'(\varphi(x,y)) \left[ P(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + Q(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right] = \\ &= \Phi'(\varphi(x,y)) \cdot 0 \equiv 0, \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Петрудно показать, что формула  $z = \Phi(\varphi(x,y))$  даёт общее решение уравнения (24.103), т.е. что если  $g(x,y)$  – решение уравнения (24.103), то существует такая функция  $\Phi(t)$ , что  $g(x,y) = \Phi(\varphi(x,y))$ . Таким образом, беря в качестве  $\Phi(t)$  все дифференцируемые функции, мы получим все решения уравнения (24.103).

**Пример 24.14.** Проинтегрируем уравнение

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

с начальным условием  $z|_{y=1} = 2x$ .

Составляем характеристическое уравнение

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}.$$

Получим из него

$$\ln x = -\ln y + \ln c,$$

а значит

$$x = \frac{c}{y},$$

т.е.

$$xy = c.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$z = \Phi(xy).$$

Пачальное условие даёт

$$\Phi(x) = 2x.$$

Поэтому искомое частное решение

$$z = 2xy.$$

Таким образом, искомой интегральной поверхностью является гиперболический параболоид.

**Примечание.** Совершенно аналогично интегрируется простейшее однородное линейное уравнение для случая 3-х независимых переменных

$$P(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (24.107)$$

Составляем систему характеристических дифференциальных уравнений в симметричной форме

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

Пусть она имеет общий интеграл

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = c_1 \\ \varphi_2(x, y, z) = c_2 \end{cases}.$$

Тогда, как легко проверить,  $u = \varphi_1(x, y, z)$  и  $u = \varphi_2(x, y, z)$  есть решения уравнения (24.107), а общее его решение даётся формулой

$$u = \Phi[\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)],$$

где  $\Phi(t, \tau)$  – произвольная дифференцируемая функция.

## 26. Интегрирование квазилинейных уравнений в частных производных 1-го порядка

Рассмотрим уравнение

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad (24.108)$$

Заметим, что оно включает в себя как частный случай и неоднородное линейное уравнение (24.102).

Пусть  $v(x, y, z) = 0$  – какой-нибудь интеграл уравнения (24.108).

Дифференцируя это равенство по  $x$ , имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \text{ откуда } \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial z}}$$

(предполагается, что  $\frac{\partial v}{\partial z} \neq 0$ ). Совершенно аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial z}}.$$

Подставляя это в (24.108), получим

$$P(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (24.109)$$

Для интегрирования этого уравнения составляем систему

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \quad (24.110)$$

и находим её общий интеграл

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = c_1 \\ \varphi_2(x, y, z) = c_2 \end{cases},$$

после чего полагаем

$$v = \Phi[\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)].$$

Следовательно, общее решение уравнения (10) даётся формулой



$$\Phi[\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)] = 0.$$

**Пример 24.15.** Возьмём уравнение

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 3z. \quad (24.111)$$

Соответствующая система

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{3z}$$

имеет первые интегралы  $\frac{y}{x} = c_1$ ,  $\frac{z}{x^3} = c_2$ . Поэтому общий интеграл исходного

уравнения:  $\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x^3}\right) = 0$ , откуда  $\frac{z}{x^3} = \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$ , а значит  $z = x^3 \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$ .

Ввиду произвольности функции  $\Phi$ , функция  $\Psi$  также произвольна. Итак, общее решение уравнения (24.111) представляет собой множество всех однородных функций 3-й степени.

Выясним геометрический смысл решения уравнения (24.108). Для этого введём векторное поле  $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ . Тогда интегрирование системы (24.110) даёт векторные линии этого поля. Эти линии называются характеристиками уравнения (24.108).

Пусть  $v(x, y, z) = 0$  – произвольная интегральная поверхность уравнения (24.108). Возьмём на ней некоторую кривую

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (24.112)$$

Поскольку  $\vec{N} = \frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}$  – вектор нормали к интегральной поверхности, а  $\vec{\tau} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$  – вектор касательной к кривой, то должно быть  $(\vec{N}, \vec{\tau}) = 0$ , т.е.

$$\frac{\partial v}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial v}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial v}{\partial z}z'(t) = 0, \text{ или } \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz = 0.$$

Сравнивая это с (24.109), получим (ввиду произвольности  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$ ), что

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)},$$

откуда следует, что линия (24.112) является характеристикой уравнения.

Итак, любая линия, лежащая на интегральной поверхности уравнения (24.108), является его характеристикой, а значит, каждая интегральная поверхность «составлена» из характеристик данного уравнения.

### Задачи и упражнения к главе XXIV

1. Решить системы дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

$$1.1. \begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y \\ \dot{y} = 3x - y \end{cases}; x|_{t=0} = 1, y|_{t=0} = 3; \quad 1.14. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}; x|_{t=0} = -2, y|_{t=0} = -1$$

$$1.2. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}; x|_{t=0} = -1, y|_{t=0} = 2; \quad 1.15. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y \\ \dot{y} = 2x - 4y \end{cases}; x|_{t=0} = 3, y|_{t=0} = -2$$

$$1.3. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}; x|_{t=0} = 1, y|_{t=0} = 1; \quad 1.16. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 3x - 2y \end{cases}; x|_{t=0} = 3, y|_{t=0} = -2$$

$$1.4. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 3x - 2y \end{cases}; x|_{t=0} = 3, y|_{t=0} = -2; \quad 1.17. \begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}; x|_{t=0} = 2, y|_{t=0} = -2$$

$$1.5. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}; x|_{t=0} = 1, y|_{t=0} = -1; \quad 1.18. \begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y \\ \dot{y} = 3x - 2y \end{cases}; x|_{t=0} = 2, y|_{t=0} = -2$$

$$1.6. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x \end{cases}; x|_{t=0} = 2, y|_{t=0} = 3; \quad 1.19. \begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y \\ \dot{y} = 6x - 2y \end{cases}; x|_{t=0} = 1, y|_{t=0} = 5$$

$$1.7. \begin{cases} \dot{x} = 4x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}; x|_{t=0} = 4, y|_{t=0} = 1; \quad 1.20. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}; x|_{t=0} = -3, y|_{t=0} = 2$$

$$1.8. \begin{cases} \dot{x} = 5x - 4y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}; x|_{t=0} = -2, y|_{t=0} = 1; \quad 1.21. \begin{cases} \dot{x} = 5x - 4y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}; x|_{t=0} = -3, y|_{t=0} = 2$$

$$1.9. \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -x + 3y \end{cases}; x|_{t=0} = -1, y|_{t=0} = 1; \quad 1.22. \begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}; x|_{t=0} = 6, y|_{t=0} = -4$$

$$1.10. \begin{cases} \dot{x} = 6x + 2y \\ \dot{y} = 3x + 7y \end{cases}; x|_{t=0} = 1, y|_{t=0} = 5; \quad 1.23. \begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}; x|_{t=0} = 1, y|_{t=0} = 4$$

$$1.11. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}; x|_{t=0} = 3, y|_{t=0} = 2; \quad 1.24. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = 4x + 2y \end{cases}; x|_{t=0} = 3, y|_{t=0} = 2$$

$$1.12. \begin{cases} \dot{x} = 7x - 3y \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}; x|_{t=0} = 2, y|_{t=0} = -4; \quad 1.25. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}; x|_{t=0} = 6, y|_{t=0} = 5$$

$$1.13. \begin{cases} \dot{x} = 8x - 5y \\ \dot{y} = 5x - 2y \end{cases}; x|_{t=0} = -3, y|_{t=0} = 1;$$

2. Найти общие решения системы:

$$2.1. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z \\ \dot{y} = 5x - 3y + 3z \\ z = -x - 2z \end{cases}; \quad 2.10. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z \\ \dot{y} = -x + y + z \\ z = x - z \end{cases}; \quad 2.19. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = -x + 2y + z \\ z = x - y + 2z \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x + 4y \\ z = -2x + y + 2z \end{cases}; \quad 2.11. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ z = x - y + 2z \end{cases}; \quad 2.20. \begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y + 6z \\ \dot{y} = x + z \\ z = -2x + 4y - 3z \end{cases}$$

$$2.3. \begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 3z \\ \dot{y} = -2x - 6y + 13z \\ z = -x - 4y + 8z \end{cases}; \quad 2.12. \begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y - 2z \\ \dot{y} = x + z \\ z = 6x - 6y + 5z \end{cases}; \quad 2.21. \begin{cases} \dot{x} = x + 3z \\ \dot{y} = y + z \\ z = -x - y + z \end{cases}$$

$$2.4. \begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 4z \\ \dot{y} = 4x - 7y + 8z; \\ z = 6x - 7y + 7z \end{cases}$$

$$2.13. \begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \quad ; \\ z = x - z \end{cases}$$

$$2.22. \begin{cases} \dot{x} = -x + y - 2z \\ \dot{y} = 2x + z \\ z = 2x - y + 2z \end{cases}$$

$$2.5. \begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 7z \\ \dot{y} = x - 4y + 9z \quad ; \\ z = -4x + 5z \end{cases}$$

$$2.14. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z \\ \dot{y} = x + 2z \quad ; \\ z = -2x + y - z \end{cases}$$

$$2.23. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = -x + 2y + z \\ z = -x - y + 4z \end{cases}$$

$$2.6. \begin{cases} \dot{x} = 6x - 5y - 3z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 2z; \\ z = 2x - 2y \end{cases}$$

$$2.15. \begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z \\ \dot{y} = x + 2y - z; \\ z = x - y + 2z \end{cases}$$

$$2.24. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - z \\ \dot{y} = -3x - 2y + 3z \\ z = -x - y + 2z \end{cases}$$

$$2.7. \begin{cases} \dot{x} = 6x - 2y + 2z \\ \dot{y} = -2x + 5y \quad ; \\ z = 2x + 7z \end{cases}$$

$$2.16. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = x - 2y - 3z; \\ z = -x + y + 2z \end{cases}$$

$$2.25. \begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 3z \\ \dot{y} = 2x - 2y + z \quad . \\ z = -2x + y - 2z \end{cases}$$

$$2.8. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z \\ \dot{y} = x + y + z \quad ; \\ z = 4x - y + 4z \end{cases}$$

$$2.17. \begin{cases} \dot{x} = -2x + y - 2z \\ \dot{y} = x - 2y + 2z \\ z = 3x - 3y + 5z \end{cases}$$

$$2.9. \begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x + y - z; \\ z = 2x - y \end{cases}$$

$$2.18. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z \\ z = 2x - 4y \end{cases}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.:Физматгиз, 1959. – Т.1,2,3.
2. Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1964.
3. Будаков Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1956.
4. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. Вып. 1. – М.: Наука, 1967.
5. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.2 – М.: Наука, 1973.
6. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988.
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
9. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты). Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1983.
10. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. – 564 с.
11. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 466 с.
12. Филлипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1979. – 110 с.
13. Краснов М.Л., Киселев Н.И., Макаренко Г.И., Филлипов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высшая школа, 1978. – 286 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Часть 2

<b>Предисловие</b> .....	4
<b>XII. Криволинейные интегралы и интегралы по поверхности</b> .....	5
1. Криволинейные интегралы 1-го рода и их вычисление .....	5
2. Некоторые применения криволинейных интегралов 1-го рода .....	6
3. Интегралы по поверхности 1-го рода .....	8
4. Криволинейные интегралы 2-го рода .....	10
5. Вычисление криволинейных интегралов 2-го рода .....	12
6. Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода .....	14
7. Формула Грина-Римана .....	15
8. Условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования .....	17
9. Условие полного дифференциала .....	20
10. Нахождение функции по ее полному дифференциалу .....	22
11. Интегралы по поверхности 2-го рода .....	23
12. Формула Остроградского-Гаусса .....	28
13. Формула Стокса .....	29
14. Условия независимости криволинейного интеграла по пространственной дуге от формы дуги .....	32
<b>Задачи и упражнения к главе XII</b> .....	33
<b>XIII. Интегралы зависящие от параметра</b> .....	37
1. Определенные интегралы, зависящие от параметра .....	37
2. Дифференцирование и интегрирование определенных интегралов по параметру .....	40
3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра .....	44
4. Предельный переход по параметру под знаком несобственного интеграла .....	47
5. Непрерывность несобственного интеграла по параметру .....	48
6. Интегрирование и дифференцирование несобственных интегралов по параметру .....	49
7. О других признаках равномерной сходимости несобственных интегралов по параметру .....	55
8. Другие виды несобственных интегралов, зависящих от параметра .....	56
9. Гамма-функция и ее основные свойства .....	57

10.Формула Стирлинга .....	58
11.Производная гамма-функции .....	60
12.Бэта-функция .....	61
<b>XIV. Основы математической теории поля .....</b>	<b>63</b>
1. Понятие скалярного поля .....	63
2. Производная скалярного поля в данном направлении .....	64
3. Градиент скалярного поля .....	66
4. Свойства градиента .....	68
5. О плоскопараллельном поле .....	69
6. Векторное поле .....	70
7. Поток векторного поля через поверхность .....	73
8. Дивергенция векторного поля .....	75
9. Теорема Остроградского-Гаусса. Соленоидальное поле .....	78
10.Циркуляция и ротор векторного поля .....	80
11.Свойства ротора. Теорема Стокса .....	83
12.Потенциальное поле .....	85
13.Потенциал электрического поля .....	88
14.Символические операторы теории поля .....	91
15.Произвольные системы ортогональных криволинейных координат .....	92
16.Вычисление градиента, дивергенции, лапласиана и ротора в цилиндрических координатах .....	94
17.Градиент, дивергенция, лапласиан и ротор в сферических координатах .....	100
<b>XV. Обыкновенные дифференциальные уравнения .....</b>	<b>104</b>
1. Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям .....	104
2. Общие понятия, связанные с дифференциальными уравнениями .....	104
3. Простейшие сведения об уравнениях 1-го порядка .....	105
4. Уравнения с разделяющимися переменными .....	108
5. Уравнения, однородные в смысле Эйлера .....	109
6. Линейные уравнения 1-го порядка .....	111
7. Уравнение Бернулли .....	113
8. Геометрический смысл дифференциального уравнения 1-го порядка ...	115
9. Составление дифференциального уравнения 1-го порядка по его общему решению .....	115
10.Нахождение ортогональных траекторий семейств кривых .....	116
11.Особое решение уравнения 1-го порядка .....	118
12.Общие сведения о дифференциальных уравнениях высших порядков...	119

13.Простейшие случаи понижения порядка уравнений .....	121
14.Однородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка .....	124
15.Однородные линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами .....	128
16.Общие теоремы о неоднородных линейных уравнениях 2-го порядка ..	131
17.Линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида .....	132
18.Исследование простейших колебательных процессов .....	138
19.Интегрирование неоднородных линейных уравнений 2-го порядка методом вариации произвольных постоянных .....	141
20.Линейные уравнения высших порядков .....	143
<b>XVI. Первичные сведения о системах линейных дифференциальных уравнений .....</b>	<b>147</b>
1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши .....	149
2. Интегрирование системы дифференциальных уравнений (СДУ) путем сведения к одному уравнению более высокого порядка .....	150
3. Метод интегрируемых комбинаций .....	151
4. Симметричная форма системы дифференциальных уравнений .....	155
5. Интегрирование однородных линейных систем с постоянными коэффициентами .....	157
6. Неоднородные линейные системы дифференциальных уравнений (НДСДУ) .....	162
<b>XVII. Простейшие приближенные методы интегрирования Дифференциальных уравнений .....</b>	<b>170</b>
1. Общие замечания .....	170
2. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов ....	170
3. Интегрирование дифференциальных уравнений 1-го порядка конечно- разностным методом Эйлера .....	174
4. Оценка погрешности метода Эйлера в конечном интервале .....	176
5. Интегрирование нормальных систем 1-го порядка и уравнений высших порядков методом Эйлера .....	180
6. Интегрирование уравнений 1-го порядка методом Эйлера с полушагом .....	182
7. Общее описание метода Рунге-Кутты .....	185
8. Интегрирование дифференциальных уравнений методом Адамса-Штёрмера .....	187



<b>XVIII. Ряды</b> .....	190
1. Понятие о числовом ряде .....	190
2. Необходимый признак сходимости ряда .....	192
3. Сравнение рядов с положительными членами .....	192
4. Признак Даламбера .....	194
5. Интегральный признак Коши .....	197
6. Знакопеременные ряды .....	200
7. Знакопеременные ряды .....	201
8. Свойства абсолютно сходящихся рядов .....	203
<b>Задачи и упражнения к главе XVIII</b> .....	208
<b>XIX. Функциональные ряды</b> .....	210
1. Понятие о функциональном ряде .....	210
2. Равномерная сходимость функционального ряда .....	211
3. Непрерывность суммы функционального ряда .....	213
4. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов .....	214
5. Последовательности функций и их свойства .....	217
<b>Задачи и упражнения к главе XIX</b> .....	218
<b>XX. Степенные ряды</b> .....	219
1. Степенной ряд и область его сходимости .....	219
2. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов .....	221
3. Ряд Маклорена .....	223
4. Разложение функций $e^x$ , $\sin x$ , и $\cos x$ в ряд Маклорена .....	226
5. Ряд Маклорена для функций $(1+x)^m$ и $\arcsin x$ .....	228
6. Ряд Маклорена для функций $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$ .....	231
7. Вычисление интегралов при помощи рядов .....	231
8. Ряд Тейлора как обобщение ряда Маклорена .....	232
<b>Задачи и упражнения к главе XX</b> .....	233
<b>XXI. Ряды Фурье</b> .....	235
1. Некоторые предварительные сведения .....	235
2. Ряд Фурье для функции с периодом $2\pi$ .....	237
3. Теорема Римана-Лебега и ее следствия .....	239
4. Интеграл Дирихле .....	243
5. Принцип локализации .....	245
6. Сходимость ряда Фурье для кусочно-гладкой функции .....	246
7. Скорость убывания коэффициентов ряда Фурье .....	249

8. Ряды Фурье для четных и нечетных функций .....	250
9. Ряд Фурье функции с произвольным периодом .....	251
10. Тригонометрические ряды для функций, заданных на отрезке $[-l, l]$ ...	252
11. Комплексная форма ряда Фурье .....	254
12. Ряды Фурье по произвольным ортогональным и по ортонормированным системам функций .....	257
13. О разных понятиях близости двух функций в промежутке .....	259
14. Минимальное свойство коэффициентов ряда Фурье .....	260
15. Замкнутые системы функций .....	262
16. Замкнутость системы тригонометрических функций .....	264
17. Полнота системы тригонометрических функций .....	269
18. Обобщенное уравнение замкнутости .....	270
19. Геометрическая аналогия разложения функции в ряд Фурье .....	270
20. Разложение функций в ряд Фурье по системе, ортогональной с весом..	273
<b>Задачи к разделу XXI</b> .....	274
<b>XXII. Интеграл Фурье и преобразования Фурье</b> .....	278
1. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье .....	278
2. Одна предварительная формула .....	280
3. Представление функции интегралом Фурье .....	281
4. Аналогия между интегралом Фурье и рядами Фурье .....	283
5. Комплексная форма интеграла Фурье .....	284
6. Преобразование Фурье и его простейшие свойства .....	286
<b>XXIII. Элементы спектральной теории сигналов</b> .....	289
1. Спектральные характеристики периодических сигналов .....	289
2. О комплексном спектре периодического сигнала .....	290
3. Спектр непериодического сигнала .....	291
4. Теорема Рэлея и ее физический смысл .....	294
<b>XXIV. Системы линейных дифференциальных уравнений</b> .....	297
1. Основные сведения из векторно-матричного анализа .....	297
2. Нормальные линейные системы дифференциальных уравнений 1-го порядка .....	301
3. Теорема Коши о существовании и единственности решения нормальной системы дифференциальных уравнений .....	303
4. Пространство решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка .....	308
5. Фундаментальная матрица и ее свойства .....	310

6. Выражение решения однородной линейной системы через ее фундаментальную матрицу .....	313
7. Вронскиан и формула Лиувилля .....	315
8. Однородные линейные системы с постоянными коэффициентами .....	318
9. Представление фундаментальной матрицы однородной линейной системы с постоянными коэффициентами при помощи матричной экспоненты .....	328
10. Устойчивость и ограниченность решений однородной линейной системы с постоянными коэффициентами .....	329
11. Общее решение неоднородной линейной системы .....	331
12. Выражение решения неоднородной линейной системы при помощи матрицы Коши .....	332
13. Неоднородные линейные системы с постоянными коэффициентами ...	334
14. Понятие о резонансе в линейной динамической системе .....	336
15. Устойчивость и асимптотическое поведение решений систем линейных уравнений Устойчивость и ограниченность решений однородных линейных систем с постоянными коэффициентами .....	337
16. Понятие о возмущенной системе и ее устойчивости .....	339
17. Лемма об интегральном неравенстве .....	340
18. Теоремы о решении линейных систем с малыми возмущениями .....	340
19. Теоремы об ограниченности решений некоторых линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка .....	344
20. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Общие понятия .....	348
21. Редукция линейной краевой задачи к задаче Коши .....	350
22. Редукция краевой задачи к уравнениям в конечных разностях .....	351
23. Метод прогонки решения конечно-разностных уравнений линейной краевой задачи .....	354
24. Дифференциальные уравнения в частных производных 1-го порядка. Общие сведения .....	356
25. Интегрирование линейных уравнений в частных производных 1-го порядка .....	357
26. Интегрирование квазилинейных уравнений в частных производных 1-го порядка .....	360
<b>Задачи и упражнения к главе XXIV</b> .....	362
<b>Литература</b> .....	365

Навчальне видання

СЕНЧУК Юрій Федорович

## МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДЛЯ ІНЖЕНЕРІВ

### Частина II

Навчальний посібник

За редакцією проф. Л.В. Курпа

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка:

О.Р.Варичева  
К.І.Любицька

План 2006 р., п.47 /

Підп. до друку                      Формат 60x84 1/16. Папір офсет. №2  
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 23,9. Обл.-вид. арк. 25,83  
Наклад 500 прим. Зам. №            . Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ "ХПІ".  
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.  
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

---

Друкарня НТУ "ХПІ". 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21