МИПИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИПЫ

ПАЦИОПАЛЬПЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХПИЧЕСКИЙ ИПСТИТУТ»

СЕНЧУК Ю.Ф.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

Часть I

Учебное пособие

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета
протокол № 2 от 14. 05. 2003г.

ХАРЬКОВ 2003

ББК 22.161
С – 31
УДК 517 (07)

Рецензенти: О.М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф., Українська педагогічна академія.
Є.Г. Голоскоков, д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ “ХПІ”.

С – 31 Сенчук Ю.Ф. Математичний аналіз для инженерів: – Навч. посібник – Ч. І. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2003 – 408 стор. – Рос. мовою.

ISBN

Учебное пособие Ю.Ф. Сенчука «Математический анализ для инженеров» написано на базе курса лекций по математическому анализу, который автор читал на протяжении четырёх десятилетий студентам НТУ “ХПИ” с усиленной математической подготовкой. В первой части этого пособия изложены такие разделы: теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисление функций, зависящих от одной переменной, функции нескольких переменных, кратные интегралы. Все изложенные теоретические факты доказаны и проиллюстрированы большим количеством примеров и задач.

Книга будет полезна студентам инженерно-физического, физико-технического факультетов, всех факультетов машиностроительного профиля, а также для экономических специальностей. Безусловный интерес она должна вызвать у преподавателей, так как материал в ней излагается в соответствии с учебными программами указанных факультетов, что значительно облегчит подготовку к лекциям и практическим занятиям.

Навчальний посібник Ю.Ф. Сенчука «Математичний аналіз для інженерів» написано на базі курсу лекцій з математичного аналізу, який автор читав протягом чотирьох десятиліть студентам НТУ “ХПІ” із посиленою математичною підготовкою. У першій частині цього посібника викладено такі розділи: теорія границь, диференціальне й інтегральне числення функцій, що залежать від однієї змінної, функції декількох змінних, кратні інтеграли. Всі викладені теоретичні факти доведено і проілюстровано великою кількістю прикладів і задач.

Книга буде корисна студентам інженерно-фізичного, фізико-технічного факультетів, усіх факультетів машинобудівного профілю, а також для економічних фахів. Безумовний інтерес вона повинна викликати у викладачів, тому що матеріал у ній викладається відповідно до навчальних програм зазначених факультетів, що значно полегшить підготовку до лекцій і практичних занять.

The Yu.F. Senchuk’s school-book “The mathematical analysis for engineers” has been written on the based of course of lectures on the mathematical analysis. The author has read it to students of NTU “KhPI” with intensive mathematical studying during four ten years. In the first part of this school-book such sections are set out: the theory of limits, the differential and integral calculus of one-variable functions, multivariable functions, multiple integrals. All of stated theoretical facts are proved and illustrated with a great number of examples and problems.

The book will be useful for the students of physical engineering, energomashinebuilding and economic specialities. One will be interesting for teachers, so as the material is set out according to the educational programs of mentioned faculties. That can greatly facilitate the preparing to lectures and practice.

Іл. 394. Табл. 3. Бібліогр: 9 назв.

ББК 22.161
С – 31

ISBN

Предисловие

Рукопись учебного пособия "Математический анализ для инженеров" была написана Юрием Федоровичем Сенчуком в 2002 году. К сожалению, он не успел закончить окончательную проверку компьютерного набора и увидеть книгу, вышедшую в печать.

Юрий Федорович был одним из лучших преподавателей Пационального технического университета "ХПИ". Многие студенты, убеленные сейчас сединами, хорошо помнят лекции Сенчука Ю.Ф., который был для них легендой. Опыт, стиль и манера изложения материала, присущие этому прекрасному педагогу, всегда вызывали восхищение не только у студентов, но и у многих преподавателей. Песмотря на то, что Юрий Федорович в совершенстве знал курс высшей математики и многие ее специальные разделы, он скрупулезно готовился к каждой лекции и тщательно продумывал методику изложения материала. Свой сорокалетний опыт работы он постарался изложить в этом учебном пособии. Сотрудники и аспиранты кафедры "Прикладная математики", его коллеги постарались закончить издание первой части этого пособия и продолжают готовить к изданию вторую часть. Это сделано для того, чтобы не потерять лучшие достижения наших предшественников в области преподавания сложных предметов, к числу которых относится и математический анализ. Материал книги изложен последовательно, четко, на достаточном уровне строгости и в доступной форме. Отличительной особенностью данного пособия является не только простота его изложения, но и большое количество графических иллюстраций, способствующих наглядности и лучшему усвоению математических понятий. Книга содержит большое количество тщательно подобранных примеров, которые могут быть использованы как преподавателями на практических занятиях, так и студентами при самостоятельном изучении того или иного раздела. К достоинствам книги следует отнести и то, что при сравнительно небольшом объеме учебного пособия автору удалось изложить курс полностью соответствующий высокому уровню фундаментальной математической подготовки студентов физических, математических и инженерных специальностей технических университетов.

Сотрудники кафедры "Прикладная математика" уверены, что книга будет полезной не только студентам, но и преподавателям, читающим лекции и проводящим практические занятия по математическому анализу.

Зав. каф. "Прикладная математика" ПТУ "ХПИ", профессор Л.В. Курпа

Сенчук Юрий Федорович родился 11 мая 1930 г. в семье педагогов в с. Богатырь Донецкой области.

Окончив среднюю школу с серебряной медалью в 1948 г., он поступил в Харьковский государственный университет им. А. М. Горького на физико-математический факультет, который окончил с отличием в 1953 году по специальности “астрономия”.

Свою педагогическую деятельность Юрий Федорович начал в августе 1953 года в Дрогобычском педагогическом институте, где преподавал математику и астрономию. Когда в Харькове открыли Планетарий, Сенчук Юрий Федорович, будучи лектором-методистом, консультировал молодых астрономов и занимался научной работой. В Ученых записках ХГУ и Астрономическом циркуляре вышли его работы: "Общая фотометрия солнечной кроны во время затмения 25 февраля 1952 г." и "Улучшение элементов орбиты планеты 729 (Metcalfia)".

В Пациональном техническом университете ”ХПИ” Сенчук Ю.Ф. проработал 44 года, сначала на кафедре теоретической и математической физики, а впоследствии – на кафедре прикладной математики.

В 1968 году Сенчук Ю.Ф. защитил кандидатскую диссертацию по теме "Градиентная минимизация некоторых классов функционалов в абстрактном пространстве и ее применения к задачам вариационного исчисления". В июле 1977 года он был избран по конкурсу на должность доцента кафедры автоматического управления движением. Па протяжении долгих лет работы Юрию Федоровичу приходилось читать не только лекции по классическому курсу высшей математики, но и по многим ее специальным разделам, в том числе по интегральным уравнениям и функциональному анализу, теории дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного и другим. Он читал курс статистической радиофизики на радиотехническом факультете ХГУ и курс вычислительной математики для аспирантов института.

Излагая сложные разделы математики, Сенчук Ю.Ф. всегда стремился к доступности. Он опубликовал работу "О неформальном подходе к определениям и доказательствам в курсе математики". Считая, что источником трудностей понимания абстрактных математических рассуждений является не их содержание, а форма, Юрий Федорович разработал новые информационные технологии обучения для облегчения восприятия студентам, создал новые программы и структурно-логические схемы математических дисциплин. Он был одним из организаторов модульно-рейтинговой системы контроля знаний студентов при изучении курса высшей математики. В 90-е годы было опубликовано 9 научных работ Сенчука Ю.Ф. по этому направлению, с которыми он выступал на международных научно-методических конференциях. Он разработал алгоритм полного перехода на модульно-рейтинговую систему контроля знаний студентов, который он осуществлял на потоках факультета. В методическую работу Юрия Федоровича входило руководство методическим семинаром кафедры. Он проводил семинары по теории вероятностей и по теории графов для сотрудников института, а на кафедре электроники – семинар по теории случайных процессов.

За отличные успехи в работе Сенчук Ю.Ф. награжден знаком "Высшая школа СССР".

Юрий Федорович постоянно работал над повышением своего научно-педагогического мастерства, проходил стажировку в Ленинградском политехническом институте. А чаще повышением квалификации занимался самостоятельно, разрабатывая учебные пособия, методические рекомендации и учебники. Он фактически являлся учителем и наставником целого ряда преподавателей математических дисциплин на кафедрах прикладной математики и АУД. Его рекомендациями по проведению лекций и практических занятий и сейчас пользуются многие преподаватели. Лекции Сенчука Ю.Ф. отличались живостью, доходчивостью и в то же время тщательностью отбора материала и глубиной его изложения. Эти лекции пользуются успехом во всем институте; их прослушало немало преподавателей прикладных дисциплин.

Огромную работу Юрий Федорович проводил и по линии учебно-организационного отдела, возглавляя контроль качества преподавания математики во всем институте.

Юрий Федорович был не только квалифицированным, но и требовательным преподавателем, читающим лекции на высоком теоретическом и методическом уровне. Он непрерывно работал над совершенствованием своих курсов, стараясь в каждой теме найти какое-нибудь методическое новшество.

Песмотря на высокую требовательность Юрия Федоровича, студенты высоко ценили его лекции и практические занятия и считали его одним из лучших преподавателей.

Он был отличный педагог, опытнейший лектор. Строгость изложения он блестяще сочетал с рассмотрением физической сущности данного математического положения, что чрезвычайно важно в математическом образовании инженера.

I. Введеиие в математический аиализ

1. Осиовиые логические символы

В дальнейшем мы будем систематически использовать следующие обозначения.

$\forall$ - вместо слов «для всех», «для каждого».

$\exists$ - вместо слова «существует», «найдется».

$\Rightarrow$ - вместо слова «следует». Папример, запись $A \Rightarrow B$ означает, что «A влечет за собой B», «из A следует B».
Символ $\Rightarrow$ называется импликацией.

$\Leftrightarrow$ - вместо слова «равносильно», «эквивалентно». Папример, запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что «из A следует B» и наоборот из «B следует A», а значит A и B равносильны.

$\vee$ - вместо слова «или». Запись $A \vee B$ означает, что имеет место по крайней мере одно из высказываний A или B.

$\wedge$ - вместо слова «и». Запись $A \wedge B$ означает, что одновременно имеют место высказывания A и B.

2. Простейшие иоиятия и обозиачеиия теории миожеств

Множеством будем называть совокупность некоторых объектов (точек, чисел, векторов, функций и т.п.), называемых элементами этого множества. Принадлежность данного элемента x множеству A записывают так: $x \in A$. Если, наоборот, x не есть элемент множества A, то пишут: $x \notin A$.

Пусть множество A состоит из всех элементов x, обладающих некоторым общим свойством. Тогда пишут

$$A = \{x \mid \ldots\ldots\},$$

где вместо многоточия записывается упомянутое свойство всех элементов множества A. Папример, пусть A – множество всех x, при которых величина $\arcsin x$ имеет смысл. Тогда, очевидно,

$$A = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}.$$

Если все элементы множества A одновременно принадлежат некоторому другому множеству B, то есть $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$, то A называют подмножеством множества B и пишут, что $A \subset B$ (символ $\subset$ называют символом включения), рис. 1.1. В частности, запись $A \subset B$ может означать, что множество A совпадает с множеством B.

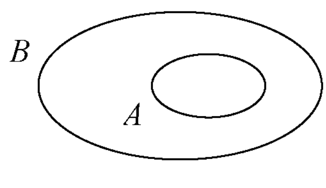


Рис.1.1

Пусть имеется два множества A и B. Множество элементов, каждый из которых принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B, называется объединением множеств A и B и обозначается $A \bigcup B$, рис. 1.2. Итак,

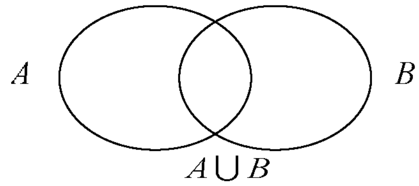


Рис.1.2

$$(x \in A \bigcup B) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B).$$

При этом множества A и B могут как иметь общие точки, так и не иметь их.

Пример 1.1. Пусть A – множество жителей данного города в возрасте от 18 до 30 лет, а B – множество жителей этого города старше 25 лет. Тогда $A \bigcup B$ есть множество всех совершеннолетних жителей данного города.

Пусть снова A и B – произвольные множества. Совокупность всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B, называется разностью множеств A и B и обозначается $A \setminus B$, рис. 1.3. Иными словами

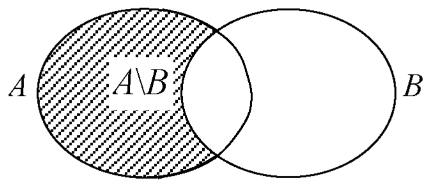


Рис.1.3

$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Пример 1.2. Пусть A – множество всех футболистов данной команды, участвовавших в данной игре, а B – множество игроков, проведших всю игру на поле. Тогда $A \setminus B$ есть множество игроков, которые были заменены в ходе матча, либо, наоборот, вышли на поле в качестве замены.

Множество элементов, принадлежащих одновременно и множеству A, и множеству B, называется пересечением множеств A и B и обозначается $A \bigcap B$, рис. 1.4. Таким образом,

$$(x \in A \bigcap B) \Leftrightarrow \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Пример 1.3. Пусть A – множество всех целых чисел, делящихся на 2, а B – множество всех целых чисел, делящихся на 3. Тогда $A \bigcap B$ есть множество всех целых чисел, кратных числу 6.

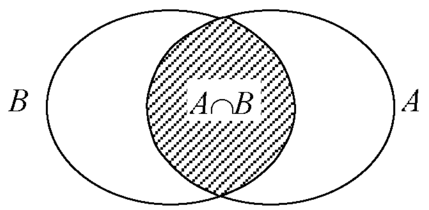


Рис.1.4

В частности, если множества A и B не имеют общих элементов, т.е. не пересекаются, то $A \bigcap B$ представляет собой так называемое пустое множество и в этом случае $A \bigcap B = 0$.

Примечание. Легко заметить, что выражения $A \bigcap B$ и $A \bigcup B$ есть множественные аналоги соответствующих логических выражений $A \wedge B$ и $A \vee B$.

3. Рациоиальиые и иррациоиальиые числа

Всевозможные дроби вида $\frac{m}{n}$, где m и n – целые числа $(n \neq 0)$, называются рациональными числами. Арифметические действия над рациональными числами приводят к рациональным же числам.

Педостаточность одних только рациональных чисел проявляется уже при извлечении корней. Папример, $\sqrt{2}$ не есть рациональное число.

■Для доказательства этого факта предположим противное, т.е. пусть

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где m и n – натуральные числа. При этом дробь $\frac{m}{n}$, не ограничивая общности, можно считать несократимой.

Из равенства (1.1) имеем

$$2 = \frac{m^2}{n^2},$$

или

$$m^2 = 2n^2 \tag{1.2}$$

Последнее означает, что m^2 – четное число. По тогда и m – четное число, т.е. $m = 2p$, где p – целое. Следовательно, выражение (1.2) принимает вид

$$4p^2 = 2n^2,$$

т. е.

$$2p^2 = n^2.$$

Отсюда следует, что число n^2, а значит и число n – четное. По тогда в дроби $\frac{m}{n}$ возможно сокращение на 2, что противоречит начальному предположению о несократимости дроби $\frac{m}{n}$.□[*)]

Каждое рациональное число изображается либо конечной десятичной дробью, либо бесконечной периодической.

Пример 1.4. Возьмём число $x = 2{,}147(3)$. Оно равно

$$x = 2{,}147 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + 0{,}000003 + \ldots = 2{,}147 + \frac{0{,}0003}{1-0{,}1} = 2{,}147 + \frac{3}{9900} =$$

[*)] Здесь и всюду в дальнейшем символы ■ и □ означают соответственно начало и конец доказательства.

$$= 2{,}147 + \frac{1}{3300},$$

а это, как легко видеть, рациональное число.

Будем говорить, что всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь изображает иррациональное число.

Рациональные и иррациональные числа, рассматриваемые в совокупности, называют вещественными (или действительными) числами.

Возьмем произвольную бесконечную непериодическую дробь вида

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots,$$

где $a_0 > 0$. Введем конечные десятичные дроби

$$x_n^- = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n, \quad x_n^+ = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Их называют соответственно нижним и верхним n-значными приближениями вещественного числа x.

Папример, числа 3,141592 и 3,141593 есть соответственно нижнее и верхнее 6-значное приближения числа π.

Если число n брать достаточно большим, то разность $x_n^+ - x_n^-$ становится сколь угодно малой. Именно в этом смысле говорится, что любая бесконечная непериодическая дробь определяет некоторое иррациональное число.

Любое иррациональное число можно сколь угодно точно заменить рациональным числом. Исходя из этого факта и учитывая общеизвестные сведения о рациональных числах, можно сформулировать свойства вещественных чисел.

Свойство 1. Для любых вещественных чисел x и y имеет место одно и только одно из соотношений:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

При этом, если $x < y, \quad y < z$, то $x < z$. Последний факт называют транзитивностью множества вещественных чисел.

Свойство 1 означает, что множество вещественных чисел упорядочено.

Свойство 2. Для любых вещественных чисел x и y можно определить, и притом единственным образом, число $x + y$, называемое суммой чисел x и y. При этом

a. $x + y = y + x$ (переместительное свойство);

b. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (сочетательное свойство);

c. существует число, обозначаемое 0 и называемое нулём, такое, что

$$x + 0 = x, \ \forall x;$$

d. для любого числа x существует число y, обозначаемое $-x$ и такое, что

$$x+y=0;$$

число $y=-x$ называется противоположным числу x.

Петрудно показать, что числа 0 и $-x$ (для любого x) определяются единственным образом.

e. Если $x<y$, то для любого числа z

$$x+z<y+z.$$

Вычитание чисел определяется как действие, обратное сложению, т. е.

$$(z=x-y)\Leftrightarrow(x=y+z).$$

Свойство 3. Для любых вещественных чисел x и y можно определить, и притом единственным образом, число z, называемое произведением чисел x и y и обозначаемое xy. При этом

f. $xy=yx$ (переместительный (коммутативный) закон умножения);

g. $(xy)z=x(yz)$ (сочетательный (ассоциативный) закон умножения);

h. существует число, обозначаемое 1 и называемое единицей, такое, что $1\neq 0$, и

$$x\cdot 1=x,\ \forall x;$$

i. для любого $x\neq 0$ существует число, обозначаемое $\dfrac{1}{x}$ и называемое обратным числу x, такое, что $x\cdot\dfrac{1}{x}=1$;

j. если $x<y$, а $c>0$, то $cx<cy$. Если же $c<0$, то $cx>cy$;

k. $(x+y)z=xz+yz$ (распределительный (дистрибутивный) закон умножения).

Для любых чисел x и y $(y\neq 0)$ определяется их частное

$$\frac{x}{y}=x\cdot\frac{1}{y}.$$

Свойство 4. Для любого вещественного числа x существует целое число n, такое, что $n>x$.

Свойство 4 называют свойством Архимеда.

Множество всех вещественных чисел геометрически изображается как бесконечная ось (имеется в виду, что на этой оси выбраны направление положительного отсчета и единица длины, т.е. масштаб, рис. 1.5).

Множество $A=\{x\mid a\leq x\leq b\}$ называется отрезком числовой оси с концами a и b и обозначается ещё $[a,b]$.

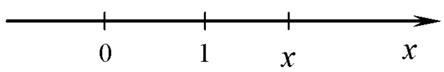


Рис.1.5

Возьмём на оси Ox систему отрезков

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots, \qquad (1.3)$$

таких, что

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1,$$

т. е.

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1], [a_3, b_3] \subset [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}], \ldots .$$

В этом случае систему (1.3) называют системой вложенных отрезков.

Свойство 5. Для любой системы вложенных отрезков (1.3) существует по крайней мере одно число x, принадлежащее всем отрезкам этой системы (рис. 1.6).

Свойство 5 означает, что на числовой оси отсутствуют пустоты. По-

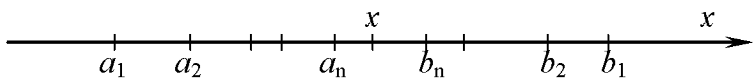


Рис.1.6

этому его называют свойством непрерывности множества вещественных чисел.

Примечание. Мы получили свойства 1-5 вещественных чисел на том основании, что этими же свойствами обладают сколь угодно близкие к ним рациональные числа. Однако можно было поступить и иначе, взяв упомянутые свойства в качестве аксиом, т.е. вводя множество вещественных чисел как множество, обладающее свойствами 1-5. Такой способ введения вещественных чисел называется аксиоматическим.

4. Модуль числа и его свойства

Модулем вещественного числа x называется число, обозначаемое $|x|$, такое, что

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Очевидны следующие свойства модуля:

1. $|x + y| \le |x| + |y|$.

Действительно, если x и y – числа одного знака, то $|x + y| = |x| + |y|$. Если же знаки чисел x и y различны, то $|x + y| < |x| + |y|$.

Данное свойство, очевидно, верно и для любого числа слагаемых.

2. $|xy| = |x| \cdot |y|$.

3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Геометрически величина $|x|$ есть расстояние точки x на числовой оси от начала отсчёта. Поэтому неравенство $|x| < a$ означает, что точка x находится между точками a и $-a$, т.е. что $-a < x < a$, рис. 1.7.

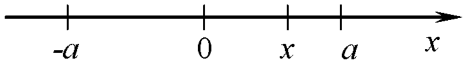


Рис.1.7

Рассмотрим теперь величину $|x_1 - x_2|$. Легко видеть, что при любом взаимном расположении точек $0, x_1, x_2$ число $|x_1 - x_2|$ геометрически представляет собой расстояние между точками x_1 и x_2 на числовой оси, рис. 1.8. Этот факт оказывается удобным при решении некоторых уравнений и неравенств, содержащих модули неизвестных величин.

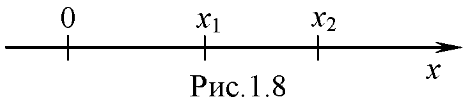


Рис.1.8

Пример 1.5. Решить уравнение

$$|x-1| = |x+3|.$$

Геометрически оно означает, что точка x равноудалена от точек $x=1$ и $x=-3$. Легко видеть, что таковой является точка $x=-1$, рис. 1.9.

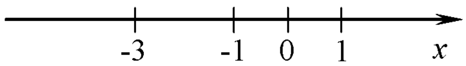


Рис.1.9

Пример 1.6. Решить неравенство

$$|2x-1| < 3.$$

Придав ему вид

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2},$$

заключаем, что искомое x находится между числами $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ и $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$, рис. 1.10, т. е. что

$$-1 < x < 2.$$

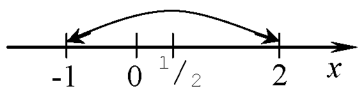


Рис.1.10

5. Питервалы и иромежутки

Мы уже видели, что, по определению,

$$[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}.$$

Множество $[a,b]$ называют ещё замкнутым интервалом.

В то же время множество

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

называют интервалом (или открытым интервалом).

Рассматривают также полуоткрытые интервалы $[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$ и $(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$.

Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называют ε-окрестностью точки $x=a$, рис. 1.11; будем обозначать её $C_\varepsilon(a)$. Здесь ε – радиус окрестности.

Итак,

$$C_\varepsilon(a)=\{x\,\|x-a|<\varepsilon\}.$$

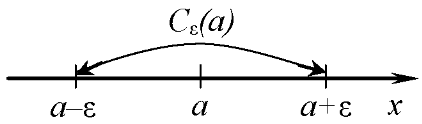


Рис.1.11

Множество всех x, таких, что $x>a$, обозначают $(a,+\infty)$.

Аналогично вводятся множества $[a,+\infty)$, $(-\infty,a)$ и $(-\infty,a]$. Под $(-\infty,+\infty)$ подразумевается вся числовая ось. Её называют ещё множеством R.

Числовое множество E называется ограниченным сверху, если существует такое число Q, что $x<Q$ (или $x\le Q$) для всех $x\in E$. Аналогично, если для всех $x\in E$ будет $x>q$ (или $x\ge q$), то множество E называют ограниченным снизу.

Пример 1.7. Множество $E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}$ ограничено снизу числом 0 (и, тем более, любым отрицательным числом).

Множество, ограниченное одновременно сверху и снизу, называется ограниченным множеством. Очевидно, множество E ограничено тогда и только тогда, когда существуют такие числа a и b, что $E\subset[a,b]$.

Пример 1.8. Множество всех правильных дробей ограничено, поскольку оно полностью лежит на отрезке $[0,1]$.

Множество E из примера 1.7. ограничено, так как лежит на том же отрезке.

6. Постояииые и иеремеииые величииы. Классификация иеремеииых

Если величина x в процессе её рассмотрения сохраняет постоянное значение или её изменением можно пренебречь, то её называют постоянной и пишут

$$x=const.$$

Если же величина x при её рассмотрении принимает разные значения, то её называют переменной.

Одна и та же физическая величина в одних случаях может рассматриваться как постоянная (если её изменение неощутимо), а в других – как переменная. Папример, при малых высотах ускорение свободного падения g может считаться постоянным. Если же высота h сравнима с радиусом Земли R, то g уже нельзя считать постоянным, так как приходиться учитывать, что с ростом h величина g убывает пропорционально величине $\dfrac{1}{(R+h)^2}$, рис. 1.12.

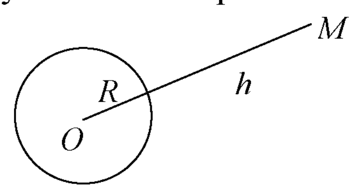


Рис. 1.12

Мы уже по существу говорили (см. свойство 1 вещественных чисел), что переменная называется упорядоченной, если о каждой паре её значений можно сказать, какое из них – предыдущее, а какое – последующее.

Переменная называется монотонно возрастающей, если каждое последующее её значение больше предыдущего. Геометрически это означает, что изображающая эту величину точка на числовой оси перемещается вправо.

Аналогично определяется монотонно убывающая величина.

По характеру своего изменения переменные делятся также на дискретные и непрерывные. Переменная называется дискретной, если она принимает лишь отдельные, изолированные значения. Примером может служить число жителей данного города. Характерный пример дискретной переменной – числовая последовательность $\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, \ldots$. Папример, величина

$$\{x_n\} = 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots, \tfrac{1}{n}, \ldots$$

есть монотонно убывающая числовая последовательность.

Переменная называется непрерывной, если при переходе от одного своего значения к другому она принимает и все промежуточные значения.

Множество всех значений, принимаемых данной переменной, называется областью её изменения. Если переменная – дискретная, то область её изменения есть множество изолированных точек на числовой оси. Область же изменения непрерывной переменной представляет собой некоторый промежуток на числовой оси (или всю числовую ось).

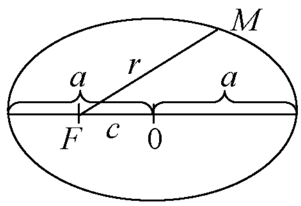


Рис. 1.13

Переменная называется ограниченной, если область её изменения ограничена. Примером может служить фокальный радиус-вектор r точки M, рис. 1.13, движущейся по эллипсу, поскольку

$$a - c \le r \le a + c.$$

Если x – ограниченная переменная, то найдётся такое число $M > 0$, что всегда будет

$$|x| \le M.$$

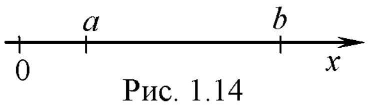


Рис. 1.14

Действительно, пусть $[a,b]$ – отрезок, в который можно заключить область изменения переменной x, рис. 1.14. Тогда достаточно положить $M = \max\{\,|a|, |b|\}$.

Переменная x называется неограниченной, если область её изменения – неограниченная. Примером может служить фокальный радиус-вектор r точки M, движущейся по параболе, рис. 1.15.

Второй пример: числовая последовательность

$$\{x_n\} = 1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots .$$

Если x – неограниченная переменная, то какое бы большое число $M > 0$ мы ни взяли, неравенство $|x| \le M$ будет бесчисленное множество раз нарушаться.

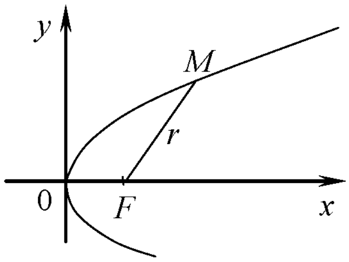


Рис.1.15

Примечание. Легко видеть, что деления переменных на монотонные и немонотонные, на дискретные и непрерывные, на ограниченные и неограниченные совершенно независимы друг от друга.

7. Фуикция и сиособы её задаиия

Если каждому значению переменной x из области её изменения отвечает одно или несколько значений другой переменной y, то переменная y называется функцией переменной x, а сама переменная x по отношению к переменной y называется независимой переменной, или аргументом. Тот факт, что y есть функция переменной x, записывают так: $y = f(x)$. Если одновременно рассматривают несколько функций, то пишут:

$$y = f_1(x), y = f_2(x), y = f_3(x), \ldots$$

или

$$y = f(x), y = \varphi(x), y = g(x), \ldots .$$

Функцию можно задать тремя основными способами.

1. Табличный способ. Он состоит в том, что для некоторых «табличных» значений x: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ задаются соответствующие значения y: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, т.е. задаётся таблица

x	x_1	x_2	…	x_n
$y=f(x)$	y_1	y_2	…	y_n

Табличное задание функции удобно при практических вычислениях, но непригодно для теоретических исследований, а поэтому в математическом анализе используется очень редко.

2. Графическое задание. График функции является как бы её «портретом». Поэтому графический способ задания функции наиболее нагляден.

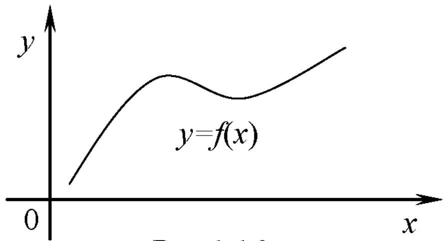


Рис.1.16

3. Аналитический способ. Если функция $y = f(x)$ задана уравнением, связывающим x и y и, следовательно, показывающим, какие действия надо проделать над переменной x, чтобы получить y, то говорят, что функция $y = f(x)$ зада-

на аналитически.

По аналитическому заданию функции делятся на явные и неявные. Если связывающее величины x и y уравнение разрешено относительно y, то функция называется заданной явно, или просто явной. Папример,

$$y = \frac{x^3 + \lg x}{3 - \sin x}.$$

Если же упомянутое уравнение не разрешено относительно y, то функцию называют заданной неявно.

В ряде случаев от неявного задания можно перейти к явному. Папример из уравнения

$$x10^y - \operatorname{tg} x = 1$$

легко находим

$$y = \lg \frac{1 + \operatorname{tg} x}{x}.$$

Однако, если функция задана, например, уравнением

$$\sin(x + y) = 2^x + \lg y,$$

то переход к явному заданию в точном виде невозможен.

Аналитический способ задания функции является основным в математическом анализе, а графический – вспомогательным, используемым только для наглядных иллюстраций.

8. Область оиределеиия фуикции

Возьмём функцию $y = f(x)$. Символ $f(a)$ означает, что в этой функции мы положили $x = a$. Число $f(a)$ есть значение функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, рис. 1.17.

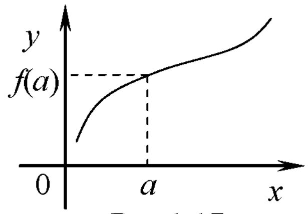


Рис.1.17

Пример 1.9. Пусть $y = \sqrt{2 + x}$. Тогда

$$f(1) = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}.$$

В то же время

$$f(-4) = \sqrt{2 - 4} = \sqrt{-2},$$

т. е. $f(-4)$ не существует (если ограничиться рассмотрением только вещественных чисел).

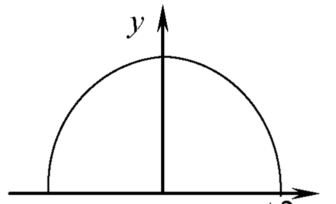


Рис.1.18

Совокупность всех значений x, при которых функция $y = f(x)$ имеет смысл, называется областью определения этой функции. Будем обозначать её D_y или D_f.

Пример 1.10. Пусть $y = \sqrt{4 - x^2}$. Тогда

$$D_y = \left\{ x \middle| 4 - x^2 \geq 0 \right\} = \left\{ x \middle| x^2 \leq 4 \right\},$$

т. е. областью определения функции является отрезок $[-2,2]$, рис. 1.18.

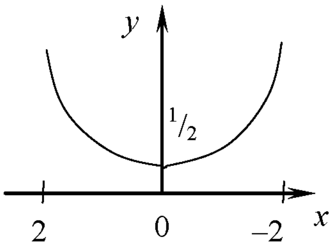


Рис.1.19

Пример 1.11. Пусть $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$. Здесь

$$D_y = \left\{ x \middle| 4 - x^2 > 0 \right\} = \left\{ x \middle| x^2 < 4 \right\} = (-2,2),$$

т.е. в данном случае множество D_y есть такой же промежуток, как и в примере 1.10, но не содержащий концов, рис. 1.19.

Пример 1.12. Пусть $y = \arcsin(\lg x)$.Тогда

$$D_y = \left\{ x \middle| -1 \leq \lg x \leq 1 \right\} = \left\{ x \middle| \frac{1}{10} \leq x \leq 10 \right\} = [0{,}1;10],$$

рис. 1.20.

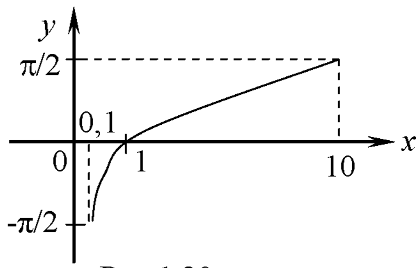


Рис.1.20

Примечание. Легко видеть, что в общем случае область определения функции геометрически есть проекция графика функции на ось $0x$.

9. Чётиые и иечётиые фуикции. Периодические фуикции

Функция $f(x)$ называется чётной, если для всех $x \in D_f$ будет

$$f(-x) = f(x).$$

Примерами могут служить функции $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = 2^x + 2^{-x}$ и др. Очевидно, график чётной функции симметричен относительно оси Oy, рис. 1.21.

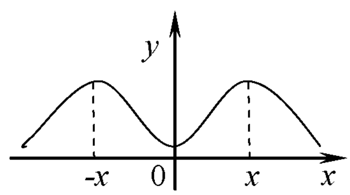


Рис.1.21

Функция $f(x)$ называется нечётной, если

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in D_f.$$

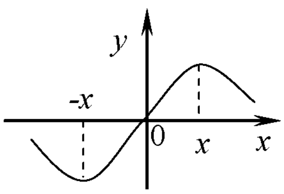


Рис.1.22

Папример, $y = x^3 - 2x$, $y = \sin x$, $y = \lg \dfrac{1+x}{1-x}$.

Легко видеть, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат, рис. 1.22.

Если при замене x на $-x$ функция $f(x)$ меняет свою величину (независимо от перемены или же сохранения знака), то эта функция не является ни чётной, ни нечётной.

Очевидны следующие утверждения.

1. Сумма чётных функций есть чётная функция.
2. Сумма нечётных функций есть нечётная функция.

3. Сумма чётной и нечётной функций есть ни чётная, ни нечётная функция.
4. Произведение чётных функций есть чётная функция.
5. Произведение двух нечётных функций есть чётная функция.
6. Произведение чётной и нечётной функций есть нечётная функция.

Функция $f(x)$ называется периодической с периодом a, если

$$f(x+a)=f(x),\ \forall x \in D_f,$$ рис. 1.23.

Если a – период функции $f(x)$, то $2a, 3a, 4a, \ldots$ также есть её период.

Паименьший из периодов функции называется её основным периодом. Папример, основной период функции $2^{\sin 3x}$ равен $\frac{2\pi}{3}$.

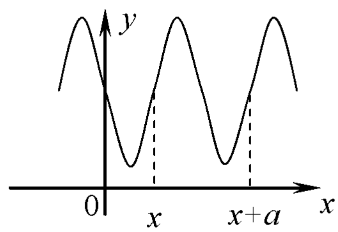


Рис.1.23

10. Одиозиачиые и миогозиачиые фуикции

Функция $y=f(x)$ называется однозначной, если каждому $x \in D_y$ отвечает одно и только одно значение y. Примером может служить функция $y=\sqrt[3]{1+\lg^2 x}$.

Если же одному значению x отвечает несколько значений y, то функцию $y=f(x)$ называют многозначной.

Многозначность функции чаще всего бывает связана с неявным способом их задания.

Пример 1.13. Возьмём уравнение $y^2-x=0$. Имеем из него $y=\pm\sqrt{x}$. Эта функция – двузначная. Она распадается на две однозначные: $y=\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$, рис. 1.24.

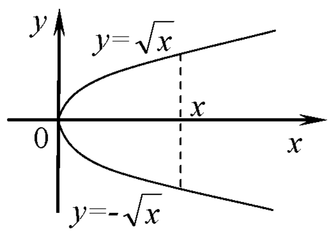


Рис.1.24

Пример 1.14. Пусть имеется уравнение $(y-x)^2=x$. Имеем из него

$$y-x=\pm\sqrt{x} \quad \text{или} \quad y=x\pm\sqrt{x}.$$

Эта функция – также двузначная, рис. 1.25.

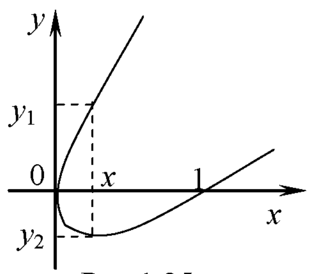


Рис.1.25

11. Обратиая фуикция

Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Меняя x, мы будем менять и y. Обратно, всякое изменение y вызвано изменением переменной x, т. е., меняя y, мы изменяем и x. Следовательно, соотношение $y=f(x)$ определяет не только y как функцию от x, но и, наоборот, величину x как функцию величины y. Иными словами, из равенства $y = f(x)$ следует, что, вообще говоря, $x = \varphi(y)$. Функция $x = \varphi(y)$ называется обратной функции $y = f(x)$.

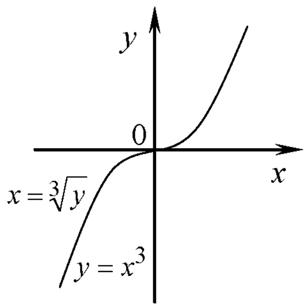


Рис.1.26

Папример, для функции $y = x^3$ обратной является функция $x = \sqrt[3]{y}$, рис. 1.26.

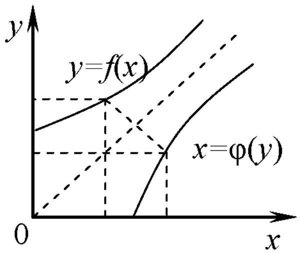


Рис.1.27

Очевидно, что функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ имеют один и тот же график, т. к. оба равенства описывают одно и то же соотношение между x и y.

Возьмём теперь функцию $x = \varphi(y)$, обратную функции $y = f(x)$, и снова обозначим аргумент через x, а функцию – через y. Получим функцию $y = \varphi(x)$, которую также называют обратной по отношению к функции $y = f(x)$. Однако графики этих функций теперь уже не совпадают, а представляют собой две различные линии, симметричные, как легко видеть, относительно прямой $y = x$, рис. 1.27, рис. 1.29.

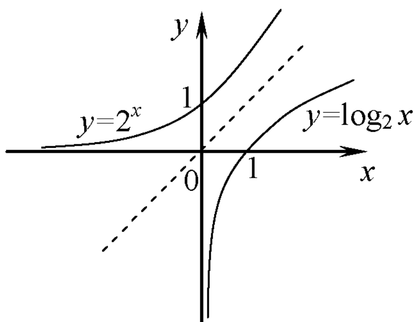


Рис.1.28

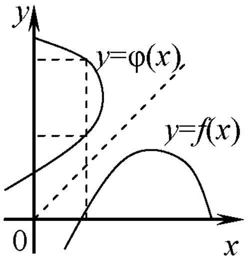


Рис.1.29

Пример 1.15. Пусть $y = 2^x$.

Тогда обратная функция

$$y = \log_2 x \text{, рис 1.28.}$$

Если функция $y = f(x)$ – монотонная, то обратная ей функция $y = \varphi(x)$ – однозначная. Если же функция $y = f(x)$ – не монотонная, то обратная ей функция $y = \varphi(x)$ – многозначная, рис. 1.29. Папример, функция $y = \operatorname{Arcsin} x$, обратная немонотонной функции $y = \sin x$, является «бесконечно много»-значной, рис. 1.30, 1.31.

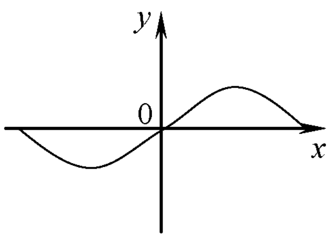


Рис.1.30

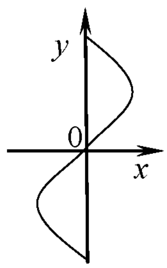


Рис.1.31

Примечание. Понятие обратной функции и связанные с ним сведения мы затронули сейчас на элементарном уровне соображений наглядности. Мы вернёмся к рассмотрению этого вопроса позже, в одном из последующих разделов.

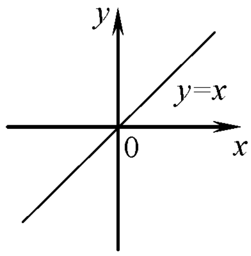
12. Осиовиые элемеитариые фуикции

1.<u>Степенная функция</u>. Эта функция записывается так

$$y = x^a,$$

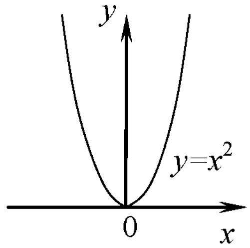
где a – любое вещественное число.

График степенной функции существенным образом зависит от показателя степени a. Укажем некоторые характерные случаи.



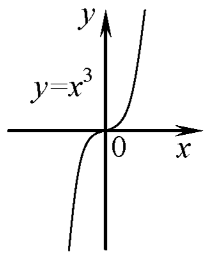
a=1

Рис.1.32



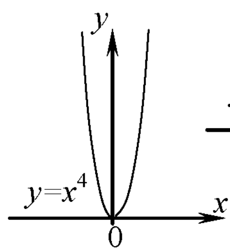
a=2

Рис.1.33



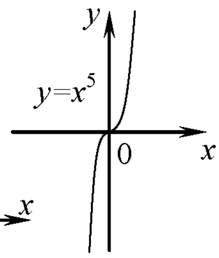
a=3

Рис.1.34



a=4

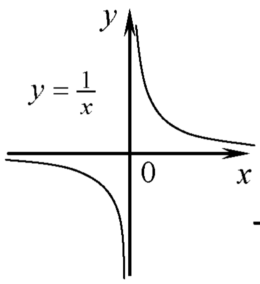
Рис.1.35



a=5

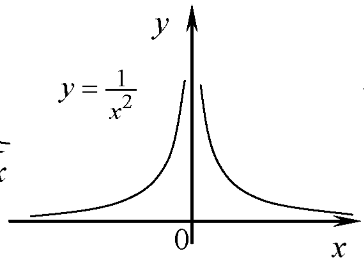
Рис.1.36

Заметим, что кривую $y = x^3$ называют кубической параболой, кривую $y = x^4$ – параболой 4-ой степени и т. д.



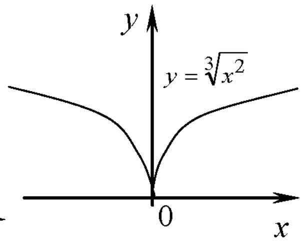
a=-1

Рис.1.37



a=-2

Рис.1.38



$a = \frac{2}{3}$

Рис.1.39

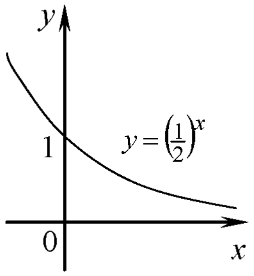
Линию $y = \sqrt[3]{x^2}$ называют полукубической параболой.

Определение функции $y = x^a$ для случая произвольного вещественного a будет дано ниже.

2. <u>Показательная функция</u>. Эта функция имеет вид $y = a^x$, где $a > 0$ и притом $a \neq 1$. Общий вид графика функции известен из школьного курса математики, рис. 1.40–1.42.

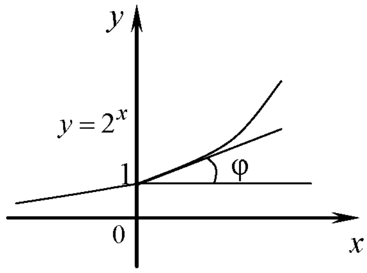
Угол φ между осью Ox и касательной к линии $y = a^x$ в точке $(0,1)$ тем больше, чем больше основание a. При $a = 2$ он равен, как можно подсчитать, $34°44'$, а при $a = 3$ – $47°42'$. Поэтому естественно предположить, что существует число a, такое, что $2 < a < 3$, которому соответствует угол $\varphi = 45°$.

Такое число называется числом e; оно является иррациональным и



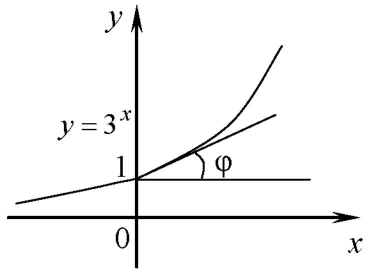
$a=1/2$

Рис.1.40



$a=2$

Рис.1.41



$a=3$

Рис.1.42

равно 2,71828…. Функцию $y=e^x$ называют экспоненциальной функцией; она является наиболее используемой показательной функцией в математическом анализе.

Примечание. Использованное нами введение числа e на основании геометрических (угловых) соображений не является стандартным. Позже мы познакомимся и с общепринятым определением числа e и убедимся в равносильности обоих определений.

3. <u>Логарифмическая функция</u>. Функция $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ обратна по отношению к функции $y=a^x$. На практике чаще всего полагают $a=10$ и рассматривают десятичные логарифмы $y=\lg x$. В математическом же анализе обычно полагают $a=e$. Логарифмы с основанием e называются натуральными логарифмами и обозначаются символом $\ln$, рис. 1.44.

Очевидно, функция $y=\ln x$ обратна $y=e^x$.

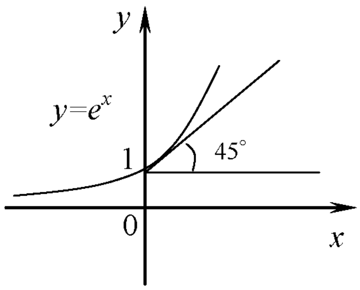


Рис.1.43

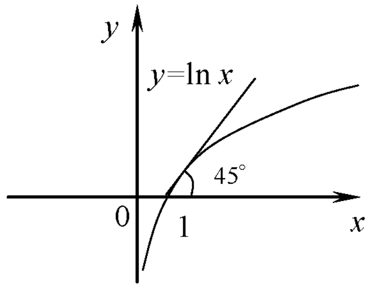


Рис.1.44

Получим формулы перехода от десятичных логарифмов к натуральным и наоборот. Для этого основное логарифмическое тождество

$$x=10^{\lg x}$$

прологарифмируем по основанию e. Получим

$$\ln x=\lg x\cdot\ln 10,$$

а так как $\ln 10=2{,}30\ldots$, то

$$\ln x=2{,}30\ldots\lg x.$$

Число $M=2{,}30\ldots$ – есть модуль перехода от десятичных логарифмов к натуральным.

Обратно

$$\lg x = \frac{1}{2{,}30\ldots} \ln x ,$$

т. е.

$$\lg x = 0{,}43\ldots \ln x .$$

Тот факт, что натуральные логарифмы примерно в 2,3 раза больше (по модулю) десятичных, легко объясняется, поскольку число e значительно меньше числа 10.

4. Тригонометрические функции. К ним относятся функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Эти функции имеют периоды соответственно 2π и π. Их графики хорошо известны из школьного курса тригонометрии.

5. Обратные тригонометрические функции. Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис.1.45-1.48) есть главные ветви многозначных функций $y = \operatorname{Arcsin} x$, $y = \operatorname{Arccos} x$, $y = \operatorname{Arctg} x$ и $y = \operatorname{Arcctg} x$, обратные функциям $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

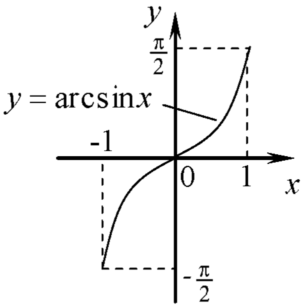


Рис.1.45

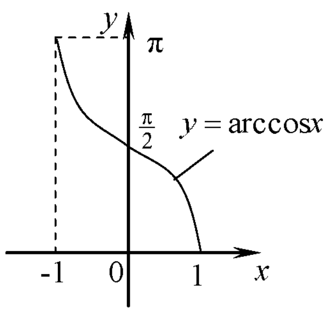


Рис.1.46

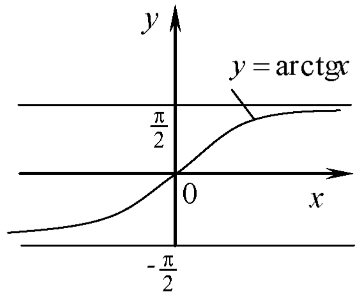


Рис.1.47

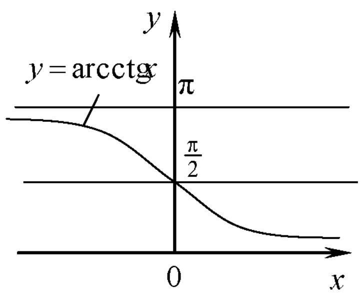


Рис.1.48

6. Гиперболические функции. Функция $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим косинусом (величины x) и обозначается $y = \operatorname{ch} x$. Функция $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим синусом и обозначается $y = \operatorname{sh} x$, рис. 1.49, 1.50. По этим двум функциям вводят гиперболические

тангенс и котангенс

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad \operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Очевидно, что функция $y=\operatorname{sh} x$ – нечётная, а функция $y=\operatorname{ch} x$ – чётная. Линию $y=\operatorname{ch} x$ называют цепной линией, так как именно такую форму принимает линия провисания гибкой нерастяжимой нити с закреплёнными концами.

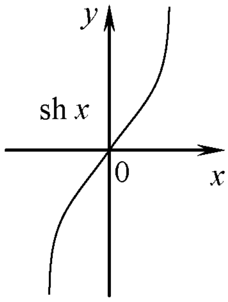


Рис.1.49

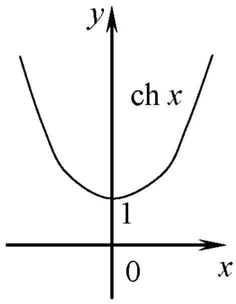


Рис.1.50

Далее, легко видеть, что $\operatorname{sh} 0=0$, $\operatorname{ch} 0=1$.

В то же время очевидно, что гиперболические функции, в отличие от тригонометрических, не обладают периодичностью.

Из формул-определений

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

имеем

$$\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x=e^x,\quad \operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x=e^{-x}.$$

Поэтому

$$\operatorname{sh}(x_1+x_2)=\frac{e^{x_1+x_2}-e^{-(x_1+x_2)}}{2}=\frac{e^{x_1}e^{x_2}-e^{-x_1}e^{-x_2}}{2}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[(\operatorname{ch} x_1+\operatorname{sh} x_1)(\operatorname{ch} x_2+\operatorname{sh} x_2)-(\operatorname{ch} x_1-\operatorname{sh} x_1)(\operatorname{ch} x_2-\operatorname{sh} x_2)\right]=$$

$$=\tfrac{1}{2}(\operatorname{ch} x_1\operatorname{ch} x_2+\operatorname{ch} x_1\operatorname{sh} x_2+\operatorname{sh} x_1\operatorname{ch} x_2+\operatorname{sh} x_1\operatorname{sh} x_2-$$

$$-\operatorname{ch} x_1\operatorname{ch} x_2+\operatorname{ch} x_1\operatorname{sh} x_2+\operatorname{sh} x_1\operatorname{ch} x_2-\operatorname{sh} x_1\operatorname{sh} x_2),$$

т. е.

$$\operatorname{sh}(x_1+x_2)=\operatorname{sh} x_1\operatorname{ch} x_2+\operatorname{ch} x_1\operatorname{sh} x_2.$$

Точно так же проверяется, что

$$\operatorname{ch}(x_1+x_2)=\operatorname{ch} x_1\operatorname{ch} x_2+\operatorname{sh} x_1\operatorname{sh} x_2.$$

Заменяя x_2 в обеих формулах на $-x_2$, получим

$$\operatorname{sh}(x_1-x_2)=\operatorname{sh} x_1\operatorname{ch} x_2-\operatorname{ch} x_1\operatorname{sh} x_2,$$

$$\operatorname{ch}(x_1-x_2)=\operatorname{ch} x_1\operatorname{ch} x_2-\operatorname{sh} x_1\operatorname{sh} x_2.$$

Полагая $x_1=x_2=x$, из первой формулы получим

$$\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x,$$

из второй –

$$\operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x,$$

а из последней –

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1. \qquad (1.4)$$

Эта формула есть аналог известной тригонометрической формулы

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Левую часть последней формулы, как известно, называют тригонометрической единицей; по аналогии с этим левую часть формулы (1.4) называют гиперболической единицей.

Запишем теперь тождества:

$$\mathrm{ch}\, x = \mathrm{ch}^2 \tfrac{x}{2} + \mathrm{sh}^2 \tfrac{x}{2},$$

$$1 = \mathrm{ch}^2 \tfrac{x}{2} - \mathrm{sh}^2 \tfrac{x}{2}.$$

Складывая и вычитая их, будем иметь

$$\mathrm{ch}\, x + 1 = 2\mathrm{ch}^2 \tfrac{x}{2}, \quad \mathrm{ch}\, x - 1 = 2\mathrm{sh}^2 \tfrac{x}{2}.$$

Эти формулы будут очень удобны позже при вычислении неопределённых интегралов.

7. Обратные гиперболические функции. Найдём функцию, обратную функции $\mathrm{sh}\, x$. Если $y = \mathrm{sh}\, x$, т. е.

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

то отсюда

$$e^x - e^{-x} - 2y = 0,$$

т. е.

$$\left(e^x\right)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

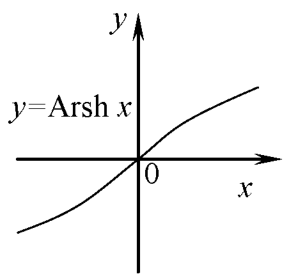


Рис.1.51

Знак «–» следует отбросить, так как e^x не может быть отрицательным. Итак,

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

откуда

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

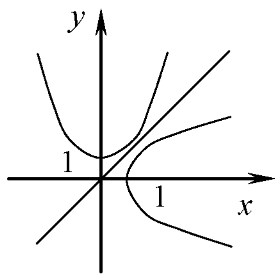


Рис.1.52

Меняя теперь местами x и y, получим, что функцией, обратной функции $\mathrm{sh}\, x$, является функция $\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$. Её называют ареа-синусом величины x и обозначают $\mathrm{Arsh}\, x$, рис. 1.51.

Точно так же из уравнения $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ получим

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2-1},$$

т. е.

$$x=\ln\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right).$$

Итак, функцией, обратной функции $\operatorname{ch} x$, является функция $\ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)$. Она двузначна ввиду немонотонности функции $\operatorname{ch} x$. Беря только верхнюю ветвь, получим функцию

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Она называется ареа-косинусом и обозначается $\operatorname{Arch} x$, рис. 1.52.

13. Сложиые фуикции

Пусть y есть функция некоторой переменной u, которая в свою очередь является функцией переменной x, т.е. пусть

$$y=f(u),\ u=\varphi(x).$$

Тогда

$$y=f[\varphi(x)],$$

или

$$y=F(x).$$

В этом случае y называется сложной функцией переменной x (или функцией от функции), а переменную u называют промежуточным аргументом.

Пример 1.16. Пусть $y=\sin^3 x$. Это можно переписать так

$$y=u^3,\ u=\sin x.$$

Здесь сложная функция есть результат суперпозиции (наложения) двух основных элементарных функций: тригонометрической и целой степенной.

Предположим теперь, что a – иррациональное число. Тогда, поскольку $x=e^{\ln x}$, то, по определению

$$x^a=e^{a\ln x}.$$

Таким образом, в случае произвольного показателя a степенная функция x^a определяется как сложная функция в виде суперпозиции показательной и логарифмической функций. Поскольку выражение $\ln x$ су-

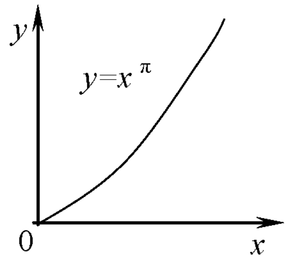


Рис.1.53

ществует лишь для $x > 0$, то и функция $y = x^a$ определена, вообще говоря, только при $x > 0$. Например, $x^\pi = e^{\pi \ln x}$, рис. 1.53.

Сложная функция может иметь и не один промежуточный аргумент.

Пример 1.17. Пусть $y = \sqrt{\operatorname{arctg} 2^{\operatorname{ch} x}}$. Это значит, что

$$y = \sqrt{u}, \quad u = \operatorname{arctg} v, \quad v = 2^w, \quad w = \operatorname{ch} x .$$

Итак, здесь имеются 3 промежуточных аргумента: u, v, w. Говорят, что операция взятия функции от функции здесь производится 3 раза.

14. Элемеитариые фуикции

Функция называется элементарной, если её можно задать одной формулой вида $y = f(x)$, где выражение $f(x)$ составлено из основных элементарных функций и констант при помощи конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

Пример 1.18. Функция

$$y = 10^{\frac{\sqrt{\operatorname{sh} x} + \ln(1-x)}{\operatorname{tg} 2x - x^3}}$$

– элементарная. Здесь в правой части производится одно сложение, два вычитания, одно умножение и 4 операции взятия функции от функции.

С некоторыми неэлементарными функциями мы познакомимся позже.

Уиражиеиия к главе I

Построить множества:

1. $[-2,1] \setminus \{0\}$; 2. $(0,3) \cup (\{0\} \cup \{3\})$; 3. $[0,2] \cup (1,\infty)$;
4. $[0,2] \setminus (1,\infty)$; 5. $(-\infty,0) \cap (0,\infty)$.

Найти области определения функций:

6. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}} + \arcsin \dfrac{x-2}{4}$;

17. $y = \lg\left(\dfrac{1}{x} - x\right) + \sqrt{1 - \lg^2 x}$;

7. $y = \dfrac{1}{x^2 - 9} + \lg\left(x - x^3\right)$;

18. $y = \lg\left(4x - x^2\right) + \sqrt{-x}$;

8. $y = \sqrt{3x - x^2} + \lg(-x)$;

19. $y = \dfrac{1}{\sqrt{10^x - 1}} + \sqrt{9x - x^3}$;

9. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos x}} + \lg \dfrac{x+3}{3-x}$;

20. $y = \lg(\lg\ x) + \sqrt{9 - x^2}$;

10. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}+\arcsin\dfrac{3}{x}$;

11. $y=\sqrt{5^x-1}+\lg\left(4-x^2\right)$;

12. $y=\dfrac{1}{\lg\left(x^2-3x+2\right)}+\arcsin\left(\ln x\right)$;

13. $y=\lg\left(\lg x\right)+\arccos\left(2^{x-2}\right)$;

14. $y=\arccos\dfrac{1}{10^x-1}$;

15. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\lg\left(x^2-3x+3\right)}}+\arcsin\dfrac{3x-5}{2}$;

16. $y=\sqrt{1-2\sin x}+\sqrt{1-\lg\left(x^2-2x+7\right)}$;

21. $y=\lg(1-2\cos x)+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$;

22. $y=\arcsin 10^x+\sqrt{x^3-4x}$;

23. $y=\ln\left(9x-x^3\right)+\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$;

24. $y=\sqrt{9x-x^3}+\lg\left(1-10^{x-2}\right)$;

25. $y=\lg\cos x+\sqrt{5+4x-x^2}$;

26. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}+\lg\dfrac{x+4}{4-x}$;

27. $y=\lg\left(4x-x^3\right)+\arcsin\dfrac{2x-5}{3}$.

Данные функции исследовать на чётность и нечётность:

28. $y=\dfrac{5^x-1}{5^x+1}$;

29. $y=\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt[3]{(1-x)^2}$;

30. $y=\dfrac{10^x+1}{x}$;

31. $y=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$;

32. $y=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

33. $y=\left|\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right|$.

Найти функции, обратные функциям:

34. $y=\log_3\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

35. $y=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}-3$;

36. $y=\dfrac{5^x}{1+5^x}$;

37. $y=4\arcsin\sqrt{1-x^3}$;

38. $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$.

Построить графики функций:

39. $y=3^{|x|}$;

40. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$;

41. $y=3^{x^2}$;

42. $y=5^{-x^2}$;

43. $y=\lg|x|$;

44. $y=|\lg x|$;

45. $y=\left|\lg|x|\right|$;

46. $y=\lg|1-x|$.

II. Предел числовой иоследовательиости

1. Оиределеиие иредела числовой иоследовательиости

Напомним, что числовой последовательностью называется упорядоченное бесконечное множество чисел

$$\{x_n\} = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \tag{2.1}$$

причем каждое из чисел (2.1) является функцией своего номера, т.е. $x_n = f(n)$, в связи с чем говорят, что числовая последовательность есть функция целочисленного аргумента. Числа $x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots$ называют членами этой последовательности. Если n – не конкретное, а произвольное (текущее) натуральное число, то выражение $x_n = f(n)$ называют общим членом последовательности.

Пример 2.1. В последовательности

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$$

общий член равен $(-1)^n$.

Пример 2.2. Для последовательности

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$$

очевидно, $x_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Еще раз укажем, что последовательность (2.1) есть частный случай упорядоченной дискретной переменной, принимающей значения $x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots$

Постоянное число a называется пределом числовой последовательности (2.1), если для любого, сколь угодно малого, но фиксированного, числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n \geq N$ будет

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

В этом случае пишут, что

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n. \tag{2.3}$$

Итак,

$$\left(a = \lim_{n \to \infty} x_n\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \middle| \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right).$$

Равенство (2.3) на основе выражения (2.2) означает геометрически, что, начиная с $n = N + 1$, все точки x_n принадлежат ε-окрестности точки $x = a$. Но, поскольку ε можно взять сколь угодно малым, то это значит, что при $n \to \infty$ точки x_n

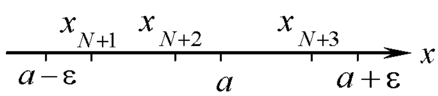


Рис. 2.1

неограниченно сгущаются около точки $x = a$.
Таким образом, любая, сколь угодно малая, окрестность точки a содержит в себе бесконечное множество точек x_n: x_{N+1}, x_{N+2}, $x_{N+3}, \ldots$, в то время как вне каждой ε-окрестности может находиться лишь конечное число точек x_n: x_1, x_2, ..., x_N, рис. 2.1.

Пример 2.3. Возьмем последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}.$$

Покажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$.

Имеем, $|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$.

Следовательно, неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ запишется так:

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

откуда

$$n + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

т. е.

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1. \tag{2.4}$$

Взяв, например, $\varepsilon = 0{,}001$, получим $n > 999$, откуда следует, что $N(0{,}001) = 999 + 1 = 1000$. Итак, начиная с $n = 1000$, будет $|x_n - 1| < 0{,}001$. Взяв меньшее ε, получим большее n, начиная с которого будет $|x_n - 1| < \varepsilon$.

Пример 2.4. Пусть $x_n = \frac{4n^2 + 1}{2n^2 - 3}$.

Если n велико, то $x_n \approx \frac{4n^2}{2n^2} = 2$. Следовательно, можно предположить, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2$. Докажем, что это так и есть. Имеем

$$|x_n - 2| = \left| \frac{4n^2 + 1}{2n^2 - 3} - 2 \right| = \left| \frac{4n^2 + 1 - 4n^2 + 6}{2n^2 - 3} \right| = \frac{7}{2n^2 - 3}.$$

При достаточно большом n величина $\frac{7}{2n^2 - 3}$ сколь угодно мала, а поэтому для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ будет

$$|x_n - 2| < \varepsilon,$$

откуда и следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2$.

Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}001$. Тогда неравенство $|x_n - 2| < \varepsilon$ примет вид

$$\frac{7}{2n^2 - 3} < 0{,}001,$$

откуда

$$2n^2 > 7003,$$

т. е.

$$n^2 > 3501{,}5,$$

или

$$n > \sqrt{3501{,}5}\,.$$

Но целая часть числа $\sqrt{3501{,}5}$ равна $\left[\sqrt{3501{,}5}\right] = 59$, а значит $N(0{,}001) = 60$, т. е. начиная с $n = 60$, выполняется неравенство $|x_n - 2| < 0{,}001$.

Пример 2.5. Возьмем последовательность

$$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\} = 0{,}1{,}0{,}1{,}\ldots$$

Очевидно, она не имеет предела, к которому при $n \to \infty$ неограниченно приближались бы числа x_n.

2. Простейшие свойства иределов числовых иоследовательиостей

Любая числовая последовательность не может иметь более одного предела.

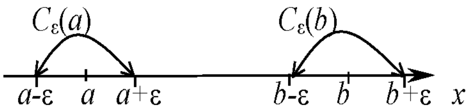


Рис. 2.2

■Пусть $a \neq b$, тогда если бы было $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right) \wedge \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b\right)$, то это означало бы, что, начиная с некоторого n, $(x_n \in C_\varepsilon(a)) \wedge (x_n \in C_\varepsilon(b))$, а так как $C_\varepsilon(a) \cap C_\varepsilon(b) = \varnothing$, рис. 2.2, то свойство 1 доказано.□

Если для всех n будет $x_n = a$, $(a = const)$, т. е. если

$$\{x_n\} = a, a, a, .., a, \ldots,$$

то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

■Действительно, в этом случае $|x_n - a| = 0 \forall n$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n |x_n - a| < \varepsilon.□$$

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то она ограничена.

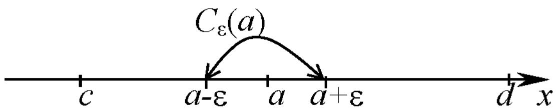


Рис. 2.3

■Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда вне интервала $C_\varepsilon(a)$ находится лишь конечное число точек последовательности: $x_1, x_2, ..., x_N$. Следовательно, существует такой отрезок $[c, d]$, который содержит в себе все точки $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, рис. 2.3 (очевидно можно взять $c = \min\{x_1, x_2, x_3, ..., x_N, a - \varepsilon\}$, $d = \max\{x_1, x_2, x_3, ..., x_N, a + \varepsilon\}$.□

Примечание. Утверждение, обратное свойству 3, неверно, т.е. последовательность может быть ограничена, но не иметь предела. Примером может служить последовательность из примера 2.5, принимающая значения 0, 1, 0, 1, …

Пусть имеется последовательность $\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...$. Выберем из нее некоторым образом числа $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...$, причем если в исходной последовательности число x_{n_i} предшествует числу x_{n_k}, то это будет иметь место и в новой последовательности. Последовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ называют подпоследовательностью исходной последовательности.

Пример 2.6. Пусть имеется последовательность

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ... \tag{2.5}$$

Одной из ее подпоследовательностей является, например, последовательность

$$\left\{\frac{1}{2k-1}\right\} = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, ... \tag{2.6}$$

Другая подпоследовательность той же последовательности:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{14}, ..., ... \tag{2.7}$$

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a, то и любая ее подпоследовательность имеет предел, также равный a.

■Действительно, если, начиная с некоторого n, будет $x_n \in C_\varepsilon(a)$, то этой окрестности принадлежат и все числа x_{n_k}, следующие после x_n.□

В качестве примера можно указать последовательность (2.5), которая имеет предел, равный нулю, и ее подпоследовательности (2.6) и (2.7) имеют тот же предел.

Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$, и если $x_n \le y_n$, то и $a \le b$.

■Действительно, если бы было $a > b$, то, начиная с некоторого n, было бы $x_n > y_n$, рис. 2.4, что противоречит условию.□

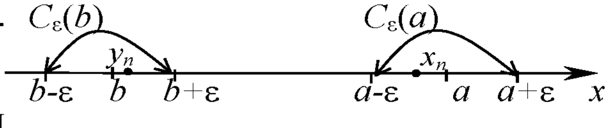


Рис. 2.4

Следствие. Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, и при этом $x_n \ge 0 \forall n$, то и $a > 0$, т. е. неотрицательная последовательность не может иметь отрицательного предела. Аналогично, неположительная последовательность не может иметь положительного предела.

Примечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причем $x_n < y_n \, \forall n$, то не обязательно $a < b$, поскольку может быть и $a = b$. Например, при всех n будет $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$, но тем не менее, последовательности

$$\left\{\frac{1}{(n+1)^2}\right\} = \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$$

и

$$\left\{\frac{1}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

имеют общий предел, равный нулю.

Если $u_n \le x_n \le v_n \, \forall n$, и при этом $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$, то и последовательность $\{x_n\}$ также имеет предел, и он равен a.

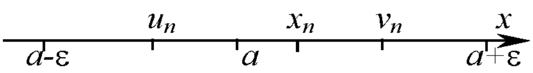


Рис. 2.5

■Действительно, если, начиная с некоторого n, будет $u_n \in C_\varepsilon(a)$ и $v_n \in C_\varepsilon(a)$, то начиная с этого n и $x_n \in C_\varepsilon(a)$, рис. 2.5, а это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.□

Свойство 6 иногда полушутя называют теоремой о двух милиционерах.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, и если $u_n \le x_n \le a$ или $u_n \ge x_n \ge a \; \forall n$ то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ также существует и равен a.

Примечание. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a, то эта последовательность называется сходящейся к числу a. Очевидно, на сходимость последовательности к данному пределу не влияет добавление или отбрасывание любого конечного числа ее членов. В связи с этим в свойствах 2, 5 и 6 после слов «для всех» можно сделать оговорку «начиная с некоторого».

3. Бескоиечио большие иоследовательиости

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого, сколь угодно большого, фиксированного числа $M > 0$, начиная с некоторого n, будет $|x_n| > M$. Тот факт, что последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно большая, записывается так: $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, или, условно,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Из определения бесконечно большой последовательности следует, что если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то таковой является и последовательность $\{-x_n\}$.

Пример 2.7. Пусть $x_n = \sqrt{n-1}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Зададим произвольное $M > 0$. Тогда соотношение $|x_n| > M$ означает, что $\sqrt{n-1} > M$, откуда $n > M^2 + 1$. Поскольку при любом $M = const$, начиная с некоторого n, будет $n > M^2 + 1$, то требуемый факт доказан.

Если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ и если, начиная с некоторого n, будет $x_n > 0$, то пишут, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Аналогично определяется равенство

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Пример 2.8. Пусть $x_n = \sqrt{n-1}$. Очевидно, что тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Пример 2.9. Пусть $x_n = (-1)^n n^2$, т.е. пусть

$$\{x_n\} = -1, 4, -9, 16, -25, \ldots$$

Очевидно, здесь не будет $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, а можно лишь писать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Легко устанавливаются следующие свойства.

1. Сумма бесконечно большой и ограниченной последовательностей есть бесконечно большая последовательность.
2. Сумма бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая последовательность того же знака.
3. Произведение бесконечно большой последовательности и последовательности, не обращающейся в нуль и не стремящейся к нулю, есть бесконечно большая последовательность.

Далее, легко видеть, что бесконечно большая последовательность является также и неограниченной. Обратное утверждение неверно, т.е. неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой. Таковой является, например, последовательность

$$1, 0, -2, 0, 3, 0, -4, 0, 5, \ldots$$

В данном случае, какое бы большое $M > 0$ мы не взяли, при одних n будет $|x_n| > M$, но уже для следующего значения x_{n+1} будет $x_{n+1} = 0$, а значит $|x_{n+1}| < M$.

4. Бескоиечио малые иоследовательиости и их свойства

Последовательность $\{\alpha_n\} = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, т. е. если для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого n выполняется неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon.$$

Иными словами, последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если, начиная с некоторого своего значения, она становится и при дальнейшем изменении остается меньшей по модулю любого, сколь угодно малого, наперед заданного положительного числа.

Пример 2.10. Пусть $\alpha_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}$, т. е. пусть

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = -\frac{1}{4}, \alpha_3 = \frac{1}{8}, \alpha_4 = -\frac{1}{16}, \ldots$$

Взяв достаточно большое n, мы сделаем величину $|\alpha_n|$ сколь угодно малой, так что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Положим $\varepsilon = 0{,}001$ и решим неравенство $|\alpha_n| < 0{,}001$. Получим

$$\frac{1}{2^n} < 0{,}001,$$

т. е.

$$2^n > 1000,$$

а значит $n > 10$. Итак, начиная с $n = 10$, будет $|\alpha_n| < 0{,}001$.

Из определения бесконечно малой последовательности следует, что если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то и $\{-\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Бесконечно малые последовательности обладают следующими свойствами.

Сумма бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

■Возьмем сначала две бесконечно малые последовательности: $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда, начиная с некоторого n, будет $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, а значит, начиная с этого n, выполняется неравенство

$$|\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а так как $|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n|$, то тем более $|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$, откуда следует, что $\{\alpha_n + \beta_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.

В случае трех бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ мы полагаем $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = (\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n$ и применяем только что доказанное утверждение. Таким образом, очевидно, что свойство 1 верно для любого конечного числа слагаемых.□

Примечание. Сумма бесконечно большого числа бесконечно малых последовательностей может и не быть бесконечно малой последовательностью. Например,

$$\underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0; \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = 1 = const;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

■Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность. Тогда существует такое $M > 0$, что $|x_n| < M \forall n$. Далее, пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Тогда, начиная с некоторого n, будет $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Поэтому, начиная с этого n, выполняется неравенство

$$|\alpha_n x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

а значит $\{\alpha_n x_n\}$ – бесконечно малая последовательность.□

Примечание. Произведение бесконечно малой последовательности на неограниченную может и не быть бесконечно малой последовательностью. Например,

$$\frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0; \quad \frac{1}{n} \cdot n = 1 = const; \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \ .$$

Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то $\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно малая последовательность.

■Зададим некоторое число $M > 0$. Тогда, начиная с некоторого n, будет $|x_n| > M$, а значит $|\alpha_n| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{M}$. Поскольку M можно взять сколь угодно большим, то величина $|\alpha_n|$ может быть сделана сколь угодно малой.□

Совершенно аналогично можно доказать следующее свойство.

Если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, и при этом $\alpha_n \neq 0$ ни при одном n, то $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ – бесконечно большая последовательность.

Понятие бесконечно малой последовательности тесно связано с понятием предела. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда из (2.2) следует, что последовательность $\{x_n - a\}$ – бесконечно малая, и, наоборот, если $\{x_n - a\}$ – бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Таким образом, для того чтобы число a было пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы их разность $\{x_n - a\}$ была бесконечно малой последовательностью. Иными словами, всякая числовая последовательность, имеющая предел, отличается от него на бесконечно малую величину, т. е. если $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{2.8}$$

где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

5. Арифметические свойства иределов числовых иоследовательиостей

Теорема 2.1. Предел суммы последовательностей, имеющих пределы, равен сумме этих пределов.

■Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда, на основании (2.8),

$$x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Поэтому

$$x_n + y_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n). \tag{2.9}$$

На основании свойства 1, последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – бесконечно малая. Поэтому из (2.9) следует, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ отличается от числа $a+b$ на бесконечно малую последовательность, а это и значит, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.\square$$

Легко видеть, что теорема 2.1 верна для любого конечного числа слагаемых.

Теорема 2.2. Предел произведения последовательностей, имеющих пределы, равен произведению этих пределов.

■Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

$$x_n y_n = (a+\alpha_n)(b+\beta_n) = ab + (\alpha_n b + a\beta_n + \alpha_n\beta_n).$$

Поскольку константа есть частный случай ограниченной последовательности, то $\{\alpha_n b\}$ и $\{a\beta_n\}$ есть бесконечно малые последовательности. Бесконечно малая последовательность тем более является ограниченной, так что и $\{\alpha_n\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Но тогда и $\{\alpha_n b + a\beta_n + \alpha_n\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Итак, величина $x_n y_n$ отличается от числа ab на бесконечно малую величину, а значит

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n. \square$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела числовой последовательности.

■Действительно, пусть $c = const$. Тогда, по теореме 2.2,

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n$$

(здесь мы использовали свойство 2 пределов числовых последовательностей).□

Теорема 2.3. Предел частного двух последовательностей, имеющих пределы, равен частному этих пределов, если только предел знаменателя отличен от нуля.

■Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причем $b \neq 0$. Тогда

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)}.$$

Величина $b\alpha_n - a\beta_n$ очевидно есть бесконечно малая. Далее, поскольку $b \neq 0$, то величина $b+\beta_n$ не может быть сколь угодно близка к нулю, так что последовательность $\left\{\frac{1}{b(b+\beta_n)}\right\}$ ограничена. Но тогда величина $(b\alpha_n - a\beta_n)\frac{1}{b(b+\beta_n)}$ – бесконечно малая, т. е. величина $\frac{x_n}{y_n}$ отличается от числа $\frac{a}{b}$ на бесконечно малую величину. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}. \square$$

Примечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, то, очевидно,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\infty$. Случай же, когда $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0\right)\wedge\left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0\right)$, будет рассмотрен ниже.

6. Лемма о стягивающихся отрезках

Система (1.3) вложенных отрезков называется системой стягивающихся отрезков, если при $n\to\infty$ длина отрезка $[a_n,b_n]$ бесконечно мала, т. е. если

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

Лемма 2.1. Если (1.3) – система стягивающихся отрезков, то существует одно и только одно число, принадлежащее всем отрезкам этой системы.

■Тот факт, что хотя бы одно принадлежащее всем отрезкам системы число существует, вытекает из свойства 5 множества вещественных чисел, т. е. из аксиомы непрерывности числовой оси. Докажем, что это число – единственное.

Предположим, что существует два таких числа x и y, что

$$a_n\le x\le b_n,\ a_n\le y\le b_n\ \forall n.$$

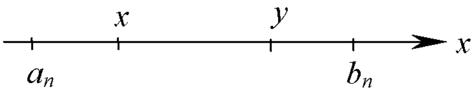


Рис. 2.6

Тогда $|x-y|\le b_n-a_n$, рис. 2.6. Поскольку $x\ne y$, то существует такое число $h>0$, что $|x-y|>h$. Но тогда тем более $b_n-a_n>h\ \forall n$, а это противоречит тому, что, по условию, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.□

7. Точиая верхияя и иижияя граии числовых миожеств

Пусть E – некоторое множество чисел x. Число M называется точной верхней гранью этого множества, если:

а) $x\le M\ \forall x\in E$,

б) для каждого числа $M_1<M$ найдется по крайней мере одно число $x\in E$, такое, что $M_1<x\le M$, рис. 2.7.

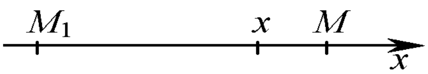


Рис. 2.7

Условие а) означает, что множество E ограничено сверху числом M, а из условия б) следует, что число M является наименьшим из чисел, обладающих этим свойством. Очевидно, что M геометрически означает абсциссу самой правой точки множества E.

Пример 2.11. Пусть множество E состоит из конечного числа точек

$x_1, x_2, \dots x_m$. Тогда, очевидно $M = \max\{x_1, x_2, \dots x_m\}$.

Пример 2.12. Пусть $E = [a,b]$. В этом случае $M = b$, а значит $M \in E$.

Пример 2.13. Пусть $E = (a,b)$. Тогда снова $M = b$, но теперь уже $M \notin E$.

Эти примеры показывают, что само число M может как принадлежать, так и не принадлежать множеству E.

Точная верхняя грань числового множества E обозначается $\sup E$. Если множество не ограничено сверху, то пишут, что $\sup E = +\infty$.

Теорема 2.4. Всякое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань, являющуюся конечным числом.

■Пусть E – непустое ограниченное сверху множество; тогда существует, по крайней мере, один элемент $a \in E$, и имеется такое число b, что для всех $x \in E$ будет $x \le b$ (при этом вовсе не обязательно, что $b \in E$). Отрезок $[a,b]$ содержит, по крайней мере, одну точку множества E (например, точку $x = a$). Разделим этот отрезок пополам и рассмотрим два отрезка $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Если правый отрезок содержит хотя бы одну точку множества E, то мы обозначаем его $[a_1, b_1]$, а левый отрезок отбрасываем (рис. 2.8). В противном случае (рис. 2.9) левый отрезок содержит по крайней мере одну точку множества E, и мы его обозначим $[a_1, b_1]$, а правую половину исходного отрезка $[a,b]$ выбрасываем из дальнейшего рассмотрения. Очевидно, в обоих случаях все множество E лежит левее точки b_1.

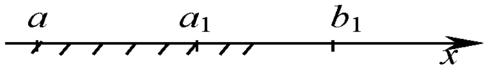


Рис. 2.8

От отрезка $[a_1, b_1]$ точно так же переходим к отрезку $[a_2, b_2]$ и т. д. На n-ом шаге отрезок $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ делим пополам, и, если правая его половина содержит хотя бы одну точку множества E, то обозначаем ее $[a_n, b_n]$ (а левую половину отбрасываем), а если нет, то в качестве $[a_n, b_n]$ берем левую половину, а правую половину, как не содержащую точек множества E, отбрасываем и т.д.

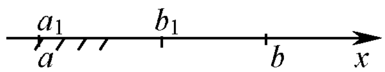


Рис. 2.9

В результате этого процесса получим систему вложенных отрезков $[a,b]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$,..., $[a_n, b_n]$... При этом для всех n множество E полностью расположено левее точки b_n, а отрезок $[a_n, b_n]$ содержит по крайней мере одну точку множества E. Кроме того, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, а значит $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, т.е. получена система стягивающихся отрезков. На основании леммы 2.1 о стягивающихся отрезках, существует, и притом единственное, число $x = M$,

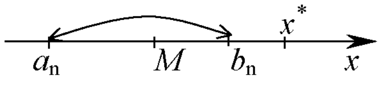


Рис. 2.10

принадлежащее всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Докажем, что $M = \sup E$.

Покажем сначала, что для любого $x \in E$ будет $x \le M$. Предположим противное, т. е. пусть существует такое $x^* \in E$, что $x^* > M$ (рис. 2.10). Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, то, начиная с некоторого n, будет $b_n < x^*$, чего не может быть, поскольку все точки лежат левее точки b_n. Возьмем теперь некоторое $\varepsilon > 0$ Начиная с некоторого n будет $b_n - a_n < \varepsilon$, а значит $a_n > M - \varepsilon$. Но отрезок $[a_n, b_n]$ содержит по крайней мере одну точку $x \in E$, причем, как уже доказано, $x \le M$, рис. 2.11.

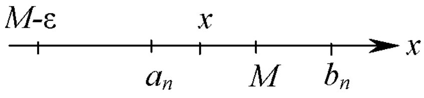


Рис. 2.11

Следовательно,

$$M - x \le b_n - a_n < \varepsilon,$$

откуда

$$x > M - \varepsilon.$$

Таким образом, для любого числа $M_1 = M - \varepsilon$ существует такое число $x \in E$, что $x > M_1$. Отсюда и следует, что $M = \sup E$.□

Теорема 2.5. Любое числовое множество имеет единственную точную верхнюю грань.

Заметим, что в этой теореме множество E может и не быть ограниченным сверху; в противном случае $\sup E = +\infty$.

■Предположим, что множество E имеет две различные точные верхние грани M и M' (для определенности будем считать, что $M < M'$), рис. 2.12. Поскольку $M' = \sup E$, то существует такое $x \in E$, что $M < x \le M'$, а это противоречит тому, что $M = \sup E$. Тем самым теорема доказана.□

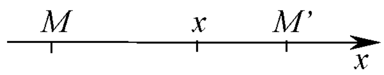


Рис. 2.12

Число m называется точной нижней гранью множества E, если:

а) $x \ge m \; \forall x \in E$,

б) для каждого числа $m' > m$ найдется по крайней мере одно число $x \in E$, что $x < m'$, рис. 2.13.

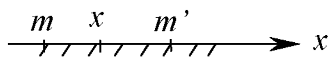


Рис. 2.13

Точная нижняя грань множества E обозначается $\inf E$. Если множество E не ограничено снизу, то пишут, что $\inf E = -\infty$.

Теорема 2.6. Любое непустое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань, являющуюся конечным числом.

Теорема 2.7. Любое числовое множество имеет единственную точную нижнюю грань.

Теоремы 2.6 и 2.7 доказываются совершенно аналогично теоремам 2.4 и 2.5.

8. Предел монотонной нослedовательностн

Теорема 2.8. Если последовательность $\{x_n\}$ монотонно не убывает и ограничена сверху некоторым числом Q, то она имеет предел, и этот предел не превосходит числа Q.

■Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ – члены последовательности. Тогда, по условию

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le \ldots \le Q .$$

Поскольку последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то, на основании теоремы 2.4, существует конечное число $M = \sup\{x_n\}$.□

Докажем, что $M = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Для этого зададим произвольное $\varepsilon > 0$. По определению точной верхней грани (часть а) определения) для всех n будет

$$x_n \le M ,$$

а значит

$$\forall n, \forall \varepsilon > 0, x_n < M + \varepsilon . \tag{2.10}$$

Далее, на основании части б) определения точной верхней грани, хотя бы при одном n будет

$$M - \varepsilon < x_n,$$

а так как числа x_n не убывают при $n \to \infty$, то и для всех последующих n будет

$$M - \varepsilon < x_n. \tag{2.11}$$

Из неравенств (2.10) и (2.11) следует, что, начиная с некоторого n будет $M - \varepsilon < x_n < M + \varepsilon$, т.е. $x_n \in C_\varepsilon(M)$, откуда и следует, что $M = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тот факт, что $M \le Q$, очевиден, так как если бы было $M > Q$, то, начиная с некоторого n, было бы и $x_n > Q$, что противоречит условию.□

В дополнение к доказанной теореме покажем, что если последовательность монотонно не убывает и не ограничена сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

■Действительно, пусть $M > 0$ – произвольное число. В силу того, что величина x_n не ограничена сверху, при некотором n будет $x_n > M$, а так как числа x_n не убывают с ростом n, то и при всех последующих n будет $x_n > M$, т.е., начиная с некоторого n, будет $x_n > M \ \forall n$, откуда и следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty .\square$$

Теорема 2.9. Если последовательность $\{x_n\}$ монотонно не возрастает и ограничена снизу некоторым числом q, то она имеет предел, и этот предел не меньше числа q.

Эта теорема доказывается совершенно аналогично теореме 2.8.

Прнмер 2.14. Пусть

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4},\ x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \ldots$$

Очевидно, что для всех n будет $x_n < 1$, и что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает. Па основании теоремы 2.8, последовательность $\{x_n\}$ имеет предел и этот предел не превосходит числа 1, рис. 2.14. Легко проверить, что в данном случае предел равен именно 1. Действительно

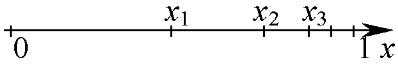


Рис. 2.14

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Если $n \to \infty$, то $\frac{1}{2^n} \to 0$, а значит $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Прнмер 2.15. Рассмотрим последовательность

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1 + \frac{1}{2!},\ x_3 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}, \ldots, x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \ldots$$

Очевидно, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает. В то же время

$$x_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} <$$

$$< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Из теоремы 2.8. следует, что существует число $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и при этом $a < 2$.

Позже мы увидим, что $a = e - 1 = 1{,}718\ldots$.

9. Решенне характерных нрнмеров на нрнзнакн существовання нределов чнсловой носледовательностн

Прнмер 2.16. Пусть $x_n = \frac{n}{2^n}$.

Тогда

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}},$$

откуда

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\frac{n+1}{2n},$$

а значит

$$x_{n+1}=\frac{n+1}{2n}x_n. \qquad (2.12)$$

Поскольку $n+1<2n\,\forall n=2,3,4,\ldots$, то

$$x_{n+1}<x_n\,\forall n>1.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает. Кроме того, $x_n>0\,\forall n$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает, но ограничена снизу числом 0. Па основании теоремы 2.9, существует число $c=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, и при этом $c\ge 0$.

Поскольку рекуррентное соотношение (2.12) верно при всех n, то в нем можно совершить предельный переход при $n\to\infty$.
Тогда получим

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}\lim_{n\to\infty}x_n,$$

т. е.

$$c=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)c,$$

или

$$c=\frac{1}{2}c,$$

откуда следует, что $c=0$.

Итак, мы показали, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

Легко убедиться, что при произвольном $k>1$ и при любом $a>1$ будет $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$, откуда, по существу, следует, что при $x=n,\ n\to\infty$ степенная функция неограниченно возрастает медленнее показательной функции.

Прнмер 2.17. Пусть $x_n=\frac{a^n}{n!}$. Будем считать, что $a>1$, так как при $a\le 1$, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Имеем

$$x_{n+1}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a^n}{n!}\frac{a}{n+1}=x_n\frac{a}{n+1},$$

т. е.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1},$$

а значит

$$x_{n+1} = \frac{a}{n+1} x_n, \tag{2.13}$$

При больших n (точнее, при $n > a-1$) будет $x_{n+1} < x_n$. Кроме того, $x_n > 0 \, \forall n$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает, но ограничена снизу числом 0. В силу теоремы 2.9, она имеет предел c, и при этом $c \geq 0$.

Совершая в соотношении (2.13) предельный переход при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} \lim_{n\to\infty} x_n,$$

т. е.

$$c = 0 \cdot c$$

откуда $c = 0$.

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

т. е. при $n \to \infty$ показательная функция растет медленнее факториала.

Прнмер 2.18. Пусть $x_n = \sqrt[n]{a}$, где $a > 1$. Очевидно, что $x_n > 1 \forall n$. Положив $x_n = 1 + \alpha_n$, получим, что $\alpha_n > 0$.
Таким образом,

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n, \tag{2.14}$$

а значит $a = (1+\alpha_n)^n$, откуда, на основании формулы бинома Пьютона,

$$a = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2 + \ldots + \alpha_n^n.$$

Поскольку $a_n > 0$, то

$$a > 1 + n\alpha_n,$$

так что

$$\alpha_n < \frac{a-1}{n},$$

отсюда находим:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,$$

т. е., на основании (2.14),

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Прнмер 2.19. Пусть $x_n = \sqrt[n]{n}$. Снова положим $x_n = 1 + \alpha_n$, где $\alpha_n > 0$. Таким образом,

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n,$$

а значит

$$n = (1 + \alpha_n)^n,$$

или, по формуле бинома Пьютона,

$$n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2 + \ldots + \alpha_n^n,$$

откуда следует, что

$$n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2,$$

т. е.

$$\frac{n-1}{2}\alpha_n^2 < 1,$$

а значит

$$\alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

и, в то же время, $\qquad \alpha_n > 0 \; \forall n$.

Полагая $n \to \infty$, получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Прнмер 2.20. Пусть $x_n = \sqrt[n]{n!}$. Покажем, что эта последовательность монотонно возрастает, т.е. что

$$x_n < x_{n+1}. \qquad (2.15)$$

Перавенство (2.15) равносильно следующему:

$$x_n^{n+1} < x_{n+1}^{n+1},$$

т. е.

$$n!\sqrt[n]{n!} < (n+1)!,$$

или

$$\sqrt[n]{n!} < n+1,$$

а значит

$$n! < (n+1)^n,$$

т. е.

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n < (n+1)(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+1).$$

Последнее неравенство очевидно, а значит доказано и неравенство (2.15), т. е. доказано, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает.

Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху.

Предположим противное, т. е. пусть существует такое число $M > 0$, что $x_n < M \; \forall n$, т. е., $\sqrt[n]{n!} < M$ откуда $n! \leq M^n$, а этот результат противоречит тому, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M^n}{n!} = 0$$

(см. пример 2.17).

Тем самым доказано, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Прнмер 2.21. Пусть $x_n = \dfrac{\log_a n}{n}$. Будем считать, что $a > 1$. Тогда, на основании результата примера 2.19,

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Возьмем некоторое малое $\varepsilon > 0$. Тогда, начиная с некоторого n, будет $n^{\frac{1}{n}} < a^{\varepsilon}$, откуда

$$\frac{1}{n}\log_a n < \varepsilon,$$

или

$$\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon,$$

а так как ε можно взять сколь угодно малым, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

Прнмер 2.22. Возьмем последовательность

$$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

Рекуррентная формула:

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}. \qquad (2.16)$$

Имеем

$$x_1 < 2, x_2 < \sqrt{2+2} = 2, x_3 < \sqrt{2+2},$$

и вообще

$$x_n < 2 \,\forall n,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху числом 2.

Па основании (2.16) имеем

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2+x_n} - \sqrt{2+x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n} + \sqrt{2+x_{n-1}}}.$$

Легко видеть, что $x_2 > x_1$. Применяя метод математической индукции, получим, что

$$x_{n+1} > x_n \,\forall n,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает.

Итак, последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает, но ограничена сверху числом 2. Па основании теоремы 2.8, существует число $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и при этом $c \le 2$.

Совершая в равенстве (2.16), т. е. в равенстве $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$, предельный переход, получим

$$c^2 = 2 + c,$$

т. е.

$$c^2 - c - 2 = 0,$$

откуда $$c_1 = 2,\ c_2 = -1.$$

Корень $c = -1$ отпадает, так как $x_n > \sqrt{2}$, а значит и $c > \sqrt{2}$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Прнмер 2.23. Возьмем последовательность

$$x_1 = \frac{10}{1},\ x_2 = \frac{10\cdot 11}{1\cdot 3},\ x_3 = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 3\cdot 5}, \ldots,$$

т. е.

$$x_n = \frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot \ldots \cdot (n+9)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}.$$

Очевидно, рекуррентная формула:

$$x_n = \frac{n+9}{2n-1}\cdot x_{n-1} \tag{2.17}$$

Из неравенства $n+9<2n-1$ получим $n>10$. Таким образом, из (2.17) следует, что, начиная с $n=11$, последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает. Кроме того, $x_n>0\,\forall n$. Следовательно, эта последовательность удовлетворяет условиям теоремы 2.9. Поэтому существует число $c=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, причем $c\geq 0$.

Переходя в соотношении (2.17) к пределу при $n\to\infty$, получим

$$c=\frac{1}{2}c,$$

откуда $c=0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0.$$

Этот результат естественен, поскольку, на основании (2.17), при больших n будет $x_n\approx\frac{1}{2}x_{n-1}$, т. е. последовательность x_n при больших n близка к геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}$.

10. Лемма Больцано–Вейерштрасса

Возьмем последовательность

$$2,\frac{1}{2},-2,\frac{2}{3},2,\frac{3}{4},-2,\frac{4}{5},\ldots$$

Она является ограниченной, но не имеет предела. Однако из нее можно выделить подпоследовательность

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots,$$

которая, очевидно, сходится, имея предел, равный 1. Возникает вопрос, случаен ли этот факт, или же он имеет общий характер?

Теорема 2.10 (лемма Больцано–Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к конечному пределу.

■Пусть последовательность

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n,\ldots \tag{2.18}$$

ограничена. Тогда существует такой отрезок $[a,b]$, что $x_n\in[a,b]\forall n$. Разделим отрезок $[a,b]$ пополам. По крайней мере одна из его половин содержит бесконечное множество точек x_n; обозначим эту половину через $[a_1,b_1]$. Если бесконечное множество точек x_n содержит каждая из половин отрезка $[a,b]$, то любую из них можно взять в качестве $[a_1,b_1]$.

Аналогично делим отрезок $[a_1,b_1]$ пополам и обозначаем $[a_2,b_2]$ ту из его половин, которая содержит бесконечное множество точек x_n, и т. д. Па k–м шаге получим отрезок $[a_k,b_k]$, содержащий бесконечное множество точек x_n, и т. д.

В результате получим систему стягивающихся отрезков $[a,b]$, $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, ..., $[a_k,b_k]$, ... Па основании леммы о стягивающихся отрезках, существует единственная точка c, принадлежащая всем этим отрезкам.

Искомую подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, ... x_{n_k}, ...$ можно построить, например, так (вообще это можно сделать бесчисленным множеством способов). В качестве x_{n_1} возьмем первое из чисел x_n, содержащееся в $[a_1,b_1]$. В качестве x_{n_2} возьмем первое из чисел x_n, следующих в последовательности (2.18) после x_{n_1} и попавшее в $[a_2,b_2]$. В качестве x_{n_3} берем первое из чисел x_n, следующих в (2.18) после x_{n_1} и x_{n_2} и попавшее в $[a_3,b_3]$ и т. д. Это построение возможно, поскольку каждый из отрезков $[a_k,b_k]$ содержит бесчисленное множество точек x_n, а значит ему принадлежат точки со сколь угодно большими номерами.

Так как для всех n_k будет $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, и в то же время $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c$, то, в силу свойства 6 пределов, имеем

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c,$$

что и требовалось доказать.□

Унражнення к главе II

Построить последовательности и установить их расходимость

1. $x_n = (-1)^{n^2}$; 2. $x_n = (-1)^n n$;

3. $x_n = n^{(-1)^n}$; 4. $x_n = 0{,}5^{\left[(-1)^n - 1\right]n}$;

5. $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n}{n+1}$; 6. $x_n = 2^{(-1)^n+1}$;

7. $x_n = (-1)^n n^3$.

8. Дана последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{1-2n^2}{3+4n^2}$. Пользуясь определением предела, показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\dfrac{1}{2}$. Пачиная с какого n будет $\left|x_n + \dfrac{1}{2}\right| < 0{,}001$?

Дана последовательность $\{x_n\}$. Пайти ее предел, а также $N(\varepsilon)$.

9. $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$; 10. $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}$.

11. $x_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$; 12. $x_n = \dfrac{n+1}{3n-2}$;

13. Дана последовательность $x_1 = \dfrac{1}{4}, x_2 = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{7}, \ldots, x_n = x_{n-1}\dfrac{2n-1}{3n+1}$. Показать, что она монотонно убывает, и что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

14. Дана последовательность $x_1 = \sqrt{12},\ x_n = \sqrt{12 + x_{n-1}}$. Показать, что она монотонно возрастает, и найти ее предел.

Вычислить пределы

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^n}$ $(a > 1;\ a = 1;\ 0 < a < 1)$;

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{2n}}{1+a^{2n+1}}$ $(a > 1;\ a = 1;\ 0 < a < 1)$;

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2}$; 18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2+2^2+\ldots n^2}{n^2} - \dfrac{n}{3}\right)$;

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^2}$; 20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3}$;

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$; 22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$.

III. Предел функцнн. Пенрерывность функцнй

1. Предел функцнн в точке н на бесконечностн

Пусть имеется функция $y = f(x)$ с областью определения D_f. Возьмем некоторую последовательность

$$\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \qquad (3.1)$$

такую, что

а) $x_n \in D_f \ \forall n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и при этом $x_n \neq a \ \forall n$.

Очевидно, последовательностей вида (3.1), удовлетворяющих условиям а) и б), существует, вообще говоря, бесчисленное множество.

По последовательности (3.1) строим соответствующую числовую последовательность

$$\{f(x_n)\} = f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots \qquad (3.2)$$

Если для любой последовательности (3.1), удовлетворяющей условиям а) и б), соответствующая последовательность (3.2) сходится к некоторому числу b, то это число называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, и это записывают так

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \qquad (3.3)$$

или

$$f(x) \underset{x\to a}{\to} b.$$

При этом числа x_n могут приближаться к точке a совершенно произвольно, и в любом из этих случаев будет

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

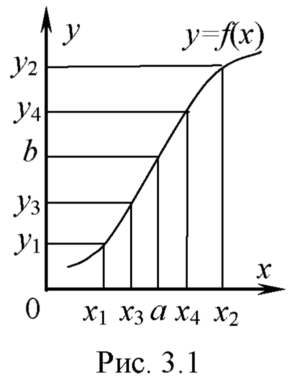


Рис. 3.1

Данное определение предела функции в точке можно сформулировать и короче:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \ \forall \{x_n\} \to a\right). \qquad (3.4)$$

Геометрически соотношение (3.4) означает, что если абсциссы точек x_n стремятся к a, то ординаты этих точек неограниченно приближаются к b.

Прнмер 3.1. Пусть $f(x) = \sqrt{x+2}$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x+2} = \sqrt{3}$.

В данном случае $D_f = [-2, +\infty)$. Возьмем в D_f последовательность $\{x_n\}$, такую, что $x_n \to 1$. Имеем

$$\sqrt{x_n+2}-\sqrt{3}=\frac{(x_n+2)-3}{\sqrt{x_n+2}+\sqrt{3}}=(x_n-1)\frac{1}{\sqrt{x_n+2}+\sqrt{3}}.$$

Знаменатель во втором множителе не может быть сколь угодно близким к нулю, а значит, этот множитель является ограниченной величиной. Множитель же x_n-1 бесконечно мал при $n\to\infty$. По тогда и $\sqrt{x+2}-\sqrt{3}$, как произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную, есть бесконечно малая последовательность, а это, на основании (3.4) и (3.3), означает, что $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+2}=\sqrt{3}$.

Прнмер 3.2. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$. Пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится к нулю. Если α измерять в радианах, то

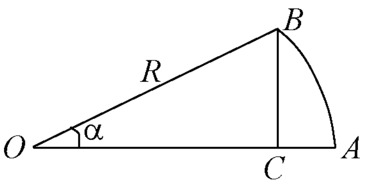


Рис. 3.2

$$\alpha=\frac{\breve{AB}}{R},\ \text{рис. 3.2.}$$

В то же время $\sin\alpha=\dfrac{BC}{R}$, а так как $BC<\breve{AB}$, то

$$\sin\alpha_n<\alpha_n\quad\forall n.$$

Здесь мы считаем, что $\alpha_n>0$. В общем же случае, очевидно, имеем

$$|\sin\alpha_n|<|\alpha_n|.$$

Так как, по условию, $\alpha_n\to 0$, а значит и $|\alpha_n|\to 0$, то тем более и $|\sin\alpha_n|\underset{n\to\infty}{\to}0$, откуда и следует, что

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0. \tag{3.5}$$

Прнмер 3.3. Пусть a – произвольное число. Докажем, что

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a. \tag{3.6}$$

Имеем

$$\sin x_n-\sin a=2\sin\frac{x_n-a}{2}\cos\frac{x_n+a}{2}.$$

Если $x_n\to a$, то, на основании (3.5), $\sin\dfrac{x_n-a}{2}\to 0$. В то же время

$$2\left|\cos\frac{x_n+a}{2}\right|\le 2\ \forall n.$$

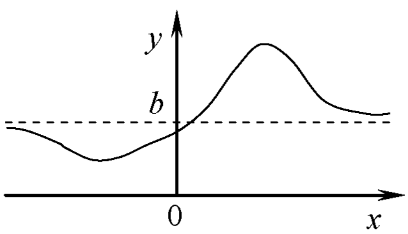


Рис. 3.3

Следовательно, величина $\sin x_n-\sin a$ при $n\to\infty$ бесконечно мала, как произведение бесконечно малой величины на ограниченную. Отсюда, на основании произвольности последовательности $\{x_n\}$, и следует равенство (3.6).

В равенстве (3.3) каждое из чисел a и b может и не быть конечным. Пусть, например, $a=\infty$. Тогда вместо (3.3) получим

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b.$$

В частности, можно рассматривать пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, рис. 3.3.

Прнмер 3.4. Из рис. 3.4 легко усматривается, что

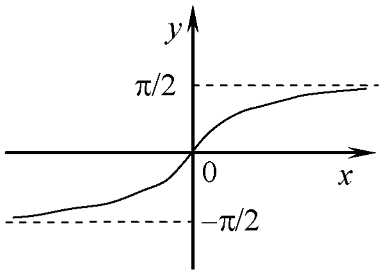


Рис. 3.4

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}. \tag{3.7}$$

Для доказательства зададим произвольное $\varepsilon>0$. Решим неравенство

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x<\varepsilon.$$

Получим

$$\operatorname{arctg} x>\frac{\pi}{2}-\varepsilon,$$

откуда

$$x>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right),$$

т. е.

$$x>\operatorname{ctg}\varepsilon.$$

По $x_n\to+\infty$, а поэтому, начиная с некоторого n, будет $x_n>\operatorname{ctg}\varepsilon$. Тогда, начиная с этого n, будет

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x_n<\varepsilon,$$

откуда следует первое из равенств (3.7). Точно так же доказывается и второе из равенств (впрочем, оно вытекает и из нечетности функции $\operatorname{arctg} x$).

Пусть теперь в равенстве (3.3) будет $b=\infty$, т. е. пусть

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

В таких случаях говорят, что функция $f(x)$ в точке $x=a$ обращается в бесконечность.

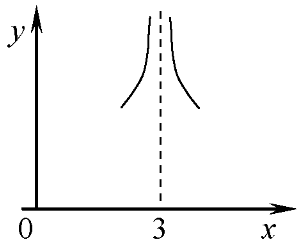


Рис. 3.5

Прнмер 3.5. Убедимся, что $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x}{(x-3)^2}=+\infty$.

Действительно, если $x_n\to3$, то $\dfrac{1}{(x_n-3)^2}x_n$ есть бесконечно большая положительная величина (как произведение бесконечно большой положительной величины на величину, не стремящуюся к нулю и, начиная с некоторого n, положительную), рис. 3.5.

Возьмем, наконец, случай, когда одновременно $a = \infty$ и $b = \infty$, т. е. когда

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty .$$

Это равенство означает, что если $\{x_n\}$ – произвольная бесконечно большая последовательность, то и последовательность $\{f(x_n)\}$ – бесконечно большая.

Прнмер 3.6. Покажем, что

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty .$$

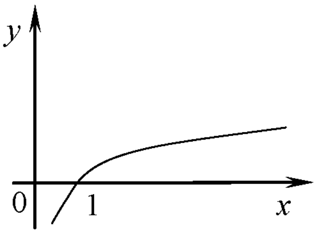


Рис. 3.6

Зададим некоторое число $M > 0$. Решим неравенство

$$\ln x > M .$$

Оно выполняется для $x > e^M$. По, поскольку $x_n \to +\infty$, то, начиная с некоторого n, будет $x_n > e^M$, а значит, начиная с этого n, будет $\ln x_n > M$, рис. 3.6.

2. Одностороннне нределы функцнн в точке

Предположим, что числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a, и пусть $x_n > a$ $\forall n$, рис. 3.7. В этом случае говорят, что величина x_n стремится к числу a справа, и пишут:

$$x_n \underset{n \to \infty}{\to} a + 0 .$$

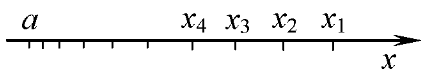


Рис. 3.7

Если же $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, и в то же время $x_n < a$ $\forall n$, то величина x_n называется стремящейся к числу a слева; в этом случае пишут:

$$x_n \underset{n \to \infty}{\to} a - 0 .$$

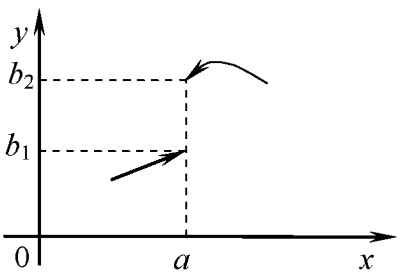


Рис. 3.8

В частности, если $a = 0$, то пишут не $x_n \underset{n \to \infty}{\to} 0 + 0$ или $x_n \underset{n \to \infty}{\to} 0 - 0$, а просто $x_n \underset{n \to \infty}{\to} +0$ или $x_n \underset{n \to \infty}{\to} -0$.

Предположим теперь, что $y = f(x)$ – некоторая функция. Если для любой последовательности $\{x_n\} \underset{n \to \infty}{\to} a - 0$ будет $\{f(x_n)\} \underset{n \to \infty}{\to} b_1$, то число b_1 называют пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$ слева, рис. 3.8, и в этом случае пишут, что

$$b_1 = \lim_{x \to a-0} f(x).$$

Аналогично определяется предел функции $f(x)$ в точке $x = a$ справа:

$$b_2 = \lim_{x \to a+0} f(x).$$

Для произвольной функции в произвольной точке пределы слева и справа не обязательно равны между собой. Более того, любой из них (или даже оба) может не существовать.

Пример 3.7. Возьмем функцию $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ и точку $x = 0$. Если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +0$, то $\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, и, в силу первого из равенств (3.7),

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi}{2},$$ так что

$$\lim_{x\to+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

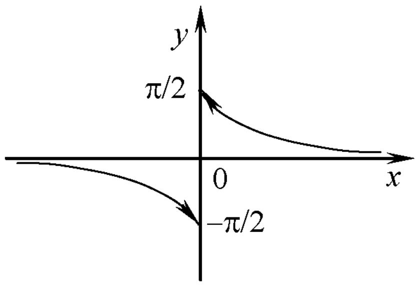


Рис. 3.9

Аналогично, используя вторую из формул (3.7), получим

$$\lim_{x\to-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Обычно, с целью уточнения предыдущих равенств, их пишут так:

$$\lim_{x\to+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - 0, \quad \lim_{x\to-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 0.$$

Смысл каждого из этих уточнений очевиден, рис. 3.9.

Итак, в данном примере пределы функции в точке $x = 0$ существуют, но не равны между собой.

Пример 3.8. Пусть $y = 2^{\frac{1}{x}}$. Если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +0$, то $\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, а значит

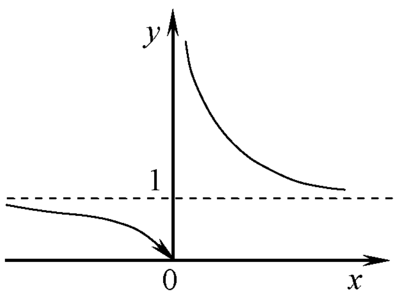


Рис. 3.10

и $2^{\frac{1}{x_n}} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. Если же $x_n \underset{n\to\infty}{\to} -0$, то $\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$, а значит $2^{\frac{1}{x_n}} \underset{n\to\infty}{\to} +0$. Итак,

$$\lim_{x\to-0} 2^{\frac{1}{x}} = +0, \quad \lim_{x\to+0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

т. е. предел функции в точке $x = 0$ слева существует, а предел справа – не существует.

Заметим еще также, что, если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, то $\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} +0$, а значит $2^{\frac{1}{x_n}} \underset{n\to\infty}{\to} 1+0$, так что

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1+0,$$

и аналогично

$$\lim_{x\to-\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1-0.$$

Легко видеть, что для того чтобы данная функция в данной точке имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке пределы как слева, так и справа, и чтобы эти пределы были равны между собой.

3. Свойства нределов функцнй

Рассмотренные выше определения и свойства пределов числовых последовательностей легко переносятся и на случай функций непрерывного аргумента. Перечислим основные из них.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ (здесь, как и всюду ниже, вместо $x\to a$ может быть $x\to\infty$).

Имеют место, в частности, следующие свойства.

1. Сумма бесконечно большой и ограниченной функций есть бесконечно большая функция.
2. Сумма бесконечно больших функций одного знака есть бесконечно большая функция того же знака.

■Докажем, например, свойство 1. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, а $\varphi(x)$ – ограниченная при $x\to a$ функция (т.е. существует такое $M>0$, что для всех $x\in C_\varepsilon(a)$, где $\varepsilon>0$ – любое число, будет $|\varphi(x)|\le M$). Тогда при $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ получим последовательность $\{f(x_n)+\varphi(x_n)\}$, которая является суммой бесконечно большой $\{f(x_n)\}$ и ограниченной последовательности $\{\varphi(x_n)\}$. В силу соответствующего свойства числовых последовательностей будет $f(x_n)+\varphi(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, а так как $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+\varphi(x)] = \infty$, что и требовалось доказать. □

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Имеют место следующие свойства.

1. Сумма любого конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.
2. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.
3. Если при $x \to a$ функция $f(x)$ является бесконечно большой, то функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ есть бесконечно малая при $x \to a$.
4. Если при $x \to a$ функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая и если она не обращается в нуль в некоторой окрестности точки a (за исключением, быть может, самой точки a), то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to a$.

■Докажем, например, свойство 3. Пусть $x_n \underset{n \to \infty}{\to} a$. Тогда при $n \to \infty$ последовательность $\{f(x_n)\}$ есть бесконечно большая, и, по доказанному ранее, величина $\{\alpha(x)\} = \left\{\dfrac{1}{f(x)}\right\}$ есть бесконечно малая последовательность, т.е. $\alpha(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} 0$, а так как последовательность $\{x_n\}$ – произвольная, то $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.□

Предположим теперь, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Тогда $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$. Обратно, если $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

■Докажем, например, первое из этих утверждений. Пусть $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Это значит, что если $x_n \underset{n \to \infty}{\to} a$, то $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} b$, а значит $f(x_n) - b \underset{n \to \infty}{\to} 0$. Положив

$$f(x_n) - b = \alpha(x_n), \tag{3.8}$$

будем иметь $\alpha(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} 0$. Следовательно, $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, а так как из (3.8) следует, что $f(x) = b + \alpha(x)$, то утверждение доказано.□

Далее, справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.1. Предел суммы любого конечного числа функций, имеющих предел, равен сумме этих пределов, т. е.

$$\lim_{x\to a}\sum_{k=1}^{m} f_k(x)=\sum_{k=1}^{m}\lim_{x\to a} f_k(x).$$

Теорема 3.2. Предел произведения функций, имеющих пределы, равен произведению этих пределов, т. е.

$$\lim_{x\to a}\prod_{k=1}^{m} f_k(x)=\prod_{k=1}^{m}\lim_{x\to a} f_k(x).$$

Из этой теоремы, в частности, следует, что постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.

$$\lim_{x\to a}[cf(x)]=c\lim_{x\to a} f(x).$$

Теорема 3.3. Предел частного двух функций, имеющих пределы, равен частному этих пределов, если предел знаменателя отличен от нуля, т. е.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\ \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0.$$

Все эти теоремы доказываются совершенно аналогично.

■Докажем, например, теорему 3.1, причем для простоты возьмем случай двух слагаемых. Предположим, что

$$\lim_{x\to a} f(x)=b,\ \lim_{x\to a}\varphi(x)=c.$$

Это значит, что если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b,\ \lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)=c$. По тогда, на основании теоремы 2.1,

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)+\varphi(x_n)]=\lim_{n\to\infty} f(x_n)+\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n),$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)+\varphi(x_n)]=b+c.$$

А так как последовательность $\{x_n\}$ – произвольная, то это значит, что

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)+\varphi(x)]=b+c. \square$$

Прнмер 3.9. Па основании теорем 3.1. и 3.2, получим

$$\lim_{x\to 1}(2x^2+3x-1)=2\lim_{x\to 1}(x\cdot x)+3\lim_{x\to 1} x-1=2\cdot 1^2+3\cdot 1-1=4.$$

Отметим еще следующие свойства.

1. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке $x=a$, то она ограничена при $x\to a$.
2. Если существуют конечные пределы
$$\lim_{x\to a} f(x)=b,\ \lim_{x\to a}\varphi(x)=c,$$
и если в некоторой окрестности точки a будет $f(x)\geq\varphi(x)$, то и $b\geq c$.
3. Если в некоторой окрестности точки a будет $\varphi(x)\leq f(x)\leq g(x)$ и если

$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$, то предел $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ также существует и равен b.

4. Пусть функция $f(x)$ монотонно не убывает на отрезке $[a_1,a_2]$ и ограничена на нем сверху числом M (т.е. $f(x)\le M$, $\forall x\in[a_1,a_2]$). Тогда существует односторонний предел $\lim\limits_{x\to a_2-0}f(x)$, и этот предел не превосходит числа M.
5. Пусть функция $f(x)$ монотонно не возрастает на отрезке $[a_1,a_2]$ и ограничена на нем снизу числом m. Тогда существует односторонний предел $\lim\limits_{x\to a_2-0}f(x)$, и этот предел не меньше числа m.

Все эти свойства легко следуют из соответствующих свойств числовых последовательностей.

Докажем еще одно свойство.

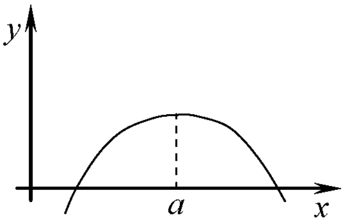


Рис. 3.11

Лемма 3.1. Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)>0$, то существует такая окрестность точки $x=a$, внутри которой будет $f(x)>0$ (рис. 3.11).

■Предположим противное, т. е. пусть в любой, сколь угодно малой, окрестности $C_\varepsilon(a)$ содержится точка x, в которой $f(x)\le 0$. Тогда в любом ограниченном интервале, содержащем точку a, имеется бесчисленное множество точек x, для которых $f(x)\le 0$. Па основании леммы Больцано–Вейерштрасса, из этого множества точек можно выделить подпоследовательность $\{x_n\}$, такую, что $x_n\underset{n\to\infty}{\to}a$. По предположению, для всех этих точек будет $f(x_n)\le 0$. По тогда и $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\le 0$ (этот предел существует, поскольку, по условию, существует предел $\lim\limits_{x\to a}f(x)$). Полученное неравенство противоречит условию, согласно которому $\lim\limits_{x\to a}f(x)>0$.□

Доказанное утверждение называют **леммой о сохраненнн знака функцнн**.

Заменяя в лемме $f(x)$ на $-f(x)$, получим, что если $\lim\limits_{x\to a}f(x)<0$, то существует такая окрестность точки $x=a$, всюду в которой $f(x)<0$.

4. Второе определенне нределов функцнн в точке н на бесконечностн

Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, где a и b – конечные числа. Это равенство означает, что для любой последовательности $\{x_n\}\underset{n\to\infty}{\to}a$ будет $\{f(x_n)\}\underset{n\to\infty}{\to}b$.

Покажем, что равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ может трактоваться более просто, без связи с последовательностями, а именно: если x достаточно близко к a, то $f(x)$ сколь угодно близко к b.

Зададим некоторое $\varepsilon>0$. Поскольку $\lim\limits_{x\to a}|f(x)-b|=0$, то

$$\lim_{x\to a}\left[\varepsilon-|f(x)-b|\right]=\varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{x\to a}\left[\varepsilon-|f(x)-b|\right]>0.$$

Па основании леммы о сохранении знака, существует окрестность $C_\delta(a)$, рис. 3.12, в которой будет

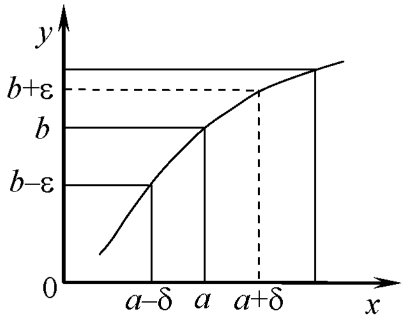


Рис. 3.12

$$\varepsilon-|f(x)-b|>0,$$

т. е.

$$|f(x)-b|<\varepsilon.$$

Итак, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$ (это δ, вообще говоря, зависит от ε), что неравенство $|x-a|<\delta$ влечет за собой неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$, т. е.

$$(|x-a|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-b|<\varepsilon).$$

Очевидно, чем меньше ε, тем меньше, вообще говоря, будет и δ.

Докажем теперь, что и, наоборот, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что

$$(|x-a|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-b|<\varepsilon),\ \text{то}\ b=\lim_{x\to a} f(x).$$

Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, такая, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. Зададим $\varepsilon>0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, то, начиная с некоторого n, будет $|x_n-a|<\delta$. По тогда, по условию, начиная с этого n, будет $|f(x_n)-b|<\varepsilon$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b,$$

а так как последовательность $\{x_n\}$ – произвольная, то это значит, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Итак, мы приходим к новому определению предела функции в точке (его называют определением на языке "ε,δ", или определением по Коши): число b называется пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что

$$(|x-a|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-b|<\varepsilon).$$

Пример 3.10. Легко проверить, что $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$ (ср., например, с примером 3.1). Положим $\varepsilon=0{,}1$ и потребуем, чтобы было $\left|\sqrt{x+1}-2\right|<0{,}1$, т. е.

$$-0{,}1<\sqrt{x+1}-2<0{,}1.$$

Получим

$$1{,}9<\sqrt{x+1}<2{,}1$$

или

$$3{,}61<x+1<4{,}41,$$

т. е.

$$2{,}61<x<3{,}41.$$

Отсюда следует, что в качестве δ следует взять меньшее из чисел $3-2{,}61=0{,}39$ и $3{,}41-3=0{,}41$, т. е. число $0{,}39$.

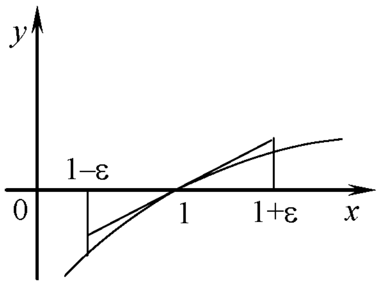


Рис. 3.13

Пример 3.11. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$. Для определенности будем считать, что $a>1$. Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и потребуем, чтобы было

$$\left|a^x-1\right|<\varepsilon,$$

т. е.

$$-\varepsilon<a^x-1<\varepsilon.$$

Это неравенство выполняется, если

$$1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon,$$

т. е. если

$$\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon).$$

Поскольку $\log_a(1+\varepsilon)<|\log_a(1-\varepsilon)|$ (см. рис. 3.13), то положим $\delta=\log_a(1+\varepsilon)$; получим, что если $|x|<\delta$, то $\left|a^x-1\right|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

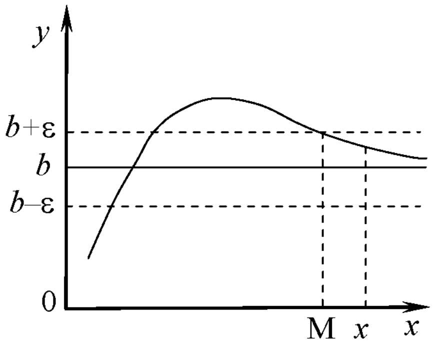


Рис. 3.14

Обратимся теперь к равенству

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=b.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим новое определение: число b называется пределом функции $f(x)$ на бесконечности, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $M(\varepsilon)>0$, что

$$(|x| > M) \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon).$$

В частности, в случае $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ условие $|x| > M$ превращается в условие $x > M$ или $x < -M$.

Пусть теперь $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Теперь этому равенству можно дать следующее определение: функция $f(x)$ обращается в бесконечность в точке $x = a$, рис. 3.15, если для любого $M > 0$ найдется такое $\delta(M) > 0$, что

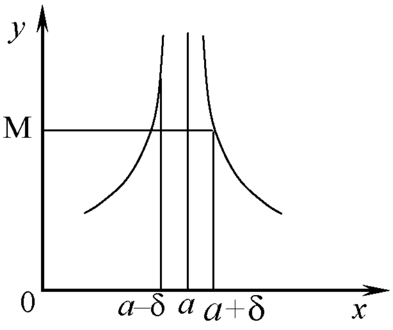


Рис. 3.15

$$(|x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x)| > M).$$

Пусть, наконец, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, рис. 3.16. Это означает, что для любого $N > 0$ найдется такое $M(N) > 0$, что

$$(|x| > M) \Rightarrow (|f(x)| > N).$$

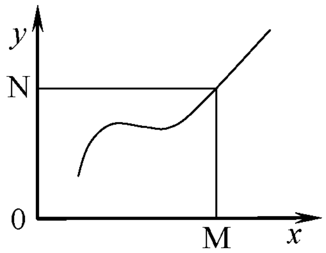


Рис. 3.16

Таковы различные варианты определения предела функции в точке на языке Коши.

5. Пеирерывиость фуикции в точке и иа иромежутке

Функция называется непрерывной в данной точке, если ее предел в этой точке равен значению этой функции в этой же точке, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{3.9}$$

Это определение можно сформулировать и более подробно: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

а) эта функция определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности (т. е. существует такое $\delta > 0$, что $C_\delta(x_0) \subset D_f$); последнее необходимо для того, чтобы можно было рассматривать ситуацию, когда $x \to x_0$;

б) в точке x_0 существуют пределы функции $f(x)$ слева и справа;

в) оба односторонние предела равны между собой;

г) эти пределы равны значению функции $f(x)$ в точке x_0.

Пример 3.12. Мы уже видели (см. пример 3.1), что $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x+2} = \sqrt{3}$. Но $\sqrt{3} = \sqrt{2+1}$ есть значение функции $\sqrt{x+2}$ в точке $x = 1$. Следовательно, на основании (3.9), функция $\sqrt{x+2}$ непрерывна в точке $x = 1$.

Пример 3.13. Мы видели также (см. пример 3.3), что $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ при любом x_0. Теперь это означает, что функция $\sin x$

непрерывна во всех точках числовой оси.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 справа, если выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

При этом слева от точки x_0 функция $f(x)$ может и не быть определена.

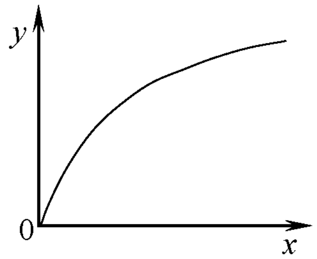


Рис. 3.17

Пример 3.14. Покажем, что функция $\sqrt{x}$ (рис. 3.17) непрерывна в точке $x=0$ справа. Действительно, пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +0$. Тогда, начиная с некоторого n, будет $x_n < \varepsilon^2$, а значит $\sqrt{x_n} < \varepsilon$, а так как ε можно брать сколь угодно малым, а $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, стремящаяся к нулю, то это и значит, что

$$\lim_{x \to +0} \sqrt{x} = 0.$$

Если же $x<0$, то функция $\sqrt{x}$ вообще не определена.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 слева, если

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной в (открытом!) интервале, если она непрерывна во всех точках этого интервала.

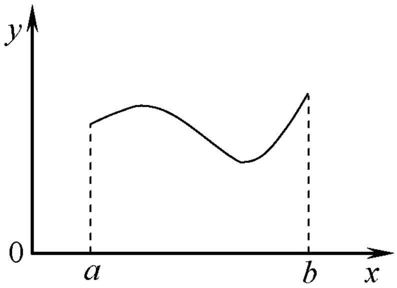


Рис. 3.18

Функция называется непрерывной на отрезке, если она непрерывна во всех его внутренних точках, а на левом и правом концах непрерывна соответственно справа и слева.

Геометрически непрерывность функции на отрезке означает, что график этой функции на данном отрезке есть сплошная, т. е. не имеющая разрывов, линия, рис. 3.18.

6. Другие формы оиределеиия иеирерывиости фуикции в точке

Равенство (3.9), выражающее непрерывность функции в точке, можно сформулировать и на языке “ε, δ”: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, рис. 3.19, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что условие $|x - x_0| < \delta$ влечет за собой выполнение неравенства

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

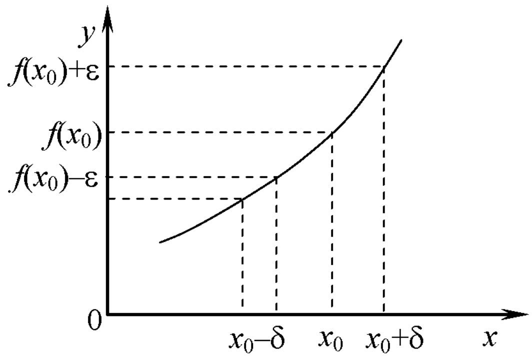


Рис. 3.19

Можно придать и еще одну форму равенству (3.9), для чего введем сначала определение.

Возьмем функцию $y = f(x)$ и некоторую точку x_0. Придадим затем числу x_0 приращение Δx, такое, что $[x_0, x_0 + \Delta x] \subset D_f$. Разность

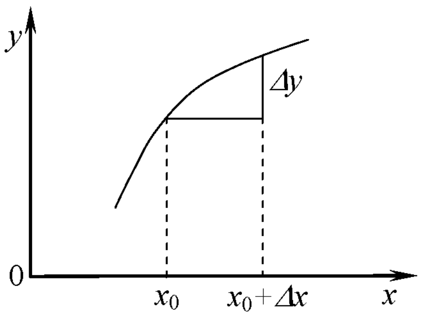


Рис. 3.20

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается еще $\Delta f(x_0)$, рис. 3.20. При этом каждая из величин Δx и Δy может и не быть положительной.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда, переписав равенство (3.9) в виде

$$\lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

и положив $x - x_0 = \Delta x,\ f(x) - f(x_0) = \Delta y$, будем иметь

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (3.10)$$

Итак, если функция в данной точке непрерывна, то бесконечно малому приращению ее аргумента отвечает бесконечно малое приращение самой функции.

Рассуждая в обратном порядке, получим обратное утверждение: если в данной точке для функции $y = f(x)$ выполняется равенство (3.10), то данная функция непрерывна в этой точке. Таким образом, равенство (3.10) есть необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке.

Примечание. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда выполняется равенство (3.9), которое в данном случае запишем так:

$$\lim f(x) = f(\lim x). \qquad (3.11)$$

Это значит, что вместо вычислений предела непрерывной функции достаточно вместо ее аргумента подставить его предельное значение. Поэтому равенство (3.11) называют правилом предельного перехода под знаком непрерывной функции.

Формально равенство (3.11) означает, что в случае непрерывной функции символы $\lim$ и f можно менять местами. Это обстоятельство будет не раз использовано в дальнейшем.

7. Осиовиые теоремы о иеирерывииых фуикциях

Теорема 3.4. Сумма функций, непрерывных в данной точке, есть функция, непрерывная в этой точке.

■Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0).$$

Обозначим $F(x)=f(x)+\varphi(x)$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} F(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x)+\varphi(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=f(x_0)+\varphi(x_0)=F(x_0),$$

что и требовалось доказать.□

Поскольку в ходе доказательства была использована теорема о пределе суммы функций, то теорема 3.4. может быть обобщена на случай любого конечного числа слагаемых.

Теорема 3.5. Произведение функций, непрерывных в данной точке, есть функция, непрерывная в этой точке.

Теорема 3.6. Частное функций, непрерывных в данной точке, есть функция, непрерывная в данной точке, если только знаменатель не обращается в этой точке в нуль.

Две последние теоремы доказываются точно так же, как и теорема 3.4, на основании теорем 3.2 и 3.3 о пределах функций.

Теорема 3.7 (теорема о непрерывности сложной функции). Пусть даны функции $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$. Если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $\varphi(x_0)=u_0$, а функция $f(u)$ непрерывна в точке u_0, то сложная функция $F(x)=f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

■Покажем сначала, что функция $F(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Действительно, из непрерывности функции $f(u)$ в точке u_0 следует существование окрестности $C_\varepsilon(u_0)$, в которой функция $f(u)$ определена. Далее, в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0, существует такая окрестность $C_\delta(x_0)$, что из соотношения $x\in C_\delta(x_0)$ вытекает соотношение $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$, т.е. $u\in C_\varepsilon(u_0)$. Но если $u\in C_\varepsilon(u_0)$, то $f(u)$ имеет смысл. Таким образом, существует такая окрестность $C_\delta(x_0)$, в которой функция $f[\varphi(x)]$ имеет смысл.

Приступая к доказательству основного утверждения, зададим произвольное $\varepsilon>0$. В силу непрерывности функции $f(u)$ в точке u_0, существует такое $\eta(\varepsilon)>0$, что $(|u-u_0|<\eta)\Rightarrow(|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon)$. Далее, поскольку функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, для полученного η найдется такое

$\delta(\eta) > 0$, что

$$\left(|x - x_0| < \delta\right) \Rightarrow \left(|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \eta\right), \text{ т. е. } \left(|x - x_0| < \delta\right) \Rightarrow \left(|u - u_0| < \eta\right).$$

Но

$$\left(|u - u_0| < \eta\right) \Rightarrow \left(|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon\right),$$

т. е.

$$\left(|u - u_0| < \eta\right) \Rightarrow \left(|f[\varphi(x)] - f[\varphi(x_0)]| < \varepsilon\right),$$

откуда и следует непрерывность функции $F(x)$ в точке x_0.□

Примечание. Выделяя "главную линию" в доказательстве основной части теоремы, можно записать ее в виде следующей цепочки импликаций:

$$(x \to x_0) \Rightarrow (\varphi(x) \to \varphi(x_0)) \Leftrightarrow (u \to u_0) \Rightarrow (f(u) \to f(u_0)) \Leftrightarrow (F(x) \to F(x_0)).$$

Теорему 3.7 можно записать в следующем удобном для практики виде

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u). \tag{3.12}$$

Это равенство выражает так называемое правило замены переменной при вычислении предела непрерывной функции.

Пример 3.15. Вычислим $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(a^x - 1\right)$. Полагая $u = a^x - 1$ и учитывая, что, по ранее доказанному, $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$, получим, на основании (3.12),

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(a^x - 1\right) = \lim_{u \to 0} \sin u = 0.$$

Теорема 3.8 (теорема о существовании и непрерывности обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ определена, монотонно возрастает (убывает) и непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$. Тогда на соответствующем отрезке $[c, d]$ значений этой функции существует и однозначна обратная функция $x = \varphi(y)$, также монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная.

Эта теорема будет использована нами сразу же, но ее доказательство мы приведем несколько позже.

8. Пеирерывиость осиовиых элемеитариых фуикций

Обратимся сначала к показательной функции $y = a^x$. Пусть x_0 – произвольное число. Имеем

$$\lim_{x \to x_0}\left(a^x - a^{x_0}\right) = \lim_{x \to x_0} a^{x_0}\left(a^{x - x_0} - 1\right) = a^{x_0} \lim_{x - x_0 \to 0}\left(a^{x - x_0} - 1\right) =$$

$$= a^{x_0} \lim_{u \to 0}\left(a^u - 1\right),$$

а так как, по ранее доказанному, $\lim\limits_{u\to 0} a^u = 1$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left(a^x - a^{x_0}\right) = 0,$$

т. е.

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Итак, показательная функция непрерывна при всех x.

Пусть теперь $y = \log_a x$. Эта функция обратная функции $y = a^x$, которая монотонно возрастает (если $a > 1$) или монотонно убывает (при $a < 1$), изменяясь в промежутке $(0,+\infty)$ и, в силу только что доказанного, непрерывна при всех $x > 0$. На основании теоремы 3.8 об обратной функции, функция $y = \log_a x$ монотонна и непрерывна всюду в промежутке $(0,+\infty)$.

Далее, как мы видели,

$$x^a = e^{a\ln x}.$$

Из непрерывности показательной и логарифмической функций, в силу теоремы 3.7 о непрерывности сложной функции, следует, что и степенная функция непрерывна при всех $x > 0$. Если же a таково, что x^a имеет смысл и при $x < 0$ (или даже и при $x = 0$), то функция x^a, как нетрудно убедиться, непрерывна и при этих значениях x. Например,

$$\lim_{x\to x_0}\left(x^{2/3} - x_0^{2/3}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x_0^2}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2 - x_0^2}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x_0^2 x^2} + \sqrt[3]{x_0^4}} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}(x - x_0)\frac{x + x_0}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x_0^2 x^2} + \sqrt[3]{x_0^4}} = 0$$

как предел произведения бесконечно малой функции на ограниченную; легко проверить, что этот результат верен и при $x = 0$. Таким образом, при всех x

$$\lim_{x\to x_0} x^{2/3} = x_0^{2/3},$$

откуда следует непрерывность функции $y = x^{2/3}$ при всех x.

Обратимся теперь к тригонометрическим функциям. Ранее была доказана непрерывность функции $\sin x$ при всех x. Поскольку $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, то, на основании теоремы о непрерывности сложной функции, функция $\cos x$ также непрерывна при всех x. Далее, функция $\operatorname{tg} x$, как частное двух непрерывных функций, непрерывна всюду, кроме точек, где $\cos x = 0$, т. е. точек $x = \pm\frac{\pi}{2}, x = \pm\frac{3\pi}{2}, x = \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$, т. е. кроме точек, где функция $\operatorname{tg} x$ вообще не определена. Точно так же получим, что и функция $\operatorname{ctg} x$ непрерывна всюду, где она определена. Из теоремы об обратной функции следует, что функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ непрерывны всюду на отрезке $[-1,1]$, а функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны при всех x.

Совершенно аналогично устанавливается непрерывность гиперболических и обратных гиперболических функций.

Итак, все основные элементарные функции непрерывны всюду, где они определены. Поскольку же всякая элементарная функция "составлена" из основных элементарных функций, то в силу теорем 3.4 – 3.8 они также непрерывны всюду, где они определены.

9. Классификация точек разрыва фуикций

1 . Разрывы 1-го рода. Рассмотрим сначала в качестве примера две функции: $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ и $y = x + 1$. Если $x \neq 1$, то обе функции совпадают. Если же $x = 1$, то вторая функция определена (и равна 2), а первая не определена. В то же время

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2,$$

т. е. просто

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Следовательно, график функции $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ отличается от прямой $y = x + 1$ лишь тем, что в нем отсутствует точка (1,2), рис. 3.21.

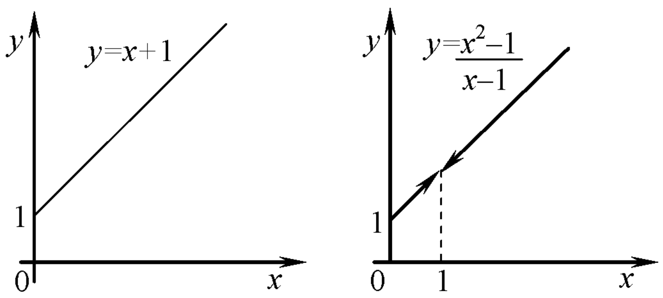


Рис. 3.21

Итак, в точке $x = 1$ функция $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ имеет пределы слева и справа, равные между собой, но в самой точке $x = 1$ функция не определена, а значит и не непрерывна (в отличие от функции $y = x + 1$). Но если бы мы определили первую из функций так

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1, \end{cases}$$

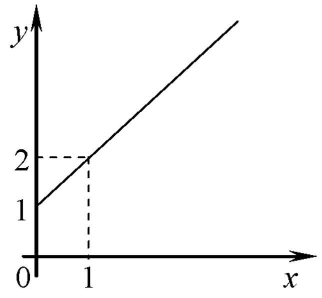


Рис. 3.22

то она стала бы непрерывной и в точке $x = 1$, т. е. разрыв устранился бы, рис. 3.22. Поэтому разрывы такого типа называют устранимыми, а их устранение описанным только что способом называют доопределением функции в точке разрыва.

Итак, функция имеет в данной точке устранимый разрыв, если она имеет в этой точке пределы слева и справа, равные между собой, но в самой этой точке функция не определена.

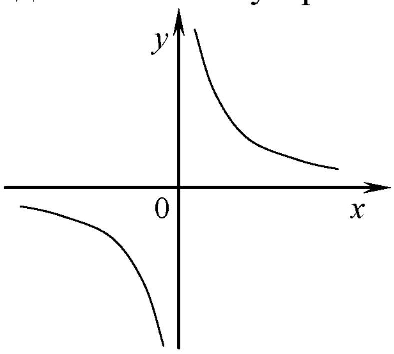


Рис. 3.23

Возьмем теперь функцию $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ (рис. 3.4). В этом случае, как мы видели, пределы функции слева и справа в точке $x = 0$ существуют, но различны. Такие разрывы называют конечными скачками. Устранить такой разрыв путем доопределения невозможно.

Устранимые разрывы и конечные скачки называют разрывами 1-го рода. Их общей особенностью является существование обоих односторонних пределов в точке разрыва.

2. Разрывы 2-го рода. Если в точке разрыва отсутствует хотя бы один из односторонних пределов, разрыв называется разрывом 2-го рода.

Пример 3.16. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$, рис. 3.23. Тогда

$$\lim_{x \to -0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +0} f(x) = +\infty.$$

Разрывы такого типа называют бесконечными скачками.

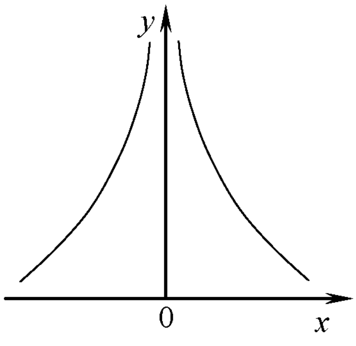


Рис. 3.24

Пример 3.17. Пусть $f(x) = 2^{1/x}$ (см. рис. 3.10). Имеем

$$\lim_{x \to -0} f(x) = +0, \quad \lim_{x \to +0} f(x) = +\infty,$$

т. е. предел слева существует (и равен нулю), а предел справа не существует.

Здесь разрыв также имеет характер бесконечного скачка.

Пример 3.18. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, рис. 3.24. Здесь

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to +0} f(x) = +\infty .$$

В данном случае пределы слева и справа отсутствуют (т. е. разрыв – 2-го рода), но скачка нет.

Пример 3.19. Пусть $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, рис. 3.25. Эта функция обращается

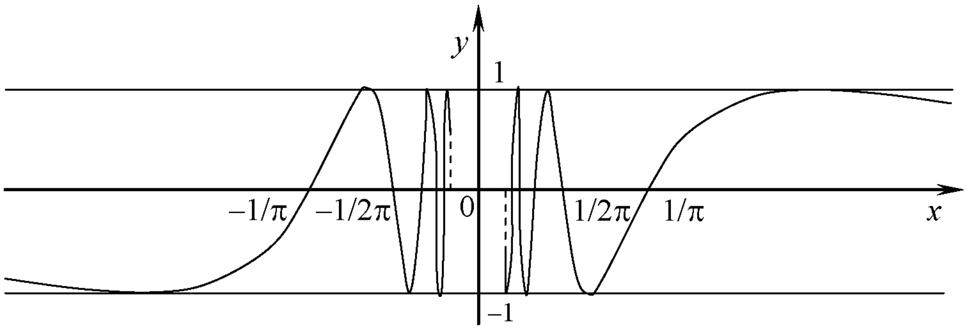


Рис. 3.25

в нуль при $\dfrac{1}{x} = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, т. е. в точках $x = \pm\dfrac{1}{\pi}, \pm\dfrac{1}{2\pi}, \pm\dfrac{1}{3\pi}, \ldots$. Следовательно, в окрестности точки $x = 0$ функция совершает бесчисленное множество колебаний, т. е. в этой точке пределы как слева, так и справа не существуют.

Таким образом, разрыв 2-го рода не обязательно связан с обращением функции в данной точке в бесконечность.

Одна и та же функция одновременно может иметь несколько разрывов, вообще говоря, разных типов. Укажем на одну из возможных форм записи исследования функций на разрыв.

Пример 3.20. Пусть $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2-x}\right)$. Здесь имеются две точки разрыва: $x = 1$ и $x = 2$. Имеем

$$(x \to 1-0) \Rightarrow (x-1 \to -0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} \to -\infty\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} \to -\infty\right) \Rightarrow \left(y \to -\frac{\pi}{2} + 0\right);$$

$$(x \to 1+0) \Rightarrow (x-1 \to +0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} \to +\infty\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} \to +\infty\right) \Rightarrow \left(y \to \frac{\pi}{2} - 0\right);$$

$$(x \to 2-0) \Rightarrow (2-x \to +0) \Rightarrow \left(\frac{1}{2-x} \to +\infty\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} \to +\infty\right) \Rightarrow \left(y \to \frac{\pi}{2} - 0\right);$$

$$(x \to 2+0) \Rightarrow (2-x \to -0) \Rightarrow \left(\frac{1}{2-x} \to -\infty\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} \to -\infty\right) \Rightarrow \left(y \to -\frac{\pi}{2} + 0\right).$$

Таким образом, данная функция имеет две точки разрыва 1-го рода в виде конечных скачков.

Для получения общего вида графика исследуем еще поведение функции на бесконечности. Имеем

$$(x \to \pm\infty) \Rightarrow (x-1 \to \pm\infty) \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2-x}=-\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right) \Rightarrow (y \to -0).$$

Итак, график данной функции имеет вид, изображенный на рис. 3.26.

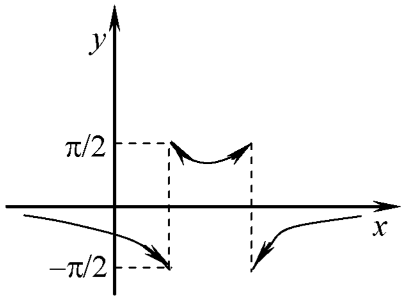


Рис. 3.26

Пример 3.21. Пусть

$$y = 3^{\frac{1-x}{x(x-2)^2}}.$$

Функция имеет две точки разрыва: $x = 0$ и $x = 2$. Получим

$$(x \to -0) \Rightarrow \left(x(x-2)^2 \to -0\right) \Rightarrow \left(\frac{1-x}{x(x-2)^2} \to -\infty\right) \Rightarrow (y \to +0);$$

$$(x \to +0) \Rightarrow \left(x(x-2)^2 \to +0\right) \Rightarrow \left(\frac{1-x}{x(x-2)^2} \to +\infty\right) \Rightarrow (y \to +\infty);$$

$$(x \to 2 \pm 0) \Rightarrow \left(x(x-2)^2 \to +0\right) \Rightarrow \left(\frac{1-x}{x(x-2)^2} \to -\infty\right) \Rightarrow (y \to +0);$$

$$(x \to +\infty) \Rightarrow \left(x(x-2)^2 \to +\infty\right) \Rightarrow \left(\frac{1-x}{x(x-2)^2} \to -0\right) \Rightarrow (y \to 1-0);$$

$$(x \to -\infty) \Rightarrow \left(x(x-2)^2 \to -\infty\right) \Rightarrow \left(\frac{1-x}{x(x-2)^2} \to -0\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y \to 1-0).$$

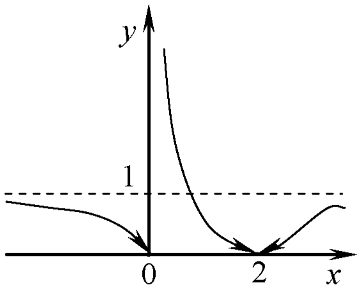


Рис. 3.27

Таким образом, график функции имеет примерно следующий вид: в точке $x = 0$ – разрыв 2-го рода в виде бесконечного скачка, а в точке $x = 2$ – устранимый разрыв, рис. 3.27.

10. О строгих оиределеииях осиовиых элемеитариых фуикций

В главе 1 говорилось, что при произвольном значении показателя степени a степенная функция x^a определяется как $e^{a\ln x}$, т. е. выражается через показательную и логарифмическую функции. Гиперболические функции, как мы видели, также выражаются "напрямую" через показательную функцию. Позже мы увидим (см. главу VI), что функции $\sin x$ и $\cos x$, а значит и $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, также могут быть выражены через показательную функцию, т. е. находятся с ними в "близком родстве". Следовательно, можно сказать, что показательные функции занимают центральное место среди основных элементарных функций. Поэтому коснемся сейчас вопроса о строгом определении показательной функции a^x. Пусть, для определенности, $a > 1$.

Если x – рациональное число, т.е. $x = \frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа, то a^x определяется по правилам элементарной алгебры, т. е. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Поэтому будем считать, что x – иррациональное число. Но в этом случае число x можно представить как предел последовательности рациональных чисел:

$$x = \lim_{n\to\infty} r_n.$$

Поэтому, по определению,

$$a^x = a^{\lim\limits_{n\to\infty} r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}. \qquad (3.13)$$

Можно показать, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$. Например, считая, что $\sqrt{2}$ есть предел последовательности $1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; 1{,}4142; \ldots$, мы можем определить число $3^{\sqrt{2}}$ как предел последовательности

$$3^{1,4}; 3^{1,41}; 3^{1,414}; 3^{1,4142}; \ldots$$

Если же a есть натуральное число m, то

$$x^m = e^{m\ln x} = e^{\overbrace{\ln x + \ln x + \ldots + \ln x}^{m \text{ раз}}} = \underbrace{e^{\ln x} \cdot e^{\ln x} \cdot \ldots \cdot e^{\ln x}}_{m \text{ раз}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ раз}},$$

что и понимается обычно под a^m.

Аналогичное замечание касается и случая, когда $x = \frac{m}{n}$ – произвольное рациональное число.

Примечание. Равенство (3.13) по своему виду аналогично определению (3.3) предела функции в точке на языке последовательностей, или, как еще говорят, определению предела функции в точке по Гейне.

11. Осиовиые виды иеоиределеииых выражеиий и иростейшие сиособы их раскрытия

1.<u>Неопределенности вида $\frac{0}{0}$</u>. Пусть требуется вычислить предел

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ (здесь и в дальнейшем вместо $x\to a$, где $a<\infty$, может быть и $x\to\infty$). В рассматриваемом случае теорема о пределе частного неприменима. В подобных случаях говорят, что при $x\to a$ выражение $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ представляет собой неопределенное выражение (или просто неопределенность) вида $\dfrac{0}{0}$.

Из равенств $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ следует, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ содержат в себе множители, стремящиеся к нулю при $x\to a$. Во многих случаях эти множители нетрудно выделить, а затем произвести сокращение, в результате чего получим некоторый новый предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$, который может быть вычислен более просто.

Пример 3.22. Вычислим предел $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^3-2x+1}$.

Легко видеть, что и числитель, и знаменатель обращаются в нуль при $x=1$, т. е. имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. В данном случае числитель и знаменатель содержат в себе множитель $x-1$. Выделяя его (путем деления числителя и знаменателя на $x-1$), будем иметь

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^3+x^2+3x+3\right)}{(x-1)\left(x^2+x-1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+3x+3}{x^2+x-1}=\frac{1+1+3+3}{1+1-1}=8.$$

Пример 3.23. Вычислим предел

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

Непосредственная подстановка снова дает неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Раскрывая ее, будем иметь:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 3.24. Поступая аналогично, получим

$$A=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}=\frac{1}{3}.$$

Нетрудно убедиться, что при произвольном натуральном n

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}. \tag{3.14}$$

Кроме того, позже мы получим совершенно строго более общую формулу, из которой как частный случай будет следовать (3.14).

2.Неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Так называют дробь вида $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x\to a$, если $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x)=\infty$. Для вычисления предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ следует выделить множители в числителе и знаменателе, которые обуславливают стремление к бесконечности, и затем произвести сокращение.

Пример 3.25. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+2x-3}{3x^3-x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{2}{3}.$$

Практически при вычислении пределов такого типа надо числитель и знаменатель разделить на слагаемое с наивысшей степенью x. Очевидно, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0 & \text{при } n<m;\\ \frac{a_0}{b_0} & \text{при } n=m;\\ \infty & \text{при } n>m.\end{cases}$$

Аналогичное правило применяем и в случае иррациональных дробей. Например,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+x^2-2}}{5x+1}=\frac{\sqrt[3]{8}}{5}=\frac{2}{5}.$$

3. <u>Неопределенности вида</u> $\infty-\infty$. Неопределенностью вида $\infty-\infty$ называют выражение $f(x)-\varphi(x)$, в котором функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при данном поведении x стремятся к бесконечности одного знака. Во многих случаях для "раскрытия" такой неопределенности удобно превратить ее в неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 3.26. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+3x\right)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

Пример 3.27. Аналогично

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

4. <u>Неопределенности вида</u> $0\cdot\infty$. Для раскрытия таких неопределенностей чаще всего их также превращают в дробную неопределенность.

Пример 3.28. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

12. Сравиеиие бескоиечио малых

Под сравнением бесконечно малых величин понимают вычисление предела их отношения. При этом мы одновременно будем рассматривать сравнение как бесконечно малых числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, так и бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Поэтому для общности обозначений мы вместо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ или $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ будем писать просто $\lim\frac{\alpha}{\beta}$.

Пусть α и β – бесконечно малые. Если $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$, т. е. если α стремится к нулю быстрее, чем β, то говорят, что α есть бесконечно малая высшего порядка, чем β. Это записывают так:

$$\alpha=o(\beta).$$

Пример 3.29. Пусть $n\to\infty$ и пусть $\alpha_n=\frac{1}{n^2+1}$, $\beta_n=\frac{1}{n+1}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=0,$$

т. е. $\alpha = o(\beta)$.

Если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, то говорят, что α есть бесконечно малая низшего порядка по сравнению с β. Очевидно, в этом случае $\beta = o(\alpha)$.

Если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = c$, где $c < \infty$ и $c \neq 0$, то α и β называются бесконечно малыми одного порядка. Это записывают так: $\alpha = O^*(\beta)$, или, что то же самое, $\beta = O^*(\alpha)$.

Пример 3.30. Пусть $x \to 0$ и пусть $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1, \beta(x) = x$. Тогда (см. пример 3.23)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2},$$

т. е., если $x \to 0$, то $\alpha(x) = O^*(\beta(x))$.

Бесконечно малая α называется бесконечно малой k-го порядка относительно бесконечно малой β, если $\alpha = O^*\left(\beta^k\right)$, т. е. если $\lim \frac{\alpha}{\beta^k} = c$, где c – произвольное число, отличное от нуля.

Пример 3.31. Пусть $x \to 0$ и пусть $\alpha(x) = \sqrt{1+x^3} - 1, \beta(x) = x$. Определим порядок малости $\alpha(x)$ по сравнению с $\beta(x)$. Имеем

$$\alpha(x) = \frac{\left(1+x^3\right) - 1}{\sqrt{1+x^3} + 1} = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^3} + 1},$$

а значит

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3\left(\sqrt{1+x^3} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^3} + 1} = \frac{1}{2},$$

откуда следует, что $\alpha(x) = O^*\left\{[\beta(x)]^3\right\}$, т. е. $\alpha(x)$ – бесконечно малая 3-го порядка относительно $\beta(x)$.

Легко проверяются следующие свойства:

1 . Если $\alpha = O^*(\beta)$, а $\beta = O^*(\gamma)$, то и $\alpha = O^*(\gamma)$ (свойство транзитивности).

2 . Если $\alpha = O^*(\gamma)$, а $\beta = o(\gamma)$, то $\alpha + \beta = O^*(\gamma)$.

3 . Если $\alpha = O^*(\gamma)$, $\beta = O^*(\gamma)$, то либо $\alpha + \beta = O^*(\gamma)$, либо $\alpha + \beta = o(\gamma)$.

Проверим, например, свойство 3. По условию

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = c_1, \lim \frac{\beta}{\gamma} = c_2,$$

где c_1 и c_2 – конечные числа, отличные от нуля. Поэтому

$$\lim \frac{\alpha+\beta}{\gamma} = \lim\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}\right) = \lim \frac{\alpha}{\gamma} + \lim \frac{\beta}{\gamma} = c_1 + c_2 .$$

Если $c_2 \neq -c_1$, то $c_1 + c_2 \neq 0$, и тогда $\alpha+\beta = O^*(\gamma)$. Если же $c_2 = -c_1$, то $c_1 + c_2 = 0$, а значит $\alpha+\beta = o(\gamma)$. В общем же случае

$$\alpha+\beta = \left(\alpha+\beta = O^*(\gamma)\right) \cup \left(\alpha+\beta = o(\gamma)\right). \square$$

13. Эквивалеитиые бескоиечио малые

Бесконечно малые α и β называются эквивалентными, если

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1;$$

эквивалентность бесконечно малых α и β записывается так: $\alpha \sim \beta$.

Пример 3.32. Пусть $n \to \infty$ и пусть $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n+1}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

а значит, если $n \to \infty$, то $\alpha_n \sim \beta_n$.

Легко видеть, что $(\alpha \sim \beta) \wedge (\beta \sim \gamma) \Rightarrow (\alpha \sim \gamma)$ (транзитивность отношения эквивалентности).

■Действительно,

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = \lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right) = \lim \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lim \frac{\beta}{\gamma} = 1 \cdot 1 = 1,$$

что и требовалось доказать.□

Далее, очевидно, что $(\alpha \sim \beta) \Rightarrow (\alpha = O^*(\beta))$. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, из примера 3.27 следует, что если $x \to 0$, то $\sqrt{1+x} - 1 = O^*(x)$, но, в то же время бесконечно малые $\sqrt{1+x} - 1$ и x не эквивалентны.

Теорема 3.9. Для того, чтобы бесконечно малые α и β были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы они различались на бесконечно малую более высокого порядка.

■<u>Необходимость.</u> Пусть $\alpha \sim \beta$. Обозначим $\gamma = \alpha - \beta$. Тогда

$$\lim \frac{\gamma}{\beta} = \lim \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \lim\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) = \lim \frac{\alpha}{\beta} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

т. е. $\gamma = o(\beta)$, а так как $\alpha = O^*(\beta)$, то одновременно $\gamma = O(\alpha)$.

<u>Достаточность.</u> Пусть $\alpha = \beta + \gamma$, где $\gamma = o(\beta)$. Тогда

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\beta+\gamma}{\beta} = \lim \left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right) = 1 + \lim \frac{\gamma}{\beta} = 1+0 = 1,$$

а значит, $\alpha \sim \beta$.□

Пусть $\alpha \sim \beta$. Тогда $\alpha = \beta + \gamma$, где $\gamma = o(\beta)$. Это значит, что, начиная с некоторого значения, будет $\gamma < \beta$, а значит $\alpha \approx \beta$. В этом случае бесконечно малую β называют главной частью бесконечно малой α.

Пример 3.33. Пусть $x \to \infty$ и пусть $\alpha(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Тогда при больших $|x|$ будет $\alpha(x) \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$, т. е. можно предположить, что $\beta(x) = \frac{1}{x}$ есть главная часть бесконечно малой $\alpha(x)$. Покажем, что это так и есть. Имеем

$$\alpha(x) - \beta(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^3+x} = O^*\left(\frac{1}{x^3}\right) = o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Итак, если $x = 100$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ различаются на величину порядка $0{,}000001$.

Очевидно, одна и та же бесконечно малая имеет бесчисленное множество главных частей (различающихся на бесконечно малую более высокого порядка).

Для получения одного из следствий теоремы 3.9 перепишем формулу (3.14) так:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{x}{n}} = 1.$$

Отсюда следует, что если $x \to 0$, то

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}, \tag{3.15}$$

а значит

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}. \tag{3.16}$$

Очевидно, эта формула тем точнее, чем меньше x. Она позволяет приближённо извлекать корни из чисел.

Пример 3.34. Вычислим приближённо $\sqrt[3]{30}$. Имеем, на основании (3.16),

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}} = 3\left(1+\frac{1/9}{3}\right) = 3 + \frac{1}{9} \approx 3{,}11.$$

Примечание. Как уже отмечалось в связи с примером 3.24, формула

(3.14), или, что то же самое, формула (3.15), будет позже получена совершенно строго как частный случай более общего соотношения.

Теорема 3.10. Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если заменить их эквивалентными им бесконечно малыми.

■Пусть $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$. Тогда

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta} \right) = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \lim \frac{\beta_1}{\beta} = 1 \cdot \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot 1 = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

что и требовалось доказать.□

Пример 3.35. Используя теорему 3.10 и соотношение (3.15), имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{\sqrt[8]{1+3x}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{5}}{\frac{3x}{8}} = \frac{8}{15}.$$

Пример 3.36. Точно так же

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[4]{x^4+5x^3+1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left[x \left(\sqrt[4]{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^4}} - 1 \right) \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{5}{x} + \frac{1}{x^4} \right) \right] = \frac{5}{4}.$$

Пример 3.37. Вычислим предел

$$A = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2} \right).$$

Имеем

$$A = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \left(x^2 + \sqrt{x^4+1} - 2x^2 \right)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} + x\sqrt{2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^4+1} - x^2 \right) x^3}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} + x\sqrt{2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \left(x^4 + 1 - x^4 \right)}{\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} + x\sqrt{2} \right) \left(\sqrt{x^4+1} + x^2 \right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} + x\sqrt{2} \right) \left(\sqrt{x^4+1} + x^2 \right)}.$$

Если x велико, то знаменатель может быть заменён эквивалентной бесконечно большой функцией

$$\left(\sqrt{x^2+x^2} + x\sqrt{2} \right) \left(x^2 + x^2 \right) = \left(x\sqrt{2} + x\sqrt{2} \right) 2x^2 = 4\sqrt{2}x^3$$

(подробнее об этом – в параграфе 17 данного раздела).

Таким образом,

$$A = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{4\sqrt{2}x^3} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

14. Первый замечательиый иредел и его следствия

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, где x выражается в радианах. Непосредственно этот предел не вычисляется, так как при $x \to 0$ выражение $\dfrac{\sin x}{x}$ представляет собой неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$.

Попытаемся сначала "угадать", чему равен искомый предел. Для этого возьмём поочерёдно углы $10^0, 5^0, 2^0$ и вычислим для каждого из них отношение $\dfrac{\sin x}{x}$.

Пусть $\alpha = 10^0$. Тогда $x = \dfrac{\pi}{18} = \dfrac{3{,}14159}{18} = 0{,}17453$. По таблице находим $\sin x = 0{,}17365$, а значит $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{0{,}17365}{0{,}17453} = 0{,}9950$.

Пусть теперь $\alpha = 5^0$. Тогда $x = \dfrac{3{,}14159}{36} = 0{,}08726$; $\sin x = 0{,}08716$, а значит $\dfrac{\sin x}{x} = 0{,}9989$.

Пусть, наконец, $\alpha = 2^0$. Тогда $x = \dfrac{3{,}14159}{90} = 0{,}03491$; $\sin x = 0{,}03490$, а значит $\dfrac{\sin x}{x} = 0{,}9996$.

Итак, естественно предположить, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Докажем, что это так и есть.

■Пусть сначала $x > 0$. Очевидно, $BC < A\breve{B} < AD$ (рис. 3.28), откуда

$$\frac{BC}{R} < \frac{A\breve{B}}{R} < \frac{AD}{R},$$

т. е.

$$\sin x < x < \mathrm{tg} x.$$

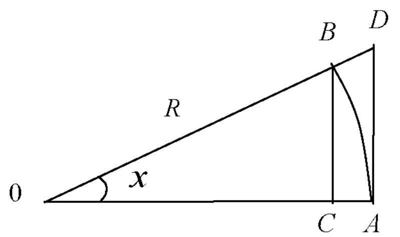


Рис. 3.28

Делим это двойное неравенство на $\sin x$. Получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \qquad (3.17)$$

Пусть теперь $x \to +0$. Тогда $\dfrac{1}{\cos x} \to 1$, а значит, на основании (3.17), тем более $\dfrac{x}{\sin x} \to 1$. Таким образом,

$$\lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ввиду очевидной чётности функции $\dfrac{\sin x}{x}$ следует, что и

$$\lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следовательно, вообще

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{3.18}$$

(в точке $x = 0$ функция $\dfrac{\sin x}{x}$, очевидно, имеет устранимый разрыв, рис. 3.29).□

Равенство (3.18) называют первым замечательным пределом.

Выясним геометрический смысл формулы (3.18). Имеем

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x},$$

а значит, $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{tg}\varphi = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

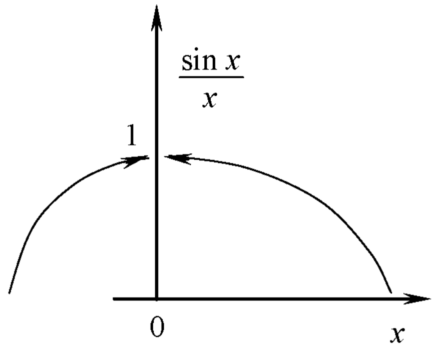


Рис.3.29

По, в силу непрерывности функции $\mathrm{tg}\, x$ и на основании формулы (3.12), обозначив $\lim\limits_{x\to 0} \varphi = \varphi_0$, находим

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{tg}\varphi(x) = \lim_{\varphi\to\varphi_0} \mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\varphi_0.$$

Таким образом, $\mathrm{tg}\varphi_0 = 1$, а значит $\varphi_0 = 45^0$.

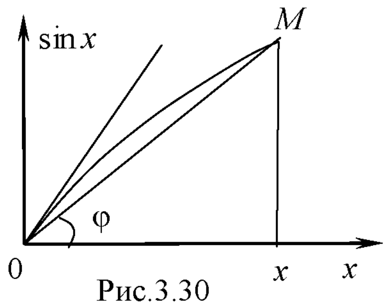


Рис.3.30

По если $x \to 0$, то секущая OM стремится занять положение касательной к синусоиде в точке O, рис. 3.30. Итак, если x измеряется в радианах, а масштабы на осях Ox и Oy одинаковы, то касательная к линии $y = \sin x$ в точке O образует с осью Ox угол $\varphi_0 = 45^0$. В этом и состоит геометрический смысл первого замечательного предела.

Получим несколько простых следствий равенства (3.18).

Пример 3.38. Используя соотношение $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, а также теорему 3.10, находим

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Перепишем это так: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1.$

Отсюда следует, что если $x\to0$, то $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$. Этот результат полезно помнить при вычислении тригонометрических пределов.

Пример 3.39. Имеем

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

Итак, если $x\to0$, то не только $\sin x\sim x$, но и $\mathrm{tg}x\sim x$, так что $\mathrm{tg}x\sim\sin x$.

По тогда, в силу теоремы 3.9, при $x\to0$ должно быть

$$\mathrm{tg}x-\sin x=o(x).$$

Определим при $x\to0$ порядок малости функции $\mathrm{tg}x-\sin x$ относительно x.

Имеем

$$\mathrm{tg}x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)\sim x\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}x^3.$$

Итак, если $x\to0$, то $\mathrm{tg}x-\sin x=O^*\left(x^3\right)$.

Пример 3.40. Вычислим предел $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}$. Для этого отметим, что если $x\to0$, то не только $\sin x\sim x$, но и наоборот, $x\sim\sin x$.

Следовательно, $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\arcsin x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1$,

а значит, если $x\to0$, то $\arcsin x\sim x$.

Совершенно аналогично убеждаемся, что если $x\to0$, то и $\mathrm{arctg}x\sim x$. Эти два последних результата также полезно помнить.

Пример 3.41. Вычислим несколько более сложный предел

$$A=\lim_{x\to\infty}x\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{x+1}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Положив $\alpha=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{\pi}{4}$, получим, что $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha=\mathrm{arctg}\,1-\dfrac{\pi}{4}=0$,

т.е. α – бесконечно малая функция при $x\to\infty$. По тогда $\mathrm{tg}\alpha\sim\alpha$, а значит и $\alpha\sim\mathrm{tg}\alpha$.

Поэтому

$$A=\lim_{x\to\infty} x\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\to\infty} x\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty} x\frac{\frac{x}{x+1}-1}{1+\frac{x}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1+x}=-\frac{1}{2}.$$

15. Число e как иредел числовой иоследовательиости

Пусть имеется последовательность

$$x_1=(1+1)^1, x_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2, x_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

Докажем, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Полагая $n=1,2,3,\ldots,$ получим

$$x_1=2; x_2=2{,}25; x_3=2{,}37; \ldots,$$

т. е. при начальных значениях n величина x_n возрастает. Докажем, что и при всех n будет $x_{n+1}>x_n$.

Формула бинома Пьютона даёт:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n},$$

т. е.

$$x_n=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot$$
$$\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (3.19)$$

При замене n на $n+1$ увеличивается каждое слагаемое справа, начиная со второго, и, кроме того, появляется ещё одно положительное слагаемое, так что, действительно, $x_{n+1}>x_n$.

С другой стороны, на основании (3.19),

$$x_n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}},$$

т. е. $x_n < 3 \ \forall n$.

Итак, последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает, но ограничена сверху числом 3. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, не превосходящий числа 3. Кроме того, поскольку уже $x_n > 2$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 2$. Таким образом,

$$2 < \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le 3.$$

Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ называется числом e. Позже мы покажем, что это определение числа e равносильно ранее введенному (см. п. 12 гл. 1).

Примечание. Очевидно, что если $n_1, n_2, ..., n_k, \ ...$ – произвольная возрастающая подпоследовательность натуральной последовательности $1, 2, ..., n, ...$, то всё равно

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e. \tag{3.20}$$

16. Второй замечательиый иредел

Докажем теперь, что если x – непрерывная переменная, то также имеет место равенство

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.21}$$

Для этого возьмём произвольную последовательность $x_1, x_2, ... x_n, ...$ такую, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. Очевидно, для каждого k найдётся такое натуральное число n_k, что $n_k \le x_k < n_k + 1$, а значит, $\frac{1}{n_k + 1} < \frac{1}{x_k} \le \frac{1}{n_k}$. Поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \le \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}. \tag{3.22}$$

По, используя формулу (3.20), имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)} = \frac{e}{1} = e;$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Поэтому, переходя к пределу в соотношении (3.22) и используя свойство 6 из простейших свойств числовых последовательностей (п. 2 гл. 2), будем иметь

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e, \tag{3.23}$$

а так как последовательность $\{x_k\}\to+\infty$ – произвольная, то отсюда и следует (3.21).

Докажем теперь, что

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e. \tag{3.24}$$

Возьмём последовательность $\{x_k\}$, такую, что $x_k \underset{k\to\infty}{\to} -\infty$, и положим $u_k = -(x_k+1)$, откуда следует, что $x_k = -(u_k+1)$. Если $x_k \underset{k\to\infty}{\to} -\infty$, то $u_k \underset{k\to\infty}{\to} +\infty$. Поэтому, используя (3.23), получим

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{u_k+1}\right)^{-(u_k+1)} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{u_k}{u_k+1}\right)^{-(u_k+1)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{u_k+1}{u_k}\right)^{u_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{u_k}\right)^{u_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{u_k}\right)^{u_k}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{u_k}\right) = e\cdot 1 = e,$$

откуда, в силу произвольности последовательности $\{x_k\}$, и следует (3.24).

Положим в соотношении (3.21) $u = \frac{1}{x}$. Тогда получим

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e,$$

или, если снова заменить u на x:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{3.25}$$

Формулу (3.21) (или равносильную ей формулу (3.25)) называют вторым замечательным пределом.

Пример 3.42. Вычислим предел $A = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$, где a – любое вещественное число. Па основании (3.21) имеем

$$A = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/a}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/a}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a = \left(\lim_{x/a\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/a}\right)^{\frac{x}{a}}\right)^a.$$

Окончательно

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a. \tag{3.26}$$

В частности, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$.

17. Следствия второго замечательиого иредела

Прологарифмируем равенство (3.25) по основанию e. Получим

$$\ln \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1,$$

или $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$, т. е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{3.27}$$

Отсюда следует, что если $x\to 0$, то $\ln(1+x)\sim x$.

Вычислим теперь предел $A = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, где $a>0$, $a\neq 1$. Поскольку при $x\to 0$ будет $a^x-1\to 0$, то, на основании только что доказанного, $a^x-1\sim \ln[1+(a^x-1)]$, а значит

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(a^x-1)]}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln a^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x}.$$

Окончательно

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a. \tag{3.28}$$

В частности

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \qquad (3.29)$$

Отсюда следует, что если $x\to 0$, то $a^x-1\sim x\ln a$, $e^x-1\sim x$.

Установим геометрический смысл формулы (3.29).

Очевидно (см. рис. 3.31), что $\frac{e^x-1}{x}=\mathrm{tg}\varphi$, а значит, на основании (3.29), $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}\varphi=1$, откуда следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\varphi=45^0$. Следовательно, касательная в точке $(0,1)$ к линии $y=e^x$ образует с осью Ox угол 45^0. Тем самым мы установили, что определение числа e как предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ равносильно первоначальному определению.

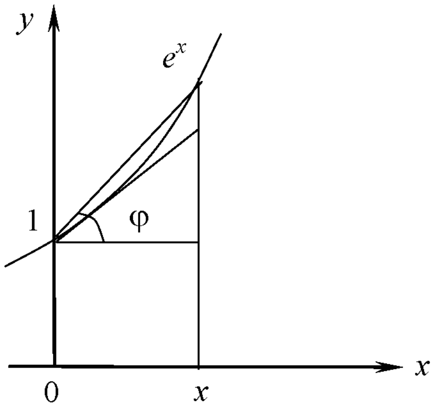


Рис.3.31

Далее, на основании (3.29),

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}2x}{2x}=1$$

Следовательно, если $x\to 0$, то $\mathrm{sh}x\sim x$. Так же, как и в случае тригонометрических функций, легко получить отсюда, что если $x\to 0$, то $\mathrm{th}\,x\sim x$, $\mathrm{Arsh}\,x\sim x$, $\mathrm{ch}\,x-1\sim\frac{x^2}{2}$.

Рассмотрим теперь предел

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x},$$

где $\alpha\neq 1$ – произвольное число. Поскольку $(x\to 0)\Rightarrow\left(\left((1+x)^\alpha-1\right)\to 0\right)$, то

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left\{1+\left[(1+x)^\alpha-1\right]\right\}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^\alpha}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}.$$

Окончательно, на основании (3.27),

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha. \qquad (3.30)$$

Формулы (3.26) – (3.30) (или вытекающие из них соотношения эквивалентности) очень полезны при решении соответствующих примеров.

При раскрытии неопределённостей вида 1^∞ очень полезна также следующая теорема.

Теорема 3.11. Пусть (при данном поведении аргумента) будет $\alpha \to 0, y \to \infty$, и пусть $\beta \sim \alpha, z \sim y$*). Тогда, если $\lim(1+\alpha)^y$ существует, то существует и равен ему предел $\lim(1+\beta)^z$, то есть в этом случае

$$\lim(1+\alpha)^y = \lim(1+\beta)^z. \qquad (3.31)$$

■Используя теорему 3.10 и соотношение (3.27), получим

$$\lim(1+\alpha)^y = \lim e^{y\ln(1+\alpha)} = e^{\lim y\ln(1+\alpha)} = e^{\lim y\alpha} = e^{\lim z\beta} =$$

$$= e^{\lim z\ln(1+\beta)} = \lim(1+\beta)^z.\square$$

Отметим, что в ходе доказательства мы использовали ещё не сформулированную официально теорему 3.13.

Пример 3.43. Па основании (3.31) и (3.26), имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(2x+3)-4}{2x+3}\right]^x = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x = \frac{1}{e^2}.$$

Пример 3.44. Аналогично, используя теорему 3.11, находим

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}3x)^{\operatorname{ctg}x} = \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}3x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}} = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}} = e^3.$$

Пример 3.45. Имеем

$$\lim_{x\to 0}(x\sin 2x+\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\{1+[x\sin 2x-(1-\cos x)]\}^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+2x^2-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{3}{2}x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Пример 3.46. Пусть

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Тогда

$$A = \lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{2}{\pi}\arccos x-1\right)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[1+\frac{2}{\pi}\left(\arccos x-\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[1-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[1-\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)\right]^{\frac{1}{x}} =$$

*) см § 18

$$= \lim_{x\to 0}\left[1-\frac{2}{\pi}\cos(\arccos x)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{2}{\pi}x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

Пример 3.47. Имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(2x-3)}{5^x-25} = \lim_{x\to 2}\frac{\ln[1+(2x-4)]}{25\left(5^{x-2}-1\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{25(x-2)\ln 5} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{25\ln 5(x-2)} = \frac{2}{25\ln 5}.$$

18. О сравиеиии бескоиечио больших величии

Теория сравнения бесконечно малых величин почти без изменения переносится на случай бесконечно больших величин.

Пусть y и z – бесконечно большие величины. Если $\lim \frac{y}{z} = 0$, т. е. если y стремится к бесконечности медленнее, чем z, то y называется бесконечно большой низшего порядка, чем z. В этом случае пишут, что $y = O(z)$. Паоборот, z есть в этом случае бесконечно большой более высокого порядка по сравнению с y.

Если $\lim \frac{y}{z} = c$, где $c \neq 0$ и $c < \infty$, то y и z называют бесконечно большими одного порядка и пишут, что $Z = O^*(y)$, или, что то же самое, $z = O^*(y)$. В частности, если $\lim \frac{y}{z} = 1$, то бесконечно большие y и z называются эквивалентными, т. е. $y \sim z$. Очевидно, в этом случае величины $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$ есть эквивалентные бесконечно малые.

Теорема 3.12. Для того, чтобы две бесконечно большие были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность была либо ограниченной величиной, либо бесконечно большой более низкого порядка.

Эта теорема доказывается так же, как и теорема 3.9 для эквивалентных бесконечно малых.

Пример 3.48. Пусть $x \to \infty$ и пусть $y = x^2$, $z = x^2 - 2x + 4$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{z} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x+4} = 1,$$

т. е. $y \sim z$. При этом

$$y - z = 2x - 4,$$

т. е. $y - z = o(y)$.

Пример 3.49. Пусть снова $x \to \infty, y = x^2$, но $z = x^2 - 2\sin^2 x$. Очевидно, снова $y \sim z$, но теперь уже $y - z$ есть не бесконечно большая величина, а ограниченная.

Так же, как и для бесконечно малых величин, можно ввести понятие главной части бесконечно большой величины. Папример, если $x \to \infty$, то x^2 – есть главная часть бесконечно большой $x^2 - 2x + 4$.

Далее, аналогично теореме 3.10 для эквивалентных бесконечно больших можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.13. Если y и z – бесконечно большие величины, а $y_1 \sim y,\ z_1 \sim z$, то $\lim \frac{y_1}{z_1} = \lim \frac{y}{z}$.

Пример 3.50. Пусть требуется вычислить предел $A = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 + 5x - 8}{2x^2 - x + 6}$. Поскольку при $x \to \infty$, очевидно, будет $x^2 + 5x - 8 \sim x^2$, а $2x^2 - x + 6 \sim 2x^2$, то

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Итак, сформулированное ранее правило вычисления подобных пределов оказывается теперь следствием теоремы 3.13.

Примечание. Символы $f(x) = o[\varphi(x)], f(x) = O^*[\varphi(x)]$ используют и в тех случаях, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при данном поведении x не является ни бесконечно малой, ни бесконечно большой величинами. Папример, выражение $f(x) = o[\varphi(x)]$ при $x \to a$ (или при $x \to \infty$) означают просто, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$. В связи с этим символ $o(1)$ иногда употребляется как обозначение бесконечно малой. Действительно, равенство $\alpha = o(1)$ означает, что $\lim \frac{\alpha}{1} = 0$, т. е. что $\lim \alpha = 0$.

Аналогично равенство $f(x) = O^*[\varphi(x)]$ означает, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = c$, где $c < \infty, c \neq 0$. В этом случае $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to a$ называют функциями одного порядка.

19. Теоремы Больцаио–Коши

Теорема 3.14. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах разные по знаку значения. Тогда существует по крайней мере одна точка $\xi \in (a,b)$, в которой $f(\xi)=0$.

■Пусть, для определённости, $f(a)<0,...,f(b)>0$, рис. 3.32. Разделим отрезок $[a,b]$ пополам точкой $c=\dfrac{a+b}{2}$. Тогда возможно два случая:

1. $f(c)=0$, т.е. $c=\xi$, и теорема доказана.
2. $f(c)\neq 0$. Тогда либо $f(c)<0$, либо $f(c)>0$. Пусть, например, $f(c)<0$. В этом случае положим $c=a_1, b=b_1$; получим новый отрезок $[a_1,b_1]$, такой, что $f(a_1)<0,\ f(b_1)>0$. Аналогично делим пополам отрезок $[a_1,b_1]$ и обозначим $[a_2,b_2]$ ту его половину, для которой $f(a_2)<0,\ f(b_2)>0$, и т.д. Па каждом последующем шаге будем иметь $f(a_n)<0, f(b_n)>0$.

В результате получим систему стягивающихся отрезков

$$[a,b],[a_1,b_1],...,[a_n,b_n],...,$$

такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, и при этом $f(a_n)<0, f(b_n)>0, \forall n$.

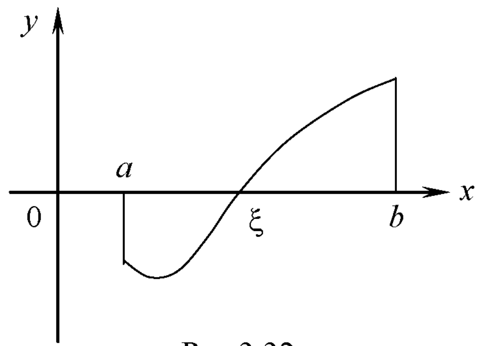


Рис.3.32

По $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=c,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n=c$, а поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке c, то

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)=f(c)\le 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n)=f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)=f(c)\ge 0.$$

По $(f(c)\le 0)\wedge(f(c)\ge 0)=(f(c)=0)$, т. е. c и есть упоминаемая в теореме точка ξ.□

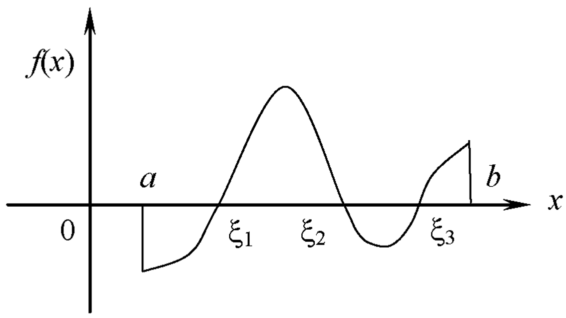


Рис.3.33

Примечание 1. Из проведенного доказательства не следует, что фигурирующая в теореме 3.14 точка ξ единственна. Очевидно, таких точек может быть и несколько, рис. 3.33.

Примечание 2. Если функция $f(x)$ непрерывна не всюду на отрезке $[a,b]$, рис. 3.34, то она может и не принимать на нём значения, равного нулю, а значит требование непрерывности функции в теореме является существенным.

Теорема 3.15. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ непрерывна, а на его концах принимает различные значения $f(a)=A,\ f(b)=B$. Тогда для любого C, лежащего между A и B, найдётся по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a,b)$, что $f(\xi) = C$ (рис. 3.35).

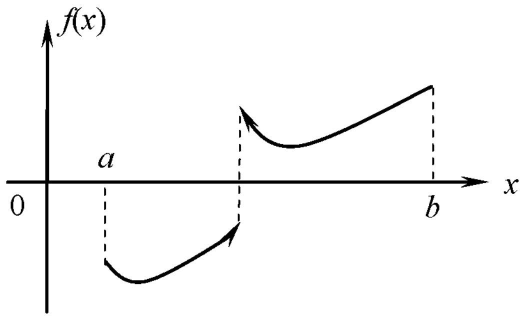


Рис.3.34

■Для определённости предположим, что $A < B$. Тогда $A < C < B$. Введём вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Очевидно, что она, как и функция $f(x)$, непрерывна на отрезке $[a,b]$. Кроме того,

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0;$$
$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0 .$$

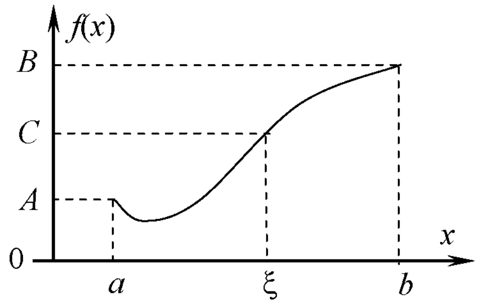


Рис.3.35

На основании теоремы 3.14, существует по крайней мере одна точка $\xi \in (a,b)$, такая, что $\varphi(\xi) = 0$, т. е. $f(\xi) - C = 0$, а значит, $f(\xi) = C$, что и доказывает теорему.□

Геометрический смысл теоремы 3.15 очевиден из чертежа, рис. 3.35.

Следствие. Если функция $f(x) \neq const$ определена и непрерывна в некотором промежутке E (не обязательно замкнутом и не обязательно конечном), то принимаемые ею значения также сплошь заполняют некоторый промежуток.

Действительно, пусть F – множество всех значений $f(x)$ при условии, что $x \in E$. Обозначим $m = \inf F$, $M = \sup F$, и пусть C – такое число, что $m < C < M$. Тогда существуют такие значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$ функции $f(x)$, что

$$m \leq f(x_1) < C < f(x_2) \leq M$$

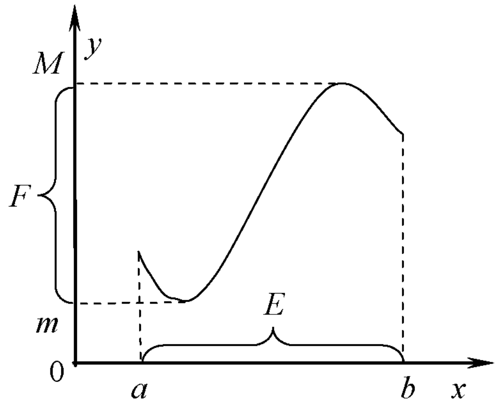


Рис.3.36

(это вытекает из самого определения точных верхней и нижней граней). Поскольку $f(x_1) < f(x_2)$, то, на основании теоремы 3.15, существует по крайней мере одна точка ξ между x_1 и x_2, такая, что $f(\xi) = C$, а значит $C \in F$. По C– произвольное число между m и M, а поэтому функция $f(x)$ при изменении x в промежутке E принимает все значения между m и M, т. е. F представляет собой промежуток на оси Oy, рис. 3.36, с концами m и M (каждый из них может принадлежать этому промежутку).

Примечание. Промежуток F иногда называют образом промежутка E и пишут, что $F = f(E)$. Промежуток E называют в этом случае прообразом промежутка F.

Рассмотренные теоремы 3.14 и 3.15 называют соответственно 1-й и 2-й теоремами Больцано–Коши.

20. Условие иеирерывиости моиотоииой фуикции

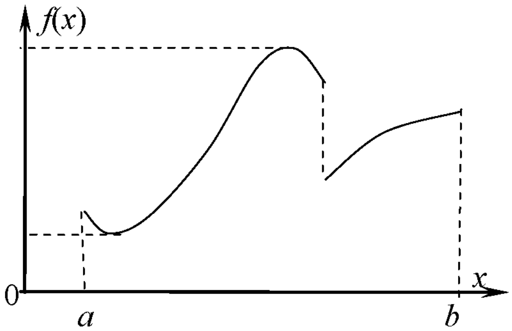


Рис.3.37

Если при изменении x в некотором промежутке соответствующие значения функции $f(x)$ сплошь заполняют некоторый промежуток, то данная функция не обязательно непрерывна на этом промежутке (см. рис. 3.37). Однако оказывается, что если функция $f(x)$ в данном промежутке монотонна, а соответствующие значения $f(x)$ сплошь заполняют некоторый промежуток, то функция $f(x)$ непрерывна в указанном промежутке изменения x.

Теорема 3.16. Пусть функция $f(x)$ монотонна в промежутке E и пусть при изменении x на множестве E соответствующие значения $f(x)$ сплошь заполняют некоторый промежуток. Тогда функция $f(x)$ непрерывна в промежутке E*).

■Пусть для определённости функция $f(x)$ монотонно возрастает в промежутке E. Далее, пусть x_0 – произвольная точка множества E, не являющаяся его правым концом. Положим $f(x_0) = y_0$. Тогда $y_0 \in F$, причём y_0 не есть правый (верхний) конец промежутка F (поскольку на множестве E есть точки $x > x_0$, а им отвечают на множестве F значения $y > y_0$). Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, такое, чтобы было не только $y_0 \in F$, но и $y_0 + \varepsilon \in F$. Обозначим $y_0 + \varepsilon = y_1$. Значению y_1 отвечает некоторая точка x_1, такая, что $f(x_1) = y_1$. При этом, очевидно, $x_1 > x_0$. Поэтому можно положить $x_1 - x_0 = \delta$, где $\delta > 0$. В силу монотонности функции $f(x)$,

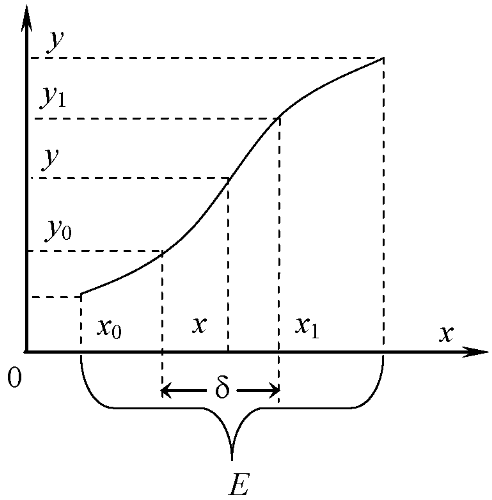


Рис.3.38

*) Промежуток E может быть как конечным, так и бесконечным, как открытым, так и замкнутым (или же полузамкнутым).

$(x_0 < x < x_1) \Rightarrow (y_0 < f(x) < y_1)$, т. е. $(0 < x - x_0 < \delta) \Rightarrow (f(x) - f(x_0) < \varepsilon)$. Это значит, что $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, т. е. что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа.

Совершенно аналогично убедимся, что если точка x_0 не есть левый конец промежутка E, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 слева.

Из совокупности этих двух фактов следует непрерывность функции $f(x)$ в прямежутке E.

21. Доказательство теоремы о существоваиии и иеирерывиости обратиой фуикции

Предположим, что в некотором промежутке E функция $y = f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает (случай монотонного убывания рассматривается совершенно аналогично). Из непрерывности функции $f(x)$ в промежутке E следует, что $F = f(E)$ представляет собой сплошной промежуток. Возьмём произвольное $y_0 \in F$. В силу 2-й теоремы Больцано–Коши ему отвечает по крайней мере одно $x_0 \in E$. По поскольку функция $y = f(x)$ монотонна, то значению y_0 может отвечать только одно x_0 (действительно, если $x_0' > x_0$ или $x_0' < x_0$, то соответственно $f(x_0') > y_0$ или $f(x_0') < y_0$).

Число $y_0 \in F$ было взято произвольно, а значит каждому $y \in F$ отвечает одно и только одно значение $x \in E$, т. е. на промежутке F определена однозначная функция $x = \varphi(y)$, обратная функции $y = f(x)$. При этом значения функции $\varphi(y)$ сплошь заполняют промежуток E. Действительно, пусть $x \in E$ – произвольное число. Пайдём для этого x число $y = f(x)$. Тогда можно сказать, что выбранному значению x функции $\varphi(y)$ отвечает именно это значение y.

Докажем, что функция $\varphi(y)$, как и $f(x)$, монотонно возрастает. Возьмём в промежутке F произвольные числа y_1 и y_2, такие, что $y_1 < y_2$. Обозначим $\varphi(y_1) = x_1$, $\varphi(y_2) = x_2$ (это значит, что $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$). Если бы было $x_1 > x_2$, то, в силу монотонного возрастания функции $f(x)$, было бы $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. $y_1 > y_2$, что противоречит условию.

Аналогично, $(x_1 = x_2) \Rightarrow (y_1 = y_2)$. Итак, $(y_1 < y_2) \Rightarrow (x_1 < x_2)$, что и доказывает монотонное возрастание функции $\varphi(y)$ в промежутке F.

Таким образом, функция $x = \varphi(y)$ монотонно возрастает в промежутке F, и её значения сплошь заполняют промежуток $E = \varphi(F)$. В силу теоремы 3.16, функция $\varphi(y)$ непрерывна в промежутке F, что и доказывает следующее утверждение.

Теорема 3.17. Пусть в промежутке E оси Ox функция $y = f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает (убывает).Тогда в промежутке $F = f(E)$ существует обратная ей функция $x = \varphi(y)$, также непрерывная и монотонно возрастающая (убывающая) в промежутке F.

22. Теоремы Вейерштрасса

Возьмём, например, функцию $\ln x$, рис. 3.39. Она непрерывна в любом промежутке (0,a], где $a > 0$. В то же время она не является ограниченной в этом промежутке, так как нет такого числа $M > 0$, чтобы для всех $x \in (0, a]$ было $|\ln x| \le M$.

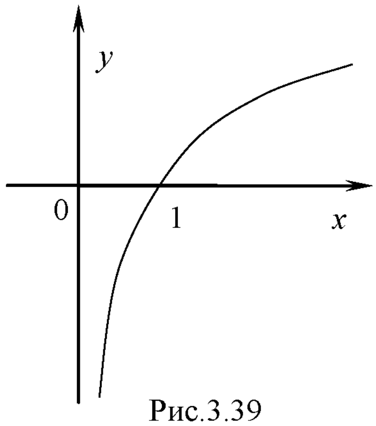


Рис.3.39

Итак, из непрерывности функции в промежутке ещё не следует её ограниченность в этом промежутке. Иначе обстоит дело, если промежуток непрерывности функции замкнут, т. е. является отрезком.

Теорема 3.18. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

■Предположим противное, т. е. пусть функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a,b]$, является, например, неограниченной сверху. Тогда для любого натурального n найдётся такое число $x_n \in [a,b]$, что $f(x_n) > n$. Из последовательности $\{x_n\}$, на основании леммы Больцано–Вейерштрасса, можно извлечь такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$, где x_0 – некоторое число. Поскольку, очевидно, $x_0 \in [a,b]$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, так что $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0)$. С другой стороны, из неравенства $f\left(x_{n_k}\right) > n_k$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = +\infty$. Полученное противоречие и доказывает теорему.□

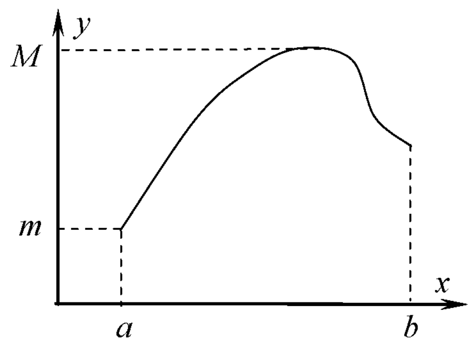


Рис.3.40

Из теоремы 3.18 следует, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существуют такие конечные числа m и M, что для всех $x \in [a,b]$ будет $m \le f(x) \le M$, рис. 3.40. При этом наибольшее из всех возможных чисел m есть, очевидно, $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, а наименьшим из всех возможных чисел M является число $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Будем ниже под m и M подразумевать именно эти числа. В связи с этим возникает вопрос: существуют ли на отрезке $[a,b]$ точки x_0 и x_1, такие, что $f(x_0) = m, \ f(x_1) = M$.

Теорема 3.19. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на нём своих точных нижней и верхней граней m и M, т. е. существуют такие точки x_0 и x_1 на отрезке $[a,b]$, что $f(x_0) = m, \ f(x_1) = M$.

■Предположим, что упомянутой точки $x_1 \in [a,b]$ нет. Тогда для всех $x \in [a,b]$ будет $f(x) < M$. Введём вспомогательную функцию $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$. Очевидно, она непрерывна для всех $x \in [a,b]$, а значит, в силу теоремы 3.18, существует такое $M_1 > 0$, что для всех $x \in [a,b]$ будет $\varphi(x) \le M$, т. е.

$$\frac{1}{M - f(x)} \le M_1,$$

откуда
$$M - f(x) \ge \frac{1}{M_1},$$

а значит
$$f(x) \le M - \frac{1}{M_1}.$$

По отсюда следует, что $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) < M$, что противоречит условию, а значит доказано существование такой точки $x \in [a,b]$, что $f(x_1) = M$.□

Аналогично доказывается достижимость точной нижней грани.

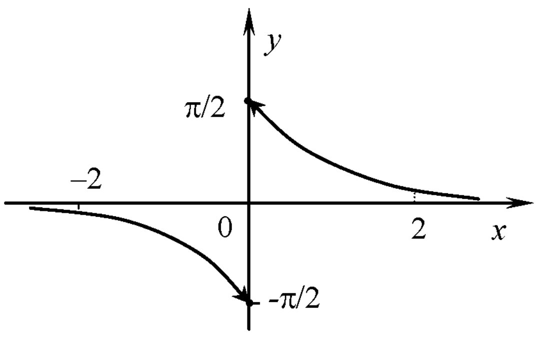


Рис.3.41

Примечание. Если функция $f(x)$ на отрезке ограничена, но не непрерывна, то её верхняя и нижняя грани могут не достигаться. Примером может служить функция $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ на отрезке [-2, 2], рис. 3.41. Действительно, $\sup\limits_{[-2,2]} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, но нет такой точки на этом отрезке, в которой

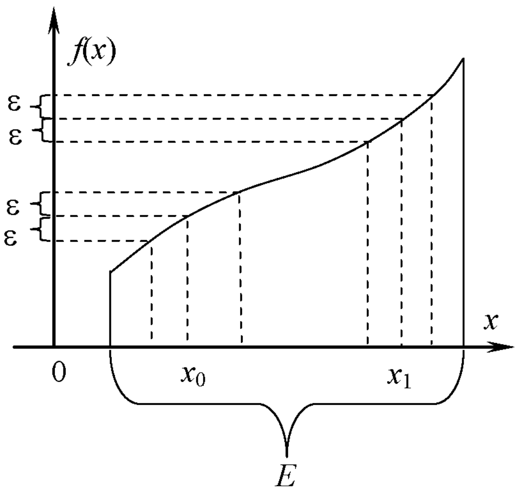


Рис.3.42

отрезке, в которой $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

Доказанные теоремы 3.18 и 3.19 называют соответственно 1-й и 2-й теоремами Вейерштрасса. Числа $m=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$ и $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$, благодаря достижимости этих значений, называют соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и пишут $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$ и $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$.

23. Равиомериая иеиерывиость фуикции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке E. Возьмём произвольную точку $x_0 \in E$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что $(|x-x_0|<\delta) \Rightarrow (|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$. При этом очевидно, что δ зависит, вообще говоря, не только от ε, но и от x_0, т. е. при одном и том же значении ε для различных x_0 будем иметь разные δ, что связано с различной скоростью изменения функции $f(x)$ на разных участках промежутка E.

Возникает вопрос, нельзя ли из всех чисел δ, отвечающих данному ε для различных x_0, выбрать наименьшее. В этом случае для всех $x_0 \in E$ и $x \in E$ было бы

$$(|x-x_0|<\delta) \Rightarrow (|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon), \tag{3.32}$$

т. е. число δ не зависело бы от x_0, а зависело бы только от ε.

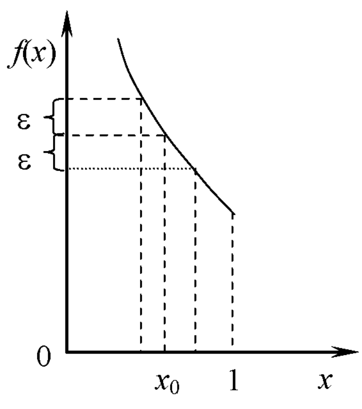


Рис.3.43

Если функция $f(x)$, непрерывная в промежутке E, такова, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon)>0$, что соотношение (3.32) выполняется для любого $x_0 \in E$ и $x \in E$, то функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной в промежутке E.

Возьмём конкретную функцию $f(x)=\frac{1}{x}$, рис. 3.43. Она непрерывна в промежутке $(0,1]$. Пусть $x_0 \in (0,1]$ и $x \in (0,1]$ – произвольные числа. Имеем

$$\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}=\frac{x-x_0}{x_0\cdot x},$$

а значит, неравенство $\left|\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$ выполняется, если $|x-x_0|<\varepsilon\cdot x_0\cdot x$.

Таким образом, в данном случае $\delta=2\cdot x_0\cdot x$. Поскольку же x_0 и x можно взять сколь угодно близкими к нулю, то числа δ, единого для всего промежутка $[0,1]$, не существует, т. е. функция $f(x)=\frac{1}{x}$ в промежутке $(0,1]$ непрерывна, но не равномерно непрерывна.

Иначе обстоит дело, если промежуток непрерывности функции является замкнутым.

Теорема 3.20 (Кантора). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она и равномерно непрерывна на нём.

■Предположим противное, т. е. пусть для некоторого $\varepsilon>0$ не существует такого $\delta>0$, что соотношение (3.32) выполняется для всех $x_0,x\in[a,b]$. Тогда для любого $\delta>0$ найдутся такие $x\in[a,b]$ и $x'\in[a,b]$, что $|x-x'|<\delta$ и в то же время $|f(x)-f(x')|\geq\varepsilon$.

Возьмём такую последовательность $\{\delta_n\}$, что $\delta_n>0\ \forall n$ и $\delta_n\to 0$. Для каждого указанного δ существуют такие x_n и x'_n из отрезка $[a,b]$, что $|x_n-x'_n|<\delta$, и в то же время $|f(x_n)-f(x'_n)|\geq\varepsilon$. Па основании леммы Больцано–Вейерштрасса, из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{x_{nk}\}$, такую, что $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$, где x_0 – некоторое число. Поскольку, очевидно, $x_0\in[a,b]$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а значит,

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0). \tag{3.33}$$

Далее, подпоследовательности $\{x_{nk}\}$ отвечает некоторая подпоследовательность $\{x'_{nk}\}$ подпоследовательности $\{x'_n\}$. При этом

$$\left(\left|x_{n_k}-x'_{n_k}\right|<\delta_k,\ \delta_k\to 0\right)\Rightarrow\left(\lim_{k\to\infty}x'_{n_k}=x_0\right),$$

а значит, $\lim\limits_{k\to\infty}f(x'_{n_k})=f(x_0)$.

Отсюда и из (3.33) следует, что $\left|f(x_{n_k})-f(x'_{n_k})\right|\underset{k\to\infty}{\to}0$, а это противоречит тому, что при всех k будет $\left|f(x_{n_k})-f(x'_{n_k})\right|\geq\varepsilon$. Полученное противоречие и доказывает теорему.□

Уиражиеиия к главе III

1. Пользуясь определением предела функции доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+5}{2x+1}=3$.

При каких x будет $\left|\dfrac{6x+5}{2x+1}-3\right|<0{,}001$?

2. Дана функция $y=\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2}$. Пользуясь определением предела функции, показать, что $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$. Каким должно быть M, чтобы было $(|x|>M)\Rightarrow(y<\varepsilon)$?

3. Дана функция $y=\dfrac{x+2}{3x-1}$. Если $x\to1$, то $y\to\dfrac{3}{2}$. Каким должно быть δ, чтобы было $(|x-1|<\delta)\Rightarrow\left(\left|y-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon\right)$?

Исследовать точки разрыва функций:

4. $y=x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x(x-1)}$;

5. $y=x\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x(1-x)}$;

6. $y=(x-1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x(x-1)}$;

7. $y=(x-1)\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x(x-1)}$;

8. $y=\dfrac{\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x-1}}{2^{x^2}-1}$;

9. $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}\right)$;

10. $y=2^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}\right)}$;

11. $y=3^{\frac{x-2}{(1-x)x^2}}$;

12. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{1-x^2}$;

13. $y=2^{\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x}}$;

14. $y=5^{\frac{1}{x-1}}-5^{\frac{1}{x}}$;

15. $y=\dfrac{10^{\frac{1}{x-1}}-1}{10^{\frac{1}{x+1}}-1}$;

16. $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$;

17. $y=3^{4^{\frac{x}{1-x}}}$;

18. $y=\operatorname{arctg}\left[\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{(x-2)^2}\right]$;

19. $y=\operatorname{arctg}\left[\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{(x-1)^2}\right]$;

20. $y=\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

21. $y=(x+1)2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)}$;

22. $y=\dfrac{1}{3^{\frac{x}{x-2}}-1}$;

23. $y=\dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$;

24. $y=\dfrac{2^{\operatorname{ctg} x}+1}{2^{\operatorname{ctg} x}-1}$;

25. $y=\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}}{2^{x^2}-1}$;

26. $y=(1+x)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x^2}$;

27. $y=2^{\frac{1}{2(1-x)x^2}}$;

28. $y=\dfrac{2|x-1|}{x^2(1-x)}$.

Вычислить пределы:

29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$;

30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^2-6x+4}{x^3-3x^2+2x}$;

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$;

32. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Вычислить пределы:

33. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{6+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^3-3x+2}$;

34. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$;

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

37.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}+\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[7]{1+14x}}{\sqrt[4]{1+2x}+x-\sqrt[6]{1+x}}$;

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x}$;

39.

40. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)x^{\frac{3}{2}}$;

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right);$$

41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2}-\sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$; 42. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$;

43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{a^3+x}-\sqrt[4]{a^4-2x}}{x}$;

44. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+20x^3-1}-\right.$
$\left.-\sqrt[3]{8x^3-6x^2+5}\right)$;

45. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+6x^2-1}-\sqrt[5]{32x^5-12x^4+x+6}\right)$.

Вычислить пределы:

46. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\frac{\pi}{4}-x}$;

47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}}$;

48. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}^2x-1}{\cos 2x}$;

49. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$;

50. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2x}$;

51. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos bx}}{x^2}$;

52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)+\cos(a-x)-2\cos x}{1-\cos x}$;

53. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$;

54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\sin 2x}}{x\arcsin^2\frac{x}{2}}$;

55. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

Вычислить пределы:

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\pi}{n}\right)^{n^2}$;

57. $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{a}{2n}\right)$;

58. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\pi}{n}+3\sin^2\dfrac{\pi}{n}\right)^{n^2}$;

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{n}+b\sin\dfrac{a}{n}\right)^{n}$;

60. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\operatorname{ctg}2x}$;

61. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\operatorname{tg}\left(a+\frac{b}{n}\right)}{\operatorname{tg}\,a}\right]^{n}$;

62. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\left(a+\dfrac{b}{n}\right)}{\sin a}\right]^n$;

63. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\left(\dfrac{n+1}{n-1}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)\right]^{\mathrm{tg}^2\left(\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$;

64. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)\right]^{\mathrm{tg}^2\left(\frac{n+1}{n+3}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$;

65. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}a}\right)^{\mathrm{ctg}(x-a)}$;

66. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4x+e^{-x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

67. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{ctg}^2 x}$;

68. $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{n}\right)$;

69. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\mathrm{tg}x}{\cos 2x}$;

70. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{3}\right]^n$;

71. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\ln\mathrm{ch}\dfrac{\pi}{n}$;

72. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln\left(2x^2+4x+1\right)-\ln\left(2x^2+5x-2\right)\right]$;

73. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}(a+x)-\mathrm{arctg}a}{\ln(x^2+\sqrt{1+x})}$;

74. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\dfrac{2a+x}{a+x}$;

75. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2^x-\sqrt{2}}{\ln 2x}$;

76. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}{\cos x-\cos 2x}$;

77. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(2x-3)}{5^x-25}$;

78. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\ln\mathrm{ch}(2x-1)}{(9^x-3)^2}$;

79. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^3+\sqrt{1+x^2}\right)}{\mathrm{ch}\,2x-\mathrm{ch}\,x}$;

80. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{a}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}-2\right),\ a>0$.

81. Доказать, что если $x\to 0$, то

$$e^{ax}-e^{bx}\sim\sin ax-\sin bx.$$

82. Сравнить при $x\to 0$ функции $f(x)=10^{ax^2}-10^{bx^2}$ и $\varphi(x)=\mathrm{ch}\,ax-\mathrm{ch}\,bx$.

IV. Производиая и диффереициал

1. Пекоторые задачи, ириводящие к иоиятию ироизводиой

Задача 1.1 <u>«О скорости точки при неравномерном движении»</u>. Пусть точка M движется по прямой[1] траектории так, что пройденный ее путь есть известная функция времени: $s = f(t)$. Вычислим мгновенную скорость этой точки в момент t.

Пусть Δs – путь, пройденный точкой за время от момента t до момента $t + \Delta t$ (рис. 4.1). Очевидно, $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$. Тогда $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ есть средняя скорость точки на участке MM', на промежутке времени $[t, t + \Delta t]$. Пусть теперь $\Delta t \to 0$. Тогда $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, очевидно, стремится к мгновенной скорости точки M в момент t. Итак, искомая скорость равна

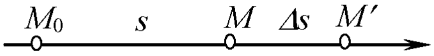


Рис. 4.1

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (4.1)$$

Пример 4.1. Рассмотрим свободное падение точки. В этом случае

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

а значит

$$\Delta s = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{g\left(2t\Delta t + (\Delta t)^2\right)}{2}.$$

Отсюда

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g\left(2t\Delta t + (\Delta t)^2\right)}{2\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g}{2}(2t + \Delta t) = gt.$$

Примечание. В школьном курсе физики, как известно, наоборот, из формулы $v = gt$ выводится формула $s = \dfrac{gt^2}{2}$.

Задача 1.2 <u>«О плотности неоднородного стержня»</u>. Пусть имеется стержень некоторой длины l. Масса его участка OM зависит от положения точки M, т.е. $m = f(x)$. Считая функцию $f(x)$ известной, найдем плотность стержня в

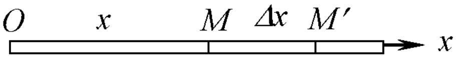


Рис.4.2

[1])Траекторию мы предполагаем прямолинейной в связи с тем, что для дуги произвольной формы у нас пока отсутствует строгое понятие длины кривой.

данной точке M. Пусть $\Delta m = f(x + \Delta x) - f(x)$ – масса участка MM', рис. 4.2. Тогда $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ есть средняя плотность участка MM'. Предположим теперь, что $\Delta x \to 0$. Тогда в пределе будем иметь искомую плотность в точке M

$$\gamma = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}.$$

Задача 1.3 «О силе тока». Пусть через сечение проводника за время от момента t_0 до произвольного момента времени t протекает количество электричества, равное $Q = f(t)$. Тогда за время $[t, t + \Delta t]$ через это сечение протекает количество электричества, равное $\Delta Q = f(t + \Delta t) - f(t)$. Величина $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ есть средняя сила тока в данном сечении на промежутке времени $[t, t + \Delta t]$.

Пусть теперь $\Delta t \to 0$. Тогда в пределе получим силу тока в данном сечении проводника в данный момент t

$$J = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Примечание. Рассмотренные задачи, несмотря на полное различие их физического содержание (вместо них можно было бы рассматривать задачи и с другим физическим смыслом), с математической точки зрения решаются одинаково. Они приводят к одному из важнейших понятий математического анализа – понятию производной.

2. Производиая, ее геометрический смысл

Возьмем некоторую функцию $y = f(x)$ и произвольное $x_0 \in D_f$. Придадим величине x приращение Δx, такое, что $[x_0, x_0 + \Delta x] \in D_f$. Вычислим соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Пусть теперь $\Delta x \to 0$. Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует и не зависит от способа стремления Δx к нулю, называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f(x_0)$. Сама же функция $f(x)$ в этом случае называется дифференцируемой в точке x_0.

Итак, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{4.2}$$

Иными словами, производной функции в данной точке называется предел отношения приращения этой функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Пример 4.2. Вычислим производную функции $y = x^3$ в точке $x = 2$. Имеем

$$\Delta y = (2 + \Delta x)^3 - 2^3 = 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Отсюда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 12.$$

Пример 4.3. Пусть $y = \sqrt[3]{x}$, а $x = 0$. Тогда

$$\Delta y = \sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{\Delta x},$$

а значит

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty.$$

Итак, функция $y = \sqrt[3]{\Delta x}$ в точке $x = 0$ не дифференцируема, поскольку предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ для неё в этой точке не существует.

Если в равенстве (4.2) заменить фиксированное x_0 на произвольное x, то получим

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

или

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Величина $y' = f'(x)$, вообще говоря, является функцией от x.

Выясним геометрический смысл производной. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть угловой коэффициент секущей MM', рис. 4.3. Если $\Delta x \to 0$, то точка M' приближается к точке M, и положение секущей стремится к положению касательной в точке M.

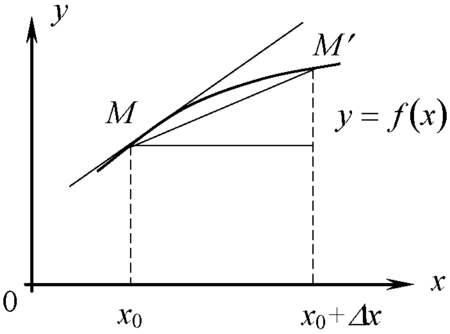


Рис.4.3

Итак, производная функции в данной точке геометрически представляет собой угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке с данной абсциссой x.

Обратимся снова к равенству (4.1). Оно означает теперь, что скорость точки есть производная пути как функции времени или, как говорят, производная пути по времени. Но скорость точки – это «быстрота» изменения пройденного ею пути. В связи с этим производную любой функции можно рассматривать как скорость изменения этой функции относительно ее аргумента. В этом и состоит физический смысл производной.

Рассмотрим функцию, график которой представлен на рис. 4.4. Геометрически очевидно, что $f'(x_2)>0$ и $f'(x_1)>0$, но при этом $f'(x_1)>f'(x_2)$ (поскольку углы α_1 и α_2 – острые, причем $\alpha_1>\alpha_2$). В то же время $f'(x_3)<0$, поскольку угол α_3 – тупой. Физически же это означает, что в точках x_1 и x_2 функция $f(x)$ возрастает, причем в точке x_1 быстрее, чем в точке x_2, а в точке x_3 эта функция убывает.

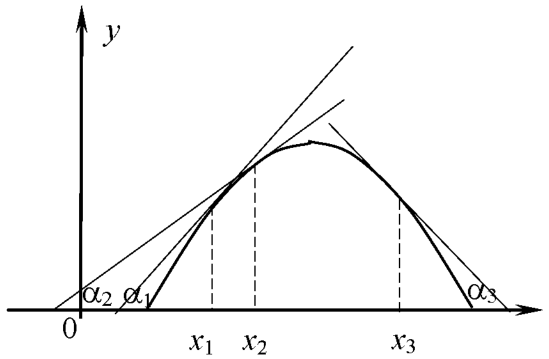


Рис.4.4

Итак, если производная функции положительная, то функция возрастает и тем быстрее, чем больше производная; если же производная отрицательная, то функция убывает, причем тем быстрее, чем больше модуль производной.

Ниже, в главе V эти утверждения будут несколько уточнены и доказаны более строго, без использования геометрических соображений.

3. Связь между диффереицируемостью и иеирерывиостью фуикции

Получим сначала одну важную формулу. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Это означает, что существует предел

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Отсюда следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ отличается от своего предела на бесконечно малую величину, т. е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha, \tag{4.3}$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$. Следовательно,

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\,\Delta x. \tag{4.4}$$

Переходя от (4.3) к (4.4), мы молча предположили, что Δx не обращается в нуль. Но если $\Delta x = 0$, то из (4.4) следует, что тогда $\Delta y = 0$, что, естественно, и должно быть. Таким образом, формула (4.4) верна при любом способе стремления Δx к нулю.

Теорема 4.1. Если функция дифференцируема в данной точке, то она и непрерывна в этой точке.

■В силу условия, $f'(x_0)$ есть конечное число. Но тогда, на основании (4.4), получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'(x_0) + \alpha \right] \Delta x = 0,$$

что и доказывает теорему.□

Утверждение, обратное теореме 4.1, неверно, т. е. функция может быть непрерывной в данной точке, но не дифференцируемой. В частности (см. пример 4.3), функция $\sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$ непрерывна, но не дифференцируема. Геометрически это значит, что в точке O касательная к линии $y = \sqrt[3]{x}$ вертикальна.

Другие случаи нарушения дифференцируемости в точке непрерывности функции будут рассмотрены в главе V.

4. Производиая стеиеииой фуикции

Пусть $y = x^a$, где a – любое число. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^a - x^a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1}{\Delta x} x^a = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1}{\frac{\Delta x}{x}} x^{a-1}.$$

На основании формулы (3.30), имеем окончательно

$$y' = a x^{a-1}.$$

Итак, производная степенной функции (с любым показателем) равна показателю степени, умноженному на основание в степени, на единицу меньшей первоначального показателя.

Пример 4.4. Пусть $y = x^3$. Тогда, в силу (4.5) $y' = 3x^2$. В частности, положив здесь $x = 2$, получим $y = 12$. Этот результат ранее был получен непосредственно (см. пример 4.2).

Пример 4.5. Пусть $y = \sqrt{x}$. Тогда $y' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пример 4.6. Пусть $y = \frac{1}{x}$. Тогда $y' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Пример 4.7. Пусть $y = x$. Тогда $y' = \left(x^1\right)' = 1 \cdot x^0 = 1$. Этот результат очевиден, так как если $y = x$, то $\Delta y = \Delta x$, а значит $y' = 1$.

5. Осиовиые иравила иахождеиия ироизводиой

Теорема 4.2. Производная постоянной величины тождественно равна нулю.

■Пусть $y = C$, где $C = const$. Тогда при любом Δx будет $\Delta y = 0$, а значит и $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.□

Этот результат очевиден, так как постоянная величина не изменяется, т. е. скорость ее изменения равна нулю.

Теорема 4.3. Производная суммы дифференцируемых функций равна сумме их производных.

■Пусть $y = u(x) + v(x)$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

т. е.

$$y' = u' + v',$$

что и требовалось доказать.□

Очевидно, данная теорема верна для любого конечного числа слагаемых.

Пример 4.8. Пусть $y = x^4 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - 2$.

Тогда $$y' = 4x^3 - \frac{1}{3} x^{-4/3} + 0 = 4x^3 - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

Следствие теоремы 4.3. Если две функции при всех x различаются между собой на одно и то же число, то их производные тождественно равны между собой.

Теорема 4.4. Производная произведения дифференцируемых функций равна производной первого сомножителя, умноженной на второй сомножитель без изменения, плюс производная второго сомножителя, умноженная на первый сомножитель без изменения.

■Пусть $y = u(x)v(x)$. Тогда

$$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x).$$

Но так как

$$u(x+\Delta x) - u(x) = \Delta u,$$

то

$$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u,$$

и, аналогично,

$$v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v.$$

Поэтому

$$\Delta y = \left(u(x) + \Delta u\right)\left(v(x) + \Delta v\right) - u(x)v(x) = u\,\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v.$$

Отсюда

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u\Delta v}{\Delta x} + \frac{v\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u\,\Delta v}{\Delta x}\right) =$$

$$= u\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + v\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v.$$

Поскольку функция дифференцируема, то она и непрерывна, а значит $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$. Поэтому

$$y' = u'v + v'u + u'\cdot 0$$

т. е.

$$y' = u'v + v'u\ .\square$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Действительно, пусть $y = Cf(x)$. Тогда, на основании теоремы 4.4,

$$y' = C'f(x) + Cf'(x) = 0\cdot f(x) + Cf'(x) = Cf'(x)\,.$$

Пример 4.9. Пусть $y = \left(3x^2 + 4x\right)\left(\dfrac{5}{x} + \sqrt[3]{x}\right)$. Тогда

$$y' = \left(6x + 4\right)\left(\frac{5}{x} + \sqrt[3]{x}\right) + \left(3x^2 + 4x\right)\left(-\frac{5}{x^2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right).$$

Теорема 4.5. Производная дроби с дифференцируемыми числителем и знаменателем равна новой дроби, числитель которой есть производная числителя исходной дроби, умноженная на знаменатель исходной дроби без изменения, минус числитель исходной дроби, умноженный на производную ее знаменателя, а знаменатель равен квадрату знаменателя исходной дроби.

■Пусть $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Тогда

$$\Delta y = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u+\Delta u)v - (v+\Delta v)u}{(v+\Delta v)v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v+\Delta v)v}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\nu\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta\nu}{\Delta x}}{(\nu+\Delta\nu)\nu},$$

а значит

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\nu\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta\nu}{\Delta x}}{\nu(\nu+\Delta\nu)}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\nu\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0}u\dfrac{\Delta\nu}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\nu(\nu+\Delta\nu)}=\frac{\nu\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\nu}{\Delta x}}{\nu\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\nu+\Delta\nu)}.$$

Поскольку функция $\nu(x)$ дифференцируема, то она и непрерывна, а значит $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\nu=0$. Поэтому, окончательно

$$y'=\frac{u'\nu-u\nu'}{\nu^2}.\square \tag{4.6}$$

Пример 4.10. Пусть $y=\dfrac{x^2}{x^3+4}$. Тогда

$$y'=\frac{2x(x^3+4)-x^2 3x^2}{(x^3+4)^2}=\frac{8x-x^4}{(x^3+4)^2}.$$

6. Производиая иоказательиой и логарифмической фуикций

Пусть $y=a^x$. Тогда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}.$$

На основании формулы (3.28) имеем окончательно

$$y'=a^x\ln a.$$

В частности, если $a=e$, т. е. если $y=e^x$, то $y'=e^x$.

Пусть теперь $y=\ln x$. Тогда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\dfrac{(x+\Delta x)}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x},$$

а так как, в силу (3.27), при $\Delta x\to 0$ будет $\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)\sim\dfrac{\Delta x}{x}$, то

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x},$$

т. е.

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Примечание. Пусть $y = \lg x$. Тогда (см. главу 1) $y = M_1 \ln x$, где $M_1 = 0{,}43\ldots$, а значит $y' = \frac{M_1}{x}$. Аналогичное замечание, относится и к логарифмам с любым другим основанием, отличным от e.

7. Производиые тригоиометрических фуикций

Пусть $y = \sin x$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Аналогично, если $y = \cos x$, то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\lim_{x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x.$$

Точно так же можно вычислить производные функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Однако целесообразнее воспользоваться формулой (4.6). Имеем для $y = \operatorname{tg} x$

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично, пусть $y = \operatorname{ctg} x$. Тогда

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

8. Производиая обратиой фуикции

Теорема 4.6. Пусть функция $y = f(x)$ определена и строго монотонна в некотором промежутке E и пусть в некоторой точке $x \in E$ существует производная $y_0 = f(x_0) \neq 0$. Тогда в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ обратная функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $x_0' = \varphi'(y_0)$, причем

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4.7}$$

■Положим $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Тогда из (4.4) находим

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{f'(x_0) + \alpha},$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно,

$$\varphi'(x_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{f'(x_0) + \alpha}.$$

Из монотонности функции $y = f(x)$ следует, что $(\Delta x \to 0) \Leftrightarrow (\Delta y \to 0)$. Поэтому

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{f(x_0) + \alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}.\square$$

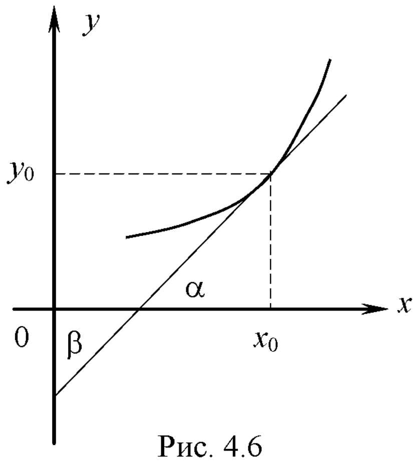


Рис. 4.6

Доказанную формулу записывают еще так

$$x_y' = \frac{1}{y_x'} \tag{4.8}$$

Примечание. Формула (4.7) имеет простой геометрический смысл (рис. 4.6). Действительно, очевидно, $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, $\varphi'(y_0) = \operatorname{tg}\beta$, а так как $\beta = 90° - \alpha$, то $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, откуда следует (4.7).

Пример 4.11. Пусть $y = \ln x$. Тогда $x = e^y$, и формула (4.8) дает

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x},$$

что совпадает с результатом, полученным ранее непосредственно.

9. Производиые обратиых тригоиометрических фуикций

Пусть $y = \arcsin x$. Тогда $x = \sin y$, а значит

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

В данном случае именно $\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y}$, так как функция $y = \arcsin x$ изменяется в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, рис. 4.7.

Точно так же можно найти производную функции $y = \arccos x$. Однако проще поступить иначе. Действительно, из тождества

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

имеем

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

а значит

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2}\right)' - (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

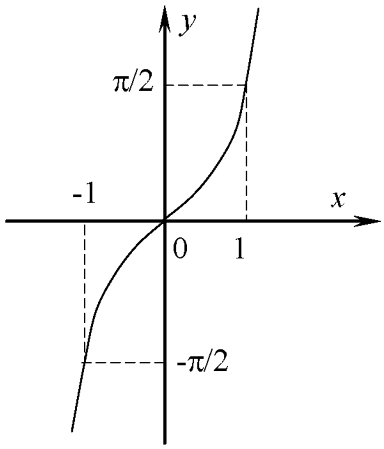


Рис. 4.7

Пусть теперь $y = \operatorname{arctg} x$. Тогда $x = \operatorname{tg} y$, а значит

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Наконец, в силу тождества

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2},$$

находим

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

10. Производиые гииерболических и обратиых гииерболических фуикций

Пусть $y = \operatorname{sh} x$. Тогда

$$y' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2},$$

$$(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{0 \cdot e^x - 1 \cdot e^x}{e^{2x}} = -\frac{e^x}{e^{2x}} = -e^{-x},$$

а поэтому

$$y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Аналогично, если $y = \operatorname{ch} x$, то

$$y' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{\left(e^x\right)' + \left(e^{-x}\right)'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Далее,

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Пусть теперь $y = \operatorname{Arsh} x$. Тогда $x = \operatorname{sh} y$, а значит

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Аналогично, если $y = \operatorname{Arch} x$, то $x = \operatorname{ch} y$, а значит

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{ch} y)'} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Легко видеть, что результаты этого параграфа еще раз подтверждают аналогию между тригонометрическими и гиперболическими функциями.

11. Таблица осиовиых формул и иравил иахождеиия ироизводиых

$(Const)' \equiv 0$		$(u \cdot v)' = u'v + uv'$	
$(u+v)' = u' + v'$		$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	
$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

$(\operatorname{Arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$(\operatorname{Arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

12. Производиая сложиой фуикции

Теорема 4.7. Пусть функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0, где $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда и сложная функция $F(x) = f\,[\varphi(x)]$ дифференцируема в точке x_0, причем

$$F'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0). \qquad (4.9)$$

Пусть $\Delta u = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$, $\Delta y = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)$. В силу (4.4), имеем

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha \Delta x, \qquad (4.10)$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$. Следовательно,

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right] =$$

$$= f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а значит и непрерывна в ней, так что ($\Delta x \to 0$) $\Leftrightarrow$ ($\Delta u \to 0$). Поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = \lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha = 0$, и получаем

$$F'(x_0) = f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0) + 0\cdot u'(x_0) = f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).\square$$

Примечание. Функция $u = \varphi(x)$ не обязательно монотонна. Поэтому при некоторых $\Delta x \neq 0$ может быть $\Delta u = 0$. Однако формула (4.10), как отмечалось, верна и при $\Delta u = 0$.

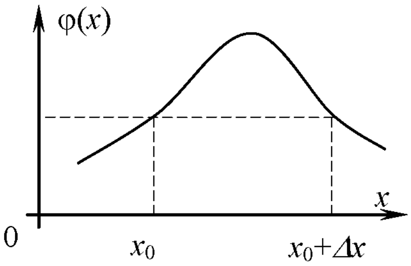


Рис. 4.8

Формулу (4.9) чаще записывают так

$$y'_x = y'_u\, u'_x. \qquad (4.11)$$

Итак, производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную самого′ промежуточного аргумента.

Пример 4.12. Пусть $y = \sin 3x$. Это значит, что $y = \sin u$, где $u = 3x$, и формула (4.11) дает

$$y' = (\sin u)'_u (3x)'_x = \cos u\cdot 3 = 3\cos 3x.$$

Пример 4.13. Пусть $y=10^{\operatorname{tg}x}$. Это значит, что $y=10^u$, где $u = \operatorname{tg}x$, и поэтому

$$y'=10^u\ln 10\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\ln 10\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot 10^{\operatorname{tg}x}.$$

Пример 4.14. Пусть $y = (x^3 + 2)^{100}$. Это значит, что $y = u^{100}$, где $u = x^3 + 2$. Имеем

$$y'=100\cdot u^{99}\cdot 3x^2=300\cdot\left(x^3+2\right)^{99}x^2.$$

Пусть теперь имеются два промежуточных аргумента, т. е. пусть $y = f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$. Тогда, по формуле (4.10),

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

Но в данном случае u, в свою очередь, есть сложная функция аргумента x, а значит эта же формула (4.10) дает

$$u'_x=u'_v v'_x.$$

Поэтому окончательно

$$y'_x=y'_u\,u'_v v'_x.$$

Аналогично обстоит дело и в случае большего числа промежуточных аргументов.

Пример 4.15. Пусть $y=e^{\sqrt{\arcsin x}}$. Тогда

$$y=e^u,\; u=\sqrt{v},\; v=\arcsin x,$$

а значит

$$y'=e^u\,\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{e^{\sqrt{\arcsin x}}}{2\sqrt{\arcsin x}\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 4.16. Пусть $y=\operatorname{ch}\left[\ln^2(1-x)\right]$. Мысленно вводя промежуточные аргументы, находим

$$y'=\operatorname{sh}\left[\ln^2(1-x)\right]\cdot 2\cdot\ln(1-x)\cdot\frac{1}{1-x}(-1)=-\frac{2}{1-x}\cdot\ln(1-x)\cdot\operatorname{sh}\left[\ln^2(1-x)\right].$$

Примечание. Нахождение производной данной функции при помощи описанных выше формул и правил называется дифференцированием этой функции.

13. Диффереицироваиие иеявиых фуикций

Пусть задано уравнение, содержащее x и y. В общем виде его записывают так: $f(x,y) = 0$. Такое уравнение определяет, вообще говоря, некоторую неявную функцию $y = \varphi(x)$, подставляя которую в уравнение, мы, естественно, обращаем его в тождество, т.е. $f[x,\varphi(x)] \equiv 0$. Поэтому для нахождения y'_x надо дифференцировать уравнение $f(x,y) = 0$ именно как тождество, помня о том, что в нем y есть упомянутая выше функция $\varphi(x)$. В этом случае y играет роль промежуточного аргумента.

Пример 4.17. Возьмем уравнение $x^3+\mathrm{tg}y=2$. Дифференцируя его по только что сформулированному правилу, получаем

$$3x^2+\frac{1}{\cos^2 y}y'=0,$$

откуда

$$y'=-3x^2\cos^2 y.$$

В данном случае, очевидно, от неявного задания легко перейти к явному. Имеем

$$\mathrm{tg}y=2-x^3,$$

откуда

$$y=\mathrm{arctg}\left(2-x^3\right)+n\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\ \ldots,$$

а значит

$$y'=\frac{1}{1+(2-x^3)^2}(-3x^2)=-\frac{3x^2}{1+(2-x^3)^2},$$

что совпадает с предыдущим результатом, поскольку, в силу исходного уравнения, $\mathrm{tg}y=2-x^3$, а значит

$$\frac{1}{1+(2-x^3)^2}=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y}=\cos^2 y.$$

Пример 4.18. Пусть имеется функция, заданная уравнением

$$xy+e^x+\sin y=0$$

(в этом случае переход к явному заданию, очевидно, невозможен). Тогда

$$y+xy'+e^x+\cos y\cdot y'=0,$$

откуда

$$y'=-\frac{y+e^x}{x+\cos y}.$$

Пример 4.19. Пусть $x=\varphi(y)$ – функция, обратная функции $y=f(x)$. Дифференцируя равенство $x=\varphi(y)$, как уравнение, определяющее неявную функцию, получим

$$1=\varphi'(y)y',$$

откуда

$$y'=\frac{1}{\varphi'(y)},$$

т. е.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Тем самым получена уже знакомая формула (4.8).

14. Логарифмическое диффереицироваиие

Возьмем функцию

$$y = \frac{\sqrt[3]{1+x^2} \cdot 2^{\sin x}(\mathrm{tg}x - 1)^5}{x^3 \ln^2 x}.$$

Непосредственное дифференцирование такой функции, хотя и возможно, но затруднительно из-за большого числа сомножителей. Здесь удобнее сначала прологарифмировать эту функцию. Получим тогда

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln\left(1+x^2\right) + \sin x \cdot \ln 2 + 5\ln(\mathrm{tg}x - 1) - 3\ln x - 2\ln(\ln x).$$

Дифференцируя теперь это равенство, как уравнение, задающее неявную функцию, находим

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{3}\frac{2x}{1+x^2} + \cos x \cdot \ln 2 + \frac{5}{\mathrm{tg}x - 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{x} - \frac{2}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}.$$

Отсюда

$$y' = \left[\frac{2x}{3\left(1+x^2\right)} + \cos x \cdot \ln 2 + \frac{5}{(\mathrm{tg}x - 1)\cos^2 x} - \frac{3}{x} - \frac{2}{x\ln x}\right]y,$$

т. е.

$$y' = \left[\frac{2x}{3\left(1+x^2\right)} + \cos x \cdot \ln 2 + \frac{5}{(\mathrm{tg}x - 1)\cos^2 x} - \frac{3}{x} - \frac{2}{x\ln x}\right] *$$

$$* \frac{\sqrt[3]{1+x^2} \cdot 2^{\sin x}(\mathrm{tg}x - 1)^5}{x^3 \ln^2 x}.$$

Описанный прием называется логарифмическим дифференцированием. Он применим также к дифференцированию т. н. показательно-степенных функций, т. е. функций вида $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$. Такие функции нельзя отнести ни к степенным, ни к показательным, а значит нельзя воспользоваться соответствующими формулами таблицы производных[1].

Пример 4.20. Пусть $y = (\sin x)^{\cos x}$. Тогда

---

[1]) Впрочем, этой трудности можно избежать, если воспользоваться тем, что $[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)}$.

$$\ln y = \cos x \cdot \ln \sin x,$$

а значит

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x,$$

откуда

$$y' = \left(-\sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) y = (\mathrm{ctg} x \cdot \cos x - \sin x \cdot \ln \sin x) \cdot (\sin x)^{\cos x}.$$

Методом логарифмического дифференцирования легко получить и некоторые из уже известных формул. Пусть, например, $y = x^a$. Тогда

$$\ln y = a \ln x,$$

откуда

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{a}{x},$$

а значит

$$y' = \frac{a}{x} y = \frac{a}{x} x^a = a x^{a-1},$$

т.е. мы получим формулу для производной степенной функции, не используя предел (3.30).

Аналогично, пусть $y = u(x)\mathrm{v}(x)$. Тогда

$$\ln y = \ln u + \ln \mathrm{v},$$

а значит

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{\mathrm{v}} \cdot \mathrm{v}',$$

откуда

$$y' = \left(\frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{\mathrm{v}} \cdot \mathrm{v}' \right) y = \left(\frac{u'}{u} + \frac{\mathrm{v}'}{\mathrm{v}} \right) \cdot u\mathrm{v} = u'\mathrm{v} + u\mathrm{v}'.$$

Точно так же получается формула для производной дроби.

15. Геометрические и физические приложеиия ироизводиых

Пусть $f(x)$ – некоторая функция, а x_0 – некоторое число, принадлежащее D_f. Тогда, как мы видели, число $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0, рис. 4.9. Поэтому уравнение этой касательной (CM) записывается так

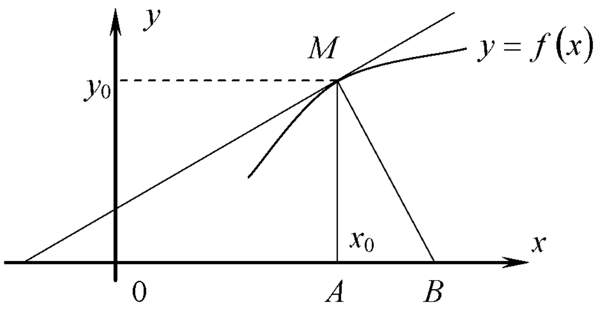


Рис. 4.9

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

где $y_0 = f(x_0)$.

Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной, называется нормалью к данной кривой в данной точке. Очевидно, ее угловой коэффициент равен $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$, а значит, уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Длина отрезка CM касательной от точки касания до точки пересечения с осью Ox называется длиной касательной данной кривой в данной точке M. Аналогично, длина отрезка MB нормали между точками пересечения с кривой и осью Ox называется длиной нормали данной кривой в данной точке M. Отрезки AC и AB называются соответственно подкасательной и поднормалью данной кривой в данной точке. Поскольку $AM = y_0$, а $\angle MCA = \angle AMB = \operatorname{arctg} f'(x_0)$, то длины всех четырех отрезков: AC, AB, MC и MB легко находятся из прямоугольных треугольников. Например,

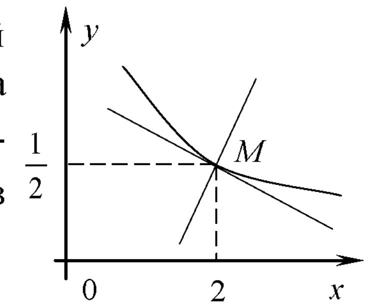


Рис. 4.10

$$AC = AM \cdot \operatorname{ctg}\angle MCA = \frac{AM}{\operatorname{tg}\angle MCA} = \frac{y_0}{y_0'},$$

где $y_0 = f(x_0)$.

Пример 4.21. Составим уравнение касательной и нормали к линии $y = \dfrac{1}{x}$ в точке M (2, 1/2), рис. 4.10.

Имеем

$$y' = -\frac{1}{x^2},$$

а значит $y'(2) = -\frac{1}{4}$. Поэтому уравнение касательной:

$$y - \frac{1}{2} = -4(x - 2).$$

Пример 4.22. Найдем угол, под которым пересекаются линии $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ в точке M (1,1), рис. 4.11. Из уравнений линий находим

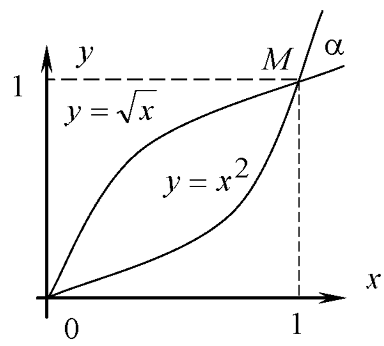


Рис. 4.11

$$y' = 2x\,,\ y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,,$$

а значит угловые коэффициенты касательных в точке $M\,(1{,}1)$ равны

$$k_1 = 2,\quad k_2 = \frac{1}{2},$$

отсюда для искомого угла α получаем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2 - {}^1\!/_2}{1 + 2\cdot{}^1\!/_2} = \frac{3}{4}.$$

Пример 4.23. К линии $y = 2x^2 + 4x - 1$ провести касательную, параллельную прямой $x + 2y - 3 = 0$.

В данном случае точка касания (x_0, y_0) заранее не известна, но зато известен угловой коэффициент касательной $k = -\frac{1}{2}$. Поэтому, находя $y' = 4x + 4$, полагаем

$$4x_0 + 4 = -\frac{1}{2},$$

откуда

$$x_0 + 1 = -\frac{1}{8},$$

а значит

$$x_0 = -\frac{9}{8},\ y_0 = \frac{81}{32} - \frac{9}{2} - 1 = -\frac{95}{32}.$$

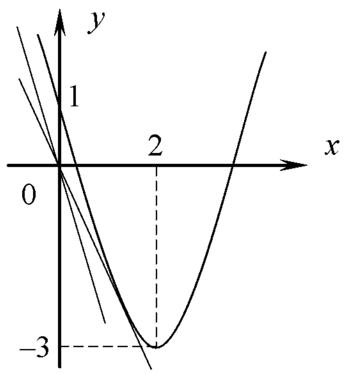


Рис. 4.12

Итак, уравнение искомой касательной:

$$y + \frac{95}{32} = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{9}{8}\right).$$

Пример 4.24. К линии $y = x^2 - 4x + 1$ провести касательную из начала координат, рис. 4.12.

Пусть (x_0, y_0) – неизвестная точка касания. Тогда искомое уравнение касательной:

$$y - y_0 = (2x_0 - 4)(x - x_0).$$

Потребуем, чтобы касательная проходила через точку O. Получим

$$-y_0 = (2x_0 - 4)(-x_0),$$

т. е.

$$y_0 = 2x_0^2 - 4x_0,$$

или

$$x_0^2 - 4x_0 + 1 = 2x_0^2 - 4x_0,$$

отсюда

$$x_0^2 = 1,$$

а значит $x_0' = 1,\ x_0'' = -1$.

Получаем две точки касания $M_1(1,-2), M_2(-1,6)$. Уравнения касательных $y+2=-2(x-1),\ \ y-6=-6(x+1)$.

Пример 4.25. Точка движется так, что пройденный ею путь изменяется по закону $s = 2t + 3t + 1$. Найдем скорость этой точки в момент $t = 2$.

В произвольный момент скорость данной точки равна

$$v = s'(t) = 6t^2 + 3.$$

Следовательно, при $t = 2$ будет

$$v = 24 + 3 = 27.$$

16. Производиые высших иорядков

Пусть имеется дифференцируемая функция $y = f(x)$. Найдем ее производную $y' = f'(x)$. Предположим, что она также является дифференцируемой функцией. Тогда можно найти ее производную, т.е. производную производной. Ее называют производной 2-го порядка функции $y = f(x)$ и обозначают y'', или $f''(x)$. Прежнюю производную $y' = f'(x)$ можно называть в этом смысле производной 1-го порядка*).

Аналогично вводится понятие производной 3-го порядка как производной функции $y'' = f''(x)$ и т. д. Производные 3-го, 4-го, 5-го, … порядков обозначаются y''', y^{IV}, y^{V}, … , или, соответственно, $f'''(x), f^{IV}(x), f^{V}(x)$. Если n – произвольное натуральное число, то производную n-го порядка функции $y = f(x)$ обозначают $y^{(n)}$, или $f^{(n)}(x)$.

Очевидно, что производная любого порядка находится из производной предыдущего порядка при помощи обычных правил дифференцирования.

Пример 4.26. Пусть $y = x^n$, где $n > 0$ и целое. Тогда

$$y' = nx^{n-1},\ y'' = n(n-1)x^{n-2},\ y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3},\dots,\ y^{(n-1)} =$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2x,$$
$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n! = const,\ y^{(n+1)} \equiv 0,\ y^{(n+2)} \equiv 0,\dots$$

Очевидно, и для любого многочлена n-ой степени все производные, начиная с производной $(n+1)$-го порядка, тождественно равны нулю.

Пример 4.27. Пусть $y = \ln x$. Тогда

---

*) В ряде случаев саму функцию $f(x)$ удобно рассматривать условно как производную этой функции нулевого порядка (см. например #17).

$$y' = \frac{1}{x},\ y'' = -\frac{1}{x^2},\ y''' = \frac{1\cdot 2}{x^3},\ y^{IV} = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4},\ldots,\ y^{(n)} = (-1)^n \frac{n-1}{x^n}.$$

Последнее равенство верно при любом $n \geq 1$. Правда, при этом мы (для $n = 1$) должны считать, что 0!=1, хотя выражение 0! кажется вообще лишенным смысла. Однако ниже мы познакомимся с таким обобщением понятия факториала, при котором выражение 0! не только приобретает смысл, но и окажется равным именно 1.

Заметим еще, что получение общего вида производной $y^{(n)}$, пригодного для любого n, как это имело место в последнем примере, возможно лишь для очень немногих функций простейшего вида. Для подавляющего же большинства функций в выражениях для y', y'', y''', … отсутствует какая-либо видимая закономерность.

Пример 4.28. Пусть теперь функция задана неявно. Возьмем, например, уравнение

$$x^3 + y^2 = 1.$$

Если подставить в него $y = g(t)$, то мы получим тождество, дифференцируя которое, имеем

$$3x^2 + 2yy' = 0, \tag{4.12}$$

откуда

$$y' = -\frac{3x^2}{2y}.$$

Дифференцируя теперь уравнение (4.12), получим

$$6x + 2y'^2 + 2yy'' = 0, \tag{4.13}$$

откуда

$$y'' = -\frac{6x + 2y'^2}{2y} = -\frac{3x + y'^2}{y}.$$

Подставляя сюда ранее найденное выражение для y', находим окончательно

$$y'' = -\frac{3x + \dfrac{9x^4}{4y^2}}{y} = -\frac{12xy^2 + 9x^4}{4y^3}.$$

Аналогично, дифференцируя равенство (4.13) и используя уже полученные выражения для y' и y'', находим y''' и т. д.

17. Формула Лейбиица

Пусть $u(x)$ и $\nu(x)$ – функции, дифференцируемые нужное число раз.

Тогда
$(uv)' = u'v + uv'$, $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$, $(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$ и т. д. Легко видеть, что правые части этих равенств напоминают разложения соответствующих степеней бинома $u + v$. Докажем, что это правило верно для любого натурального n, т. е. при любом n

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1))}{m!}u^{(n-m)}v^{m} + \ldots + uv^{(n)},$$

или, если воспользоваться известной формулой комбинаторной теории для сочетаний, то получим

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \ldots + C_n^n uv^{(n)},$$

или, еще короче,

$$(uv)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m)} v^{(m)}. \tag{4.14}$$

Для доказательства применим метод математической индукции. Мы видели, что формула (4.14) верна при $n = 1, n = 2, n = 3$. Предположим, что она выполняется для некоторого n, и докажем, что тогда она верна и для производной (n+1)-го порядка. Отсюда и будет следовать, что формула (4.14) имеет место при всех n.

Имеем из (4.14)

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m+1)} v^{(m)} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m)} v^{(m+1)}. \tag{4.15}$$

Приведем справа подобные члены. Первое слагаемое первой суммы, равное $u^{(n+1)}v$, и последнее слагаемое второй суммы, равное $uv^{(n+1)}$, не имеют подобных себе слагаемых. Следовательно, они будут соответственно первым и последним слагаемым правой части равенства (4.15). Если же $1 \le m \le n$, то произведение $u^{(n-m+1)}v^{(m)}$ имеет общий коэффициент, равный $C_n^m + C_n^{m-1}$. Но

$$C_n^m + C_n^{m-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-2))(n-(m-1))}{m!} + \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-2))}{(m-1)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-2))}{(m-1)!}\left[\frac{n-(m-1)}{m} + 1\right] = \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-2))}{(m-1)!} \cdot \frac{n+1}{m} =$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)\ldots((n+1)-(m-1))}{m!} = C_{n+1}^m.$$

Итак, равенство (4.15) принимает вид

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + \sum_{m=1}^{n} C_{n+1}^{m} u^{(n-m+1)} v^{(m)} + uv^{(n+1)},$$

т. е.

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^{m} u^{((n+1)-m)} v^{(m)} .$$

Но эта формула получается из (4.14) путем замены n на $n+1$. Тем самым доказана справедливость формулы (4.14) для любого натурального n.

Формулу (4.14) называют формулой Лейбница.

Пример 4.29. Пусть $y = e^{ax}\left(x^2+1\right)$. Вычислим $y^{(15)}$.

Формула Лейбница дает

$$y^{(15)} = (e^{ax})^{(15)}(x^2+1) + 15(e^{ax})^{(14)}(x^2+1)' + \frac{15\cdot 14}{2}(e^{ax})^{(13)}(x^2+1)''$$

(все остальные слагаемые справа тождественно равны нулю, так как $(x^2+1)^{(m)} \equiv 0$ для всех $m = 3, 4, \ldots, 15$). Следовательно,

$$y^{(15)} = a^{15}e^{ax}\left(x^2+1\right) + 15a^{14}e^{ax}2x + \frac{15\cdot 14}{2}a^{13}e^{ax}\cdot 2 =$$

$$a^{13}e^{ax}\left[a^2\left(x^2+1\right) + 30ax + 210\right].$$

18. Диффереициал фуикции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x_0. Тогда, согласно формуле (4.4), приращение этой функции в точке x_0 имеет вид

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x .$$

Здесь $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а значит при $\Delta x \to 0$ будет $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$. В тоже время, если в точке x_0 будет $y' \neq 0$, то $y'\Delta x = O^{*}(\Delta x)$. Отсюда следует, что при $\Delta x \to 0$ будет $\Delta y \approx y'\Delta x$, т. е. при $\Delta x \to 0$ бесконечно малая $y'\Delta x$ есть главная часть бесконечно малой Δy.

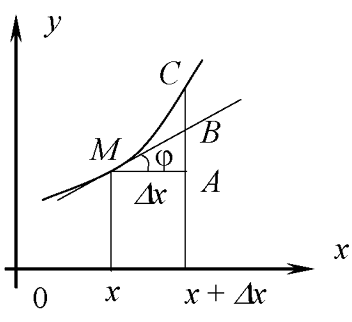


Рис. 4.13

Бесконечно малая $y'\Delta x$, являющаяся главной частью бесконечно малого приращения функции, вызванного бесконечно малым приращением аргумента Δx, называется дифференциалом функции $y = f(x)$ и обозначается dy или $df(x)$.

Выясним геометрический смысл дифференциала, рис. 4.13. Поскольку $y' = \operatorname{tg}\varphi$, то

$$dy = y'\Delta x = \Delta x \cdot \operatorname{tg}\varphi = AB .$$

Итак, геометрически дифференциал представляет собой бесконечно малое приращение ординаты касательной к графику данной функции в точке с данной абсциссой x. Иными словами, дифференциал – это приращение, которое имела бы функция при бесконечно малом приращении аргумента, если бы она, начиная с данного x, стала линейной.

Пример 4.30. Пусть $y = x^2$. Положим $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$. Тогда

$$\Delta y = 1{,}1^2 - 1^2 = 0{,}21;$$

$$dy = 2x_0\Delta x = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}2.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y - dy}{dy} = \frac{0{,}01}{0{,}2} = 0{,}05.$$

Пусть теперь $\Delta x = 0{,}01$. Тогда

$$\Delta y = 1{,}01^2 - 1^2 = 2{,}01 \cdot 0{,}01 = 0{,}0201,$$

$$dy = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}02,$$

а значит

$$\frac{\Delta y - dy}{dy} = \frac{0{,}0001}{0{,}02} = 0{,}005.$$

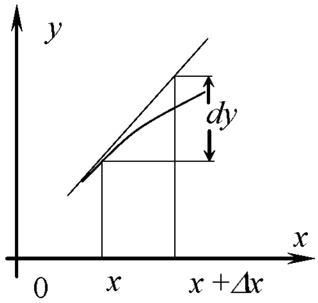


Рис.4.14

Если бы мы взяли Δx еще меньше, то и отношение $\dfrac{\Delta y - dy}{dy}$ уменьшилось бы. Это иллюстрирует тот факт, что если $\Delta x \to 0$, то $dy = O^*(\Delta x)$, а значит $\Delta y - dy = o(dy)$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y - dy}{dy} = 0$. Разумеется, это имеет место не только для функции $y = x^2$, но и для любой другой дифференцируемой функции.

Отметим, что в рассмотренном примере было $\Delta y > dy$ (при $\Delta x > 0$). Это связано с тем, что линия $y = x^2$ вогнута, в силу чего касательная к ней расположена под этой линией. В случае же выпуклой линии, рис. 4.14, (например, $y = \sqrt{x}$), очевидно, при $\Delta x > 0$ будет $\Delta y < dy$.

Результаты примера 4.30 можно сделать совсем наглядными, если

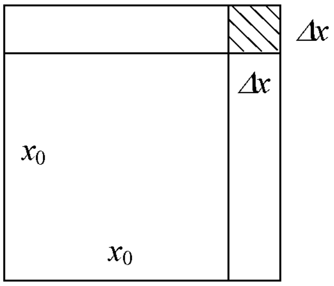


Рис. 4.15

функцию $y = x^2$ рассматривать как площадь квадрата со стороной x. Тогда $dy = 2x_0\Delta x$ представляет собой сумму площадей двух одинаковых прямоугольников со сторонами x_0 и Δx. Эта величина отличается от истинного приращения площади квадрата, на величину равную $(\Delta x)^2$, которая является, очевидно, бесконечно малой 2-го порядка относительно dy. Чем меньше Δx, тем с меньшей относительной погрешностью этой площадью можно пренебречь.

Возьмем снова произвольную функцию $y = f(x)$ и придадим аргументу x бесконечно малое приращение, которое по аналогии с обозначением dy обозначим не Δx, а dx, и назовем дифференциалом независимой переменной x. Тогда равенство, служащее определением дифференциала, примет вид

$$dy = y'dx. \tag{4.16}$$

Отсюда получим

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Итак, производная функции есть отношение ее дифференциала к дифференциалу независимой переменной. Вместе с тем отношение $\frac{dy}{dx}$ можно рассматривать как новое обозначение производной. В связи с этим символ $\frac{d}{dx}$ (именно символ, а не дробь!) используется как обозначение действия дифференцирования.

Из формулы (4.16) следует, что нахождение дифференциала функции фактически сводится к нахождению ее производной. Поэтому нахождение дифференциала функции также называют дифференцированием этой функции (что и служит оправданием данного термина).

Пример 4.31. Пусть $y = 2^{\sqrt{x}}$. Тогда, очевидно, $dy = 2^{\sqrt{x}} \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Из таблицы производных вытекает соответствующая таблица дифференциалов.

1. $dc = 0$.	14. $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $d(u+v) = du + dv$.	15. $d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$.
3. $d(uv) = udv + vdu$.	16. $d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$.
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.	17. $d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x dx$.
5. $d\left(x^\alpha\right) = \alpha x^{\alpha-1} dx$.	18. $d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x dx$.
6. $d\left(a^x\right) = a^x \ln a dx$.	19. $d(\operatorname{th} x) = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.
7. $d\left(e^x\right) = e^x dx$.	20. $d(\operatorname{cth} x) = -\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}$.
8. $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$.	
9. $d(\sin x) = \cos x dx$.	
10. $d(\cos x) = -\sin x dx$.	

11. $d(\operatorname{tg} x)=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$.	21. $d(\operatorname{Arsh} x)=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.
12. $d(\operatorname{ctg} x)=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$.	22. $d(\operatorname{Arch} x)=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.
13. $d(\arcsin x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.	

19. Пивариаитиость диффереициала

Пусть $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$. В этом случае y есть сложная функция от x. Имеем

$$dy=y'_x dx. \tag{4.17}$$

При этом $y'_x=y'_u u'_x dx$. Но $y'_x dx=du$, а поэтому получаем

$$dy=y'_u du. \tag{4.18}$$

Равенства (4.17) и (4.18) одинаковы по форме. Это значит, что форма дифференциала не зависит от того, является ли переменная дифференцирования независимой переменной или же она, в свою очередь, есть функция другой переменой. Это свойство дифференциала называется его инвариантностью (т.е. неизменностью).

Перепишем равенства (4.17) и (4.18) так

$$\frac{dy}{dx}=y'_x, \qquad \frac{dy}{du}=y'_u.$$

Тогда формула $y'_x=y'_u u'_x$ принимает вид

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Левую часть можно получить из правой, если попросту сократить на du. Таким образом, с дифференциалами можно в этом смысле обращаться как с обычными числами. В частности, формула для производной обратной функции может быть получена теперь так:

$$x'_y=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\frac{1}{y'_x}.$$

20. Примеиеиие диффереициала в ириближеииых вычислеииях

Мы уже видели, что если $\Delta x\to 0$, то $\Delta y=dy+o(\Delta x)$. Практически это означает, что при достаточно малых Δx можно положить

$$\Delta y \approx dy,$$

т. е.

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x,$$

откуда

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \qquad (4.19)$$

Эта формула служит для приближенного вычисления значений функции при значениях аргумента, близких к т.н. "табличным" значениям.

Позже, в главе V, будет доказано, что погрешность формулы (4.19) не превосходит по модулю величины $M\cdot(\Delta x)^2$, где $M=\max\limits_{[x_0,x_0+\Delta x]}|f''(x)|$. При малых Δx величина $|f''(x)|$ мало изменяется на отрезке $[x_0,x_0+\Delta x]$. Поэтому, как правило, можно полагать $M\approx|f''(x_0)|$, т.е.

$$|\Delta y-dy|\le M\cdot(\Delta x)^2. \qquad (4.20)$$

Пример 4.32. Вычислим приближенно $\mathrm{tg}45^\circ10'$. Для этого вводим функцию $y=\mathrm{tg}x$ и полагаем $x_0=45^\circ$, $\Delta x=10'=\dfrac{\pi}{180\cdot 6}=\dfrac{3{,}1416}{1080}=0{,}0029$.

Формула (4.19) теперь дает

$$\mathrm{tg}45^\circ10'\approx\mathrm{tg}45^\circ+\frac{1}{\cos^2 45^\circ}\cdot\Delta x=1+\frac{0{,}0029}{1/2}=1{,}0058.$$

Оценим погрешность этого результата. Поскольку

$$(\mathrm{tg}x)''=\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)'=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

то

$$M=\frac{2\sin 45^\circ}{\cos^3 45^\circ}=4.$$

Следовательно,

$$|\mathrm{tg}\,45^\circ10'-1{,}0058|\le 4\cdot 0{,}0029^2<0{,}00005.$$

Таким образом, в полученном результате верны все четыре знака.

Примечание. Мы уже отмечали, что если функция – линейная, то для нее приращение и дифференциал совпадают. Поэтому, полагая $\Delta y=dy$, т. е. пренебрегая отрезком $BC=o(\Delta x)$, мы исходим из того, что на малом отрезке график функции мало отличается от прямой, т. е. функция ведет себя почти как линейная (рис. 4.16). Таким

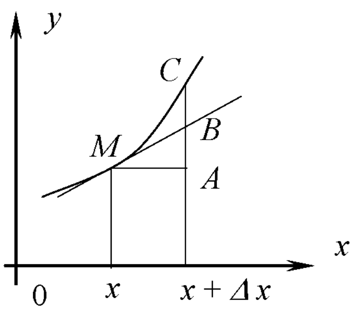


Рис. 4.16

образом, применение формулы (4.19) заключается в том, что произвольная функция “линеаризуется“ на малом отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

21. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ – дифференцируемая функция. Найдем ее дифференциал $dy = f'(x)\Delta x$. Вообще говоря, он также есть функция аргумента x. Будем считать эту функцию дифференцируемой и вычислим ее дифференциал, т. е. дифференциал дифференциала. Он называется дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ и обозначается $d^2 y$, или $d^2 f(x)$.

Поскольку Δx не зависит от x, то при дифференцировании по x будем считать, что $\Delta x = const$. Поэтому

$$d^2 y = d(dy) = d\left[f''(x)\Delta x\right] = \left[f'(x)\Delta x\right]'' \cdot \Delta x = \Delta x\left[f'(x)\right]' \cdot \Delta x = f''(x)(\Delta x)^2.$$

Аналогично вводится дифференциал 3-го порядка:

$$d^3 y = d(d^2 y) = d\left[f''(x)(\Delta x)^2\right] = \left[f''(x)(\Delta x)^2\right]' \cdot \Delta x = f'''(x)(\Delta x)^3,$$

и т.д. Вообще для любого натурального n дифференциал n-го порядка равен

$$d^n y = f^{(n)}(x)(\Delta x)^n.$$

Если $\Delta x \to 0$, а $f^{(n)}(x) \neq 0$, то $d^n y = O^*\left((\Delta x)^n\right)$. Обозначим, как и прежде Δx через dx. Тогда получим

$$d^2 y = f''(x)dx^2,\ d^3 y = f'''(x)dx^3, \ldots,\ d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Отсюда

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2},\ f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}, \ldots,\ f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Правые части можно рассматривать как новые обозначения производных высших порядков. В связи с этим символ $\dfrac{d^n}{dx^n}$ используют для обозначения действия n-кратного дифференцирования.

22. Параметрическое задаиие фуикций и лииий

Пусть переменные x и y являются функциями некоторой третьей переменной t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \tag{4.21}$$

Из первого равенства можно определить t как функцию от x:

$$t=\chi(x).$$

Здесь функция $\chi(t)$ обратна функции $\varphi(t)$. Но так как t – одно и то же в обоих равенствах (4.21), то, заменяя во втором равенстве t на $\chi(t)$, будем иметь $y=\psi[\chi(x)]$, т. е. $y=f(x)$.

Итак, равенства (4.21) определяют y как функцию от x. Такой способ задания функции называется параметрическим, а вспомогательная переменная t – параметром. Переход от параметрического задания функции к явному или неявному ее заданию называют исключением параметра. Одним из способов (но не единственным) исключения параметра является его нахождение из первого уравнения (4.21) с последующей подстановкой во второе уравнение.

Пример 4.33. Возьмем уравнения

$$\begin{cases} x=\sqrt{t}+1, \\ y=\sin 2t. \end{cases}$$

Первое уравнение дает:

$$\sqrt{t}=x-1,$$

т. е.

$$t=(x-1)^2.$$

Подставляя это во второе уравнение, получаем

$$y=\sin\left[2(x-1)^2\right].$$

Исключить параметр возможно далеко не всегда. Например, нельзя исключить t из уравнений

$$\begin{cases} x=t+e^t, \\ y=\ln t+\cos^2 t. \end{cases}$$

С геометрической точки зрения уравнения (4.21) определяют, вообще говоря, некоторую линию. Уравнения (4.21) называют в этом случае параметрическими уравнениями этой линии. При каждом конкретном t мы получаем конкретные x и y, т. е. конкретную точку на кривой. Когда t принимает всевозможные значения, соответствующая точка пробегает всю кривую. При этом возможен случай, что одна и та же точка линии отвечает нескольким различным значениям t.

Пример 4.34. Возьмем уравнения

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = \dfrac{1}{3}\left(t^3 - t\right). \end{cases}$$

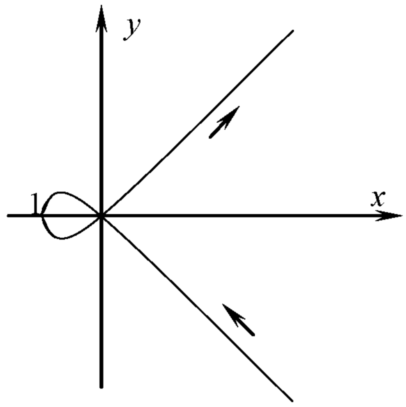


Рис. 4.17

Полагая $t = 0$, получим точку $(-1{,}0)$. При $t = 1$ имеем точку $(0{,}0)$. Значению $t = -1$ также отвечает точка $(0{,}0)$. Значения $t = 2$ и $t = -2$ дают соответственно точки $(3,\ 2)$ и $(3, -2)$. Вообще, беря два значения t, различающиеся только знаком, мы получим одно и то же значение x (поскольку функция $x = t^2 - 1$ – четная) и два одинаковых по величине и противоположных по знаку значения y (ввиду нечетности функции $y = \frac{1}{3}\left(t^3 - t\right)$). Следовательно, данная кривая симметрична относительно оси Ox. При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ соответствующая точка движется по кривой так, как показано на рисунке 4.17. При этом точка $(0{,}0)$, отвечающая различным значениям: $t = 1$ и $t = -1$, называется точкой самопересечения.

Введем параметрические уравнения некоторых важнейших линий.

1. Окружность. Возьмём окружность радиуса a с центром в начале координат. В качестве параметра t выберем полярный угол. Тогда

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$$

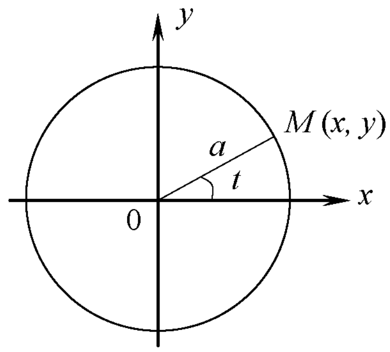


Рис. 4.18

Это и есть параметрические уравнения окружности. Исключим параметр t. Для этого здесь удобно возвести оба уравнения в квадрат:

$$\begin{cases} x^2 = a^2\cos^2 t, \\ y^2 = a^2\sin^2 t \end{cases}$$

и сложить. Получим

$$x^2 + y^2 = a^2$$

– знакомое уравнение окружности.

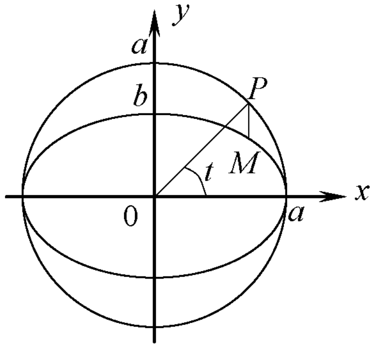


Рис. 4.19

2. Эллипс. Возьмем эллипс с полуосями a и b с центром в точке O, рис. 4.19. Его можно рассматривать как результат равномерной деформации окружности радиуса a вдоль оси Oy. При этом, как известно,

$$y_M = \frac{b}{a} a\sin t = b\sin t,$$

а значит параметрические уравнения эллипса запишутся так

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin\, t. \end{cases}$$

При изменении t от нуля до 2π точка M описывает весь эллипс. С целью исключения параметра перепишем полученные уравнения так

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos t, \\ \dfrac{y}{b} = \sin t. \end{cases}$$

Возводя обе части в квадрат и складывая, получим известное уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

3. Гипербола. Рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t, \\ y = b\operatorname{sh} t. \end{cases} \tag{4.22}$$

Перепишем их так:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \operatorname{ch} t, \\ \dfrac{y}{b} = \operatorname{sh} t \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \operatorname{ch}^2 t, \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \operatorname{sh}^2 t, \end{cases}$$

откуда, используя формулу $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, получаем

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Итак, уравнения (4.22) изображают гиперболу с полуосями a и b. При $b = a$ получим уравнения равносторонней гиперболы

$$\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t, \\ y = a\operatorname{sh} t, \end{cases}$$

аналогичные уравнениям окружности.

Полученные результаты ещё раз иллюстрируют аналогию между тригонометрическими и гиперболическими функциями и – параллельно – между эллипсом и гиперболой (в частности, между окружностью и равносторонней гиперболой).

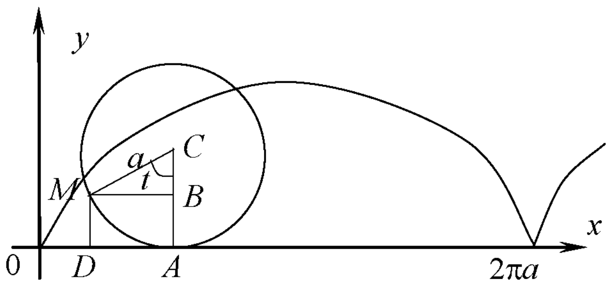


Рис. 4.20

Заметим, что в уравнениях

(4.22) параметр t уж не имеет смысла некоторого полярного угла, как в уравнениях окружности и эллипса. Однако можно придать параметру t некоторый другой геометрический смысл, при котором параметрические уравнения эллипса и гиперболы останутся прежними и который теперь уже будет одинаковым для обеих линий. Мы на этом останавливаться не будем.

4. Циклоида. Пусть окружность радиуса a катится без скольжения по некоторой прямой (мы её примем в качестве оси Ox). Траектория точки этой окружности называется циклоидой. В качестве t возьмём угол поворота того диаметра окружности, который в начале качения (т. е. когда точка M находилась в начале координат) был вертикальным, рис. 4.20. Тогда

$$x_M = OD = OA - AD = \overset{\smile}{AM} - MB = at - a\sin t,$$
$$y_M = AC - BC = a - a\cos t.$$

Итак, параметрические уравнения циклоиды:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

при этом первой арке циклоиды отвечает промежуток $[0,\ 2\pi]$ изменения t. В частности, если $t = 2\pi$, то $x = 2\pi a,\ y = 0$, что и должно было иметь место.

23. Диффереицироваиие фуикций, задаииых иараметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем

$$t = \chi(x),$$

а поэтому

$$y = \psi[\chi(x)] = f(x).$$

Здесь $f(x)$ – сложная функция, а $t = \chi(x)$ – промежуточный аргумент. Следовательно,

$$y'_x = y'_t t'_x.$$

Но, по формуле для производной обратной функции,

$$t'_x = \frac{1}{x'_t},$$

а значит

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \tag{4.23}$$

т. е.

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Пример 4.35. Составим уравнение касательной к линии

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = \dfrac{1}{3}\left(t^3 - t\right) \end{cases}$$

в точке $(3,\ 2)$.

На основании формулы (4.23) имеем

$$y'_x = \frac{t^2 - \frac{1}{3}}{2t}.$$

Точке $(3,\ 2)$, как мы видели, отвечает значение параметра $t = 2$. Следовательно, угловой коэффициент искомой касательной равен

$$k = \frac{4 - \frac{1}{3}}{4} = \frac{11}{12},$$

а значит её уравнение:

$$y - 2 = \frac{11}{12}(x - 3).$$

Формулу (4.23) можно получить совсем просто, если воспользоваться следствием инвариантности дифференциала. Действительно,

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Воспользуемся этим приемом для нахождения производных высших порядков в случае параметрического задания функций. Имеем

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{\frac{d(y'_x)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Совершенно аналогично находятся y'''_{xxx}, $y^{IV}_{x^4}$ и т.д. Каждая очередная производная получается из производной предыдущего порядка путем дифференцирования её по t с последующим делением на x'_t.

Пример 4.36. Возьмём опять уравнения

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = \dfrac{1}{3}\left(t^3 - t\right). \end{cases}$$

Мы имеем

$$y'_x = \frac{t}{2} - \frac{1}{6t}.$$

Отсюда

$$y''_{xx} = \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6t^2}}{2t} = \frac{1}{4t} + \frac{1}{12t^3},$$

$$y'''_{xxx} = \frac{-\dfrac{1}{4t^2} - \dfrac{1}{4t^4}}{2t} = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^5}\right),$$

и т. д.

Задачи и уиражиеиия к главе IV

1. Пользуясь только определением производной, вычислить $(\operatorname{tg} x)'$.

2. Пользуясь только определением производной, вычислить $\left(\sqrt[3]{x}\right)'$.

3. Показать, что функция $y = \sqrt{\ln(1 + x^2)}$ в точке $x = 0$ не дифференцируема. Найти $y'(+0)$ и $y'(-0)$.

4. Показать, что начало координат есть угловая точка линии $y = \left|2x - x^2\right|$ и найти угол между касательными к этой линии в этой точке.

5. Показать, что точка (2,0) есть угловая точка линии $y = \left|x^2 - 2x\right|$, и найти угол между касательными к этой линии в этой точке.

6. К линии $\dfrac{x^2}{30} + \dfrac{y^2}{24} = 1$ провести нормаль, параллельную прямой $x + 2y + 17 = 0$.

7. К линии $\begin{cases} x = t - 1, \\ y = t^3 - 12t + 1 \end{cases}$ провести касательную, параллельную прямой $9x + y + 3 = 0$.

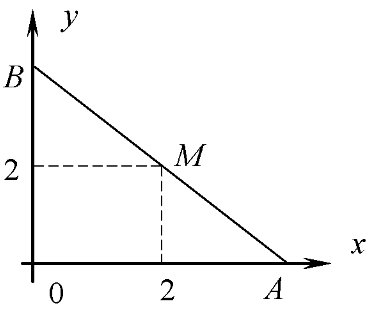


Рис. 4.21

8. Точки A и B одновременно выходят из начала координат и движутся по осям Ox и Oy соответственно, причем $v_A = 50$, $v_B = 10$. С ка-

кой скоростью они удаляются одна от другой?

9. Одна сторона имеет постоянную величину $a=10$, а другая – b – изменяется, возрастая со скоростью 4 *см/с*. С какой скоростью возрастает диагональ прямоугольника в тот момент, когда $b=30$ *см*?

10. Вдоль оси Ox со скоростью v=0,2 *см/с* движется точечный источник света A, от которого точка M (2,2) отбрасывает тень на оси Oy. С какой скоростью движется эта тень в тот момент, когда OA=3 *см* (рис. 4.21)?

11. К линии $y=\sqrt{2-x}$ провести касательную так, чтобы её отрезок, заключённый между осями координат, делился точкой касания пополам.

12. К линии $x^2+4y^2=16$ провести касательную так, чтобы её отрезок, заключенный между осями координат, делился точкой касания пополам.

13. К линии $y=x^2-3x+1$ провести касательную из точки $(4,1)$.

14. К линии $y=x^2-4x+1$ провести касательную из точки $(-1,1)$.

15. Показать, что отрезок любой касательной к линии $y=a\ln bx$ ($a=const$, $b=const$), заключённый между точкой касания и осью Oy, имеет постоянную проекцию на ось Oy.

16. Показать, что проекция ординаты любой точки линии $y=\mathrm{a}\cdot\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ на её нормаль есть постоянная величина, равная a.

17. Период колебания маятника равен $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ *с*, где l (*см*) – длина маятника. Как нужно изменить длину маятника l=20 *см*, чтобы период колебания уменьшился на 0,1 *с*? Воспользоваться тем, что $\Delta T\approx dT$.

18. Исходя из того, что $\Delta y\approx dy$, вычислить приближённо $\sqrt[3]{70}$. Оценить погрешность результата.

19. В круговом секторе радиус равен 100 *см*, а центральный угол – 60°. Как изменится площадь этого сектора, если радиус увеличить на 1 *см*? Воспользоваться тем, что $\Delta s\approx ds$.

20. Вычислить приближённо $\sqrt{\frac{2{,}03^2-1}{2{,}03^2+8}}$. Оценить погрешность результата.

21. Вычислить приближённо $\sqrt[3]{\frac{97}{103}}$. Оценить погрешность результата.

22. Заменяя приращение функции её дифференциалом, вычислить приближённо $\frac{3{,}1}{\sqrt{3{,}1^2+7}}$.

V. Примеиеиие ироизводиых к исследоваиию фуикций и лииий

1. Случаи иедиффереицируемости фуикций, иеирерывиых в даииой точке

В предыдущей главе было доказано, что если функция дифференцируема в данной точке, то она и непрерывна в этой точке. Обратное утверждение, как отмечалось, неверно, т.е. функция может быть непрерывной, но не дифференцируемой в данной точке. При этом возможны, в частности, следующие случаи.

1^0. Пусть в точке M график функции $y = f(x)$ имеет две различные касательные, рис. 5.1. Такую точку M называют угловой точкой. В этом случае, очевидно,

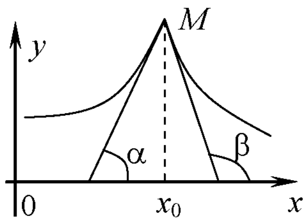


Рис.5.1.

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\beta \ ^{*)},$$

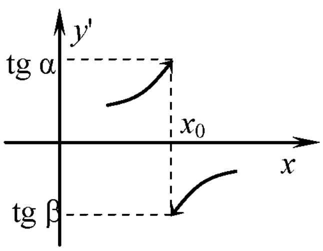


Рис.5.2

т. е. единого предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, не зависящего от способа стремления Δx к нулю в точке x_0 не существует (легко видеть, что в точке x_0 производная $f'(x)$ терпит разрыв 1-го рода в виде конечного скачка, рис. 5.2). Итак, в точке x_0 функция $f(x)$ не дифференцируема, хотя и непрерывна.

Примером может служить функция $y = e^{|x|}$ в точке $x = 0$, рис. 5.3.

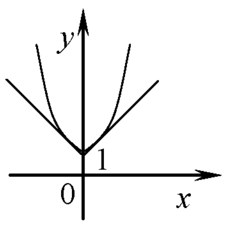


Рис.5.3

2^0. Пусть в точке M линия $y = f(x)$ имеет единственную касательную, но эта касательная параллельна оси Oy, рис. 5.4. Такую точку M называют точкой возврата. В этом случае, очевидно, производные слева и справа равны соответственно $+\infty$ и $-\infty$ (или наоборот), т. е. производная в точке x_0 не существует. Очевидно в этой точке производная терпит разрыв 2-го рода в виде бесконечного скачка, рис. 5.5. Между тем, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

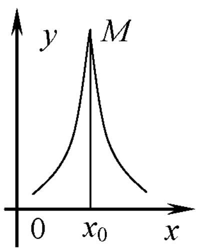


Рис.5.4

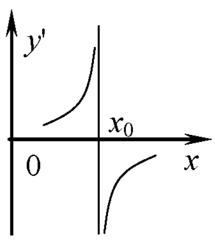


Рис.5.5

---

*) Эти пределы часто называют соответственно производной слева и производной справа и обозначают $f'(x_0 - 0)$ и $f'(x_0 + 0)$.

Пример 5.1. Пусть $y=\sqrt[3]{x^2}$. Имеем
$$y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

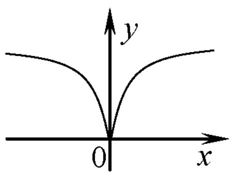


Рис.5.6

В точке $x=0$ функция непрерывна, рис. 5.6, но не дифференцируема.

3^0. Пусть в точке M линия $y=f(x)$ имеет вертикальную касательную, которая в этой точке не только касается данной линии, но и пересекает её, рис. 5.7 (такую точку M называют точкой перегиба с вертикальной касательной). В этом случае производные слева и справа одновременно равны либо $+\infty$ (как на рис. 5.8), либо $-\infty$. В точке же x_0 производная $f'(x)$ терпит разрыв 2-го рода, хотя и не являющийся бесконечным скачком.

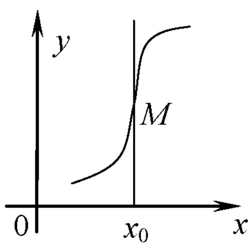


Рис.5.7

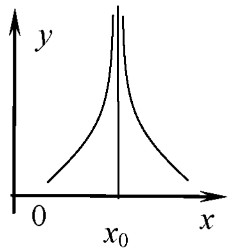


Рис.5.8

Пример 5.2. Пусть $y=\sqrt[3]{x}$. Тогда $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, а значит в точке $x=0$ производная не существует, обращаясь в $+\infty$, рис. 5.9.

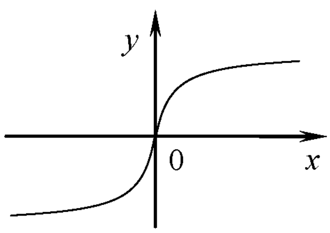


Рис.5.9

Примечание. Мы указали лишь наиболее типичные примеры нарушения дифференцируемости непрерывной функции. Возможен, например, случай, когда $f'(x_0-0)=+\infty$, а $f'(x_0+0)$ есть конечное число.

2. Теорема Ферма

Теорема 5.1. Если функция в некоторой внутренней точке промежутка принимает своё наибольшее или наименьшее в этом промежутке значение и если она дифференцируема в этой точке, то её производная в этой точке равна нулю.

■Пусть, для определённости, функция $f(x)$ в точке x_0 принимает наибольшее в промежутке $[a,b]$ значение. Тогда в отношении
$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
числитель всегда отрицателен (если, конечно, $x_0+\Delta x\in[a,b]$). Поэтому, если $\Delta x>0$, то

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0.$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leq 0 \qquad (5.1)$$

(поскольку предел отрицательной величины не может быть положительным), т. е.

$$f'(x_0)\leq 0. \qquad (5.2)$$

Если же $\Delta x<0$, то

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0,$$

а значит

$$\lim_{\Delta x \to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geq 0, \qquad (5.3)$$

т. е.

$$f'(x_0)\geq 0^{*)}. \qquad (5.4)$$

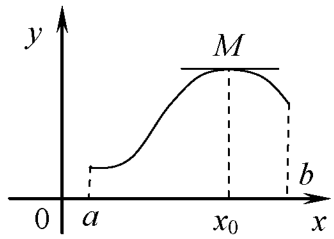


Рис.5.10

Но соотношения (5.2) и (5.4) могут одновременно иметь место тогда и только тогда, когда $f'(x_0)=0$.□

Доказанная теорема геометрически означает, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке M параллельна оси Ox, рис. 5.10.

Если же в точке x_0 функция $f(x)$ не дифференцируема, то условия теоремы Ферма и её утверждение не имеет места (см. рис. 5.11).

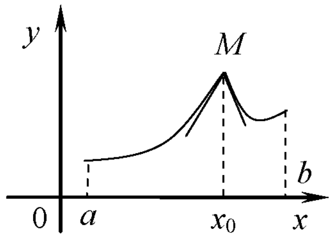


Рис.5.11

3. Теорема Ролля

Теорема 5.2. Если функция непрерывна на отрезке, дифференцируема во всех его внутренних точках и принимает на его концах одинаковые значения, то внутри отрезка существует по крайней мере одна точка, в которой производная этой функции равна нулю.

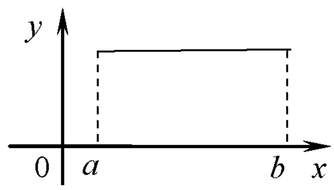


Рис.5.12

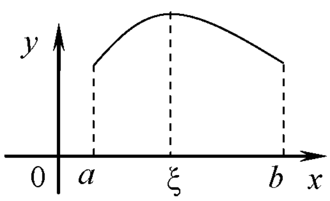


Рис.5.13

■Опуская из рассмотрения тот очевидный случай, когда $f(x)=const$ всюду на отрезке $[a,b]$, рис. 5.12, а значит $f'(x)\equiv 0$,

---

*) Переход от (5.1) к (5.2) и от (5.3) к (5.4) мы совершаем на основании дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0.

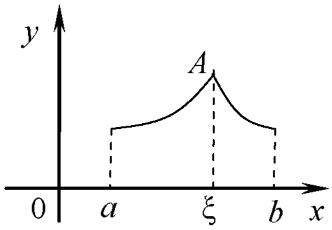


Рис.5.16

$\forall x \in [a,b]$, обратимся к рассмотрению общего случая. Поскольку $f(a) = f(b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a,b)$, в которой $f(x)$ принимает своё наибольшее или наименьшее на отрезке $[a,b]$ значение, рис. 5.13. Но тогда, на основании теоремы Ферма, $f'(\xi) = 0$.□

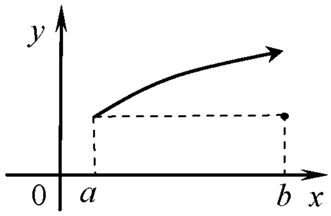


Рис.5.14

Примечание 1. Если функция $f(x)$ непрерывна не на отрезке $[a,b]$, а лишь в интервале (a,b) (см. рис. 5.14), то одно из условий теоремы Ролля не выполнено и утверждение этой теоремы может не иметь места. Таким образом, замкнутость промежутка непрерывности функции является необходимым требованием.

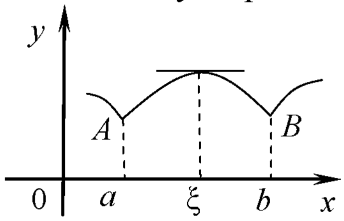


Рис.5.15

Примечание 2. Наоборот, требовать дифференцируемости функции $f(x)$ не в интервале (a,b), а на отрезке $[a,b]$, очевидно, не обязательно, так как точки A и B могут быть, например, угловыми точками графика, т.е. в точках $x = a$ и $x = b$ функция $f(x)$ может и не быть дифференцируемой, рис 5.15.

Примечание 3. Зато во всех внутренних точках отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ обязана быть дифференцируемой, так как в противном случае точка A может оказаться, например, угловой (рис. 5.16) и точки ξ, в которой $f'(\xi) = 0$, в интервале (a,b) может и не быть.

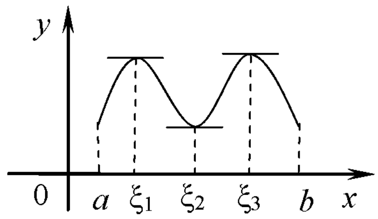


Рис.5.17

Примечание 4. Фигурирующих в теореме Ролля точек ξ, очевидно, может быть и несколько (рис. 5.17).

Примечание 5. Пусть $f(a) = f(b) = 0$ (в этом случае числа a и b называют корнями функции $f(x)$). Тогда из теоремы Ролля 5.2 получаем следующий её частный случай.

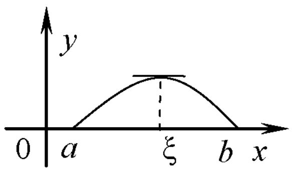


Рис.5.18

Теорема 5.2′. Между двумя корнями дифференцируемой функции лежит по крайней мере один корень её производной.

Пример 5.3. Пусть $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Это многочлен 4-ой степени, имеющий корни $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$. Тогда $f'(x)$, являясь многочленом 3-ей степени, имеет 3 корня. В силу теоремы 5.2′ все эти корни вещественны и лежат (по одному) в интервалах $(0,1)$, $(1,2)$ и $(2,3)$.

4. Теорема Лагранжа и её следствия

Теорема 5.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема во всех его внутренних точках. Тогда внутри отрезка $[a,b]$ существует, по крайней мере, одна такая точка ξ, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

■Для доказательства введём вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\lambda x,$$

где λ – некоторое число. Подберём λ так, чтобы было $F(a)=F(b)$. Имеем

$$f(a)-\lambda a=f(b)-\lambda b,$$

откуда

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Итак, функция $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, а значит, существует, по крайней мере, одна такая точка $\xi\in(a,b)$, что $F'(\xi)=0$, т. е.

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

а значит

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (5.5)$$

что и требовалось доказать.□

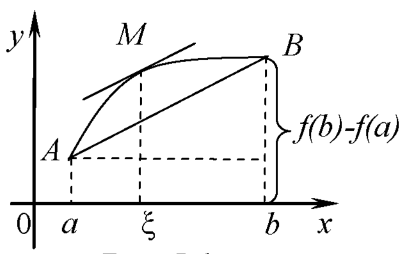


Рис.5.1

Доказанная теорема называется теоремой Лагранжа. Геометрически она выражает тот факт, что на дуге $\overset{\smile}{AB}$ найдётся по крайней мере одна такая точка M, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна хорде AB, рис. 5.19.

Примечание 1. Очевидно, что к теореме Лагранжа можно сделать примечания, аналогичные примечаниям 1-4 к теореме Ролля. Действительно, если, например, хотя бы в одной внутренней точке отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ не дифференцируема, рис. 5.20, то точка $\xi\in(a,b)$, для которой выполняется равенство (5.5), может и не существовать.

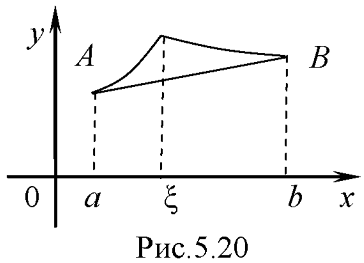


Рис.5.20

Примечание 2. При $f(b)=f(a)$ из равенства (5.5) следует, что

$f'(\xi)=0$, т. е. в этом случае теорема Лагранжа превращается в теорему Ролля.

Примечание 3. Пусть $f(x)$ – дифференцируемая функция. Придадим данному x приращение Δx и применим к этому отрезку $[x, x+\Delta x]$ теорему Лагранжа, рис. 5.21. Получим

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(\xi),$$

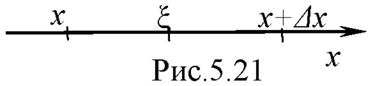


Рис.5.21

т. е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(\xi)$$

или

$$\Delta y=f'(\xi)\Delta x. \qquad (5.6)$$

Фактически это есть другая запись теоремы Лагранжа.

Из формулы (5.6) нетрудно получить неравенство (4.20), которое ранее было приведено без доказательства. Действительно, имеем теперь

$$\Delta y-dy=f'(\xi)\Delta x-f'(x)\Delta x=\left(f'(\xi)-f'(x)\right)\Delta x.$$

Предположим, что функция $f(x)$ имеет и непрерывную производную второго порядка. Тогда, применяя теорему Лагранжа к функции $f'(x)$ на отрезке $[x,\xi]$, рис. 5.22, получим

$$\Delta y-dy=f''(\eta)(\xi-x)\Delta x.$$

Отсюда

$$|\Delta y-dy|=|f''(\eta)||\xi-x||\Delta x|\le|f''(\eta)|\Delta x^2.$$

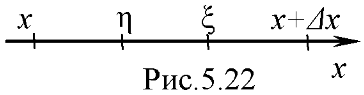


Рис.5.22

Пусть $M=\max\limits_{[x,x+\Delta x]}|f''(x)|$. Тогда окончательно

$$|\Delta y-dy|\le M\Delta x^2,$$

что и требовалось получить.

Таким образом, неравенство (4.20) оказалось следствием теоремы Лагранжа.

Из теоремы Лагранжа легко следует ещё один факт, который будет использован ниже. Предположим, что для функции $f(x)$ выполняется тождество

$$f'(x)\equiv 0.$$

Возьмём произвольные x_1 и x_2 и применим к отрезку $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа. Будем иметь

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi).$$

Но $f'(\xi)=0$, а значит $f(x_1)=f(x_2)$. Отсюда, ввиду произвольности чисел x_1 и x_2, следует, что вообще $f(x)\equiv const$. Доказанное утверждение обратно доказанному в главе IV, где мы доказали, что если $f(x) \equiv const$, то $f'(x) \equiv 0$.

5. Теорема Коши

Теорема 5.4. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы во всех его внутренних точках, причём $\varphi'(x)$ не имеет корней в интервале (a,b). Тогда существует, по крайней мере, одна такая точка $\xi \in (a,b)$, что

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

■Для доказательства введём вспомогательную функцию $F(x)=f(x)-\lambda\varphi(x)$. Подберём λ так, чтобы было $F(a)=F(b)$, т. е.

$$f(a)-\lambda\varphi(a)=f(b)-\lambda\varphi(b).$$

Получим

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

При таком λ функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, а значит существует, по крайней мере, одна такая точка $\xi \in (a,b)$, что $F'(\xi)=0$, т. е.

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(\xi)=0,$$

откуда и следует, что

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.\square$$

Примечание 1. Легко видеть, что теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при $\varphi(x)=x$.

Примечание 2. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши называют дифференциальными теоремами о среднем (поскольку в каждой из них фигурирует некоторая внутренняя точка ξ отрезка $[a,b]$).

6. Возрастаиие и убываиие фуикции иа иромежутке

Функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a,b]$, если для любых $x_1, x_2 \in [a,b]$ будет

$$(x_2 > x_1) \Rightarrow (f(x_2) > f(x_1)).$$

Столь же очевидным образом определяется убывание функции на промежутке.

Теорема 5.5. Если функция возрастает в некотором промежутке и дифференцируема в нём, то её производная в этом промежутке положительна и лишь в отдельных точках может обращаться в нуль.

■Пусть функция $f(x)$ возрастает на промежутке $[a,b]$ и пусть $x_0 \in (a,b)$ – произвольная точка. Если $\Delta x > 0$, то и $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$. Если же $\Delta x < 0$, то и $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$. Следовательно, как при $\Delta x > 0$, так и при $\Delta x < 0$ будет

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$$

Но тогда и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

т. е.

$$f'(x_0) \geq 0.$$

Докажем, что равенство $f'(x) = 0$ может иметь место только в отдельных точках интервала (a,b). Действительно, если бы это равенство выполнялось в некотором промежутке $[c,d] \subset [a,b]$, то, в силу следствия теоремы Лагранжа, в промежутке $[c,d]$ было бы $f(x) \equiv const$, что противоречило бы монотонному возрастанию функции $f(x)$ на всём промежутке $[a,b]$.□

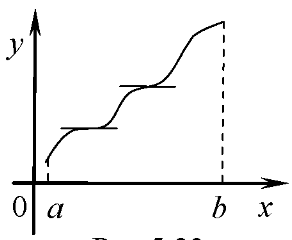


Рис.5.23

Геометрически теорема 5.5 выражает тот факт, что касательная к графику возрастающей функции всюду в промежутке возрастания образует острый угол с осью Ox и лишь в отдельных точках может быть параллельна этой оси, рис. 5.23.

Пример 5.4. Для функции $y = x^3$, возрастающей на всей числовой оси, имеем

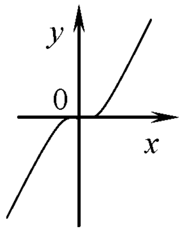


Рис.5.24

$$y' = 3x^2,$$

т. е. $y' > 0$ для всех x, кроме точки $x = 0$, в которой $y' = 0$, рис. 5.24.

Теорема 5.6. Если во всех точках некоторого промежутка производная функции положительна, то функция в этом промежутке возрастает.

■Пусть $f'(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$. Возьмём произвольные точки $x_1 \in [a,b]$ и $x_2 \in [a,b]$, такие, что $x_2 > x_1$ и докажем, что $f(x_2) > f(x_1)$.

По теореме Лагранжа имеем

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi). \tag{5.7}$$

Поскольку $\xi\in(x_1,x_2)$, то тем более $\xi\in[a,b]$, а значит $f'(\xi)>0$. Но $x_2-x_1>0$, а поэтому из (5.7) следует $f(x_2)-f(x_1)>0$.□

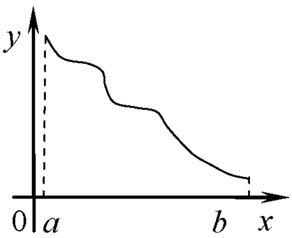


Рис.5.25

Теорема 5.7. Если функция убывает в некотором промежутке и дифференцируема всюду в нём, то её производная в этом промежутке отрицательна и лишь в отдельных точках может обращаться в нуль (рис. 5.25).

Теорема 5.8. Если во всех точках некоторого промежутка производная функции отрицательна, то функция в этом промежутке убывает.

Теоремы 5.6 и 5.7, очевидно, доказываются совершенно аналогично теоремам 5.5 и 5.6.

7. Экстремум фуикции

Если в некоторой точке x_0 функция $f(x)$ принимает значение, наибольшее по сравнению с её значениями в некоторой окрестности этой точки, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, рис. 5.26. Если же для всех x из некоторой окрестности точки x_0 будет $f(x)>f(x_0)$, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум, рис. 5.27.

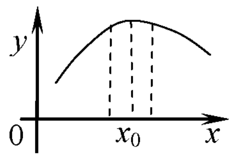


Рис.5.26

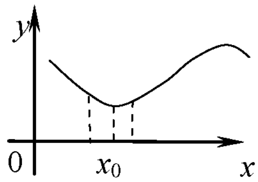


Рис.5.27

Максимум и минимум имеют общее название: экстремум.

Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум. Это значит, что существует такой промежуток, содержащий внутри себя точку x_0, что $f(x_0)$ является наибольшим или наименьшим значением функции $f(x)$ в этом промежутке. Но тогда возможны два случая:

1°. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда, на основании теоремы Ферма, $f'(x_0)=0$.

2°. Функция $f(x)$ в точке x_0 не дифференцируема. В этом случае $f'(x_0)$ не существует.

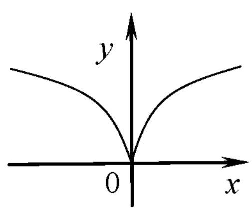


Рис.5.28

Случай 2° иллюстрируется, например, функцией $y=\sqrt[3]{x^2}$, которая в точке $x=0$ имеет минимум (рис. 5.28), но поскольку $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}}$, в этой точке производная не существует.

Итак, можно считать доказанным следующее утверждение (необходимый признак существования экстремума).

Теорема 5.9. Если в данной точке функция имеет экстремум, то её производная в этой точке либо обращается в нуль, либо не существует.

Обратное утверждение неверно, т. е. из равенства нулю производной или из её отсутствия, вообще говоря, не следует наличие экстремума (рис. 5.29).

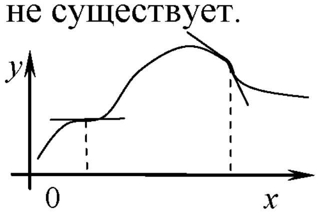


Рис.5.29

Для наличия экстремума функции $f(x)$ в точке x_0 нужно, чтобы при переходе через эту точку производная функции меняла знак: с «+» на «–» в случае максимума и с «–» на «+» в случае минимума (рис. 5.30, 5.31 и рис. 5.32, 5.33 соответственно).

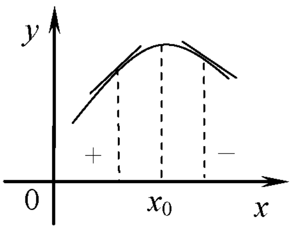


Рис.5.30

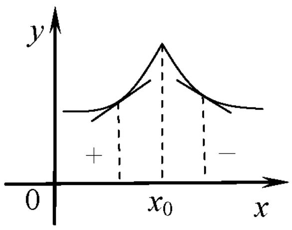


Рис.5.31

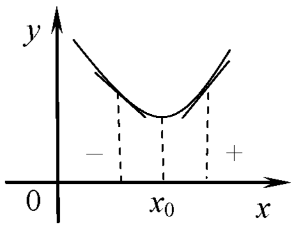


Рис.5.32

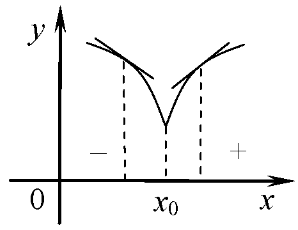


Рис.5.33

Если же при переходе через точку x_0 производная не меняет знака, то экстремума в этой точке нет. Если при этом будет $f'(x_0)=0$, то соответствующую точку M графика функции называют точкой перегиба с горизонтальной касательной, рис. 5.34.

Итак, имеет место

Теорема 5.10. Для того, чтобы функция имела в данной точке экстремум, необходимо и достаточно, чтобы её производная при переходе через эту точку меняла знак.

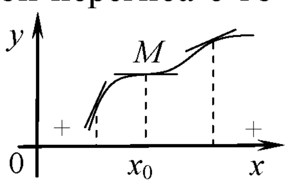


Рис.5.34

Пример 5.5. Исследуем на экстремум функцию $y=\frac{3}{8}x^4-2x^3+3x^2+1$. Имеем

$$y'=\frac{3}{2}x^3-6x^2+6x=\frac{3}{2}x\left(x^2-4x+4\right)=\frac{3}{2}x(x-2)^2.$$

Итак, производная обращается в нуль в двух точках*): $x_1=0$ и $x_2=2$. Это значит, что эти (и, очевидно, только эти) точки подозрительны на экстремум.

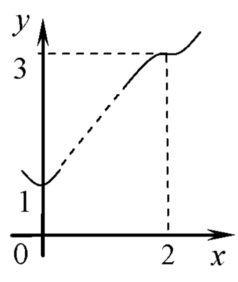


Рис.5.35

Поскольку $(x-2)^2\geq 0$ при всех x, то величина y' при переходе через точку $x=0$ меняет знак с «–» на «+», а значит в точке $x=0$ имеет место минимум (при этом $y(0)=1$). При переходе

*) Точки, в которых производная функции обращается в нуль, называют стационарными точками этой функции.

через точку $x=2$ знак величины y' не меняется, поскольку и слева и справа от этой точки будет $y'>0$. Следовательно, в точке $x=2$ функция не имеет экстремума, рис 5.35.

8. О иаибольшем и иаимеиьшем зиачеииях фуикции иа иромежутке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a,b). Поскольку он является открытым промежутком, то наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ в нём могут и не достигаться. Однако имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.11. Если функция $f(x)$ в интервале (a,b) имеет единственный экстремум, то соответствующее значение функции является либо наибольшим, либо наименьшим значением $f(x)$ в интервале (a,b), в зависимости от того, будет ли этот экстремум максимумом или минимумом.

■Пусть, для определённости, экстремум является максимумом и достигается в точке x_0, рис. 5.36. Предположим, что существует точка $x_1 \in (a,b)$, такая, что $f(x_1) > f(x_0)$. Рассмотрим отрезок $[x_0, x_1] \subset (a,b)$. В силу 2-ой теоремы Вейерштрасса (см. раздел 111), функция $f(x)$ принимает в некоторой точке $x_2 \in [x_0, x_1]$ своё наименьшее на отрезке $[x_0, x_1]$ значение. Очевидно, что точка x_2 не может совпадать ни с точкой x_0, ни, тем более, с точкой x_1. Следовательно, x_2 – внутренняя точка отрезка $[x_0, x_1]$. Но тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум, что противоречит единственности экстремума этой функции в интервале (a,b). Тем самым доказано, что $f(x_0)$ есть наибольшее значение $f(x)$ в интервале (a,b).

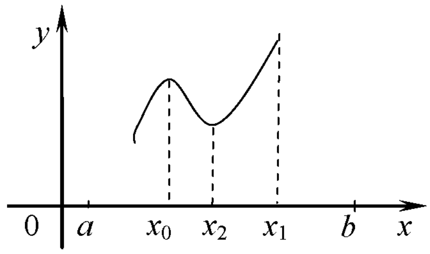


Рис.5.36

Пусть теперь функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. В этом случае функция достигает на этом отрезке и наибольшего и наименьшего значений. Если наибольшее или наименьшее значение достигается во внутренней точке отрезка, то эта точка является соответственно точкой максимума или точкой минимума. Но оно может достигаться и на одном из концов отрезка. Следовательно, для нахождения чисел $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$ и $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$ надо вычислить значения $f(x)$ во всех экстремальных точках отрезка $[a,b]$, а также в точках a и b;

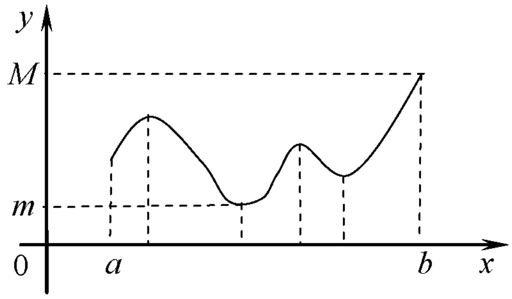


Рис.5.37

наибольшее и наименьшее из всех этих чисел будут соответственно числами M и m (см. рис. 5.37).

Пример 5.6. Найдём наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке $[-4,2]$. Имеем

$$y' = 6x^2 + 6x - 12.$$

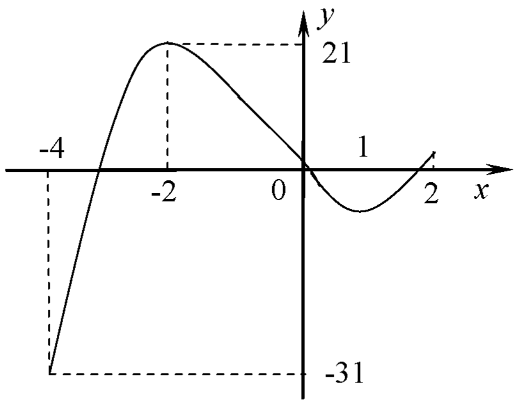


Рис.5.38

Поэтому, полагая $y' = 0$, получим уравнение

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

корни которого: $x_1 = 1,\ x_2 = -2$.

Находим:

$f(1) = -6,\ f(-2) = 21,\ f(-4) = -31,\ f(2) = 5$.

Следовательно,

$$\max_{[-4,2]} f(x) = 21,\ \min_{[-4,2]} f(x) = -31$$

(на рис. 5.38 для удобства на осях Ox и Oy взяты различные масштабы).

Примечание. Конкретизируя ситуацию, рассмотренную в теореме 5.11, укажем отдельные случаи, когда значение функции в стационарной точке заведомо является либо наибольшим, либо наименьшим её значением в заданном промежутке (конечном или бесконечном). Пусть, например, известно, что*)

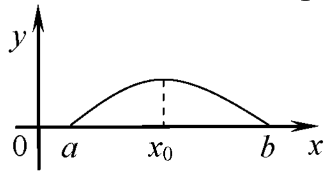


Рис.5.39

1. функция $f(x)$ обращается в нуль на концах промежутка $[a,b]$;

2. $f(x) > 0$ для всех $x \in [a,b]$;

3. всюду внутри промежутка $[a,b]$ функция $f(x)$ дифференцируема;

4. внутри промежутка $[a,b]$ существует единственная стационарная точка x_0 функции $f(x)$.

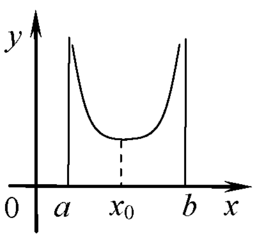


Рис.5.40

Тогда, очевидно, $f(x_0)$ есть наибольшее значение $f(x)$ в промежутке $[a,b]$, рис. 5.39.

Другой аналогичный случай может быть, в частности, таким (рис. 5.40):

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty,\quad \lim_{x \to b-0} f(x) = +\infty;$$

выполняются условия 3 и 4 из предыдущего случая. Тогда

*) Эта и подобная ей ситуация встречаются в большинстве задач прикладного характера на наибольшее и наименьшее значения в промежутке (см. следующий параграф).

$f(x_0)$ есть наименьшее значение $f(x)$ на промежутке $[a,b]$.

9. О решеиии задач иа иаибольшее и иаимеиьшее зиачеиия

На практике часто встречаются задачи следующего рода. Даны две величины, определённым образом связанные между собой. Требуется найти значение одной из них, при котором вторая величина принимает наибольшее или наименьшее значение. Для этого составляют функцию, выражающую вторую величину через первую, и ищут её наибольшее (или наименьшее) значение в определённом промежутке, который диктуется условием задачи.

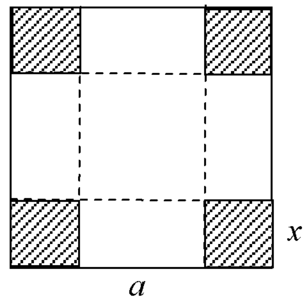


Рис.5.41

Пример 5.7. Из углов квадратного листа со стороной a требуется вырезать одинаковые квадраты, чтобы, согнув лист по пунктирным линиям, получить коробку наибольшей вместимости. Какой должна быть сторона x вырезаемого квадрата?

Легко видеть, что объём коробки равен

$$V(x) = (a-2x)^2 x .$$

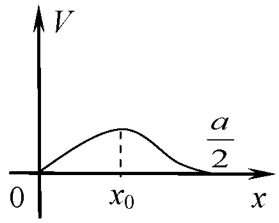


Рис.5.42

Требуется найти то значение $x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$, при котором величина $V(x)$ принимает наибольшее на отрезке $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ значение.

Поскольку $V(0) = V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ и, кроме того, $V(x) > 0 \ \forall x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$, то искомое x есть внутренняя стационарная точка функции $V(x)$ (ср. с рис. 5.39). Имеем

$$V'(x) = \left(a^2 x - 4ax^2 + 4x^3\right)' = a^2 - 8ax + 12x^2 .$$

Поэтому для стационарных точек получим

$$x = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{12} = \frac{4a \pm 2a}{12},$$

т. е. $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{a}{6}$. Очевидно, что x_1, удовлетворяя уравнению $V'(x) = 0$, не является решением задачи, а значит искомое x равно $\frac{a}{6}$.

10. Выиуклость и вогиутость лииий. Точки иерегиба

Кривая является выпуклой, если она лежит ниже любой своей касательной, и вогнутой, если любая её касательная расположена под нею.

Теорема 5.12. Если $f''(x) > 0$ всюду на отрезке $[a,b]$, то линия $y = f(x)$ на этом отрезке вогнута.

■Возьмём произвольное $x_0 \in (a,b)$ и в точке $M(x_0, f(x_0))$ проведём касательную к линии $y = f(x)$, рис. 5.43. Её уравнение:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

или

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

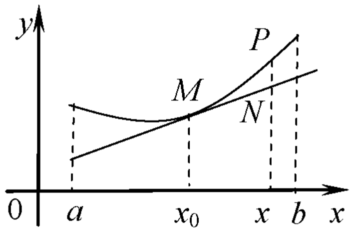


Рис.5.43

Возьмём теперь некоторое $x \in [a,b]$. Пусть, для определённости, $x > x_0$. Имеем

$$y_P - y_N = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0),$$

или, на основании теоремы Лагранжа,

$$y_P - y_N = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0).$$

Ещё раз применяя теорему Лагранжа, получим

$$y_P - y_N = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0). \qquad (5.8)$$

Поскольку $\xi \in (x_0, x)$, а $x > x_0$, то $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$. Далее, $\eta \in (x_0, \xi)$, а значит тем более $\eta \in [a,b]$, так что $f''(\eta) > 0$. Таким образом, $y_P > y_N$, откуда и следует вогнутость линии $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$.□

Доказанная теорема имеет простой геометрический смысл. Условие $f''(x) > 0$ можно переписать так: $[f'(x)]' > 0$, а это значит, что $f'(x)$ на отрезке $[a,b]$ возрастает, а так как $f'(x) = \mathrm{tg}\alpha$, то величина $\mathrm{tg}\alpha$, а значит и угол α, возрастает при возрастании *x*, т. е. касательная становится всё круче, что и свидетельствует о вогнутости линии, рис. 5.44.

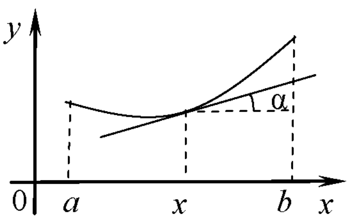


Рис.5.44

Теорема 5.13. Если кривая $y = f(x)$ вогнута на отрезке $[a,b]$, то величина $f''(x)$ на этом отрезке положительна и лишь в отдельных точках может обращаться в нуль.

■Возьмём произвольные числа $x_0 \in [a,b]$ и $x \in [a,b]$, рис. 5.45. Из равенства (5.8) следует, что и в случае $x > x_0$, и в случае $x < x_0$ будет $f''(\eta) > 0$. Пусть теперь $x \to x_0$. Тогда и $\eta \to x_0$, а значит $f''(\eta) \to f''(x_0)$.

Отсюда и из того, что $f''(x)>0$ для всех x, вытекает, что $f''(x_0)\geq 0$, что и требовалось доказать. Действительно, если бы равенство $f''(x)=0$ выполнялось не только в точке x_0, но и в некоторой её $\varepsilon-$окрестности, то, начиная с некоторого x, было бы $\eta\in C_\varepsilon(x_0)$, а значит $f''(\eta)=0$, откуда, в силу (5.8), следовало бы, что $y_P = y_N$, а это противоречило бы предположению о вогнутости линии.□

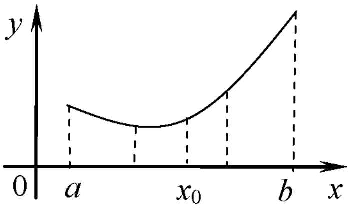


Рис.5.45

Примечание. Исходя из равенства $\lim\limits_{x\to x_0} f''(x)=f''(x_0)$, мы молча предполагали, что функция $f''(x)$ в точке x_0 непрерывна. Это предположение не является обязательным и сделано для упрощения доказательства теоремы 5.13.

Совершенно аналогично доказываются следующие две теоремы.

Теорема 5.14. Если $f''(x)<0$ всюду на отрезке $[a,b]$, то линия $y=f(x)$ на этом отрезке выпукла.

Теорема 5.15. Если кривая $y=f(x)$ выпукла на отрезке $[a,b]$, то величина $f''(x)$ на этом отрезке отрицательна и лишь в отдельных точках может обращаться в нуль.

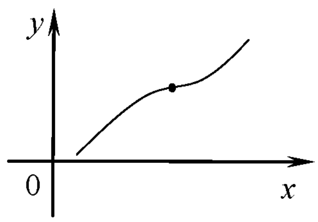


Рис.5.46

Точка кривой, отделяющая её выпуклую часть от вогнутой, называется точкой перегиба этой кривой, рис. 5.46.

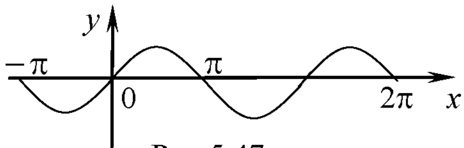


Рис.5.47

Например, линия $y=\sin x$ имеет бесчисленное множество точек перегиба: $(0,0),(\pi,0),(-\pi,0),(2\pi,0),\ldots$, рис. 5.47.

Теорема 5.16. Если точка $M(x_0,y_0)$ есть точка перегиба линии $y=f(x)$, то в точке x_0 величина $f''(x)$ либо равна нулю, либо не существует.

■Действительно, на основании теорем 5.13 и 5.15, величина $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, т.е. меняет знак величина $[f'(x)]'$, а это значит, что в точке x_0 величина $f'(x)$ имеет экстремум. Но тогда, на основании теоремы 5.9, величина $[f'(x)]'=f''(x)$ в точке x_0 либо обращается в нуль, либо не существует.□

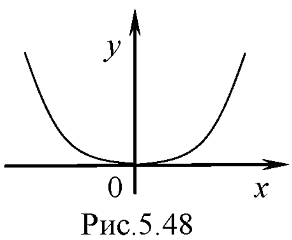


Рис.5.48

Если же величина $f''(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует, то это ещё не свидетельствует о наличии точки перегиба.

Например, пусть $y = x^4$. Тогда $y'' = 12x^2$, т. е. $y''(0) = 0$. Однако в точке $(0,0)$ перегиба нет, т. к. и при $x < 0$, и при $x > 0$ будет $y'' > 0$, т. е. линия всюду вогнута, рис. 5.48.

Таким образом, для установления существования точки перегиба нужно убедиться, что при переходе через данную точку величина $f''(x)$ меняет знак.

Пример 5.8. Исследуем на выпуклость и вогнутость линию $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$. Имеем

$$y' = 3x^2 - 6x + 5,$$

откуда

$$y'' = 6x - 6 = 6(x-1).$$

Отсюда следует, что если $x = 1$, то $y'' = 0$, причём при переходе через точку $x = 1$ величина y'' меняет знак с «–» на «+». Таким образом, в промежутке $(-\infty,1)$ кривая выпукла, а в интервале $(1,+\infty)$ – вогнута. Точка $(1,2)$ является, следовательно, точкой перегиба данной кривой.

11. Второе иравило исследоваиия фуикции иа экстремум

Теорема 5.17. Пусть $f'(x_0) = 0$ и пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производную 2-го порядка, причём $f''(x_0) \neq 0$. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум или минимум, в зависимости от того, будет ли $f''(x_0) < 0$ или $f''(x_0) > 0$.

■Пусть, например, $f''(x_0) > 0$. Перепишем это так

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

а так как $f'(x_0) = 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0. \tag{5.9}$$

В силу леммы о сохранении знака функции, из (5.9) следует, что при достаточно малых $(x - x_0)$ будет и $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$. Поэтому, если $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$, а значит и $f'(x) > 0$. Если же $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$, а значит и $f'(x) < 0$. Таким образом, при переходе через точку x_0 величина $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», так что в этой точке функция $f(x)$ имеет минимум.

Аналогично рассматривается случай, когда $f''(x_0) < 0$.□

Пример 5.9. Возьмём функцию $y = 2x^3 - 3x^2$. Имеем

$$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1),$$

т. е. стационарные точки: $x_1 = 0, x_2 = 1$. Далее,

$$y'' = 12x - 6,$$

а значит

$$y''(0) = -6 < 0, y''(1) = 6 > 0,$$

т. е. в точке $x = 0$ – максимум, а в точке $x = 1$ – минимум (рис. 5.49).

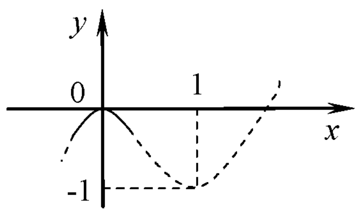


Рис.5.49

Примечание. Теорема 5.17 даёт правило исследования функции на экстремум, более «узкое» по сравнению с теоремой 5.10, так как в точке экстремума даже $f'(x)$ может не существовать, а тогда тем более не существует и $f''(x)$. В подобных случаях можно применять лишь первое правило. Кроме того, второе правило «отказывает» в тех случаях, когда одновременно $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$.

12. Пахождеиие асимитот лииий

Если кривая при её продолжении на бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой, то эта прямая называется асимптотой данной линии.

1°. Горизонтальные асимптоты. Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой кривой $y = f(x)$ (рис. 5.50), если выполняется хотя бы одно из равенств

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b, \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

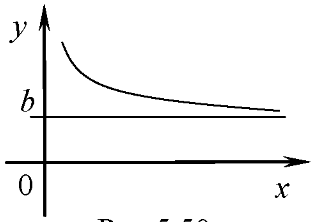


Рис.5.50

Пример 5.10. Поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, то линия $y = \operatorname{arctg} x$ имеет две горизонтальные асимптоты: $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$, рис. 5.51.

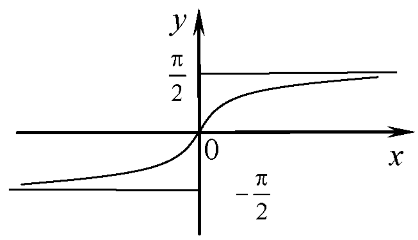


Рис.5.51

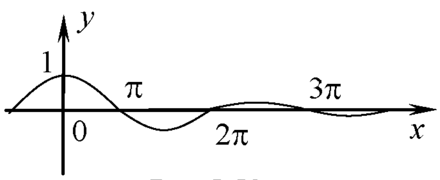


Рис.5.52

Пример 5.11. Ось Ox является горизонтальной асимптотой линии $y = \frac{\sin x}{x}$ (рис. 5.52), поскольку, очевидно,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

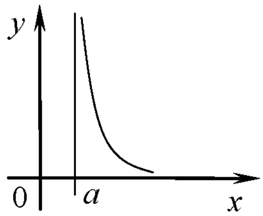


Рис.5.53

2°. Вертикальные асимптоты. Прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой линии $y=f(x)$ (рис. 5.53), если выполняется хотя бы одно из неравенств

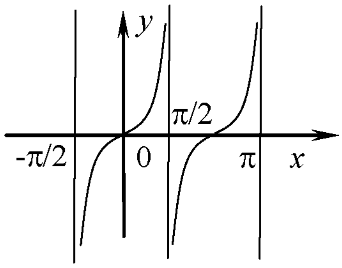


Рис.5.54

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a+0} f(x)=\infty.$$

Например, линия $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 5.54) имеет бесчисленное множество вертикальных асимптот: $x=\pm\frac{\pi}{2},\ x=\pm\frac{3\pi}{2},\ldots$

3°. Наклонные асимптоты. Прямая $y=kx+b\ (k\neq 0)$ является наклонной асимптотой линии $y=f(x)$, если (см. рис. 5.55) $\lim\limits_{x\to\infty} MP=0$, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\left[kx+b-f(x)\right]=0. \tag{5.10}$$

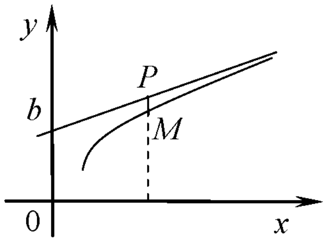


Рис.5.55

Из (5.10) следует, что тем более

$$\lim_{x\to\infty}\left[k+\frac{b}{x}-\frac{f(x)}{x}\right]=0,$$

откуда

$$k=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}\right],$$

т. е.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{5.11}$$

Теперь, когда число k известно, из равенства (5.10) получаем

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]. \tag{5.12}$$

Существование пределов (5.11) и (5.12) есть необходимое и достаточное условие наличия наклонной асимптоты. Существование же одного только предела (5.11) ещё не означает наличия асимптоты, так как может не существовать предел (5.12).

Пример 5.12. Найдём асимптоты линии $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

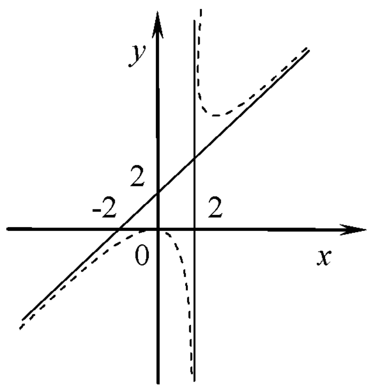


Рис.5.56

Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$, то горизонтальных асимптот нет. Вертикальной асимптотой является, очевидно, линия $x=2$, так как

$$\lim_{x\to 2-0} y = -\infty, \quad \lim_{x\to 2+0} y = +\infty .$$

Далее имеем

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-2} = 1.$$

Итак, если наклонная асимптота существует, то её угловой коэффициент равен 1. Наконец,

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-2} = 2,$$

так что наклонная асимптота действительно имеется, и её уравнение: $y = x + 2$. При этом

$$\frac{x^2}{x-2} - (x+2) = \frac{x^2 - x^2 + 4}{x-2} = \frac{4}{x-2},$$

а значит при $x > 2$ кривая лежит выше наклонной асимптоты, а если $x < 2$, то под нею, рис. 5.56.

Пример 5.13. Возьмём теперь линию $y = x + \sqrt{x}$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty,$$

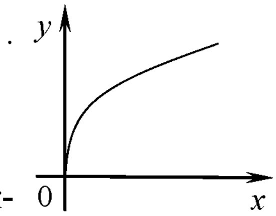


Рис.5.57

т. е. горизонтальная асимптота отсутствует. Далее, функция определена при всех $x \geq 0$, а значит отсутствует и вертикальная асимптота. Наконец,

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x} - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty .$$

Поскольку последний предел не существует, то наклонной асимптоты также нет.

Таким образом, рассматриваемая линия вообще не имеет асимптот, рис. 5.57.

13. Схема и иример иолиого исследоваиия фуикции

Полное исследование функции включает в себя следующие этапы:

1°. Нахождение области определения функции.

2°. Исследование функции на чётность или нечётность, а также на периодичность.

3°. Нахождение корней функции и других характерных точек её графика (если таковые имеются).

4°. Нахождение асимптот графика.

5°. Нахождение экстремумов функции и промежутков её возрастания и убывания.

6°. Нахождение точек перегиба и интервалов выпуклости и вогнутости графика.

7°. Завершение построения графика функции.

Пример 5.14. Исследуем функцию $y=\sqrt[3]{3x^2-x^3}$.

1°. Очевидно, что функция определена на всей числовой оси.

2°. Функция не является ни чётной, ни нечётной (а значит её график соответствующей симметрией не обладает), ни периодической.

3°. Функция обращается в нуль при $x=0$ и при $x=3$.

4°. Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$, то горизонтальная асимптота отсутствует. Отсутствие вертикальной асимптоты следует из того, что функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Наконец,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{3x^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x}=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{3x^2-x^3}+x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(3x^2-x^3\right)+x^3}{\sqrt[3]{\left(3x^2-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{3x^2-x^3}+x^2}=\frac{3}{1-(-1)+1}=1.$$

Итак, существует наклонная асимптота $y=-x+1$.

5°. Имеем

$$y'=\frac{6x-3x^2}{3\sqrt[3]{\left(3x^2-x^3\right)^2}}=\frac{2x-x^2}{\sqrt[3]{\left(3x^2-x^3\right)^2}}=\frac{x(2-x)}{\sqrt[3]{x^4(3-x)^2}}.$$

Отсюда следует, что имеется одна стационарная точка: $x=2$, и, кроме того, в точках $x=0$ и $x=3$ производная не существует. Все эти точки подозрительны на экстремум.

Исследуем сначала точку $x=0$. Имеем

$$\lim_{x\to0}y'=\lim_{x\to0}\frac{O^*(x)}{O^*\left(x^{4/3}\right)}=\infty.$$

При этом, как нетрудно видеть,

$$\lim_{x\to-0}y'=-\infty,\ \lim_{x\to+0}y'=+\infty.$$

При переходе через точку $x=0$ производная меняет знак с «–» на «+». Следовательно, в точке $x=0$ – минимум, причём $y(0)=0$.

Поскольку поведение функции вблизи точки $x=0$ уже исследовано, то теперь в выражении для y' можно произвести сокращение на x. Получим

$$y' = \frac{2-x}{\sqrt[3]{x(3-x)^2}}. \tag{5.13}$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 3-0} y' = -\infty, \ \lim_{x\to 3+0} y' = -\infty,$$

т. е. при переходе через точку $x = 3$ производная не меняет знака, т. е. в этой точке экстремума нет, а есть перегиб с вертикальной касательной.

С целью исследования точки $x = 2$ найдём предварительно y''. Из (5.13) имеем

$$y' = \frac{2-x}{\sqrt[3]{9x-6x^2+x^3}},$$

а значит

$$y'' = \frac{-\sqrt[3]{9x-6x^2+x^3} - (2-x)\dfrac{9-12x+3x^2}{3\sqrt[3]{\left(9x-6x^2+x^3\right)^2}}}{\sqrt[3]{\left(9x-6x^2+x^3\right)^2}} = \frac{-\left(9x-6x^2+x^3\right)-(2-x)\left(3-4x+x^2\right)}{\sqrt[3]{\left(9x-6x^2+x^3\right)^4}} =$$

$$= -\frac{9x-6x^2+x^3+6-8x+2x^2-3x+4x^2-x^3}{\sqrt[3]{\left(9x-6x^2+x^3\right)^4}} = \frac{2x-6}{\sqrt[3]{\left(9x-6x^2+x^3\right)^4}} = \frac{2(x-3)}{\sqrt[3]{x^4(3-x)^8}}.$$

Отсюда следует, что $y''(2) < 0$, а значит в точке $x = 2$ функция имеет максимум; при этом $y(2) = \sqrt[3]{4}$.

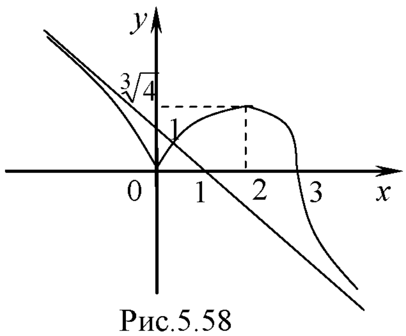


Рис.5.58

6°. В точке $x = 3$ величина y'' не существует, но мы уже видели, что соответствующая точка $(3,0)$ является точкой перегиба. Если же $x \neq 3$, то

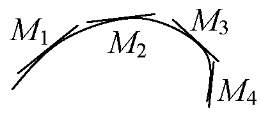
$$y'' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^4(x-3)^5}},$$

т. е. величина y'' в нуль нигде не обращается, а значит других точек перегиба нет.

7°. На основании всех полученных сведений строим график функции, рис. 5.58.

14.Кривизиа илоской кривой

Очевидно, чем сильнее искривлена кривая, тем быстрее вращается касательная к ней при движении точки M по кривой.



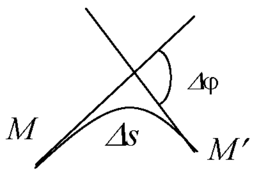
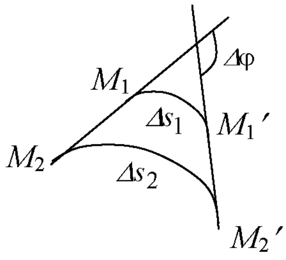


Рис.5.59

Угол $\Delta\varphi$ между касательными, проведёнными в начале и в конце дуги MM', называют углом смежности этой дуги, рис. 5.59. Этот угол сам по себе ещё не характеризует искривлённости дуги MM', так как существенна и длина того участка пути, по которому касательная повернулась на этот угол. Поэтому нужно рассматривать отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$. Оно называется средней кривизной дуги $\overset{\smile}{MM'}$ (ср. со средней скоростью точки за данный промежуток времени).



Пусть теперь $\Delta s \to 0$. Предел

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

называют кривизной данной дуги в точке M. Очевидно,

$$K = \frac{d\varphi}{ds}. \tag{5.14}$$

Ниже это определение будет несколько уточнено.

1°. Пусть кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$. Перепишем (5.14) так

$$K = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}.$$

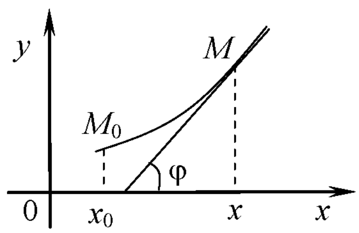


Рис.5.60

Поскольку $\operatorname{tg}\varphi = y'$, т. е. $\varphi = \operatorname{arctg} y'$, то

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}.$$

Кроме того, в главе Vl1 будет показано, что

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}. \tag{5.15}$$

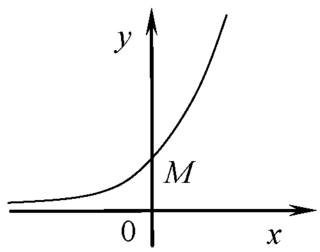
Поэтому получаем

$$K = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}.$$

Если кривая – вогнутая, то $y'' \le 0$, а K, по определению, есть неотрицательная величина (как скорость вращения касательной, отнесённая к единице длины дуги). Поэтому в общем случае пишут так:

$$K = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}. \tag{5.16}$$

Это значит, что фактическим определением кривизны является не равенство (5.14), а равенство $K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$.

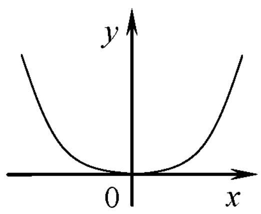


Пример 5.15. Найдём кривизну линии $y = e^x$ в точке $M(0,1)$. Имеем

$$K(x) = \frac{e^x}{\left(1 + e^{2x}\right)^{3/2}}.$$

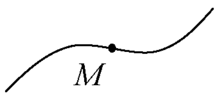
Отсюда

$$K(M) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$



Пример 5.16. Пусть $y = kx + b$. Тогда $y' = k$, $y'' \equiv 0$, а значит и $K \equiv 0$, т. е. кривизна прямой линии в любой её точке, как и естественно было ожидать, равна нулю.

Пример 5.17. Пусть $y = x^4$. Тогда $y'' = 12x^2$, т. е. $y''(0) = 0$, а значит и $K(0) = 0$, хотя линия в окрестности точки 0 и не является прямой.



Пример 5.18. Вывод предыдущего примера относится также к тем точкам перегиба, которые связаны с обращением величины y'' в нуль.

2°. Пусть кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Тогда

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ y''_{xx} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Подставляя это в (5.16), находим

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{\left\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\right\}^{3/2}}.$$

15. Радиус кривизны и центр кривизны

Возьмём сначала окружность радиуса R. Для её кривизны в произвольной точке M имеем

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{R\Delta\varphi}=\frac{1}{R}.$$

Итак, кривизна окружности во всех её точках одинакова и обратна её радиусу, а значит и наоборот

$$R=\frac{1}{K}.$$

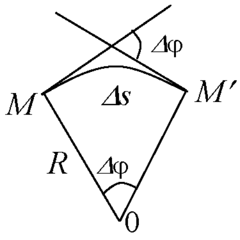


Рис.5.61

В связи с этим результатом величину $R=\dfrac{1}{K}$ для произвольной кривой называют радиусом кривизны этой кривой в данной точке, рис. 5.61. Из (5.16) следует тогда, что

$$R=\frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}.$$

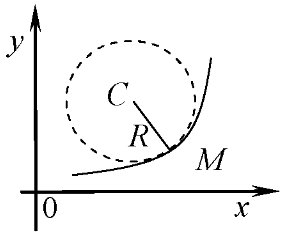


Рис.5.62

Проведём в точке M нормаль к кривой и отложим на ней в сторону вогнутости отрезок $MC=R$. Полученная таким способом точка C называется центром кривизны кривой в точке M, а окружность радиуса R с центром в точке C называют окружностью кривизны (или кругом кривизны) в точке M, рис. 5.62. Очевидно, что малый участок кривой вблизи точки M можно приближённо рассматривать как дугу соответствующей окружности кривизны.

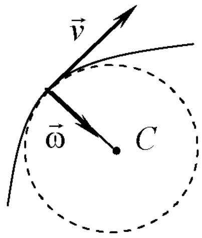


Рис.5.63

Последнее обстоятельство используется в механике. Предположим, что точка движется со скоростью $v=const$ по некоторой кривой, рис. 5.63. Тогда в каждый момент можно считать, что эта точка движется не по своей траектории, а по соответствующей окружности кривизны точки траектории. Поэтому её ускорение в каждый данный момент направлено по нормали к траектории в направлении центра кривизны (в связи с чем его называют нормальным, или центробежным), а его величина равна

$$\omega=\frac{v^2}{R},$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке.

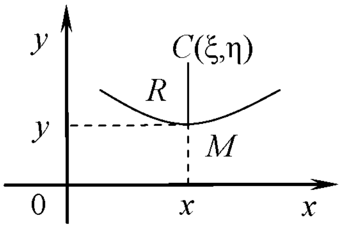


Рис.5.64

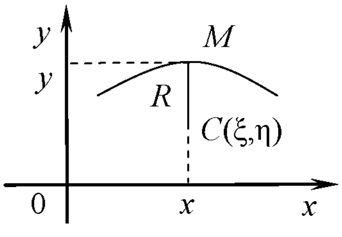
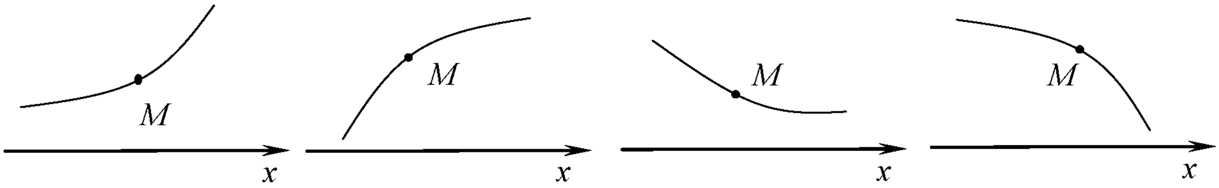


Рис.5.65

Выведем формулы для координат центра кривизны. Заметим, что если при данном x будет $y''=0$, то для соответствующей точки $M(x,y)$ кривой будет $R=\infty$, т. е. центр кривой уходит на бесконечность.

Далее, если в точке $M(x,y)$ будет $y'=0$, то, очевидно,



Сл.1. $y'>0,\ y''>0$ Сл.2. $y'>0,\ y''<0$ Сл.3. $y'<0,\ y''>0$ Сл.4. $y'<0,\ y''<0$

Рис.5.66

$\xi=x, \eta=y+R$ при $y''>0$ (рис. 5.64) или $\xi=x, \eta=y-R$ при $y''<0$ (рис. 5.65).

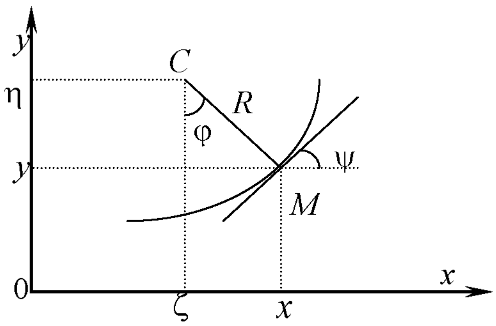


Рис.5.67

Оставляя в стороне все эти тривиальные случаи, отметим, что
остальные случаи разбиваются на 4 группы:

Обратимся к случаю 1. Имеем (см. рис. 5.67)

$$\xi = x - R\sin\varphi,\ \eta = y + R\cos\varphi. \qquad (5.17)$$

Но поскольку $\operatorname{tg}\varphi = y'$, то

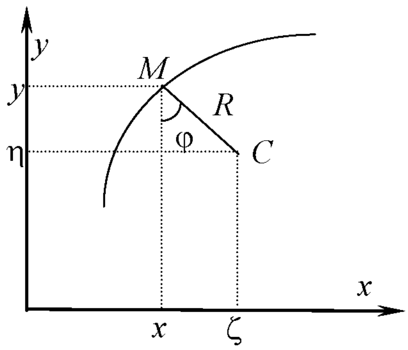


Рис.5.68

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Далее, в этом случае $R=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, а поэтому окончательно для случая 1 имеем

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''},\ \ \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \qquad (5.18)$$

Легко видеть, что в случае 2 (рис. 5.68) имеют место те же формулы. Аналогично проверяется их справедливость для случаев 3 и 4.

16. Эволюта, эвольвента н нх свойства

Геометрическое место центров кривизны данной кривой называется эволютой этой кривой. Если кривая (A) является эволютой кривой (B), то кривая (B) называется эвольвентой (или развёрткой) кривой (A), рис. 5.69.

Пусть кривая имеет уравнение $y = f(x)$. Тогда из (5.18) следует, что для любой точки эволюты будет

$$\xi = x - \frac{f'(x)\left\{1 + [f'(x)]^2\right\}}{f''(x)},$$

$$\eta = f(x) + \frac{1 + [f'(x)]^2}{f''(x)}.$$

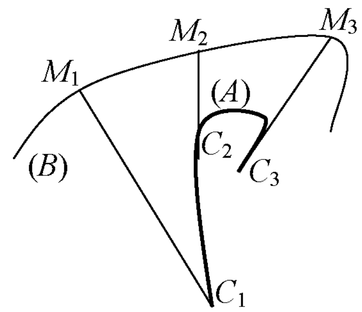


Рис.5.69

Это – параметрические уравнения эволюты (роль параметра играет x).

Прнмер 5.19. Найдём эволюту параболы $y = x^2$. Имеем

$$\xi = x - \frac{2x\left(1 + 4x^2\right)}{2},$$

$$\eta = x^2 + \frac{1 + 4x^2}{2},$$

т. е.

$$\xi = -4x,^3$$

$$\eta = 3x^2 + \frac{1}{2}.$$

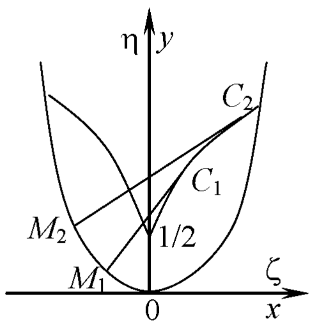


Рис.5.70

Исключая параметр x, находим

$$x = -\sqrt[3]{\frac{\xi}{4}}, \quad \eta = \frac{3}{\sqrt[3]{16}}\xi^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}.$$

Это – полукубическая парабола, рис. 5.70.

Теорема 5.18. Нормаль кривой является касательной к её эволюте в соответствующем центре кривизны.

■Проведём доказательство для случая 1 (см. рис. 5.66). Из равенства (5.17) имеем

$$d\xi = dx - dR\sin\varphi - R\cos\varphi d\varphi, \; d\eta = dy + dR\cos\varphi - R\sin\varphi d\varphi. \qquad (5.19)$$

Далее, формула (5.15) даёт:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \cos\varphi,$$

а значит,

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\varphi = \sin\varphi.$$

Поэтому

$$R\cos\varphi d\varphi = \frac{ds}{d\varphi}\cdot\frac{dx}{ds}d\varphi = dx,\quad R\sin\varphi d\varphi = \frac{ds}{d\varphi}\cdot\frac{dy}{ds}d\varphi = dy.$$

В связи с этим, равенства (5.19) перепишутся так:

$$d\xi = dx - dR\sin\varphi - dx,\quad d\eta = dy + dR\cos\varphi - dy,$$

т. е.

$$d\xi = -dR\sin\varphi,\ d\eta = dR\cos\varphi. \tag{5.20}$$

Отсюда

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\operatorname{ctg}\varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi},$$

т. е.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

откуда и следует утверждение теоремы.□

Легко проверить, что в случаях 2-4 доказательство проводится совершенно аналогично.

Теорема 5.19. Если на некотором участке кривой её радиус кривизны изменяется монотонно, то приращение дуги эволюты этой кривой равно изменению радиуса кривизны кривой на данном участке.

■Пусть, для определённости, величина R на данном участке M_1M_2 возрастает, рис. 5.71. Докажем, что $\overset{\smile}{C_1C_2} = M_2C_2 - M_1C_1$.

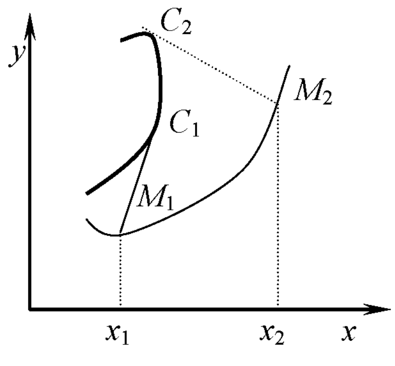


Рис.5.71

На основании формулы (5.15) имеем для длины дуги эволюты (отсчитываемой от некоторой точки)

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2},$$

откуда $d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2,$

или, в силу (5.20)

$$d\sigma^2 = dR^2,$$

т. е.

$$d\sigma = \pm dR,$$

а значит,

$$\frac{d\sigma}{dx} = \pm\frac{dR}{dx}. \tag{5.21}$$

Применим к функциям $\sigma(x)$ и $R(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ теорему Коши:

$$\frac{\sigma(x_2) - \sigma(x_1)}{R(x_2) - R(x_1)} = \frac{\sigma'_x(\tau)}{R'_x(\tau)}.$$

На основании (5.21) получаем:

$$\frac{\sigma(x_2)-\sigma(x_1)}{R(x_2)-R(x_1)}=\pm 1,$$

а значит,

$$\sigma(x_2)-\sigma(x_1)=\left|R(x_2)-R(x_1)\right|,$$

что и требовалось доказать.□

Из доказанной теоремы вытекает простое правило механического построения эвольвенты. Пусть гибкая линейка согнута по форме эволюты C_0C_5 (рис. 5.72). Предположим, что нерастяжимая нить, одним концом укрепленная в точке C_0, огибает эту линейку. Если мы будем эту нить развертывать, оставляя ее все время натянутой, то конец нити опишет кривую M_5M_0 – эвольвенту. Отсюда происходит и название «эвольвента» – развертка. Отсюда, в свою очередь, следует, что всякая кривая имеет бесчисленное множество эвольвент.

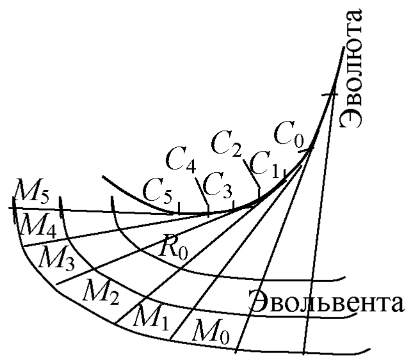


Рис.5.72

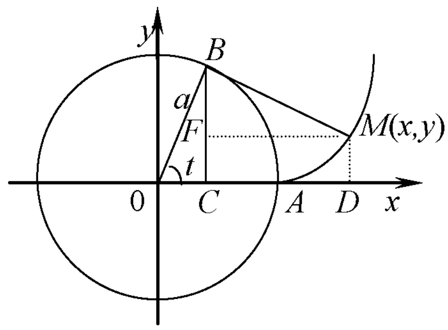


Рис.5.73

Прнмер 5.20. Возьмём окружность $x^2+y^2=a^2$ и найдём ту её эвольвенту, которая выходит из точки $A(a,0)$, рис. 5.73. Имеем

$$x_M=OC+CD=a\cos t+BM\sin t=a\cos t+\overset{\smile}{AB}\sin t=a\cos t+at\sin t;$$

$$y_M=BC-BF=a\sin t-BM\cos t=a\sin t-at\cos t.$$

Итак, параметрические уравнения искомой эвольвенты:

$$x=a(\cos t+t\sin t),$$

$$y=a(\sin t-t\cos t).$$

17. Правнло Лоннталя раскрытня неонределённостей внда $\frac{0}{0}$

Теорема 5.20. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ обращаются в нуль в точке $x=a$, и в некоторой окрестности этой точки удовлетворяет условиям теоремы Коши. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, и оба предела равны между собой.

■Пусть $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$, где A – некоторое число (или $A=\infty$). Требуется доказать, что тогда и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=A$.

Возьмём произвольное x, близкое к a, и применим к отрезку $[a,x]$ теорему Коши. Получим

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

А так как по условию $f(a)=\varphi(a)=0$, то

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{5.22}$$

Пусть $x\to a$. Тогда и $\xi\to a$ (рис. 5.74), а значит $\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\to A$. Отсюда и из (5.22) следует, что

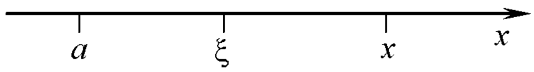


Рис.5.74

$$(x\to a)\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\to A\right),$$

что и требовалось доказать.□

Доказанное равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{5.23}$$

выражает собою правило Лопиталя, удобное для раскрытия неопределённостей вида $\dfrac{0}{0}$.

При доказательстве теоремы 5.20 предполагалось, что a – конечное число. Если же $x\to\infty$, то приведенное доказательство неприменимо. Докажем, что, тем не менее и в данном случае

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

■Положим $x=\dfrac{1}{t}$, где t – новая переменная. Тогда $(x\to\infty)\Rightarrow(t\to 0)$, и, применяя правило (3.13), а также уже доказанное равенство (5.23), получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

что и требовалось доказать.□

Прнмер 5.21. Вычислим предел $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$. Непосредственная подстановка даёт $A=\dfrac{0}{0}$, выполнение условий теоремы 5.20 очевидно, а значит, можно применить правило Лопиталя. Получаем

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{c^x\ln c-d^x\ln d}=\frac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d}=\frac{\ln\frac{a}{b}}{\ln\frac{c}{d}}.$$

Прнмер 5.22. Аналогично

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{-\dfrac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}=2\lim_{x\to\pi}\sin^2\frac{x}{2}=2.$$

Прнмер 5.23. Применяя правило Лопиталя (5.23), имеем

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2\cos^2 x}.$$

Поскольку вновь получена неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$, то снова применим правило Лопиталя. Получим

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{6x\cos^2 x-3x^2 2\cos x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x}{2(x\cos x-x^2\sin x)}.$$

При последующем применении правила Лопиталя получим в знаменателе ещё более громоздкое выражение и т. д. Итак, применять правило Лопиталя в чистом виде здесь (как и во многих других примерах) нецелесообразно. Однако, заметив, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x=1$, получим

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{6x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

Примечание. В примерах 5.21-5.23 можно вообще обойтись без правила Лопиталя, а использовать только элементарные приёмы вычисления пределов, основанные на известных соотношениях эквивалентности. Например, в примере 5.23 имеем

$$A=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Вообще же при раскрытии неопределённостей следует разумно сочетать правило Лопиталя и элементарные приёмы вычисления пределов. Приведём примеры, когда одними лишь элементарными приёмами обойтись вообще нельзя.

Прнмер 5.24.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x^2}{2}}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

Прнмер 5.25. Вычислим предел

$$A=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Arsh}2x-2\operatorname{Arsh}x}{x^3}.$$

Вначале применяем правило Лопиталя:

$$A=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{1+4x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+4x^2}}{x^2\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}},$$

а так как $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{1+4x^2}=1,\ \lim\limits_{x\to0}\sqrt{1+x^2}=1$, то

$$A=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+4x^2}}{x^2}.$$

Дальше уже проще воспользоваться тем, что

$$(\alpha\to0)\Rightarrow\left(\sqrt[n]{1+\alpha}-1\sim\frac{\alpha}{n}\right).$$

Получим

$$A=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)-\left(\sqrt{1+4x^2}-1\right)}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{4x^2}{2}}{x^2}=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)=-1.$$

Сделаем ещё одно существенное замечание.

Прнмер 5.26. Имеем на основании правила Лопиталя

$$\lim_{x\to1}\frac{2x+1}{x^2+3}=\lim_{x\to1}\frac{2}{2x}=1.$$

Здесь правило Лопиталя даёт заведомо неверный результат, так как неопределённость здесь отсутствует, и непосредственная подстановка даёт

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x^2+3}=\frac{3}{4}.$$

В данном случае равенства $f(a)=\varphi(a)=0$ не выполнены, т. е. не выполнены условия теоремы 5.20.

Итак, прежде чем применять правило Лопиталя, необходимо убедиться в наличии неопределённости.

18. Раскрытне неонределённостей внда $\frac{\infty}{\infty}$ но нравнлу Лоннталя

Теорема 5.21. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x=a$, кроме самой этой точки, причём всюду в этой окрестности будет $\varphi'(x)\neq 0$; пусть, далее, при $x\to a$ будет $f(x)\to\infty$ и $\varphi(x)\to\infty$. Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, и оба предела равны между собой.

■Предположим, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A. \tag{5.24}$$

Докажем, что тогда и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A. \tag{5.25}$$

Возьмём вблизи точки $x=a$ две точки: $x=x_1$ и $x=x_2$, так, чтобы было $x_1<x_2<a$, рис. 5.75. На основании теоремы Коши имеем

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \tag{5.26}$$

где $\xi\in(x_1,x_2)$.

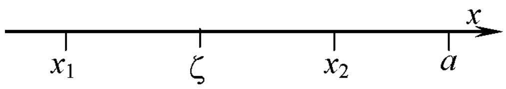


Рис.5.75

Из равенства (5.24) следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что

$$\left(|x-a|<\delta\right)\Rightarrow\left(\left|\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}-A\right|<\varepsilon\right).$$

Будем считать, что $x_1\in C_\delta(a)$. Тогда и $\xi\in C_\delta(a)$, откуда следует, что $\left|\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}-A\right|<\varepsilon$, а значит, в силу (5.26),

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}-A\right|<\varepsilon,$$

т. е.

$$A-\varepsilon<\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}<A+\varepsilon,$$

или

$$A-\varepsilon<\frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}}{1-\dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}}<A+\varepsilon. \qquad (5.27)$$

Далее, поскольку $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, то при $x_1=const$ будет

$$\lim_{x_2\to a}\frac{1-\dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}}=1.$$

Следовательно, существует такое $\delta_1(\varepsilon)>0$, что

$$\left(|x_2-a|<\delta_1\right)\Rightarrow\left(\left|\frac{1-\dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}}-1\right|<\varepsilon\right),$$

т. е.

$$\left(|x_2-a|<\delta_1\right)\Rightarrow\left(1-\varepsilon<\frac{1-\dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}}<1+\varepsilon\right). \qquad (5.28)$$

Пусть $\delta_2=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда, перемножая почленно неравенства (5.27) и (5.28) (это возможно, поскольку члены в неравенстве (5.28) положительны), получим, что

$$(|x_2-a|<\delta_2)\Rightarrow\left((A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon)\right),$$

т. е.

$$\left(|x_2-a|<\delta_2\right)\Rightarrow\left(A-\left(\varepsilon+A\varepsilon-\varepsilon^2\right)<\frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)}<A+\left(\varepsilon+A\varepsilon+\varepsilon^2\right)\right).$$

Поскольку ε можно взять сколь угодно малым, то

$$\lim_{x_2 \to a} \frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)} = A.$$

Заменяя здесь x_2 на x, получим

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A. \tag{5.29}$$

Взяв теперь точки x_1 и x_2 так, чтобы было $a < x_2 < x_1$, точно так же докажем, что и

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A.$$

Отсюда и из (5.29) и следует равенство (5.25).□

Примечание 1. Доказательство теоремы 5.21 содержало немало деталей чисто технического характера, за которыми могла скрываться сущность доказательства. Поэтому приведём сокращённый вариант этого доказательства.

■Возьмём некоторое x_1, близкое к a, а между a и x_1 – произвольное x_2 (рис. 5.75).

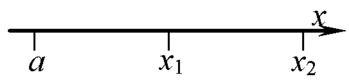


Рис.5.76

Тогда

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

или

$$\frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)} \cdot \frac{\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)} - 1}{\dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} - 1} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

т. е.

$$\frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)} = \frac{1 - \dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}}{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}} \cdot \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{5.30}$$

Взяв x_2 сколь угодно близким к a и не меняя x_1, мы сделаем величины $\dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}$ и $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}$ сколь угодно малыми, т.е. сделаем первый множитель справа в (5.30) сколь угодно близким к единице. Беря теперь x_1 сколь угодно близким к a, мы сделаем и ξ сколь угодно близким к a, так что

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

что и доказывает “правостороннюю” часть теоремы.□

Примечание 2. При доказательстве предполагалось, что $A<\infty$. Пусть теперь $A=\infty$, т.е. пусть $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi'(x)}{f'(x)}=0<\infty$, причём в некоторой окрестности точки a будет $f'(x)\neq 0$ (поскольку в противном случае при условии, что $\varphi'(x)\neq 0$, не было бы $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}\to\infty$). Поэтому из уже доказанного следует, что

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)},$$

а значит,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Примечание 3. Так же, как и в случае неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$, легко убедиться в справедливости правила Лопиталя и для тех случаев, когда $x\to\infty$.

Прнмер 5.27. Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^n}$, где $a>1$, а n – натуральное число. Непосредственная подстановка даёт неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применяя n раз правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^2}{n(n-1)x^{n-2}}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^n}{n!}=+\infty.$$

Очевидно, что и при любом (не обязательно целом) c также будет

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^c}=+\infty.$$

Действительно, пусть n – натуральное число, такое, что $c<n$. Тогда $x^c=x^n$, т. е. $\dfrac{a^x}{x^c}>\dfrac{a^x}{x^n}$, а так как $\dfrac{a^x}{x^n}\to+\infty$ при $x\to+\infty$, то тем более

$$\frac{a^x}{x^c}\to+\infty.$$

Итак, показательная функция с любым основанием $a>1$ растёт при $x\to+\infty$ быстрее любой степенной функции со сколь угодно большим показателем.

Прнмер 5.28. Аналогично при любом $c > 0$ имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^c} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{cx^{c-1}} = \frac{1}{c} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^c} = 0,$$

т. е. логарифмическая функция при $x \to +\infty$ растёт медленнее любой степенной функции со сколь угодно малым положительным показателем.

Прнмер 5.29. Имеем

$$\lim_{x\to+0} x \ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} (-x) = 0.$$

Прнмер 5.30. Правило Лопиталя даёт

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}.$$

Последний предел не существует, в то время как исходный предел существует и, очевидно, равен 1. Но противоречия с правилом Лопиталя здесь нет, так как оно утверждает лишь, что если предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ существует, то существует и равен ему предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, но этот последний предел может существовать и без существования первого.

19. Раскрытне показательно-стененных неонределённостей

Пусть требуется вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ в одном из следующих трёх случаев:

1 . $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ (неопределённость типа 1^∞, уже рассматривавшаяся в главе 3);

2 . $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ (неопределённость вида 0^0);

3 . $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ (неопределённость вида ∞^0).

Во всех случаях поступаем одинаково. Обозначаем $[f(x)]^{\varphi(x)} = y$. Тогда $\ln(y) = \varphi(x) \cdot \ln f(x)$, а значит

$$\lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} \varphi(x) \ln f(x).$$

Легко видеть, что во всех трёх случаях справа имеем неопределённость вида $0 \cdot \infty$, которую можно, следовательно, привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Раскрывая эту неопределённость, например, по правилу Лопиталя, получим

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) \ln f(x) = A,$$

где A – некоторое число, а значит и $\lim_{x \to a} \ln y = A$, т. е. $\ln \lim_{x \to a} y = A$, откуда для искомого предела имеем

$$\lim_{x \to a} y = e^{A}.$$

Прнмер 5.31. Вычислим $\lim_{x \to 0} (e^{-x} + 3x)^{\frac{1}{x}}$. Непосредственная подстановка даёт неопределённость вида 1^{∞}. Полагаем $y = (e^{-x} + 3x)^{\frac{1}{x}}$. Тогда

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln(e^{-x} + 3x),$$

а значит,

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(e^{-x} + 3x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-e^{-x} + 3}{e^{-x} + 3x}}{1} = \frac{-1+3}{1} = 2,$$

откуда

$$\lim_{x \to 0} y = e^{2}.$$

20. Прнблнжённое вычнсленне корней уравненнй методом хорд н касательных

Пусть требуется решить уравнение

$$f(x) = 0, \qquad (5.31)$$

где $f(x)$ – произвольная функция. Геометрически решение такого уравнения означает нахождение точек пересечения линии $y = f(x)$ с осью Ox, рис. 5.77.

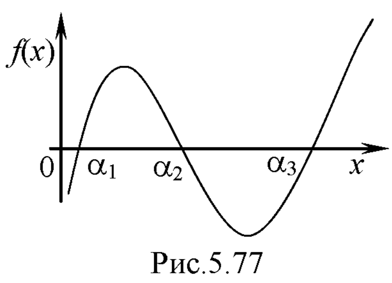


Рис.5.77

В связи с уравнением (5.31) могут возникнуть две следующие задачи.

1 . Определение числа всех корней и выяснение их примерного расположения.

2 . Нахождение одного или нескольких корней с данной степенью точности.

Одним из способов решения первой задачи является графический способ. Проиллюстрируем его на конкретном уравнении.

Прнмер 5.32. Возьмём уравнение $e^x + x = 0$. Перепишем его так:

$$e^x = -x .$$

Строим линии $y = e^x$ и $y = -x$. Они имеют единственную точку пересечения, рис. 5.78. Следовательно, данное уравнение имеет один единственный корень α, лежащий, как легко видеть, в интервале $(-1,0)$.

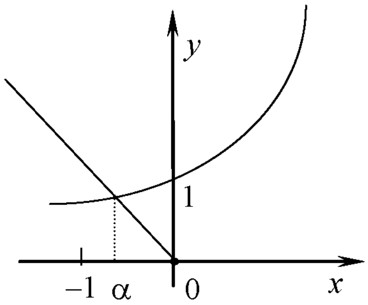


Рис.5.78

Возвратимся к уравнению общего вида (5.31). Пусть $[a,b]$ – такой отрезок, что $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, рис. 5.79. Тогда, если функция $f(x)$ непрерывна на данном отрезке, то, в силу 1-й теоремы Больцано–Коши, в интервале (a,b) уравнение (5.31) имеет по крайней мере один корень.

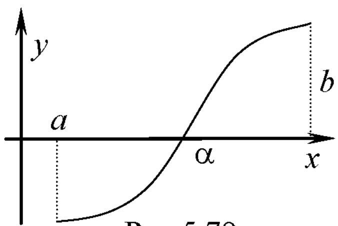


Рис.5.79

Однако, корней в интервале (a,b) может быть несколько, рис. 5.80. Гарантировать единственность корня можно, в частности, тогда, когда всюду в интервале (a,b) функция $f(x)$ монотонна, т. е. если величина $f'(x)$ не меняет знака на отрезке $[a,b]$.

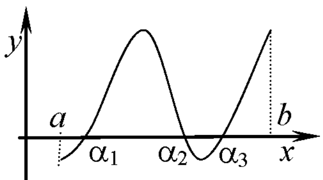


Рис.5.80

Корень уравнения называется изолированным, если известен интервал, в котором он лежит, и если известно, что других корней уравнения в этом интервале нет.

Очевидно, чем меньше интервал изоляции, тем точнее известен корень. Сузить интервал изоляции можно, например, методом проб. Проиллюстрируем этот приём на конкретном уравнении.

Прнмер 5.33. Возьмём уравнение

$$x^3 + 2x - 2 = 0 . \qquad (5.32)$$

Имеем

$$f(0) = -2 < 0, \qquad f(1) = 1 > 0,$$

т. е. в интервале $(0,1)$ имеется по крайней мере один корень.

В то же время

$$f'(x) = 3x^2 + 2,$$

т. е. $f'(x) > 0\ \forall x$. Следовательно, уравнение (5.32) имеет один единственный вещественный корень, и он лежит в интервале $(0,1)$.

Возьмём в этом интервале произвольную точку, например, $x = \frac{1}{2}$.

Имеем

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{8} < 0 .$$

Следовательно, корень расположен в интервале $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Положим теперь $x = 0{,}7$. Имеем

$$f(0{,}7) = 0{,}343 + 1{,}4 - 2 = -0{,}257 < 0 ,$$

т. е. корень лежит в интервале $(0{,}7;1)$.

Взяв теперь $x = 0{,}8$ и учитывая, что

$$f(0{,}8) = 0{,}512 + 1{,}6 - 2 = 0{,}112 > 0 ,$$

заключаем, что искомый корень находится в интервале $(0{,}7;0{,}8)$, рис. 5.81.

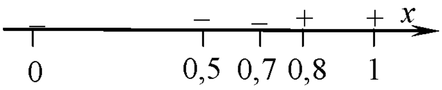


Рис.5.81

Продолжая этот процесс, можно найти корень с любой точностью. Однако описанный метод проб всё же весьма примитивен ввиду случайности выбора точек деления интервала изоляции, что приводит к весьма медленному сужению этого интервала.

Пусть дано уравнение (5.31) и пусть (a,b) – интервал изоляции его корня. При помощи метода проб этот интервал всегда можно сузить настолько, что в нём не будет ни экстремумов функции $f(x)$, ни точек перегиба её графика, т. е. $f'(x)$ в этом интервале не будет обращаться в нуль, а $f''(x)$ не будет менять в нём знака, рис. 5.82.

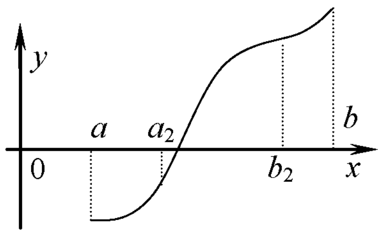
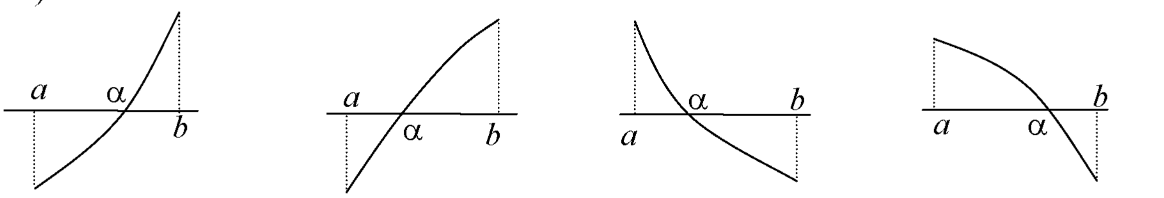


Рис.5.82

Будем считать, что это не имеет места с самого начала (рис. 5.83-5.86):



1. $f'(x) > 0, f''(x) \geq 0$ Рис.5.83

2. $f'(x) > 0, f''(x) \leq 0$ Рис.5.84

3. $f'(x) < 0, f''(x) \geq 0$ Рис.5.85

4. $f'(x) < 0, f''(x) \leq 0$ Рис.5.86

Рассмотрим сначала случай 1 (рис. 5.83). Применим для нахождения корня α метод, называемый методом хорд и касательных. Проведём хорду AB, рис. 5.87. Её уравнение:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} .$$

Положим здесь $y = 0$. Получим

$$-\frac{f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1' - a}{b - a},$$

откуда

$$x_1' - a = -\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)},$$

а значит,

$$x_1' = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{5.33}$$

Проведём теперь касательную в точке B, рис. 5.87. Её уравнение

$$y - f(b) = f'(b)(x-b).$$

Положив здесь $y=0$, получим

$$-f(b) = f'(b)(x_1''-b),$$

откуда

$$x_1'' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{5.34}$$

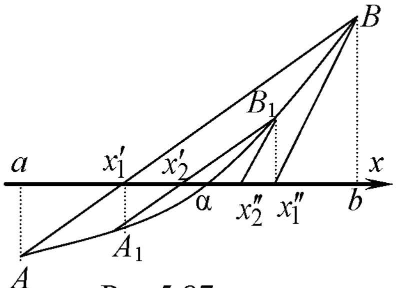


Рис.5.87

Полагая $b = x_0''$, $a = x_0'$, перепишем формулы (5.33) и (5.34) так:

$$x_1' = x_0' - \frac{(x_0''-x_0')f(x_0')}{f(x_0'')-f(x_0')},\ x_1'' = x_0'' - \frac{f(x_0'')}{f'(x_0'')} \tag{5.35}$$

Проведём теперь хорду A_1B_1 и касательную в точке B_1. Получим числа x_2' и x_2''. Очевидно

$$x_2' = x_1' - \frac{(x_1''-x_1')f(x_1')}{f(x_1'')-f(x_1')},\quad x_2'' = x_1'' - \frac{f(x_1'')}{f'(x_1'')},$$

и т. д. Следовательно, рабочие формулы процесса имеют вид

$$x_{n+1}' = x_n' - \frac{(x_n''-x_n')f(x_n')}{f(x_n'')-f(x_n')},\ x_{n+1}'' = x_n'' - \frac{f(x_n'')}{f'(x_n'')}. \tag{5.36}$$

■Докажем, что последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ сходятся (соответственно слева и справа) к искомому корню α уравнения (5.31). Проверим сначала, что $x_n'' \underset{n\to\infty}{\to} \alpha+0$.

Пусть $L(x)$ – правая часть уравнения касательной в точке B, разрешённого относительно y, т. е. $L(x) = f'(b)(x-b)+f(b)$. Из вогнутости линии $y=f(x)$ следует, что если $a \le x \le b$, то $L(x) < f(x)$. Поэтому $(f(a)=0) \Rightarrow (L(a)<0)$. В то же время $L(b)=f(b)>0$. В силу монотонности функции $L(x)$, имеем: $\alpha < x_1'' < b$, т. е. $\alpha \le x_1'' < x_0''$. Повторяя те же рассуждения для отрезка $[\alpha, x_1'']$, получим, что $\alpha < x_2'' < x_1''$, и т. д. Итак,

$$\alpha < \ldots < x_n'' < \ldots < x_2'' < x_1'' < x_0''.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n''\}$ монотонно убывает и ограничена снизу числом α. Следовательно, она имеет предел $c \ge \alpha$. Докажем, что $c=\alpha$. Для этого во второй из формул (5.36) совершим предельный переход при $n\to\infty$. Учитывая непрерывность функций $f(x)$ и $f'(x)$ на отрезке $[a,b]$ (это следует из существования $f'(x)$ и $f''(x)$ на этом отрезке), получим

$$c=c-\frac{f(c)}{f'(c)},$$

т. е.

$$\frac{f(c)}{f'(c)}=0,$$

а так как $f'(c)<\infty$, то $f(c)=0$. Но это значит, что c – корень уравнення (5.31), т. е. что $c=\alpha$.

Докажем теперь, что $x'_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha-0$. Обозначим $l(x)$ правую часть уравнения хорды AB, разрешённого относительно y, то есть $l(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$. Если $a<x<b$, то в силу вогнутости линии $y=f(x)$, будет $l(x)>f(x)$. Следовательно, $(f(\alpha)=0)\Rightarrow(l(x)>0)$. В то же время $l(\alpha)=f(\alpha)<0$. На основании монотонности функции $l(x)$ заключаем, что $a<x_1<\alpha$, т.е. $x'_0<x'_1<\alpha$. Теперь, учитывая, что $f(x'_1)>0$, а $f(x''_1)>0$ (поскольку $x'_1<\alpha$, а $x''_1>\alpha$) и, повторяя те же рассуждения для отрезка $[x'_1,x''_1]$, получим, что $x'_1<x'_2<\alpha$ и т. д. Итак,

$$x'_0<x'_1<x'_2<\ldots<x'_n<\ldots<\alpha,$$

т. е. последовательность $\{x'_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом α. Поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n=c$, причём $c\le\alpha$. Покажем, что $c=\alpha$. Для этого, применив теорему Лагранжа, перепишем первую из формул (5.36) так

$$x'_{n+1}=x'_n-\frac{f(x'_n)}{f'(\xi_n)},$$

где $\xi_n\in(x'_n,x''_n)$. Перейдём здесь к пределу при $n\to\infty$. Получим

$$c=c-\frac{f(c)}{\lim\limits_{n\to\infty} f'(\xi_n)},$$

т. е.

$$\frac{f(c)}{\lim\limits_{n\to\infty} f'(\xi_n)}=0,$$

а так как величина $f'(\xi_n)$ ограничена, то $f(c)=0$, откуда и следует, что $c=\alpha$.□

Заметим, что по величине разности $x''_n-x'_n$ можно судить о точности найденного корня на каждом шаге.

Легко видеть, что то же самое имеет место и в случае 4. Обратимся теперь к случаям 2 и 3. Запишем уравнение хорды AB (рис. 5.88) так

$$\frac{y-f(b)}{f(a)-f(b)}=\frac{x-b}{a-b},$$

откуда при $y=0$

$$\frac{x_1'-b}{a-b}=\frac{-f(b)}{f(a)-f(b)},$$

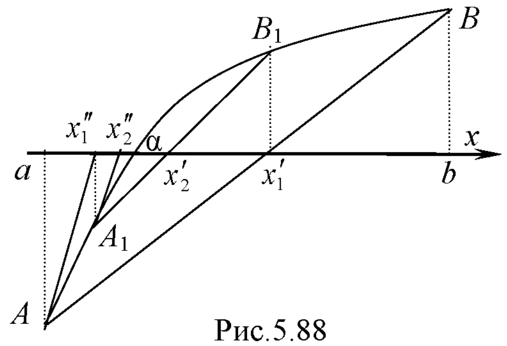


Рис.5.88

а значит,

$$x_1'=b-\frac{(a-b)f(b)}{f(a)-f(b)}.$$

Аналогично, проводя касательную в точке A, получим

$$x_1''=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Полагая $b=x_0'$, $a=x_0''$, будем иметь

$$\begin{cases} x_1'=x_0'-\dfrac{(x_0''-x_0')f(x_0')}{f(x_0'')-f(x_0')}, \\ x_1''=x_0''-\dfrac{f(x_0'')}{f'(x_0'')}, \end{cases}$$

что совпадает с формулами (5.35) для случаев 1 и 4. Следовательно, и рабочие формулы в случае 2 и 3 совпадает с формулами (5.36) для случаев 1 и 4.

Таким образом, различие между случаями 1, 4 и случаями 2, 3 фактически проявляется лишь на первом шаге (если не считать того, что в случаях 2 и 3 точки x_n' приближаются к α справа, а не слева, а точки x_n'', наоборот, слева). Это различие состоит в том, что в случаях 2 и 3 касательная проводится не в точке B, а в точке A, т. е. в качестве x_0'' берётся не b, а a. Можно сформулировать на этот счёт следующее правило: в качестве x_0'' берётся тот конец отрезка $[a,b]$, в которой величины $f(x)$ и $f''(x)$ имеют одинаковые знаки. Несоблюдение этого правила может привести к тому, что x_1'' окажется не внутри, а вне отрезка $[a,b]$, т. е. мы можем на первом шаге не приближаться к искомому корню, а наоборот, удалиться от него, рис. 5.89.

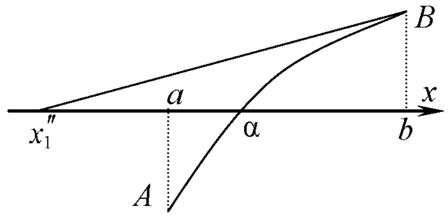


Рис.5.89

Прнмер 5.34. Возьмём то же уравнение (5.32), имеющее, как мы видели, единственный корень α в интервале $(0{,}1)$, и найдём его описанным способом с точностью до $0{,}01$.

Имеем

$$f'(x)=3x^2+2, \quad f''(x)=6x.$$

Таким образом, в интервале $(0{,}1)$ и $f'(x)$ и $f''(x)$ положительны, т. е. имеет место случай 1. Поэтому полагаем

$$x_0'=0, \quad x_0''=1.$$

Тогда

$$x_1'=0-\frac{(1-0)(-2)}{1-(-2)}=\frac{2}{3}=0{,}667;$$

$$x_1''=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}=0{,}800.$$

В данном случае $x_1''-x_1'=0{,}133$, а поэтому совершаем следующий шаг:

$$x_2'=0{,}667-\frac{(0{,}800-0{,}667)(0{,}667^3+2\cdot 0{,}667-2)}{(0{,}800^3+2\cdot 0{,}800-2)-(0{,}667^3+2\cdot 0{,}667-2)}=0{,}769;$$

$$x_2''=0{,}800-\frac{0{,}800^3+2\cdot 0{,}800-2}{3\cdot 0{,}800^2+2}=0{,}771.$$

Итак, с точностью до $0{,}01$ $x=0{,}77$.

Примечание. Вторая из формул (5.36) содержит только величины x_n'', т. е. эти величины не зависят от x_n'. Следовательно, можно вместо пары формул (5.36) пользоваться только одной формулой

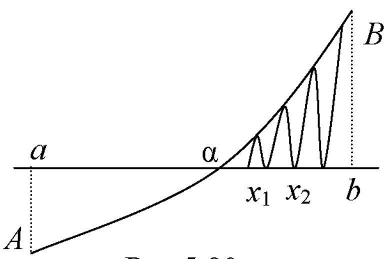


Рис.5.90

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{5.37}$$

причём, как мы видели, будет $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$.

Метод, основанный на формуле (5.37), называют методом касательных или методом Ньютона.

21. Прнблнжённое решенне уравненнй нтерацнонным методом Пнкара

Возьмём уравнение (5.31) и перепишем его произвольным образом в виде

$$x=\varphi(x). \tag{5.38}$$

Очевидно, это можно сделать бесчисленным множеством способов. Например, из уравнения (5.32) можно получить:

$$x=\sqrt[3]{2-2x},\ x=\frac{1}{2}\left(2-x^3\right),\ x=2-x^3-x,$$

и т. д.

Возьмём некоторое число x_0, вычислим $\varphi(x_0)$ и результат обозначим через x_1. Вычислим теперь $\varphi(x_1)$ и результат обозначим x_2 и т. д. В результате получим

$$x_1=\varphi(x_0), \tag{5.39}$$

$$x_2=\varphi(x_1), \tag{5.40}$$

$$x_3=\varphi(x_2),$$

и т. д. Рабочая формула процесса:

$$x_{n+1}=\varphi(x_n). \tag{5.41}$$

Предположим, что существует предел $\alpha=\lim\limits_{a\to\infty} x_n$. Тогда α – корень уравнения (5.38), а значит и уравнения (5.31).

Поскольку формула (5.41) носит рекуррентный характер, то в ней можно совершить предельный переход при $n\to\infty$. В результате получим

$$\alpha=\varphi(\alpha). \tag{5.42}$$

Итак, если процесс Пикара сходится, то он сходится к одному из корней уравнения (5.38).

Выясним теперь условия сходимости метода Пикара. Для этого из равенства (5.39) вычтем равенство (5.42). Получим

$$x_1-\alpha=\varphi(x_0)-\varphi(\alpha),$$

или, в силу теоремы Лагранжа,

$$x_1-\alpha=\varphi'(\xi)(x_0-\alpha), \tag{5.43}$$

где $\xi\in(\alpha,x_0)$. Положим, например, $x_0=b$, и пусть c – точка, симметричная точке b относительно точки a, рис. 5.91.

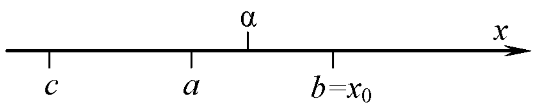


Рис.5.91

Предположим, что всюду на отрезке $[c,b]$ будет $|\varphi'(x)|\le q$, где $q<1$. Тогда, на основании (5.43)

$$|x_1-\alpha|\le q|x_0-\alpha|, \tag{5.44}$$

а так как $q<1$, то точка x_1 ближе к α, чем точка x_0.

Аналогично, вычитая равенство (5.42) из равенства (5.40), будем иметь

$$x_2-\alpha=\varphi'(\eta)(x_1-\alpha), \tag{5.45}$$

где $\eta\in(x,\alpha)$, а значит, тем более, $\eta\in[c,b]$. На основании (5.45) и (5.44),

$$|x_2-\alpha|\le q^2|x_0-\alpha|,$$

и т. д. Очевидно, что при любом натуральном n будет

$$|x_n-\alpha|\le q^n|x_0-\alpha|, \tag{5.46}$$

откуда, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$, следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha\,.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5.22. Если $|\varphi'(x)|\le q<1, \forall x\in[c,b]$, то числа x_k, вычисляемые по методу Пикара, сходятся к корню уравнения. При этом каждое последующее приближение x_n даёт результат, более близкий к α, чем предыдущее x_{n-1}.

Из неравенства (5.46) следует, что чем меньше q, тем быстрее сходимость последовательности $\{x_n\}$ к α. Более того, зная q, можно, на основании (5.46), заранее оценить число шагов, необходимых для достижения требуемой точности.

Примечание 1. Если $\varphi'(\xi)<0$, то может оказаться, что $x_1\in(c,\alpha)$. Именно поэтому необходимо было ввести дополнительный отрезок $[c,\alpha]$. Если же $\varphi'(x)\ge 0$, $\forall x\in[a,b]$, то "переброс" точек x_n на отрезок $[c,\alpha]$ невозможен, и, следовательно, необходимости введения этого отрезка нет.

Если же вместо $x_0=b$ положить $x_0=a$, то, очевидно, отрезок $[a,b]$ надо продлить не влево, а вправо на такую же величину, рис. 5.92.

Примечание 2. Процесс Пикара обладает очень важным свойством самоисправляемости. Это значит, что если на каком-то шаге будет допущена ошибка в вычислениях, то сходимость от этого не нарушится, а может лишь несколько замедлиться. Действительно, ошибочно вычисленное значение x_n можно принять в качестве нового начального приближения (естественно, если оно не оказалось вне отрезка $[c,b]$).

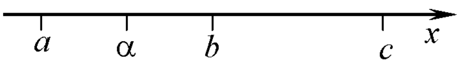


Рис.5.92

Разумеется, данным свойством обладает и ранее рассмотренный метод хорд и касательных, а также его частный случай – метод Ньютона.

Выясним геометрический смысл метода Пикара. Из уравнения (5.38) следует, что корень α есть абсцисса точки пересечения линий $y=x$ и $y=\varphi(x)$.

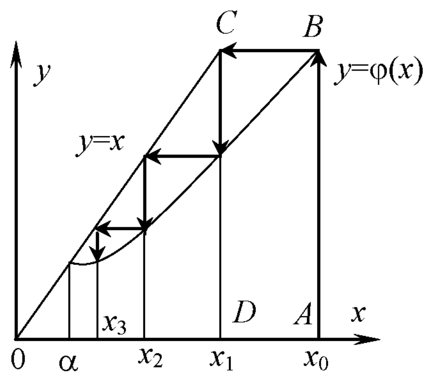


Рис.5.93

Отложим на оси Ox отрезок $OA=x_0$, рис. 5.93. Так как $x_1=\varphi(x_0)$, то для получения x_1 надо отложить на оси Ox отрезок $AB=\varphi(x_0)$. Но $AB=CD=OD$, т. е. $OD=x_1$. Аналогично строим на чертеже точки $x_2, x_3,\ldots$.

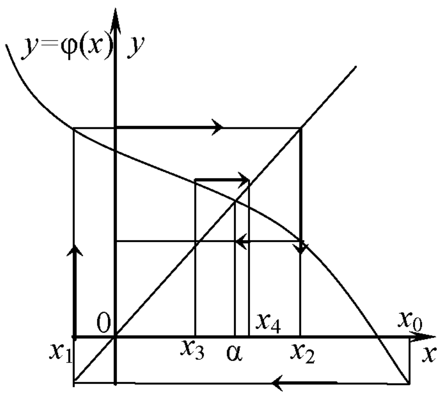


Рис.5.94

В изображённом на чертеже случае будет $0<\varphi'(x)<1$, а значит $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha+0$.

Пусть теперь на отрезке $[c,b]$ будет

$$-1<\varphi'(x)<0.$$

В этом случае, как следует из рис. 5.94, числа x_n стремятся к α с обеих сторон.

Предположим теперь, что $\varphi'(x)>1$. Тогда (рис. 5.95) числа x_n не приближаются к α, а наоборот, удаляются от корня, т. е. процесс расходится.

Аналогичная картина имеет место и тогда, когда $\varphi'(x)<-1$.

Возьмём опять конкретное уравнение (5.32). С изолированным корнем в интервале $(0,1)$. Приведём его к виду (5.38), например, так

$$x=1-\frac{x^3}{2}.$$

Тогда

$$\varphi'(x)=-\frac{3}{2}x^2,$$

а значит на отрезке $[-1,1]$ условие $|\varphi'(x)|\le q<1$ не выполняется.

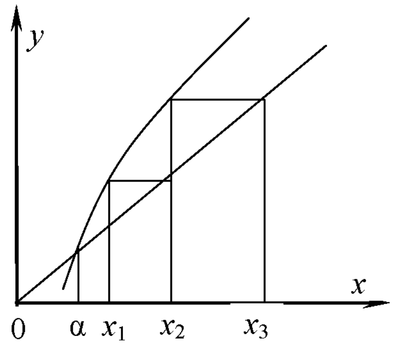


Рис.5.95

В связи с этим возникает вопрос: как привести конкретное уравнение вида (5.31) к виду (5.38) наиболее выгодным способом, т.е. так, чтобы величина $|\varphi'(x)|$ в требуемом промежутке была по возможности меньше единицы? Изложим по этому поводу один удобный метод. Начнём с конкретного уравнения (5.32). Перепишем его в виде

$$x=x+k(x^3+2x-2).$$

Здесь k – некоторое число, которое мы подберём наилучшим образом. Имеем

$$\varphi'(x)=1+k(3x^2+2).$$

Обозначим

$$3x^2+2=t,$$

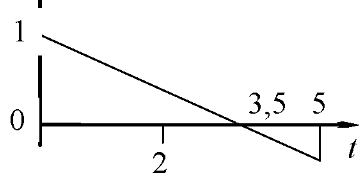


Рис.5.96

и рассмотрим величину $w=1+kt$. Если x изменяется на отрезке $[-1,1]$, то t изменяется от 2 до 5. Следовательно, нужно подобрать k так, чтобы величина $|w|$ была на отрезке $[2,5]$ как можно меньшей.

Считая равенство $w=1+kt$ уравнением прямой с угловым коэффициентом k, легко видеть из рис. 5.96, что наиболее выгодное значение k соответствует прямой, пересекающей ось Ox в точке $t=\frac{2+5}{2}=3{,}5$.

Следовательно,

$$k=-\frac{1}{3{,}5}=-\frac{2}{7},$$

и в этом случае

$$\max_{[2,5]}|w|=1-\frac{2}{7}\cdot 2=\frac{3}{7}.$$

Итак, исходное уравнение (5.32) следует переписывать в виде

$$x=x-\frac{2}{7}\left(x^3+2x-2\right),$$

т. е.

$$x=\frac{3}{7}x-\frac{2}{7}x^3+\frac{4}{7}.$$

При этом характеризующее скорость сходимости число q равно, как мы видели, $\frac{3}{7}$.

Положим $x_0=1$. Тогда

$$x_1=\frac{3}{7}-\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{5}{7}=0{,}714;$$

$$x_2=\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{7}-\frac{2}{7}\cdot\frac{125}{343}+\frac{4}{7}=0{,}773.$$

Вспоминая результат примера 5.34, мы видим, что уже на втором шаге получен тот же результат, но путём меньшего числа вычислений.

Обращаясь к уравнению общего вида (5.31), точно так же перепишем его следующим образом

$$x=x+k\cdot f(x). \tag{5.47}$$

Повторяя в общем виде только что приведенные рассуждения, получим

$$k=-\frac{2}{M+m},$$

где $M=\max\limits_{[c,b]} f'(x), m=\min\limits_{[c,b]} f'(x)$.

Примечание 3. Описанный метод неприменим в том случае, когда числа M и m имеют разные знаки, т. е. когда при изменении x от c до b величина $f'(x)$ меняет знак, рис. 5.97. Следовательно, надо, чтобы функция $f(x)$ на отрезке $[c,b]$ была монотонной. Этого всегда можно добиться методом проб.

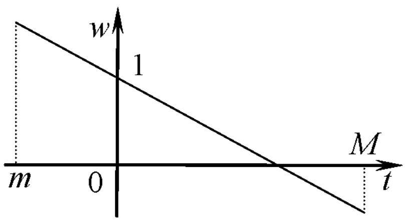


Рис.5.97

Примечание 4. Уравнение (5.31) можно заменить не только уравнением вида (5.47), но и уравнением

$$x = x + k(x) \cdot f(x),$$

где $k(x)$ – монотонная функция, не обращающаяся в нуль на отрезке $[c,b]$.

В частности, полагая $k(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$, получим

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Рабочая формула метода Пикара в этом случае запишется так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

что совпадает с формулой (5.37). Таким образом, метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода Пикара.

22. Формула Тейлора

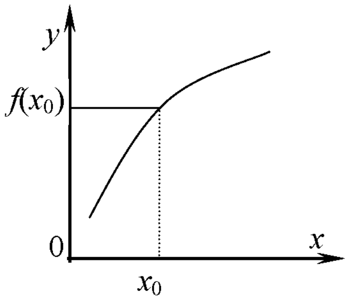


Рис.5.98

Пусть $f(x)$ – произвольная функция, для которой в данной точке x_0 известны значения её производных: $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$. Будем приближённо искать эту функцию в виде некоторого многочлена $P_n(x)$, где n – степень этого многочлена.

Пусть сначала $n = 0$, т. е. положим $f(x) = P_0(x)$, рис. 5.98. В данном случае наиболее естественно взять $P_0(x) = f(x_0)$. Итак, в этом случае будет $P_0(x) = f(x_0)$. При этом, очевидно, если $x \to x_0$, то $f(x) - P_0(x) = O^*(x - x_0)$.

Пусть теперь $n=1$, т. е. заменим $f(x)$ многочленом 1-й степени. В этом случае в качестве графика многочлена $P_1(x)$ естественно взять касательную к линии $y = f(x)$ в точке M_0. Уравнение этой касательной:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.48}$$

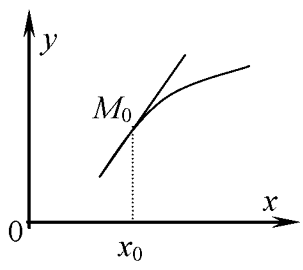


Рис.5.99

Таким образом, положив $f(x) \approx P_1(x)$, мы будем иметь

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.49}$$

В данном случае будет $f(x_0) = P_1(x_0),\ f'(x_0) = P_1'(x_0)$. Здесь уже при $x \to x_0$ будет $f(x) - P_1(x) = O(x - x_0)$.

Пусть $n = 2$. Потребуем теперь, чтобы для равенства $f(x) \approx P_2(x)$ было

$$f(x_0) = P_2(x_0),\ f'(x_0) = P_2'(x_0),\ f''(x_0) = P_2''(x_0)$$

(последнее, на основании формулы (5.16), означает, что в точке M_0 линии $y=f(x)$ и $y=P_2(x)$ имеют не только общую касательную, но и общую окружность кривизны). Легко получить, что

$$P_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2,$$

а значит, равенство $f(x)\approx P_2(x)$ запишется так:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2,$$

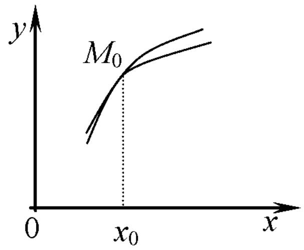


Рис.5.100

причём точность этого равенства, как усматривается из рис. 5.100, значительно выше, чем у выражения (5.48).

Взяв теперь $n=3$, мы потребуем, чтобы было

$$f(x_0)=f_3(x_0),\ f'(x_0)=P_3'(x_0),\ f''(x_0)=P_3''(x_0),\ f'''(x_0)=P_3'''(x_0),$$ и т. д.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ дифференцируема n раз, и потребуем, чтобы в равенстве $f(x)=P_n(x)$ было

$$P_n(x_0)=f(x_0),\ P_n'(x_0)=f'(x_0),$$
$$P_n''(x_0)=f''(x_0),\ \dots,P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0). \qquad (5.49)$$

Будем искать $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\dots+a_n(x-x_n)^n. \qquad (5.50)$$

При $x=x_0$ имеем отсюда

$$a_0=P_n(x_0),$$

т. е., на основании (5.49),

$$a_0=f(x_0).$$

Далее, дифференцируя равенство (5.50), имеем

$$P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\dots+na_n(x-x_0)^{n-1}, \qquad (5.51)$$

откуда

$$P_n'(x_0)=a_1,$$

или, на основании (5.49),

$$a_1=f'(x_0).$$

Аналогично, дифференцируя (5.51), получим

$$P_n''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3(x-x_0)+\dots+(n-1)n\cdot a_n(x-x_0)^{n-2},$$

откуда $P_n''(x_0)=2!a_2$, а значит, на основании (5.49),

$$a_2=\frac{f''(x_0)}{2!}.$$

Продолжая этот процесс, будем иметь

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!},\dots,a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Таким образом, многочлен степени $\le n$, удовлетворяющий условиям (5.49), имеет вид

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (5.52)$$

Оценим теперь порядок точности равенства $f(x) \approx P_n(x)$. Для этого обозначим $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Тогда условия (5.49) запишутся так

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = \dots = r_n^{(n)}(x_0) = 0. \quad (5.53)$$

Применив n раз правило Лопиталя и последовательно используя равенство (5.53), находим

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{r''(x)_n}{(n-1)n(x-x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n)}(x)}{n!} =$$

$$= \frac{r_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

откуда следует, что $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$, т. е. что при $x \to x_0$ будет

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n),$$

где $P_n(x)$ даётся формулой (5.52).

Итак, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 5.22. Если функция $f(x)$ определена в некотором промежутке (a,b) и в точке x_0 имеет непрерывные производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$, то в этом промежутке выполняется равенство

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0) +$$

$$+ o((x-x_0)^n). \quad (5.54)$$

Эту формулу называют формулой Тейлора, а величину $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$ - остаточным членом формулы Тейлора в форме Пеано.

При $x_0 = 0$ формула (5.54) принимает вид

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (5.55)$$

Этот частный случай формулы Тейлора называют рядом Маклорена.

Примечание. Нетрудно доказать и утверждение, обратное теореме 5.22. Именно, если функция $f(x)$ в точке x_0 дифференцируема n раз и если $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$, где $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ – некоторый многочлен, то коэффициенты этого многочлена даются формулой

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \ (k = 0,1,2,...,n),$$

т. е. $P_n(x)$ совпадает с многочленом (5.52).

Пример 5.35. Пусть $f(x) = e^x$, а $x_0 = 0$. Поскольку $f^{(k)}(x) = e^x \ \forall k$, то

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n)}(0) = 1,$$

а значит, в силу (5.55)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \qquad (5.56)$$

Пример 5.36. Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x,\ f^{(5)}(x) = \cos x, ...,$$

а значит

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0,\ f^{(5)}(0) = 1, ...$$

откуда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right). \qquad (5.57)$$

Пример 5.37. Совершенно аналогично на основании той же формулы (5.53) будем иметь

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right), \qquad (5.58)$$

и т. д.

В дальнейшем мы получим целый ряд применений формул (5.56)-(5.58) и других подобных формул. Отметим сейчас лишь то, что они позволяют находить приближённые значения соответствующих функций при разных x. Например, при $x = \frac{1}{2}$ находим из (5.56)

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2!} + \frac{1}{2^3 3!} + ... + \frac{1}{2^n n!},$$

причём точность этого равенства, очевидно, тем выше, чем больше n.

Задачи и уиражиеиия к главе V

1. Вокруг прямоугольника со сторонами $2p$ и $2q$ описать эллипс наименьшей площади.

2. Найти асимптоты линии $y=xe^{-\frac{1}{x}}$.

3. Найти окружность кривизны линии $y=1-(x-1)^2$ в её вершине.

4. Составить уравнение окружности кривизны линии $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ в точке $(1,1)$.

5. Найти окружность кривизны линии $y=2x-x^2$ в её вершине.

6. Найти вершину (точку экстремальной кривизны) линии $y=\frac{x^2}{2}-\ln x$.

При помощи правила Лопиталя вычислить пределы:

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{tg} x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

При помощи формулы Тейлора 3-го порядка вычислить приближённо:

12. $\ln 1{,}1$

13. $\frac{1}{\sqrt[3]{1{,}2}}$;

14. $\frac{1}{\sqrt{1{,}1}}$.

Построить графики функций:

15. $y=e^{\operatorname{arctg} x}$;

16. $y=e^{\operatorname{arcctg} x}$;

17. $y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$;

18. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1-x}{1+x}$;

19. $y=\frac{3-x^2}{x+2}$;

20. $y=\frac{1}{5x\sqrt{1-x}}$;

21. $y=\sqrt{\frac{x^3-2}{3x}}$;

22. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

23. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$;

24. $y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^4}{20}$;

25. $y=e^{\frac{1}{2x}}+x$;

26. $y=e^{2x-x^2}$;

27. $y=e^{\frac{1}{4(1-x^2)}}$;

28. $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$;

29. $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$;

30. $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;

31. $y=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}$;

32. $y=x+\operatorname{arcctg} x$;

33. $y=x^2-\sqrt{x^5}$;

34. $y=\frac{e^x}{2x}$;

35. $y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$;

36. $y=\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$;

37. $y=\frac{1+\ln x}{x}$;

38. $y=\sqrt{x}e^{-x}$;

39. $y=\frac{x}{2}+1+\frac{7}{2x}-\frac{3}{2x}$; 40. $y=x-\frac{8}{x^4}$; 41. $y=x+\frac{1}{x^2}$;

42. $y=\frac{10\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}$; 43. $y=\frac{x\sqrt{1-x}}{1+x}$; 44. $y=\sqrt[3]{4x^3-12x}$;

45. $y=\frac{1}{x^2-4x+5}$; 46. $y=x\sqrt{1-x}$; 47. $y=x\sqrt{x-x^2}$;

48. $y=x\sqrt{2-x^2}$; 49. $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; 50. $y=x+\sqrt{1-x}$;

51. $y=x-2\ln x$; 52. $y=\sqrt{e^x-1}$; 53. $y=x+2\sqrt{-x}$;

54. $y=x\arccos\frac{1}{x}$; 55. $y=\frac{1}{1+e^x}$; 56. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

57. $y=x^2\ln x$; 58. $y=\frac{e^x}{1+e^x}$; 59. $y=\frac{x^2}{\ln x}$;

60. $y=\frac{1}{x\sqrt{1-x}}$; 61. $y=\frac{5\sqrt{x}}{x+2}$; 62. $y=x\operatorname{arctg} x-1$;

63. $y=x\operatorname{arcctg} x$; 64. $y=\frac{x^3}{x-1}$.

Найти приближённо корни уравнений (предварительно убедившись в их единственности):

65. $x^3-2x^2+3x-5=0$; 66. $e^x=2(x-1)^2$; 67. $5x^3-x^2-x-6=0$;

68. $x^3-2x^2-4x-7=0$; 69. $2^x=4x\ (x\neq 4)$; 70. $x\cdot\lg x=1$;

71. $x^3-2x-5=0$; 72. $x\cdot\ln x-14=0$; 73. $x+e^x=0$.

74. Найти меньший корень уравнения $4x-5\ln x=5$.

75. Найти больший корень уравнения $4x-5\ln x=5$.

76. Найти положительный корень уравнения $x^3-5x^2-15x-7=0$.

77. Найти наибольший корень уравнения $x^3-3x+1=0$.

78. Найти наименьший корень уравнения $2x^3-x^2-7x+5=0$.

79. Найти средний корень уравнения $2x^3-x^2-7x+5=0$.

80. Найти наибольший корень уравнения $2x^3-x^2-7x+5=0$.

81. Найти больший корень уравнения $x^4-x-1=0$.

82. Найти наименьший корень уравнения $x^3-6x+2=0$.

83. Найти средний корень уравнения $x^3-6x+2=0$.

84. Найти наибольший корень уравнения $x^3-6x+2=0$.

85. Найти меньший корень уравнения $x^4-x-1=0$.

86. Найти корни уравнения $\cos x=x^2$.

87. Найти меньший корень уравнения $x^2+\frac{1}{x^2}=10x$.

VI. Пеоиределеииый иитеграл и иеобходимые сведеиия из алгебры

1.Первообразиая фуикция

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$. Например, функция $\sin x$ является первообразной функции $\cos x$, функция x^3+x есть первообразная функции $3x^2+1$ и т. д. Если дана функция $F(x)$, то соответствующая ей функция $f(x)$ находится путем дифференцирования. Следовательно, нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ есть действие, обратное действию дифференцирования. Его называют интегрированием функции $f(x)$.

При помощи таблицы производных легко составить соответствующую таблицу первообразных. Например, если $f(x)=x^a$, то, очевидно $F(x)=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$. При этом, однако, предполагается, что $a\neq -1$. Если же $a=-1$, т. е. если $f(x)=\dfrac{1}{x}$, то $F(x)=\ln x$. Но последняя формула имеет смысл лишь при $x>0$. Если же $x<0$, то $F(x)=\ln(-x)$. Действительно,

$$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}.$$

Итак, если $f(x)=\dfrac{1}{x}$, то

$$F(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ \ln(-x), & x<0,\end{cases}$$

т. е.

$$F(x)=\ln|x|.$$

Аналогично, “обращая” остальные формулы дифференцирования, получим остальные простейшие случаи нахождения первообразных. В итоге будем иметь
следующую таблицу.

Исходные функции	Первообразные
$x^a\,(a\neq 1)$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$

e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Arsh} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arch} x$

Пусть, например, $f(x)=2x-3$. Тогда $F(x)=x^2-3x$. Но в то же время данная функция $f(x)$ имеет и другие первообразные: x^2+3x+1, x^2-3x-4, $x^2-3x+\frac{1}{2}$ и т. д.

Вообще, если $F(x)$ – первообразная функция $f(x)$, то и любая функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, которая является первообразной функции $f(x)$. Действительно, при любом $C=const$ будет

$$[F(x)+C]' = F'(x)=f(x).$$

Обратно, пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные одной и той же функции $f(x)$. Тогда $F_1'(x)=f(x)$ и $F_2'(x)=f(x)$, а значит $F_1'(x)-F_2'(x)=0$, т. е. $[F_1(x)-F_2(x)]' = 0$. Но, как мы видели в главе **V** (следствие теоремы Лагранжа), это означает, что

$$F_1(x) - F_2(x) = Const,$$

а значит

$$F_2(x) = F_1(x) + C.$$

Пример 6.1. Легко видеть, что $F_1(x) = \sin^2 x$ и $F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x -$ первообразные одной и той же функции $f(x) = \sin 2x$. Действительно:

$$F_1'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x,\ F_2'(x) = -\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2 = \sin 2x.$$

Поэтому

$$F_1(x) - F_2(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x = \sin^2 x + \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2} = \frac{1}{2} = const.$$

Итак, если функция имеет хотя бы одну первообразную (таковыми, как мы увидим в главе V11, являются, в частности, все непрерывные в рассматриваемом промежутке функции), то она имеет бесконечное множество первообразных, различающихся между собой на постоянную величину. Таким образом, интегрирование, в отличие от дифференцирования, не является однозначным действием. Говорят, что первообразная находится по данной функции с точностью до произвольной постоянной.

2. Пеоиределеииый иитеграл и иростейшие формулы иитегрироваиия

Таким образом, если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то любая функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также есть ее первообразная.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом этой функции и обозначается $\int f(x)dx$. Итак, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{6.1}$$

где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, а C – произвольная постоянная. Функция $f(x)$ в равенстве (6.1) называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Из формулы (6.1) имеем

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x), \tag{6.2}$$

что естественно, так как действия дифференцирования и интегрирования взаимно обратны.

Заменяя $f(x)$ в формуле (6.1) на $f'(x)$, получим

$$\int f'(x)dx = f(x) + C. \tag{6.3}$$

Эту формулу можно считать обратной формуле (6.2).

Далее, имеем

$$d\int f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]' dx,$$

а значит, в силу (6.2),

$$d\int f(x)dx = f(x)dx,$$

так что символ d уничтожает символ $\int$. Обратная формула:

$$\int df(x) = \int f'(x)dx,$$

т. е., в силу (6.3),

$$\int df(x) = f(x) + C.$$

Из формулы (6.1) и из таблицы первообразных получаем следующие простейшие формулы интегрирования:

1°. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq 1).$

Например:

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C, \quad \int \sqrt{x}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C,$$

и т. д.

2°. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3°. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$. В частности, $\int e^x dx = e^x + C$.

4°. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

5°. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

7°. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

8°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$. Но, в то же время, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$. Убедимся, что обе формулы равносильны.

Действительно, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

а значит

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) + C = \arcsin x + \left(C - \frac{\pi}{2}\right),$$

что совпадает с первой из формул, если заменить $C - \frac{\pi}{2}$ на C, что законно, поскольку C – произвольная постоянная. Откуда

9°. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, или, что то же самое, $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcctg} x + C$.

10°. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$.

11°. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$.

12°. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

13°. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

14°. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arsh} x + C$, или, что одно и то же,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

15°. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arch} x + C$, т. е. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$.

Формулы 14° и 15° можно объединить в одну

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C.$$

3. Свойства иеоиределеииых иитегралов

Теорема 6.1. Интеграл суммы конечного числа функций равен сумме их интегралов, т. е.

$$\int[f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+...+\int f_n(x)dx.$$

Для доказательства достаточно продифференцировать обе части последнего соотношения и воспользоваться правилом дифференцирования суммы (теорема 5.2.), а также формулой 6.2.

Теорема 6.2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е.

$$\int\alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx.$$

Для доказательства достаточно продифференцировать обе части этого равенства и воспользоваться соответствующим свойством производной.

Пример 6.1. На основании теорем 6.1 и 6.2 находим

$$\int\left(\operatorname{tg}^2x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\operatorname{tg}^2xdx+3\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx+3\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int dx+3\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\operatorname{tg}x-x+3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\operatorname{tg}x-x+6\sqrt{x}+C.$$

Теорема 6.3. Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f[\varphi(x)]dx=F[\varphi(x)]+C$, какой бы ни была дифференцируемая функция $\varphi(x)$.

■Действительно, производная левой части подлежащего доказательству равенства равна

$$\left[\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)\right]=\left[\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx\right]=f[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

а производная правой части равна

$$\{F[\varphi(x)]+C\}'=\{F[\varphi(x)]\}'=F'[\varphi(x)]\varphi'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

т. е. производные обеих частей доказываемого равенства совпадают.□

Пример 6.2.

$$\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int\cos 2xd(2x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

Пример 6.3.

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Пример 6.4.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Пример 6.5.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}}=\ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right]+C=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}+C=$$

$$=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\ln a+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C,$$

и совершенно аналогично

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

Пример 6.6.

$$\int\sin^3 x\cos x dx=\int(\sin x)^3 d(\sin x)=\frac{\sin^4 x}{4}+C.$$

Пример 6.7.

$$\int x\sqrt{2-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int\left(2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(2-x^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3}\sqrt{\left(2-x^2\right)^3}+C.$$

Пример 6.8.

$$\int\operatorname{ctg}x dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}+C=\ln|\sin x|+C.$$

Пример 6.9.

$$\int\frac{xdx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{1+\left(x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)+C.$$

Пример 6.10.

$$\int\cos^2 x dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x d(2x)\right]=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C.$$

Пример 6.11.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Пример 6.12.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

Примечание. Результаты примеров 6.3. - 6.5. обобщают формулы 8°, 9°, 14° и 15°, а поэтому их полезно запомнить вместо этих формул. Результаты примеров 6.11. и 6.12. также стоит помнить.

4. Питегрироваиие ио частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ произвольные дифференцируемые функции. Тогда

$$d(uv) = udv + vdu$$

откуда

$$udv = d(uv) - vdu$$

а значит

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{6.4}$$

Эту формулу называют формулой интегрирования по частям. Ее применение целесообразно, в частности, тогда, когда интеграл $\int vdu$ проще интеграла $\int udv$.

Пример 6.13. Вычислим интеграл $\int xe^x dx$. Для этого положим

$$u = x, dv = e^x dx.$$

Тогда

$$du = dx, v = e^x,$$

а значит, в силу (6.4),

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Примечание. Если бы мы положили $u = e^x$, $dv = xdx$, то получили бы

$$du = e^x dx,\ v = \frac{1}{2}x^2,$$

а значит

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx,$$

т. е. новый интеграл оказался бы сложнее первоначального.

Пример 6.14. Возьмем интеграл $I = \int x^2 \cos x dx$. Полагая

$$x^2 = u, \ \cos x dx = dv,$$

откуда следует, что

$$du = 2x dx, \ v = \sin x,$$

будем иметь

$$I = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx .$$

Очевидно, что новый интеграл вычисляется аналогично. Полагая $u = x, dv = \sin x dx$, откуда $du = dx, v = -\cos x$, будем иметь

$$I = x^2 \sin x - 2\left(- x\cos x + \int \cos x dx\right) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C .$$

Легко видеть, что путем “n-разового” интегрирования по частям аналогично могут быть вычислены любые интегралы вида $\int P_n(x)\cos ax dx, \int P_n(x)\sin ax dx$ и $\int P_n(x)e^{ax} dx$, где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени.

Пример 6.15. Для вычисления интеграла $I = \int \arcsin x dx$ полагаем

$$u = \arcsin x, \ dv = dx .$$

Тогда

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \ v = x,$$

а значит

$$I = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1-x^2\right) =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C .$$

Пример 6.16. Дважды интегрируя по частям, получим

$$\int e^x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = e^x, dv = \sin x dx \\ du = e^x dx, v = -\cos x \end{vmatrix} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^x, \ dv = \cos x dx \\ du = e^x dx, \ v = \sin x \end{vmatrix} = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

т. е., обозначая вычисляемый интеграл через I, будем иметь

$$I = e^x(\sin x - \cos x) - I,$$

откуда

$$I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Очевидно, подобным способом можно вычислить любой интеграл вида

$$\int e^{ax} \sin bx dx \text{ или } \int e^{ax} \cos bx dx.$$

5. Питегрироваиие иутем замеиы иеремеииой

Рассмотрим интеграл $\int f(x)dx$. Введем новую переменную t формулой

$$t = \varphi(x), \tag{6.5}$$

где t – некоторая дифференцируемая функция. Тогда $x = \psi(t), dx = \psi'(t)dt$, а значит

$$f(x)dx = f[\psi(t)]\psi'(t)dt.$$

Докажем, что

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\Big|_{t=\varphi(x)}. \tag{6.6}$$

Для доказательства достаточно убедиться, что производные обеих частей этого равенства совпадают, т. е. что производная правой части равна $f(x)$.

■Используя (6.2), а также формулу для производной обратной функции, имеем

$$\left\{\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\Big|_{t=\varphi(x)}\right\}'_x = \left\{\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\Big|_{t=\varphi(x)}\right\}''_t t_x =$$

$$= f[\psi(t)]\psi'(t)t'_x\Big|_{t=\varphi(x)} = f[\psi(t)]\psi'(t)\frac{1}{\psi'(t)}\Big|_{t=\varphi(x)} = f[\psi(t)]\Big|_{t=\varphi(x)} = f(x),$$

что и требовалось доказать.□

Пример 6.17. Вычислим интеграл $I = \int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$. Для этого положим $\sqrt{x} = t$, откуда $x = t^2$, а значит $dx = 2tdt$. Формула (6.6) дает

$$I = \int \frac{t}{t^2+1}2tdt\Big|_{t=\sqrt{x}}.$$

Но

$$\int\frac{t}{t^2+1}2tdt=2\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=2\int\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt=2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2(t-\operatorname{arctg}t)+C,$$

а значит

$$I=2\left(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)+C.$$

Описанный метод называют методом замены переменной, или методом подстановки.

Иногда замену переменной производят не по формуле вида (6.5), а сразу по формуле вида $x=\varphi(t)$. Укажем некоторые важные подстановки такого вида.

1°. Пусть интеграл содержит радикал вида $\sqrt{a^2-x^2}$. В этом случае удобна замена

$x=a\sin t$ (или $x=a\cos t$). Действительно, положив $x=a\sin t$, получим

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t,$$

т. е. радикал исчезнет.

Пример 6.18. Вычислим интеграл $I=\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$. Полагая $x=2\sin t$, придем к интегралу

$$\int\frac{2\cos t}{4\sin^2 t}2\cos t dt=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\operatorname{ctg}t+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$I=-\left(\frac{\cos t}{\sin t}+t\right)+C=-\left(\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}+t\right)+C=$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}}+\arcsin\frac{x}{2}\right)+C=-\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+\arcsin\frac{x}{2}\right)+C\cdot$$

2°. Пусть под интегралом содержится радикал вида $\sqrt{a^2+x^2}$. В этом случае удобны замены $x=a\operatorname{tg}t$ (или $x=a\operatorname{ctg}t$) и $x=a\operatorname{sh}t$.

Действительно, положив $x=a\operatorname{tg}t$, будем иметь

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2 t}=a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}=\frac{a}{\cos t}.$$

Аналогично, если $x=a\operatorname{sh}t$, то $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\operatorname{sh}^2 t}=a\operatorname{ch}t$.

Пример 6.19. Вычислим интеграл $I=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$. Полагая $x=\operatorname{tg}t$, получим

$$I=\int\frac{\frac{1}{\cos t}}{tg^4 t}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\frac{\cos^4 t dt}{\sin^4 t\cos^3 t}=\int\frac{\cos t}{\sin^4 t}dt=\int(\sin t)^{-4}d(\sin t)=$$

$$=\frac{(\sin t)^{-3}}{-3}+C=\frac{1}{3}\frac{1}{\sin^3 t}+C=-\frac{1}{3}\left(1+\mathrm{ctg}^2 t\right)^{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3x^3}+C.$$

Аналогично, полагая $x=a\mathrm{sh}t$, будем иметь

$$I=\int\frac{\mathrm{ch}t}{\mathrm{sh}^4 t}\mathrm{ch}t dt=\int\frac{\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}^4 t}dt=-\int(\mathrm{cth}t)^2 d(\mathrm{cth}t)=-\frac{1}{3}\mathrm{cth}^3 t+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{\left(1+\mathrm{sh}^2 t\right)^3}}{3\mathrm{sh}^3 t}+C=-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}+C.$$

3°. Пусть подынтегральная функция содержит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$. В этом случае удобно положить $x=\frac{a}{\sin t}$ (или $x=\frac{a}{\cos t}$) и $x=a\mathrm{ch}t$. Действительно эти подстановки дают соответственно

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}=a\mathrm{ctg}t;$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\mathrm{ch}^2 t-a^2}=a\sqrt{\mathrm{ch}^2 t-1}=a\mathrm{sh}t.$$

Пример 6.20. В интеграле $I=\int\sqrt{x^2-1}dx$ положим $x=\mathrm{ch}t$. Получим

$$I=\int\sqrt{\mathrm{ch}^2 t-1}\cdot\mathrm{sh}t dt=\int\mathrm{sh}^2 t dt=\frac{1}{2}\int(\mathrm{ch}2t-1)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{sh}2t-t\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t-t)+C=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\mathrm{ch}^2 t-1}\cdot\mathrm{ch}t-t\right)+C=$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-1}\cdot x-\mathrm{Arch}\ x\right)+C=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]+C.$$

6. Таблица осиовиых иитегралов

Приведем окончательную таблицу интегралов, которые полезно помнить при интегрировании.

1. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$, $(a \neq 1)$.	9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.
2. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.	10. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$.
3. $\int e^x dx = e^x + C$.	11. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln \left\| \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \right\| + C$.
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$.	12. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln \left\| \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2} \right) \right\| + C$.
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.	13. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.	14. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.
7. $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.	15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.	16. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.
	17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + C$.

7. Комилексиые числа и действия с иими

Комплексным числом называется пара вещественных чисел a и b, рассматриваемая как единый “комплекс”, записываемый в виде $c = a + bi$. Для этого “комплекса” вводятся арифметические действия по правилам, которые формулируются ниже.

Числа a и b называются соответственно вещественной и мнимой частью комплексного числа $c = a + bi$. Это записывают так:

$$a = \operatorname{Re} c, \; b = \operatorname{Im} c.$$

Если $a=0$, то вместо $c = 0 + bi$ пишут просто $c = bi$ и говорят, что в этом случае c– чисто мнимое число. Если $b=0$, то пишут, что $c=a$, и говорят, что в этом случае комплексное число превращается в вещественное. Следовательно, множество всех вещественных чисел можно рассматривать как подмножество множества всех комплексных чисел.

Если $a=b=0$, т. е. если $c = 0 + 0i$, то пишут, что $c=0$.

Комплексные числа $c_1 = a_1 + b_1 i$ и $c_2 = a_2 + b_2 i$ называются равными, если. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ Иными словами,

$$c_1 = c_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} c_1 = \operatorname{Re} c_2,$$

$$\operatorname{Im} c_1 = \operatorname{Im} c_2.$$

Комплексное число $a - bi$ называется сопряженным по отношения к числу $c = a + bi$ и обозначается $\bar{c}$. Очевидно, равенство $\bar{c} = c$ есть необходимое и достаточное условие вещественности числа c.

Число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется модулем комплексного числа $c = a + bi$ и обозначается $|c|$. Очевидно, что всегда $|\bar{c}| = |c|$. Если c – вещественное, т. е. $c = a + 0 \cdot i$, то

$$|c| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Таким образом, в этом случае модуль комплексного числа превращается в абсолютную величину вещественного числа.

Суммой комплексных чисел $c_1 = a_1 + b_1 i$ и $c_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число, обозначаемое $c_1 + c_2$ и равное

$$c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i \qquad , \tag{6.7}$$

т. е. при сложении комплексных чисел складываются (по определению!) отдельно их вещественные и мнимые части.

Из (6.7), в частности, следует, что

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a + 0 \cdot i = 2a,$$

т. е.

$$c + \bar{c} = 2 \operatorname{Re} c \tag{6.8}$$

Далее, на основании правила (6.7), можно написать, что

$$a + bi = (a - 0 \cdot i) + (0 + bi).$$

Этот факт оправдывает то, что любое комплексное число записывается именно в виде суммы слагаемых a и bi.

Лемма 6.1. Сопряженное суммы комплексных чисел равно сумме чисел, сопряженных каждому слагаемому, т. е.

$$\overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2} \tag{6.9}$$

Это сразу следует из (6.7).

Разностью комплексных чисел c_1 и c_2 называется такое число c, что $c_2 + c = c_1$. Отсюда и из (6.7) следует, что если $c_1 = a_1 + b_1 i$, $c_2 = a_2 + b_2 i$, то

$$c_1 - c_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i.$$

Произведением комплексных чисел $c_1 = a_1 + b_1 i$ и $c_2 = a_2 + b_2 i$ называется число

$$c_1 c_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 a_2 + b_1 b_2) \cdot i. \tag{6.10}$$

В частности, если m – вещественное число, то

$$m(a + bi) = (m + 0 \cdot i)(a + bi) = (ma + 0 \cdot b) + (mb + 0 \cdot a) \cdot i = ma + mbi.$$

Из формулы (6.10) следует, что комплексные числа можно перемножать по правилу перемножения двучленов и при этом полагать, что $i^2 = -1$. Действительно, это правило дает

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2=$$
$$(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\cdot i.$$

Поэтому, в частности,

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2,$$

т. е.

$$c\bar{c}=|\bar{c}|^2.$$

Если $c=bi$, то $c^2=b^2i^2=-b^2$, т. е. $c^2<0$. Поскольку квадрат любого действительного числа не может быть отрицательным, то именно поэтому числа вида bi называют мнимыми, т. е. “воображаемыми”.

В частности, поскольку равенство $i^2=-1$ позволяет условно написать, что $i=\sqrt{-1}$, то число i называют мнимой единицей.

Далее, из равенства $i^2=-1$ следует, что

$$i^3=i^2i=-i;\ \ i^4=i^3i=-ii=1;\ \ i^5=i^4i=i \text{ и т. д.}$$

Лемма 6.2. Сопряженное произведение комплексных чисел равно произведению Чисел, сопряженных каждому из сомножителей, т. е.

$$\overline{c_1c_2}=\overline{c_1}\cdot\overline{c_2} \tag{6.11}$$

Это непосредственно вытекает из (6.10).

Поскольку (6.11) верно для любого числа сомножителей, то

$$\overline{c^n}=(\bar{c})^n. \tag{6.12}$$

Теорема 6.4. Если $P(c)$ – многочлен с вещественными коэффициентами, то

$$\overline{P(c)}=P(\bar{c}). \tag{6.13}$$

■Действительно, пусть

$$P(c)=P_0c^n+P_1c^{n-1}+\ldots+P_{n-1}c+P_n.$$

Тогда, используя (6.9), (6.11), (6.12) и вещественность чисел $P_0,P_1,\ldots,P_n$, получим

$$\overline{P(c)}=\overline{P_0c^n+P_1c^{n-1}+\ldots+P_{n-1}c+P_n}=\overline{P_0c^n}+\overline{P_1c^{n-1}}+\ldots+\overline{P_{n-1}c}+\overline{P_n}=$$
$$=\overline{P_0}\,\overline{c^n}+\overline{P_1}\,\overline{c^{n-1}}+\ldots+\overline{P_{n-1}}\,\overline{c}+\overline{P_n}=P_0(\bar{c})^n+P_1(\bar{c})^{n-1}+\ldots+P_{n-1}\bar{c}+P_n=P(\bar{c}),$$

что и требовалось доказать. □

Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. Число $z=x+yi$ называется частным чисел $c_1=a_1+b_1i$ и $c_2=a_2+b_2i$, если $c_2z=c_1$, т. е., если

$$(a_2+b_2i)(x+yi)=a_1+b_1i.$$

Используя (6.9) и приравнивая отдельно вещественные и мнимые части, получим

$$\begin{cases} a_2x - b_2y = a_1, \\ b_2x + a_2y = b_1, \end{cases}$$

а значит

$$x = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \tag{6.14}$$

Отсюда следует, что деление комплексных чисел можно производить, умножая числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю. Действительно,

$$\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2i}{a_2^2 + b_2^2},$$

что равносильно (6.14).

Пример 6.21. $\frac{4+3i}{5-2i} = \frac{(4+3i)(5+2i)}{25+4} = \frac{(20-6)+(8+15)i}{29} = \frac{14}{29} + \frac{23}{29}i$.

Пример 6.22. $\frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = -i$.

8. Геометрическая форма комилексиых чисел

Поскольку комплексное число есть пара двух вещественных чисел, то его можно изображать в виде точки на плоскости. Эту плоскость называют комплексной плоскостью. Числа a и b играют роль координат точки c в этой плоскости, рис. 6.1. Точки c и $\bar{c}$, очевидно, симметричны относительно оси Ox. Если b=0,т. е., если c=a, то эта точка лежит на оси Ox. Если же a=0, т. е. c=bi, то точка принадлежит оси Oy. Иными словами, оси Ox и Oy есть геометрические изображения множества всех вещественных и всех чисто мнимых чисел, соответственно. В связи с этим ось Ox называют вещественной, а ось Oy – мнимой осью комплексной плоскости.

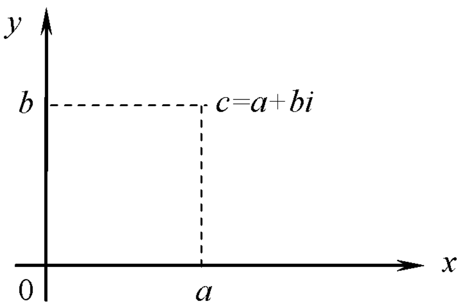


Рис.6.1

Запишем теперь выражение c=a+bi так

$$c = a \cdot 1 + b \cdot i.$$

Это позволяет изображать комплексное число в виде вектора комплексной плоскости, рис. 6.2. Числа $a = \operatorname{Re} c$ и $b = \operatorname{Im} c$ играют роль проекций вектора c на оси Ox и Oy, а 1 и i можно рассматривать как “орты” этих осей (последнее является еще одной мотивировкой термина “мнимая единица”).

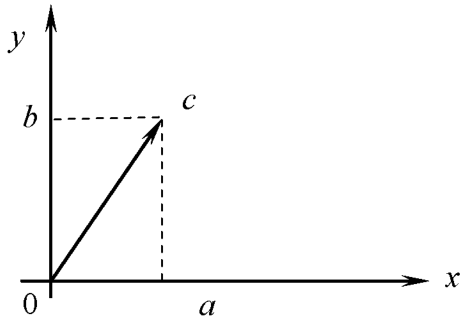


Рис.6.2

Векторная трактовка комплексных чисел позволяет придать модулю комплексного числа простой геометрический смысл. Число $|c|$, очевидно, есть не что иное, как длина вектора c.

Правило (6.7) сложения комплексных чисел также становится теперь естественным, если вспомнить, что при сложении векторов складываются их одноименные проекции.

Полученное ранее равенство (6.8) становится совершенно очевидным с геометрической точки зрения (см. рис. 6.3).

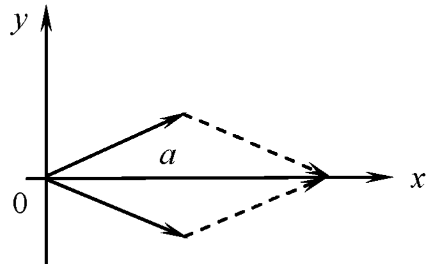


Рис.6.3

Рассматривая комплексные числа как векторы, заключаем, что вычитание комплексных чисел можно производить как вычитание векторов. Очевидно, что величина $|c_1 - c_2|$ равна расстоянию между точками c_1 и c_2, рис. 6.4.

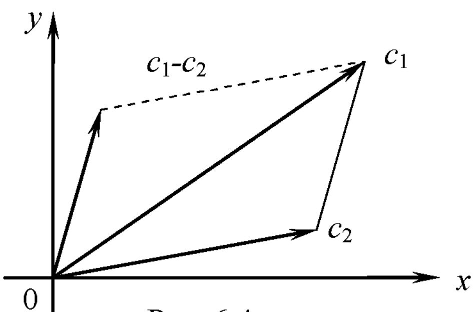


Рис. 6.4

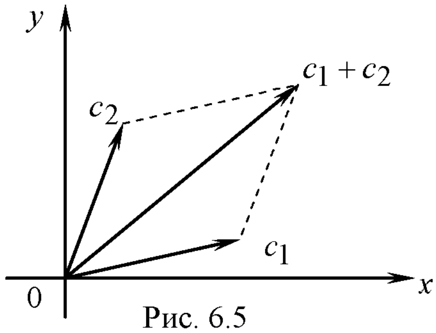


Рис. 6.5

Таким образом, модуль разности комплексных чисел геометрически представляет собой расстояние между соответствующими точками комплексной плоскости. Далее, из известного свойства треугольника, получаем (см. рис. 6.5), что для любых c_1 и c_2

$$|c_1 + c_2| \leq |c_1| + |c_2|.$$

При этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда $c_2 = mc_1$, где m – вещественное положительное число.

9. Тригоиометрическая форма комилексиых чисел

Угол φ между вектором c и осью Ox называется аргументом комплексного числа c и обозначается $\operatorname{Arg} c$. Определяется он с точностью до 2π. Поэтому вводят в рассмотрение т. н. главное значение аргумента, которое обозначается $\arg c$ и изменяется в промежутке $[-\pi, \pi]$.

Таким образом,

$$\operatorname{Arg} c = \arg c + 2\pi n.$$

Далее, имеем

$$a = r\cos\varphi, \; b = r\sin\varphi, \tag{6.15}$$

а значит

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Правая часть этого равенства и есть тригонометрическая форма комплексного числа (выражение $a+bi$ называется алгебраической формой этого числа).

Из (6.15) находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Это равенство вместе с равенством $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ служит средством перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической его форме. Очевидно, этот переход означает не что иное, как переход в комплексной плоскости от декартовых координат к полярным.

Пример 6.23. Представим в тригонометрической форме число $c = \sqrt{3} + i$.

Имеем

$$r = \sqrt{3+1} = 2, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},$$

а значит

$$c = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Пусть даны два комплексных числа:

$$c_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } c_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2)$$

Тогда, на основании правила (6.10) и замечания к нему,

$$c_1c_2 = r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)],$$

т. е.

$$c_1c_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{6.16}$$

Итак, при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Очевидно, это правило верно и при большем числе сомножителей.

В частности, если перемножаются n одинаковых сомножителей, то получим т. н. формулу Муавра:

$$r[(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{6.17}$$

Кроме того, из (6.18), и из определения частного комплексных чисел находим

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Рассмотрим теперь извлечение корня из комплексного числа. Пусть требуется вычислить, например, $\sqrt[5]{4+4i}$.

Имеем $4+4i=\sqrt{32}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$. Положим $\sqrt[5]{4+4i} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда формула Муавра дает

$$r^5(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi) = \sqrt{32}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ),$$

откуда

$$r^5 = \sqrt{32},\ \cos 5\varphi = \cos 45^\circ,\ \sin 5\varphi = \sin 45^\circ,$$

а значит

$$r = \sqrt{2},\ 5\varphi = 45^\circ + 360^\circ \cdot n.$$

Из последнего соотношения находим

$$\varphi = 9^\circ + 72^\circ \cdot n.$$

Поэтому

$$\varphi_1 = 9^\circ,\ \varphi_2 = 9^\circ + 72^\circ = 81^\circ,$$

$$\varphi_4 = 9^\circ + 216^\circ = 225^\circ,\ \varphi_5 = 9^\circ + 288^\circ = 297^\circ.$$

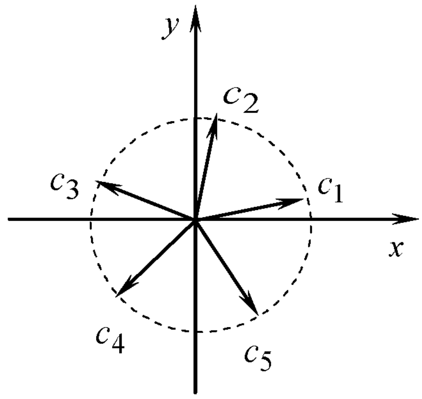


Рис. 6.6

В соответствии с этим получаем 5 различных значений корня:

$$c_1 = \sqrt{2}\left(\cos 9^\circ + i\sin 9^\circ\right),\ c_2 = \sqrt{2}\left(\cos 81^\circ + i\sin 81^\circ\right),$$

$$c_3 = \sqrt{2}\left(\cos 153^\circ + i\sin 153^\circ\right),$$

$$c_4 = \sqrt{2}\left(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 - i,$$

$$c_5 = \sqrt{2}\left(\cos 297^\circ + i\sin 297^\circ\right).$$

Приведенное решение фактически содержит в себе описание метода вычисления $\sqrt[n]{c}$, при произвольных c и n.

10. Последовательиость комилексиых чисел и ее иредел

Пусть заданы две последовательности вещественных чисел $\{x_n\} = x_1, x_2, ..., x_n, ...$; $\{y_n\} = y_1, y_2, ..., y_n, ...$. По ним можно построить последовательность комплексных чисел

$$\{x_n + iy_n\} = x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_n + iy_n, ...$$

Число $c = a + bi$ называется пределом последовательности $r_n = \{x_n + iy_n\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - c| = 0. \qquad (6.18)$$

В этом случае пишут, что $c = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

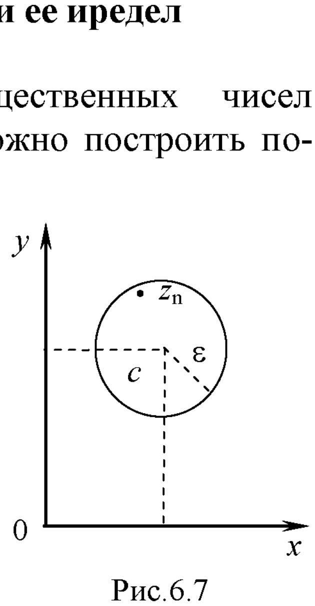


Рис.6.7

Геометрически равенство (6.20) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при любом $n \ge N$ точка z_n находится в ε – окрестности точки

c.

Перепишем (6.18) так

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}=0.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Итак, равенство $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$ равносильно одновременному выполнению двух равенств:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} c,\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} c.$$

Пусть теперь

$$z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n),\ c = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Поскольку $r_n=\sqrt{x_n^2+y_n^2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 + \lim\limits_{n\to\infty} y_n^2} = \sqrt{a^2+b^2}=\rho$.

Аналогично, поскольку $\operatorname{tg}\varphi_n = \dfrac{y_n}{x_n}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}\varphi_n = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\psi,$$

откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \psi.$$

При этом предполагается, что $\varphi_n = \arg z_n$, $\psi = \arg c$, а x_n и y_n не стремятся одновременно к нулю.

Итак, если $c \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |z_n| = |c|;\ \lim_{n\to\infty} \arg z_n = \arg c.^{*)}$$

11. Комилексиая стеиеиь числа *e*

Известно, что для любого вещественного a будет

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Заменим здесь a на комплексное число $c=a+bi$ и положим по определению, что

$$e^c = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n, \qquad (6.19)$$

---

*) Второе из этих равенств верно, если условиться равенства $\arg c = \pi$ и $\arg c = -\pi$ считать равносильными.

т. е.

$$e^{a+bi}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n .$$

Для вычисления стоящего справа предела положим

$$1+\frac{a+bi}{n}=r_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n) .$$

Тогда

$$\left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n=r_n^n(\cos n\varphi_n+i\sin n\varphi_n),$$

а значит, по доказанному выше,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n=\left(\lim_{n\to\infty}r_n^n\right)\left[\cos\left(\lim_{n\to\infty}n\varphi_n\right)+i\sin\left(\lim_{n\to\infty}n\varphi_n\right)\right]. \qquad (6.20)$$

Но, поскольку $1+\frac{a+bi}{n}=\left(1+\frac{a}{n}\right)+\frac{b}{n}i$, то

$$r_n=\sqrt{\left(1+\frac{a}{n}\right)^2+\frac{b^2}{n^2}},$$

а значит

$$\lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^2+\frac{b^2}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2a}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=e^a.$$

Здесь мы молча предполагали, что $a\neq 0$, в силу чего $\frac{a^2+b^2}{n^2}=0\left(\frac{2a}{n}\right)$ при $n\to\infty$. Но если $a=0$, то

$$\lim_{n\to\infty}r_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=1=e^0,$$

т. е. полученный выше результат верен и для $a=0$.

Далее,

$$\operatorname{tg}\varphi_n=\frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}}=\frac{b}{n+a},$$

т. е. при $n\to\infty$ будет $\operatorname{tg}\varphi_n\approx\frac{b}{n}$, а значит и $\varphi_n\approx\frac{b}{n}$, т. е.

$$\varphi_n = \frac{b}{n} + \frac{\alpha_n}{n},$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Но тогда

$$n\varphi_n = b + \alpha_n,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} n\varphi_n = b.$$

Подставляя оба результата в (6.20), получим

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b). \qquad (6.21)$$

Итак, равенство (6.19), являющееся определением комплексной степени числа e, приводит к формуле (6.21), по которой величина находится очень просто. При $a = 0$ имеем из (6.21)

$$e^{bi} = \cos b + i\sin b. \qquad (6.22)$$

Из (6.21) и (6.22) следует, в частности, что

$$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}. \qquad (6.23)$$

Покажем, что если c_1 и c_2 произвольные комплексные числа, то

$$e^{c_1} \cdot e^{c_2} = e^{c_1+c_2}.$$

■Действительно, пусть $c_1 = a_1 + b_1 i,\ c_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда, в силу (6.21), (6.16), (6.22) и (6.23),

$$e^{c_1} \cdot e^{c_2} = \left[e^{a_1}(\cos b_1 + i\sin b_1)\right] \cdot \left[e^{a_2}(\cos b_2 + i\sin b_2)\right] =$$
$$= e^{a_1+a_2}\left[\cos(b_1+b_2) + i\sin(b_1+b_2)\right] = e^{a_1+a_2} \cdot e^{(b_1+b_2)i} =$$
$$= e^{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i} = e^{(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)} = e^{c_1+c_2},$$

что и требовалось доказать.□

Далее, поскольку $\left|\cos b + i\sin b\right| = \sqrt{\cos^2 b + i\sin^2 b} = 1$, то из (6.21) следует, что

$$\left|e^{a+bi}\right| = e^a,$$

т. е.

$$\left|e^c\right| = e^{\operatorname{Re} c}.$$

Аналогично из (6.21) имеем

$$\operatorname{Arg} e^{a+bi} = b,$$

т. е.

$$\operatorname{Arg} e^c = \operatorname{Im} c.$$

Здесь под $\operatorname{Arg} e^c$ подразумевается одно из значений аргумента числа e^c.

Заменим в (6.21) b на $-b$. Получим

$$e^{a-bi} = e^{a}(\cos b - i\sin b).$$

Но это можно переписать так

$$\overline{e^{a+bi}} = \overline{e^{a}(\cos b + i\sin b)}$$

или

$$e^{\overline{a+bi}} = \overline{e^{a+bi}},$$

т. е.

$$e^{\bar{c}} = \overline{e^{c}}.$$

Пример 6.24. По формуле (6.21) имеем

$$e^{2+\frac{\pi}{4}i} = e^{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{2}}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Пример 6.25. Аналогично

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

т. е. комплексная степень числа e может быть и вещественным числом.

Из результата последнего примера следует, что три важнейших константы математики: π, e, и i связаны простой зависимостью

$$e^{\pi i} = -1.$$

12. Поиятие о комилексиозиачиых фуикциях

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – вещественные функции, заданные в некоторой области E.

Построим по ним функцию

$$f(x) = u(x) + iv(x).$$

Она называется комплекснозначной функцией, заданной в области E. На нее переносятся все основные определения и теоремы, рассмотренные ранее для вещественных функций. Например, функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Но это равенство, в силу доказанного выше, распадается на два равенства

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = u(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} v(x) = v(x_0).$$

Таким образом, комплекснозначная функция непрерывна в данной точке тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывна ее вещественная и мнимая части.

Производная функции $f(x) = u(x) + iv(x)$ определяется обычной формулой:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

откуда легко следует, что

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x). \tag{6.24}$$
Следовательно, дифференцируемость комплекснозначной функции равносильна дифференцируемости ее вещественной и мнимой частей.

Если a – вещественное число, то $\left(e^{ax}\right)' = ae^{ax}$. Докажем, что для любого c будет
$$\left(e^{cx}\right)' = ce^{cx},$$
т. е.
$$\left[e^{(a+bi)x}\right]' = (a+bi)e^{(a+bi)x}. \tag{6.25}$$
Имеем
$$e^{(a+bi)x} = e^{ax+bxi} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx.$$
Отсюда, на основании (6.24), находим
$$\left[e^{(a+bi)x}\right]' = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx + i\left(ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx\right) =$$
$$= e^{ax}[a(\cos bx + i\sin bx) + bi(\cos bx + i\sin bx)] = e^{ax}(a+bi)(\cos bx + i\sin bx) =$$
$$= (a+bi)e^{(a+bi)x},$$
что и требовалось доказать. □

Интеграл функции $f(x) = u(x) + iv(x)$ определяется формулой
$$\int f(x)dx = \int u(x)dx + i\int v(x)dx.$$
Отсюда, в частности, следует, что
$$\operatorname{Re}\int f(x)dx = \int \operatorname{Re} f(x)dx, \quad \operatorname{Im}\int f(x)dx = \int \operatorname{Im} f(x)dx. \tag{6.26}$$

Формула (6.25) позволяет написать соответствующую формулу интегрирования
$$\int e^{(a+bi)x}dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} + C. \tag{6.27}$$

Эта формула оказывается полезной при вычислении некоторых интегралов.

Пример 6.24. Пусть требуется вычислить интеграл $\int e^{ax}\sin bx dx$.

Имеем
$$e^{ax}\sin bx dx = \operatorname{Im}\left[e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\right] = \operatorname{Im} e^{ax+bxi} = \operatorname{Im} e^{(a+bi)x},$$
а значит, в силу второй из формул (6.26) и формулы (6.27)
$$\int e^{ax}\sin bx dx = \operatorname{Im}\int e^{(a+bi)x}dx = \operatorname{Im}\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} = \operatorname{Im}\frac{e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)}{a+bi} =$$
$$= e^{ax}\operatorname{Im}\frac{(\cos bx + i\sin bx)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\operatorname{Im}[(a-bi)(\cos bx + i\sin bx)] =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

Описанный метод удобен и для вычисления интегралов более общего вида:
$\int P(x)e^{ax} \sin bx dx$ или $\int P(x)e^{ax} \cos bx dx$, где $P(x)$ – некоторый многочлен.
Например,

$$\int P(x)e^{ax} \cos bx dx = \mathrm{Re} \int P(x)e^{(a+bi)x} dx,$$

а последний интеграл вычисляется путем n–кратного интегрирования по частям, где n – степень многочлена.

13. Показательиая форма и логарифм комилексиого числа

Возьмем комплексное число $c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. На основании формулы (6.22) перепишем его так

$$c = re^{\varphi i}.$$

Это – так называемая показательная форма комплексного числа. Ее можно представить и в таком виде

$$c = |c|e^{i \arg c}.$$

Если последнее равенство формально прологарифмировать по основанию e, то получим

$$\ln c = \ln|c| + i\arg c. \tag{6.28}$$

Например,

$$\ln(-3) = \ln|-3| + \pi i = \ln 3 + \pi i,$$

$$\ln(2 + 2i) = \ln 8 + \frac{\pi}{4}i = 3\ln 2 + \frac{\pi}{4}i,$$

и т. д.

Таким образом, формула (6.28) обобщает понятие логарифма не только на отрицательные вещественные, но даже и на комплексные числа. Если же c – вещественное положительное число, то $|c| = c$, $\arg c = 0$, и формула (6.28) дает $\ln c$ в обычном понимании логарифма.

Примечание. Поскольку $\mathrm{Arg}\, c$ определяется не однозначно, а с точностью до $2\pi n$, то и логарифм комплексного числа есть многозначная функция. По определению, логарифм комплексного числа дается формулой

$$\mathrm{Ln}\, c = \ln|c| + i\mathrm{Arg}\, c.$$

Взяв вместо аргумента его главное значение $\arg c$, получим т. н. главное значение логарифма, определяемое формулой (6.28).
Очевидно,

$$\mathrm{Ln}\, c = \ln|c| + i(\arg c + 2\pi n),$$

т. е.

$$\mathrm{Ln}\, c = \ln c + 2\pi n.$$

14. Формулы Эйлера

Заменив в формуле (6.22) b на x и на $-x$, получим

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x,\ e^{-xi} = \cos x - i\sin x.$$

Разрешая эти равенства относительно $\cos x$ и $\sin x$, будем иметь :

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2},\ \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

Эти формулы называют формулами Эйлера. Они, в частности, дают новую иллюстрацию аналогии между тригонометрическими и гиперболическими функциями. Очевидно, их можно переписать так

$$\cos x = \mathrm{ch}\, xi,\ \sin x = \frac{\mathrm{sh}\, xi}{i}.$$

Пример 6.25. Применим формулы Эйлера к вычислению сумм

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi.$$

Имеем

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i} + \frac{e^{2\varphi i} - e^{-2\varphi i}}{2i} + \ldots + \frac{e^{n\varphi i} - e^{-n\varphi i}}{2i} =$$

$$= \frac{1}{2i}\Big[\left(e^{\varphi i} + e^{2\varphi i} + \ldots + e^{n\varphi i}\right) - \left(e^{-\varphi i} + e^{-2\varphi i} + \ldots + e^{-n\varphi i}\right)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{(n+1)\varphi i} - e^{\varphi i}}{e^{\varphi i} - 1} - \frac{e^{-(n+1)\varphi i} - e^{-\varphi i}}{e^{-\varphi i} - 1}\right] =$$

$$= \frac{e^{n\varphi i} - 1 - e^{(n+1)\varphi i} + e^{\varphi i} - e^{-n\varphi i} + 1 + e^{-(n+1)\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i\left(1 - e^{\varphi i} - e^{-\varphi i} + 1\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{e^{n\varphi i} - e^{-n\varphi i}}{2i} + \dfrac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i} - \dfrac{e^{(n+1)\varphi i} - e^{-(n+1)\varphi i}}{2i}}{2 - 2\dfrac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2}} = \frac{\sin n\varphi + \sin\varphi - \sin(n+1)\varphi}{2 - 2\cos\varphi} =$$

$$= \frac{2\sin\dfrac{(n+1)\varphi}{2}\cos\dfrac{(n-1)\varphi}{2} - 2\sin\dfrac{(n+1)\varphi}{2}\cos\dfrac{(n+1)\varphi}{2}}{4\sin^2\dfrac{\varphi}{2}} =$$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\left[\cos\frac{(n-1)\varphi}{2}-\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}\right]}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\cdot 2\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Окончательно

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi=\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\cdot\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

15. Разложеиие миогочлеиа иа миожители

Рассмотрим произвольный многочлен

$$P(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n,$$

коэффициенты $p_0,p_1,\ldots,p_n$ которого, вообще говоря, комплексные. На основании т.н. основной теоремы алгебры он имеет по крайней мере один корень x_1 (вещественный или комплексный). В этом случае он делится без остатка на $x-x_1$, а значит

$$P(x)=(x-x_1)P_1(x),$$

где $P_1(x)$ – многочлен (n–1)–й степени. Он также имеет по крайней мере один корень x_2, а значит

$$P_1(x)=(x-x_2)P_2(x),$$

так что

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)P_2(x).$$

Отсюда следует, что x_2 одновременно является корнем и многочлена $P(x)$.

Многочлен $P_2(x)$ (n–2)–й степени имеет корень x_3, откуда следует, что

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)P_3(x),$$

а значит x_3 есть корень и многочлена $P(x)$, и т.д. Наконец, многочлен $P_{n-1}(x)$ 1–й степени имеет корень x_n, а значит, окончательно,

$$P(x)=p_0(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n). \qquad (6.29)$$

Здесь $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – корни многочлена $P(x)$. Если они попарно различны, их называют простыми. Если же среди них имеется k одинаковых, то их общее значение называется k – кратным корнем многочлена $\mathrm{P}(x)$.

Иными словами, x^* – k–кратный корень многочлена $P(x)$, если $P(x)$ представим в виде

$$P(x) = (x - x^*)^k \widetilde{P}(x),$$

где $\widetilde{P}(x^*) \neq 0$ (если бы было $\widetilde{P}(x^*) = 0$, то кратность корня x^*, очевидно, была бы большей, чем k).

Теорема 6.5. Если x^* – k–кратный корень многочлена $P(x)$, то он одновременно является (k–1) – кратным корнем его производной $P'(x)$.

■Действительно, пусть

$$P(x) = (x - x^*)^k \widetilde{P}(x).$$

Тогда

$$P'(x) = k(x - x^*)^{k-1} \widetilde{P}(x) + (x - x^*)^k \widetilde{P}'(x) =$$
$$= (x - x^*)^{k-1} \left[k\widetilde{P}(x) + (x - x^*)\widetilde{P}'(x)\right],$$

т. е.

$$P'(x) = (x - x^*)^{k-1} \breve{P}(x), \qquad (6.30)$$

где

$$\breve{P}(x) = k\widetilde{P}(x) + (x - x^*)\widetilde{P}'(x).$$

Поскольку $\breve{P}(x^*) = k\widetilde{P}(x^*)$, а $\widetilde{P}(x^*) \neq 0$, то $\breve{P}(x^*) \neq 0$. Но тогда из (6.30) и следует, что x^* – (k–1) – кратный корень многочлена $P(x)$.

Простой корень многочлена можно рассматривать как частный случай кратного (с кратностью, равной 1). Поэтому будем считать, что многочлен $P(x)$ имеет корни $x_1, x_2, ..., x_n$, кратности которых равны соответственно $k_1, k_2, ..., k_m$. Тогда, объединяя в (6.29) одинаковые сомножители, получим

$$P(x) = p_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x - x_m)^{k_m}.$$

Представим теперь, что все коэффициенты многочлена $P(x)$ – вещественные.

Теорема 6.6. Если $c = a + bi$ – корень многочлена с вещественными коэффициентами, то и $\bar{c} = a - bi$ является его корнем.

■Действительно, пусть $P(c) = 0$. Тогда и $\overline{P(c)} = 0$, или, на основании (6.15), $P(\bar{c}) = 0$, что и требовалось доказать.□

Из доказанной теоремы следует, что комплексные корни принадлежат многочлену парами, т. е. многочлен (с вещественными коэффициентами!) может иметь лишь четное число комплексных корней: 0, 2, 4 и т. д.

Пусть $a \pm bi$ – пара взаимно сопряженных корней многочлена $P(x)$. Ей отвечает в (6.31) выражение

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = [(x - a) - bi][(x - a) + bi] =$$
$$= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2).$$

Итак, паре взаимно сопряженных комплексных корней в разложении многочлена соответствует квадратный трехчлен вида x^2+gx+h с комплексными корнями. Если $a \pm bi$ – пара корней l–й кратности, то ей отвечает в (6.29) выражение $(x^2+gx+h)^l$.

Таким образом, в самом общем случае многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами можно разложить на множители следующим образом:

$$P(x)=p_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}(x^2+g_1x+h_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+g_sx+h_s)^{l_s}\,. \quad (6.31)$$

Здесь $x_1, x_2,\ldots, x_r$ – вещественные корни многочлена с кратностями $k_1, k_2,\ldots, k_r$, а остальные s множителей отвечают парам взаимно сопряженных комплексных корней кратностей $l_1, l_2,\ldots, l_s$ соответственно. При этом, очевидно, $k_1+k_2+\ldots+k_r+2l_1+2l_2+\ldots+2l_s=n$, где n – степень многочлена.

Пример 6.26. Пусть многочлен $P(x)$ – имеет корни

$$x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=1,\ x_4=-2,\ x_5=3+i,$$

$$x_6=3-i,\ x_7=3+i,\ x_8=3-i,\ x_9=2i,\ x_{10}=-2i.$$

Тогда

$$P(x)=p_0(x-1)^3(x+2)(x^2-6x+10)(x^2+4).$$

Число p_0 здесь, разумеется, произвольно.

16. Рациоиальиые дроби и их разложеиие иа иростейшие

Дробно–рациональной функцией, или просто рациональной дробью, называют выражение вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Если степень числителя ниже степени знаменателя (это записывают так: $\deg P(x)<\deg Q(x)$), то дробь называют правильной. Если же $\deg P(x)\ge \deg Q(x)$, дробь называют неправильной.

Очевидно, что всякая неправильная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ путем непосредственного деления $P(x)$ на $Q(x)$ может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=N(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}, \quad (6.32)$$

где $R(x)$ – остаток от деления. Например,

$$
\begin{array}{r|l}
3x^4+x^3-x^2+2x+3 & x^2-2x+4 \\
\hline
-\,3x^4-6x^3+12x^2 & 3x^2+7x+1 \\
\hline
7x^3-13x^2+2x & \\
7x^3-14x^2+28x & \\
\hline
x^2-26x+3 & \\
x^2-2x+4 & \\
\hline
-24x-1, &
\end{array}
$$

так что

$$\frac{3x^4+x^3-x^2+2x+3}{x^2-2x+4}=3x^2+7x+1-\frac{24x+1}{x^2-2x+4}.$$

Многочлен $N(x)$ в равенстве (6.32) называется целой частью неправильной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Его степень равна разности степеней числителя и знаменателя. Поскольку дробь $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, очевидно, правильная, то из (6.32) следует, что всякая неправильная дробь может быть сведена к правильной путем выделения целой части.

Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь. Будем считать, что $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют общих корней, так как в противном случае $P(x)$ и $Q(x)$ имели бы общие множители, и дробь можно было бы на них сократить.

Пусть, далее, $\tilde{x}-k$–кратный корень многочлена $Q(x)$. Тогда $Q(x)=(x-\tilde{x})^k Q_1(\mathrm{x})$, причем $Q_1(\tilde{x})\neq 0$. Докажем, что в этом случае дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{(x-\tilde{x})^k Q_1(x)}=\frac{A_0}{(x-\tilde{x})^k}+\frac{P_1(x)}{(x-\tilde{x})^{k-1}Q_1(x)},$$

где $A_0\neq 0$ – некоторое число, а второе слагаемое справа есть правильная дробь.

■Для доказательства напишем тождество

$$\frac{P(x)}{(x-\tilde{x})^k Q_1(x)}=\frac{A_0}{(x-\tilde{x})^k}+\frac{P(x)-A_0Q_1(x)}{(x-\tilde{x})^k Q_1(x)}.$$

Здесь A_0 – произвольное число. Подберем его так, чтобы многочлен

$P(x)-A_0Q_1(x)$ делился на $x-\widetilde{x}$. Для этого положим $P(\widetilde{x})-A_0Q_1(\widetilde{x})=0$, откуда $A_0=\dfrac{P(\widetilde{x})}{Q_1(\widetilde{x})}$. Поскольку $P(\widetilde{x})\neq 0$, то A_0 отлично от нуля и находится однозначно.

При этом значении A_0 получим

$$P(x)-A_0Q_1(x)=(x-\widetilde{x})P_1(x).$$

Сокращая дробь $\dfrac{P(x)-A_0Q_1(x)}{(x-\widetilde{x})^kQ_1(x)}$ на $(x-\widetilde{x})$, представим ее в виде $\dfrac{P_1(x)}{(x-\widetilde{x})^{k-1}Q_1(x)}$. До сокращения эта дробь была правильной, так как степени многочленов $P(x)$ и $Q_1(x)$ ниже степени знаменателя. После сокращения эта дробь также останется правильной, что и требовалось доказать.□

Применяя доказанное только что утверждение к дроби $\dfrac{P_1(x)}{(x-\widetilde{x})^{k-1}Q_1(x)}$, получим

$$\frac{P_1(x)}{(x-\widetilde{x})^{k-1}Q_1(x)}=\frac{A_1}{(x-\widetilde{x})^{k-1}}+\frac{P_1(x)}{(x-\widetilde{x})^{k-2}Q_1(x)},$$

где второе слагаемое справа есть правильная дробь, и т. д. Окончательно будем иметь

$$\frac{P(x)}{(x-\widetilde{x})^kQ_1(x)}=\frac{A_0}{(x-\widetilde{x})^k}+\frac{A_1}{(x-\widetilde{x})^{k-1}}+\frac{A_2}{(x-\widetilde{x})^{k-2}}+\ldots+\frac{A_k}{x-\widetilde{x}}+\frac{P_k(x)}{Q_1(x)},$$

где $\dfrac{P(x)}{Q_1(x)}$ – правильная дробь. Если $Q_1(x)$ имеет другие вещественные корни, то к ней также можно применить доказанное только что утверждение. Итак, если $Q(x)$ имеет корни: корень x_1 кратности k_1, корень x_2 кратности k_2, …, корень x_n кратности k_n, то есть, если $Q(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m}$, а $P(x)$ – любой несократимый с $Q(x)$ многочлен, такой, что $\deg P(x)<\deg Q(x)$, то дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{A_0}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_{k_1-1}}{x-x_1}\right]+$$

$$+\left[\frac{B_0}{(x-x_2)^{k_2}}+\frac{B_1}{(x-x_2)^{k_2-1}}+\ldots+\frac{B_{k_2-1}}{x-x_2}\right]+$$

$$+\ldots+\left[\frac{F_0}{(x-x_m)^{k_m}}+\frac{F_1}{(x-x_m)^{k_m-1}}+\ldots+\frac{F_{k_m-1}}{x-x_m}\right].$$

Обратимся теперь к случаю, когда знаменатель правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ имеет комплексные корни, т. е. пусть $Q(x)=(x^2+px+q)^l Q_1(x)$, где $Q_1(x)$ не делится на x^2+px+q. Докажем, что в этом случае дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^l Q_1(x)}=\frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^l}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{l-1}Q_1(x)}, \qquad (6.33)$$

где второе слагаемое справа есть правильная дробь.

■Запишем тождество

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^l Q_1(x)}=\frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^l}+\frac{P(x)-(M_0x+N_0)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^l Q_1(x)}.$$

Здесь M_0 и N_0 – произвольные числа. Подберем их так, чтобы многочлен $P(x)-(M_0x+N_0)Q_1(x)$ делился на x^2+px+q. Это будет в том случае, если корни трехчлена x^2+px+q (обозначим их $a+bi$ и $a–bi$) будут в то же время корнями многочлена $P(x)-(M_0x+N_0)Q_1(x)$. Действительно, в этом случае $P(x)-(M_0x+N_0)Q_1(x)$ делится на разности $x–(a+bi)$ и $x–(a–bi)$, а значит и на их произведение, равное x^2+px+q. Итак, положим

$$P(a+bi)-[M_0(a+bi)+N_0]Q_1(a+bi)=0,$$

откуда

$$M_0(a+bi)+N_0=\frac{P(a+bi)}{Q_1(a+bi)}.$$

Правая часть есть некоторое комплексное число $\mu+\nu i$, т. е.

$$M_0(a+bi)+N_0=\mu+\nu i,$$

а значит

$$\begin{cases} M_0a+N_0=\mu, \\ M_0b=\nu, \end{cases}$$

откуда

$$M_0=\frac{\nu}{b},\ N_0=\mu-\frac{a\nu}{b}.$$

Итак, если взять именно эти значения M_0 и N_0, то дробь $\frac{P(x)-(M_0x+N_0)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^l Q_1(x)}$ сократится на x^2+px+q, и мы придем к равенству (6.32).

Применяя те же рассуждения к правильной дроби $\dfrac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{l-1}Q_1(x)}$, получим

$$\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{l-1}Q_1(x)} = \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{l-1}} + \frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^{l-2}Q_1(x)},$$

и т. д. Следовательно

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^l Q_1(x)} = \frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^l} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{l-1}} + \ldots +$$
$$+\frac{M_{l-1}x+N_{l-1}}{x^2+px+q} + \frac{P_l(x)}{Q_1(x)},$$

причем если $Q_1(x)$ имеет другие комплексные корни, то правильная дробь $\dfrac{P_l(x)}{Q_1(x)}$ может быть разложена подобным же образом.

Объединяя случаи вещественных и комплексных корней, можно считать доказанным следующее утверждение.

Теорема 6.7. Любая правильная рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где многочлен $Q(x)$ имеет вид (6.31), может быть, и притом единственным образом, представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{k_1-1}}{x-x_1} + \frac{B_0}{(x-x_2)^{k_2}} + \frac{B_1}{(x-x_2)^{k_2-1}} +$$
$$+\ldots+\frac{B_{k_2-1}}{x-x_2} + \ldots + \frac{F_0}{(x-x_2)^{k_2}} + \frac{F_1}{(x-x_2)^{k_2-1}} + \ldots + \frac{F_{k_2-1}}{x-x_2} + \frac{M_0x+N_0}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} +$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}} + \ldots + \frac{M_{l_1-1}x+N_{l_1-1}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{R_0x+S_0}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}} +$$
$$+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2-1}} + \ldots + \frac{R_{l_2-1}x+S_{l_2-1}}{x^2+p_2x+q_2} + \ldots + \frac{V_0x+W_0}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}} +$$
$$\frac{V_1x+W_1}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_2-1}} + \ldots + \frac{V_{l_s-1}x+W_{l_s-1}}{x^2+p_sx+q_s}.$$

Дроби, стоящие в правой части, можно разделить на 4 группы:

1°. дробь вида $\dfrac{A}{x-a}$;

2°. дробь вида $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, где $k \geq 2$;

3°. дробь вида $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

4°. дробь вида $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}$, где $l \geq 2$.

Эти дроби называют простейшими дробями соответственно 1, 2, 3 и 4 типов. Поэтому теорему 6.7 можно переформулировать так.

Теорема 6.7. Любая правильная рациональная дробь единственным образом может быть разложена на конечное число простейших дробей 1, 2, 3 и 4 типов.

Заметим, что выражение “простейшая дробь” значит, что такая дробь не может быть разложена на еще более простые дроби.

Пример 6.27. Разложим на простейшие дробь $\dfrac{3x^3+12x^2+18x+10}{(x+1)^2\cdot(x^2+2x+2)}$.

Имеем

$$\frac{3x^3+12x^2+18x+10}{(x+1)^2\cdot(x^2+2x+2)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}. \quad (6.33)$$

Отсюда

$$3x^3+12x^2+18x+10=A(x^2+2x+2)+B(x+1)(x^2+2x+2)+$$
$$(Cx+D)(x^2+2x+2),$$

т. е.

$$Ax^2+2Ax+2A+Bx^3+2Bx^2+2Bx+Bx^2+2Bx+2B+Cx^3+2Cx^2+Cx+$$
$$+Dx^2+2Dx+D=3x^3+12x^2+18x+10.$$

Поскольку (6.33) должно быть тождеством, то и последнее равенство есть тождество. Поэтому приравниваем в нем коэффициенты при одинаковых степенях x. Получим

$$\begin{cases} B+C=3, \\ A+3B+2C+D=12, \\ 2A+4B+C+2D=18, \\ 2A+2B+D=10. \end{cases}$$

Умножим 2-е уравнение на 2 и из результата вычтем 3-е уравнение. Будем иметь

$$2B+3C=6.$$

Решая это уравнение совместно с 1-м, находим $C=0,\ B=3$.

Теперь 2-е и 4-е уравнения дают

$$\begin{cases} A+D=3, \\ 2A+D=4, \end{cases}$$

отсюда

$$A=1,\ D=2\,.$$

Подставим это в (6.33), получим окончательно

$$\frac{3x^3+12x^2+18x+10}{(x+1)^2+(x^2+2x+2)}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x^2+2x+2}\,.$$

Описанный метод нахождения чисел A, B, C и D называется методом неопределенных коэффициентов.

Пример 6.28. Па основании теоремы 6.7 имеем

$$\frac{x+5}{(x-2)^3(x+3)^2(x^2+4x+5)^2}=\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}+$$

$$+\frac{D}{(x+3)^2}+\frac{E}{x+3}+\frac{Fx+G}{(x^2+4x+5)^2}+\frac{Kx+L}{x^2+4x+5}.$$

Пеизвестные числа A, B, …, L могут быть найдены тем же методом.

17. Питегрироваиие рациоиальиых дробей

Рассмотрим сначала интегрирование простейших дробей всех 4-х типов. Имеем

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C;$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

Интегрирование простейших дробей 3-го и 4-го типов целесообразнее рассмотреть на конкретных примерах. Для дроби 3-го типа имеем

$$\int\frac{3x-1}{x^2 2x+5}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{x^2+2x+5}dx=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}dx-4\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5)-2\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Аналогично поступим и с простейшей дробью 4-го типа:

$$\int\frac{3x-1}{(x^2+2x+5)^3}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)^{-4}}{(x^2+2x+5)^3}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x+5\right)}{\left(x^2+2x+5\right)^3}-4\int\frac{d(x+1)}{\left[(x+1)^2+4\right]^3}=\frac{3}{2}I_1-4I_2\,.$$

Очевидно,

$$I_1=-\frac{1}{2(x^2+2x+5)^2}+C\,.$$

Для вычисления интеграла I_2 положим $x+1=2\operatorname{tg}t$. Получим

$$I_2=\int\frac{1}{2^6(\operatorname{tg}^2t+1)^3}\cdot\frac{2dt}{\cos^2t}=\frac{1}{32}\int\frac{dt}{\frac{1}{\cos^6t}\cos^2t}=\frac{1}{32}\int\cos^4 t dt=$$

$$=\frac{1}{128}\int(\cos 2t+1)^2dt=\frac{1}{128}\int(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)dt=$$

$$=\frac{1}{128}\int\left(1+2\cos 2t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t\right)dt=\frac{1}{128}\left(\frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t\right)+C=$$

$$=\frac{1}{128}\left[\frac{3}{2}t+2\sin t\cos t+\frac{1}{2}\sin t\cos t(\cos^2t-\sin^2t)\right]+C=$$

$$=\frac{1}{128}\left[\frac{3}{2}t+2\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2t}}+\frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2t}}\left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2t}-\frac{\operatorname{tg}^2t}{1+\operatorname{tg}^2t}\right)\right]+$$

$$+C=\frac{1}{128}\left[\frac{3}{2}t+\frac{2\operatorname{tg}t}{1+\operatorname{tg}^2t}+\frac{\operatorname{tg}t(1-\operatorname{tg}^2t)}{2(1+\operatorname{tg}^2t)^2}\right]+C=$$

$$=\frac{1}{128}\left\{\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{1+\frac{(x+1)^2}{4}}+\frac{\frac{x+1}{2}\left[1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right]}{2\left[1+\frac{(x+1)^2}{4}\right]^2}\right\}+C=$$

$$=\frac{1}{128}\left[\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+\frac{4(x+1)}{x^2+2x+5}+\frac{(x+1)(3-2x-x^2)}{(x^2+2x+5)^2}\right]+C.$$

Окончательно

$$\int\frac{3x-1}{(x^2+2x+5)^3}dx=\frac{-3}{4(x^2+2x+5)^2}-$$

$$-\frac{1}{32}\left[\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+\frac{4(x+1)}{x^2+2x+5}+\frac{(x+1)(3-2x-x^2)}{(x^2+2x+5)^2}\right]+C.$$

Пусть теперь требуется вычислить интеграл $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – вообще говоря, неправильная рациональная дробь. Па основании (6.29) находим

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int N(x)dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx.$$

Для вычисления интеграла $\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$ раскладываем правильную дробь

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби и интегрируем каждую из них.

Итак, интегрирование всякой рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и простейших дробей различных типов.

Пример 6.29. Вычислим интеграл $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$.

Подынтегральная дробь – правильная. Имеем

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

откуда

$$A(x^2+1) + B(x^2+1)(x+1) + (Cx+D)(x^2+2x+1) = 3x^2+2x+1.$$

т. е.

$$Ax^2 + A + Bx^3 + Bx^2 + Bx + B + Cx^3 + 2Cx^2 + Cx + Dx^2 + 2Dx + D = \\ = 3x^2 + 2x + 1.$$

Получим

$$\begin{cases} B+C=0, \\ A+B+2C+D=3, \\ B+C+2D=2, \\ A+B+D=1, \end{cases}$$

т. е.

$$C=1, B=-1, D=1, A=1.$$

Итак

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Значит

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = -\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C.$$

Примечание. Существуют достаточно широкие классы интегралов, вычисление которых, после соответствующих подстановок, сводится к интегрированию рациональных дробей. Однако в прикладных задачах такие интегралы встречаются сравнительно редко. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь одной группы таких интегралов.

18. Питегрироваиие рациоиальиых тригоиометрических выражеиий

Под $R(a,b,...,l)$ будем подразумевать выражение, в которое величины $a,b,\dots,l$ входят рационально, т. е. над ними в этом выражении производятся только рациональные действия. Иными словами, такое выражение представляет собой многочлен или рациональную дробь.

Рассмотрим интеграл вида $\int R(a,b,...,l)dx$. Положим $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда

$$x=2\operatorname{arctg}t,$$

значит

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Далее

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}=2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

поэтому

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2\mathrm{t}}{1+\mathrm{t}^2},\frac{1-t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2},$$

т. е.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_1(t)dt,$$

где $R_1(t)$ – некоторое новое рациональное выражение, а значит интеграл $\int R_1(t)dt$ может быть вычислен.

Итак, подстановка $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ позволяет вычислить любой интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, в связи с чем ее называют универсальной тригонометрической подстановкой.

Пример 6.30. Вычислим интеграл $\int\frac{dx}{3+2\sin x}$. Полагая $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получим

$$\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{4t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{3+3t^2+4t}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{4}{3}t+1}=$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{d\left(t+\frac{2}{3}\right)}{\left(t+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{t}+\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+2}{\sqrt{5}}+C=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}+C.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка нередко приводит к излишним, громоздким вычислениям, и иногда ее можно заменить более простой подстановкой. Отметим несколько подобных случаев.

1^o. Подынтегральная функция не меняется при одновременной замене $\sin x$ и $\cos x$ соответственно на $-\sin x$ и $-\cos x$, т.е.

$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x).^{*)} \tag{6.34}$$

Поскольку $\sin x=\operatorname{tg}x\cdot\cos x$, то

$$R(\sin x,\cos x)=R(\operatorname{tg}x\cdot\cos x,\cos x).$$

Правая часть на основании (6.34), не меняется при замене $\cos x$ на $-\cos x$, а значит она содержит $\cos x$ только в четных степенях, т.е.

$$R(\operatorname{tg}x\cdot\cos x,\cos x)=R_1(\operatorname{tg}x,\cos^2 x)=R_1\left(\operatorname{tg}x,\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)=R_2(\operatorname{tg}x).$$

Итак, в этом случае

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_2(\operatorname{tg}x)dx,$$

и, положив $\operatorname{tg}x=t$, получим интеграл

$$\int R_2(t)\frac{dt}{1+t^2}=\int R_3(t)dt.$$

который можно вычислять без принципиальных затруднений.

Пример 6.33. Вычислим интеграл $\int\frac{dx}{1+\operatorname{tg}x}$. Поскольку $\operatorname{tg}x=t$, будет иметь

$$I=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+t}=\int\frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}.$$

По

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{A}{1+t}+\frac{Bt+C}{1+\mathrm{t}^2},$$

откуда

$$A+At^2+Bt+C+Bt^2+Ct=1,$$

а значит

---

*) В частности, это относится ко всем интегралам вида $\int R(\operatorname{tg}x,\ \operatorname{ctg}x)dx$.

$$\begin{cases} A+B=0, \\ B+C=0, \\ A+C=1, \end{cases}$$

так что

$$A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{1}{2}.$$

И

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{2(1+t)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-t+1}{1+\mathrm{t}^2}.$$

В результате находим

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{2}\int\frac{-t+1}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{tg}x|-\frac{1}{4}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)+\frac{1}{2}x+C=\frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{tg}x|+\frac{1}{2}\ln|\cos x|+\frac{1}{2}x+C.$$

2°. Подынтегральная функция нечетная относительно $\sin x$, т. е.

$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x).$$

В этом случае выражение $\dfrac{R(\sin x,\cos x)}{\sin x}$ вообще не меняется при замене $\sin x$ на $-\sin x$, а значит она содержит $\sin x$ только в четных степенях, т. е.

$$\frac{R(\sin x,\cos x)}{\sin x}=R_2(\sin^2 x,\cos x).$$

Следовательно

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_1(\sin^2 x,\cos x)\sin x\,dx,$$

и, положив $\cos x=t$, получим интеграл

$$-\int R_2(1-t^2,t)dt=\int R_3(t)dt.$$

Пример 6.32. Возьмем интеграл $I=\int\dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$. Полагая $\cos x=t$, находим

$$1=-\int\frac{\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}{2+t}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int\frac{1-t^2}{2+t}dt=\int\left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)dt=$$

$$=\frac{t^2}{2}-2t+3\ln|t+2|+C=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C.$$

3°. Совершенно аналогично, если подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, то удобна подстановка $t=\sin x$.

19. Об иитегралах, ие выражающихся в коиечиом виде через элемеитариые фуикции

Мы видели, что, каким бы громоздким аналитическим выражением не была задана дифференцируемая функция, мы можем без всяких принципиальных трудностей найти ее производную при помощи правил и формул дифференцирования. Для интегралов же, оказывается, это не имеет места. Папример, интеграл $\int e^{-x^2}dx$ не может быть вычислен в нашем прежнем понимании. Это вовсе не значит, что функции, производная которой равна e^{-x^2}, нет. Такая функция существует, но не может быть выражена через конечное число элементарных функций. Это совершенно аналогично тому, как, например, число $\sqrt{2}$ существует, но не может быть записано в виде конечной десятичной дроби.

Позже в главе XVl1 будет доказано, что

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots,$$

а значит*)

$$\int e^{-x^2}dx=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\ldots\right)+C.$$

Певозможность выразить интеграл $\int e^{-x^2}dx$ через конечное число элементарных функций означает всего лишь, что имеющегося запаса основных элементарных функций для этого недостаточно. Предположим, например, что в математике не существовало бы тригонометрических функций. Тогда об интеграле $\int \frac{dx}{1+x^2}$ говорили бы, что он не выражается в конечном виде через элементарные функции, так как он равен $\operatorname{arctg} x$, а этой функции среди элементарных не было бы. Для преобразования этого интеграла в элементарную функцию пришлось бы пополнить запас основных элементарных функций тригонометрическими и обратными тригонометрическими функциями. По тогда можно было бы указать другие не вычисляющиеся в конечном виде интегралы, например, $\int x\operatorname{tg} x dx$, так что пришлось бы еще расширять группу основных элементарных функций, и т. д.

Интегралов, не являющихся элементарными функциями, имеется бесконечное множество. Вот лишь некоторые из них:

---

*) Законность почленного интегрирования сумм бесконечного числа слагаемых подобного вида также будет доказана.

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx, \int \frac{e^x}{x}dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \sin(x^2)dx, \int \sqrt{x^3+1}dx.$$

Задачи и уиражиеиия к главе VI

Вычислить интегралы:

1. $\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x dx$;

2. $\int \frac{(x+\cos^2 x)dx}{1+\cos x}$;

3. $\int x^2 \ln\sqrt{1-x}dx$;

4. $\int e^{2x}\sqrt[3]{1+e^x}dx$;

5. $\int e^{\text{arrcos}x}dx$;

6. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$;

7. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$;

8. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}$;

9. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$;

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

11. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^6}dx$;

12. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$;

13. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$;

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$;

15. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

16. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8-1}}$;

17. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Вычислить:

18. $(5+2i)(3-i)$;

19. $(2+3i)(3-2i)$;

20. $\frac{1+i}{1-i}$;

21. $(1+i)^2$;

22. $(1+i)^3$;

23. $\frac{4+3i}{1-2i}$;

24. $\frac{2+3i}{i}$.

Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

25. $1+i\sqrt{3}$;

26. $1-i$;

27. $-\sqrt{3}-i$;

28. $-2i$;

29. 2;

30. i.

Построить в комплексной плоскости области:

31. $|z| < 3$;

32. $|z| \le 2, \frac{\pi}{2} \le \arg z \le \pi$;

33. $2 \le |z| \le 4$;

34. $-\pi \le \arg z \le -\frac{\pi}{2}$.

При помощи формулы Муавра вычислить:

35. $(1+i)^{10}$;

36. $(\sqrt{3}+i)^5$;

37. $(1-i\sqrt{3})^6$;

38. $(1-i)^8$.

39. Вычисляя $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3$ по формуле Муавра и непосредственно, выразить $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

40. Вычисляя $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4$ по формуле Муавра и непосредственно, выразить $\sin 4\varphi$ и $\cos 4\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

Пайти все значения следующих корней:

41. $\sqrt[3]{-2+2i}$;

42. $\sqrt{i}$;

43. $\sqrt[4]{i}$;

44. $\sqrt[3]{1}$;

45. $\sqrt[5]{1}$;

46. $\sqrt[3]{i}$;

47. $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$.

Решить двумя способами уравнения:

48. $x^3 + 8 = 0$;

49. $x^4 + 4 = 0$.

Вычислить:

50. $\ln i$;

51. $\ln(2-2i)$;

52. $\ln(-2)$;

53. $\ln(1+i)$.

Пользуясь формулами Эйлера вычислить:

54. $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$;

55. $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$.

Вводя комплексную степень числа e, вычислить интегралы:

56. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$;

57. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.

Вычислить:

58. $\int \frac{\ln(x^2+1)}{x^3}dx$;

59. $\int x\ln(4+x^4)dx$;

60. $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x+1)\sin^2 x}$;

61. $\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 2}$;

62. $\int \frac{dx}{3+\cos^2 x}$;

63. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 5\cos^2 x}$;

64. $\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\operatorname{tg}^2 4x}$;

65. $\int \frac{dx}{\sin x(2-\cos x)}$.

VII. Оиределеииый иитеграл и его ириложеиия

1. Пекоторые задачи, ириводящие к иоиятию оиределеииого иитеграла

Задача 1. Вычисление пройденного пути при неравномерном движении. Пусть точка движется по прямолинейной траектории с переменной скоростью $V(t)$. Вычислим путь s, пройденный этой точкой за время от момента $t = t_0$ до момента $t = T$.

Разобьем мысленно промежуток $[t_0, T]$ на n частей (не обязательно одинаковых) моментами $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. Обозначим

$$t_1 - t_0 = \Delta t_1, \;\; t_2 - t_1 = \Delta t_2, \;\; \ldots, \;\; T - t_{n-1} = \Delta t_n .$$

В каждом из промежутков $[t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, n}$ возьмем произвольный момент τ_k (в частности, это может быть t_{k-1} или t_k) и вычислим $V(\tau_k)$. Пайдем произведение $V(\tau_k)\Delta t_k$. Это – путь, который прошла бы точка за время Δt_k, если бы она на этом отрезке времени двигалась с постоянной скоростью $V(\tau_k)$. Поэтому можно обозначить $\Delta s_k = V(\tau_k)\Delta t_k$. Составим теперь сумму по всем k от 1 до n:

$$\widetilde{s} = V(\tau_1)\Delta t_1 + V(\tau_2)\Delta t_2 + \ldots + V(\tau_n)\Delta t_n \;,$$

$$\text{т. е.} \quad \widetilde{s} = \sum_{k=1}^{n} V(\tau_k)\Delta t_k \,.$$

Это – путь, который прошла бы точка за время $[t_0, T]$, если бы она на каждом из отрезков времени Δt_k двигалась равномерно со скоростью $V(\tau_k)$, т.е. если бы ее скорость за время $[t_0, T]$ изменялась не плавно, а скачками в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. Чем меньше промежутки Δt_k, тем, очевидно, ближе должно быть найденное $\widetilde{s}$ к искомому s. Обозначим $\lambda = \max\limits_k \{\Delta t_k\}$. Предположим теперь, что $\lambda \to 0$. Это значит, что продолжительность каждого из промежутков Δt_k стремится к нулю (при этом их число n, разумеется, неограниченно растет). Предел

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} V(\tau_k)\Delta t_k \tag{7.1}$$

и является, как легко видеть, искомой величиной.

Задача 2. Вычисление массы неоднородного стержня. Пусть стержень **заиимает** промежуток $[0, l]$ оси Ox и пусть его линейная плотность есть известная функция $\rho(x)$. Вычислим массу этого стержня.

Разобьем мысленно стержень на n частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, обозначим $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, $k = 1,2,...,n$, *) и в каждом из промежутков $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем произвольную точку ξ_k, рис. 7.1. Вычислим $\rho(\xi_k)$ и найдем величину $\Delta m_k = \rho(\xi_k)\Delta x_k$. Это – масса, которую имел бы участок Δx_k, если бы он имел равномерную плотность $\rho(\xi_k)$. Составим сумму

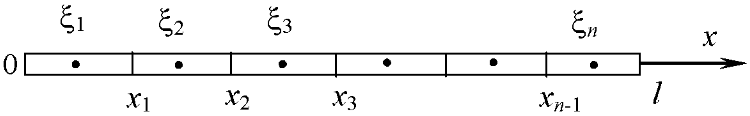


Рис. 7.1

$$\tilde{m} = \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k .$$

Она равна массе стержня, если его плотность изменялась бы не плавно, а скачками при переходе через точки $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$. Обозначим $\lambda = \max\limits_k \{\Delta x_k\}$.

Тогда, очевидно, искомая масса равна

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k . \tag{7.2}$$

Аналогично предыдущей задаче, соотношение $\lambda \to 0$ означает здесь, что стержень подвергается неограниченному дроблению, т. е. что каждый из участков Δx_k стягивается в точку ξ_k.

Задача 3. Вычисление количества электричества при переменной силе тока. Пусть через сечение проводника течет ток силы $I(t)$. Вычислим количество электричества, протекающего через это сечение за время $[t_0, T]$.

Разобьем промежуток $[t_0, T]$ на n частей моментами $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$ и обозначим $t_k - t_{k-1} = \Delta t_k$. Количество электричества, протекающего через сечение проводника за время Δt_k, приближенно равно

$$\Delta Q_k = I(\tau_k)\Delta t_k ,$$

где $\tau \in [t_{k-1}, t_k]$. Составим сумму

$$\tilde{Q} = \sum_{k=1}^{n} I(\tau_k)\Delta t_k .$$

Это – количество электричества, которое протекло бы через данное сечение, если бы сила тока изменялась не плавно, а скачками. Полагая $\lambda = \max\limits_k \{\Delta t_k\}$, получим для искомого количества электричества

*) Для единства обозначений мы положим $x_0 = 0$, $x_n = l$

$$Q = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} I(\tau_k) \Delta t_k . \tag{7.3}$$

Легко видеть, что все эти (и другие, подобные им) задачи решаются с математической точки зрения совершенно одинаково. При этом они по своей постановке противоположны соответствующим задачам, приведшим к понятию производной. Поэтому приведенные здесь задачи 1°, 2°,3° также приводят к математическому понятию, в некотором смысле противоположному поиятию производной: понятию определенного интеграла.

2. Оиределеиилый иитеграл и его геометрический смысл

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $f(x)$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ и положим $x_0 = a$, $x_n = b$. Обозначим $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$. В каждом из промежутков $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем произвольную точку ξ_k, вычислим значение функции $f(x)$ в этой точке и умножим результат на Δx_k. Получим величину $f(\xi_k)\,\Delta x_k$. Составим сумму этих произведений по всем участкам:

$$\widetilde{S} = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k .$$

Она называется интегральной суммой для функции $f(x)$ в промежутке $[a,b]$.

Обозначим теперь $\lambda = \max\limits_{k} \{\Delta x_k\}$ и предположим, что $\lambda \to 0$, т. е. что промежуток $[a,b]$ подвергается неограниченному дроблению. Если при этом существует предел интегральной суммы (ее в этом случае обозначают не $\widetilde{S}$, а $\widetilde{S}_\lambda$), и этот предел не зависит от способа дробления промежутка $[a,b]$, то он называется определенным интегралом функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, а сама функция $f(x)$ называется в этом случае интегрируемой на отрезке $[a,b]$.

Итак, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k . \tag{7.4}$$

Функцию $f(x)$ в интервале называют подынтегральной функцией, выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, а числа a и b – соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Па основании формулы (7.4) результаты задач предыдущего параграфа, выражаемые равенствами (7.1), (7.2) и (7.3), можно записать теперь так

$$s = \int_{t_0}^{T} V(t)dt, \qquad m = \int_{0}^{l} \rho(x)dx,$$

$$Q = \int_{t_0}^{T} I(t)dt.$$

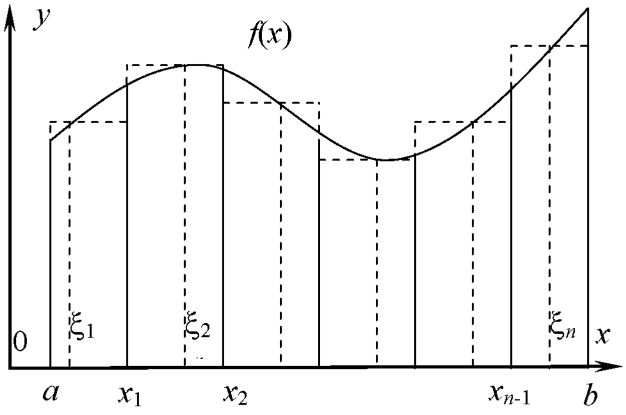


Рис. 7.2

Отметим, что если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a,b]$, то она ограничена в нем. Действительно, если бы при $a \le x \le b$ функция $f(x)$ не была ограниченной, то интегральная сумма $\widetilde{S}_\lambda$ могла бы содержать в себе и неограниченные слагаемые, и тогда ее предел не существовал бы. Итак, ограниченность функции является необходимым условием ее интегрируемости на данном отрезке.

Выясним геометрический смысл определенного интеграла. Для большей наглядности предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,\ b]$. Кроме того, будем считать, что $f(x) \ge 0,\ \ \forall x \in [a,\ b]$. Тогда $f(\xi_k)\Delta x_k$ есть площадь прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $f(\xi_k)$. Следовательно, величина $\widetilde{S} = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ – это площадь ступенчатой фигуры с основанием $[a,\ b]$, т. е. площадь под графиком, который имела бы функция $f(x)$, если бы она в промежутке $[a,b]$ изменялась бы не плавно, а скачками при переходе через точки $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, рис. 7.2. Если $\lambda \to 0$, то ступенчатая фигура в пределе превращается в так называемую криволинейную трапецию с основанием $[a,b]$ и верхней границей $y = f(x)$, рис. 7.3.

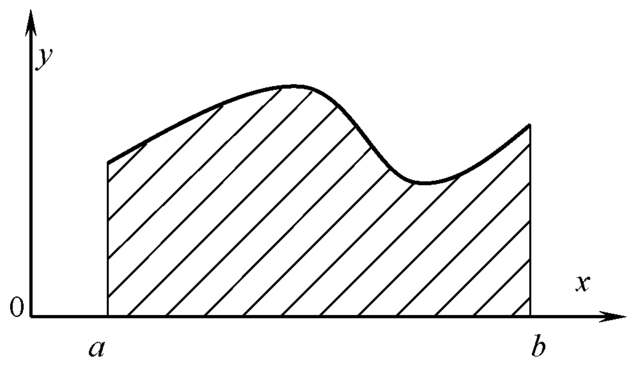


Рис. 7.3

Итак, если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a,b]$, непрерывна и неотрицательна в нем, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $x=a$, $x=b$ и $y=f(x)$.

Случай разрывности функции $f(x)$, а также случаи, когда $f(x)\le 0$ хотя бы на части промежутка $[a,b]$, будут затронуты ниже.

Отметим, в заключение, два следующих очевидных факта, вытекающих из определения (7.4):

а) если a и b – постоянные числа, то и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ есть постоянное число;

б) интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(u)du$$

и т. д.

3. Суммы Дарбу и их свойства

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и ограничена на нем. Разобьем этот отрезок на n частей точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ и обозначим $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$. Поскольку функция $f(x)$, очевидно, ограничена в каждом из промежутков $[x_{k-1}, x_k]$, то существуют числа $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$ и $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$.

Составим суммы

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k ,$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k .$$

Геометрический смысл сумм s и S легко угадывается из рис. 7.4 и рис. 7.5, соответственно.

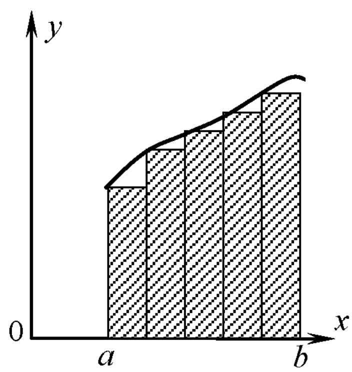


Рис. 7.4

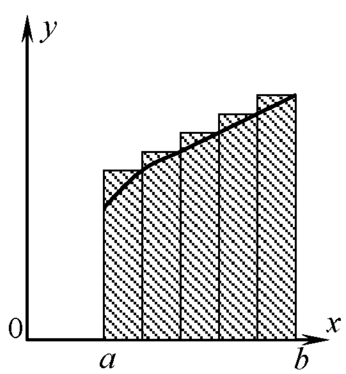


Рис. 7.5

Суммы s и S называют нижней и верхней суммами Дарбу на отрезке $[a,b]$.

Поскольку для всех $k = 1,2,\dots,n$ при любом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ будет

$$m_k \le f(\xi_k) \le M_k ,$$

то, умножая эти неравенства на Δx_k и суммируя по всем k, получим

$$s \le \widetilde{S} \le S .$$

Если разбиение отрезка $[a,b]$ – фиксированное, то s и S – постоянные числа, а $\widetilde{S}$ есть переменная величина, зависящая от выбора точек ξ_k. Из определения точной верхней грани следует, что за счет выбора точек ξ_k величины $f(\xi_k)$ можно сделать сколь угодно близкими к соответствующим числам M_k (рис. 7.6), а значит величину $\widetilde{S}$ можно сделать сколь угодно близкой к S. Отсюда и из того, что $\widetilde{S} \le S$, следует, что при данном разбиении отрезка $[a,b]$ и при всевозможных наборах чисел $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ будет

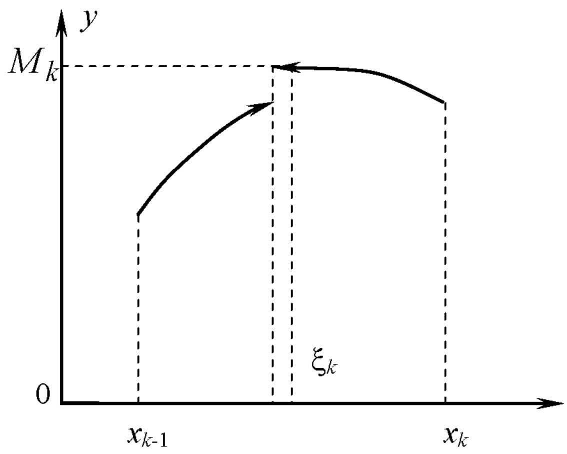


Рис. 7.6

$$S = \sup \widetilde{S} .$$

Совершенно аналогично убеждаемся, что в том же смысле

$$s = \inf \widetilde{S} .$$

Установим два свойства сумм Дарбу.

1. При добавлении к имеющимся точкам деления новых точек нижняя сумма Дарбу не уменьшается, а верхняя – не увеличивается.

■Достаточно рассмотреть случай, когда к уже имеющимся точкам $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ *) добавляется новая точка x^*, такая, что $x_{i-1} < x^* < x_i$ (рис.7.7).

Пусть S' – новая верхняя сумма. Если в старой сумме S отрезку $[x_{i-1}, x_i]$ отвечало слагаемое $M_i(x_i - x_{i-1})$, то в новой верхней сумме S' этому отрезку отвечает сумма двух слагаемых

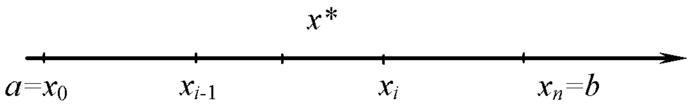


Рис. 7.7

$$M_i'\left(x^* - x_{i-1}\right) + M_i''\left(x_i - x^*\right),$$

где $M_i' = \sup\limits_{[x_{i-1}, x^*]} f(x)$, $M_i'' = \sup\limits_{[x^*, x_i]} f(x)$. По $[x_{i-1}, x^*] \subset [x_{i-1}, x_i]$ и $[x^*, x_i] \subset [x_{i-1}, x_i]$, то $M_i' \le M_i$, $M_i'' \le M_i$, а значит

---

*) Как и прежде, мы полагаем $x_0 = a$, $x_n = b$.

$$M_i'\left(x^* - x_{i-1}\right) + M_i''\left(x_i - x^*\right) \le M_i\left(x^* - x_{i-1}\right) + M_i\left(x_i - x^*\right) = M_i\left(x_i - x_{i-1}\right),$$

откуда и следует, что $S' \le S$.

Аналогично убеждаемся, что $s' \ge s$.□

2. Любая нижняя сумма Дарбу (т. е. нижняя сумма, отвечающая любому разбиению отрезка $[a,b]$) не превосходит любой из верхних сумм (даже если она отвечает другому разбиению).

■Возьмем произвольное разбиение и пусть для него нижняя и верхняя суммы Дарбу равны соответственно s_1 и S_1. Возьмем теперь некоторое другое разбиение и отвечающие ему суммы Дарбу обозначим s_2 и S_2.

Для доказательства объединим точки обоих разбиений. Получим новое разбиение, которому отвечают суммы s_3 и S_3. В силу свойства 1, имеем

$$s_1 \le s_3,\ S_3 \le S_2,$$

а так как $s_3 \le S_3$, то

$$s_1 \le S_2,$$

что и требовалось доказать.□

Пусть S – произвольная верхняя сумма. Тогда для всех нижних сумм, на основании свойства 2, будет $s \le S$, т. е. множество $\{s\}$ всех нижних сумм ограничено сверху. Следовательно, существует число $\sigma = \sup\{s\}$, причем $\sigma \le S$. По здесь S – любая из верхних сумм, а значит для всех верхних сумм будет $S \ge \sigma$. Следовательно, множество $\{s\}$ всех верхних сумм ограничено снизу, а значит существует число $\Sigma = \inf\{S\}$, причем $\Sigma \ge \sigma$.

Итак, для любой верхней и для любой нижней сумм Дарбу будет

$$s \le \sigma \le \Sigma \le S. \qquad (7.5)$$

4. Пеобходимое и достаточиое условие иитегрируемости фуикции

Теорема 7.1. Для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы для этой функции и этого отрезка выполнялось условие

$$\lim_{\lambda \to 0}\left(S_\lambda - s_\lambda\right) = 0. \qquad (7.6)$$

<u>Пеобходимость.</u> ■Пусть интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$ существует. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$(\lambda < \delta) \Rightarrow \left(\left|\tilde{S}_\lambda - I\right| < \varepsilon\right),$$

т. е.

$$\left(\Delta x_k < \delta,\ \forall k = \overline{1,n}\right) \Rightarrow \left(I - \varepsilon < \tilde{S}_\lambda < I + \varepsilon\right) \qquad (7.7)$$

для любого набора чисел $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Беря подходящие наборы чисел ξ_k, можно получать значения $\tilde{S}_\lambda$, сколь угодно близкие к $\inf \tilde{S}_\lambda$ т. е. к s_λ, а также значения $\tilde{S}_\lambda$, сколь угодно близкие к $\sup \tilde{S}_\lambda$, т.е. к S_λ. Поэтому из (7.7) следует, что

$$(\lambda < \delta) \Rightarrow (I - \varepsilon \le s_\lambda \le S_\lambda \le I + \varepsilon),$$

а поскольку ε можно взять сколь угодно малым, то это означает, что

$$\lim_{\lambda \to 0} s_\lambda = I,\ \lim_{\lambda \to 0} S_\lambda = I,$$

откуда и следует (7.6). □

<u>Достаточность.</u> ■Пусть условие (7.6) выполнено. На основании (7.5), это означает, что $\sigma = \Sigma$. Обозначая через I общее значение чисел σ и Σ, получим вместо (7.5)

$$s_\lambda \le I \le S_\lambda. \qquad (7.8)$$

Здесь s_λ и S_λ – нижняя и верхняя суммы, отвечающие некоторому разбиению.

Пусть $\tilde{S}_\lambda$ – какая-нибудь из интегральных сумм, отвечающих этому разбиению. Тогда

$$s_\lambda \le \tilde{S}_\lambda \le S_\lambda.$$

Отсюда и из (7.8) следует, что $\left|\tilde{S}_\lambda - I\right| \le S_\lambda - s_\lambda$. Но, в силу условия (7.6), для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$(\lambda < \delta) \Rightarrow (S_\lambda - s_\lambda < \varepsilon),$$

а значит тем более

$$(\lambda < \delta) \Rightarrow \left(\left|\tilde{S}_\lambda - I\right| < \varepsilon\right),$$

откуда и следует, что $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \tilde{S}_\lambda$, т.е. что $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.□

5. Интегрнруемость ненрерывной функцнн

Теорема 7.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она и интегрируема на нем.

■Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она, в силу теоремы Кантора 3.20, и равномерно непрерывна на нем. Следовательно, для выбранного ε найдется такое $\delta > 0$, что для любых $x' \in [a,b]$ и $x'' \in [a,b]$ будет

$\left(|x'-x''|<\delta\right)\Rightarrow\left(|f(x')-f(x'')|<\varepsilon\right)$. (7.9)

Разделим отрезок $[a,b]$ точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ на n частей так, чтобы длина каждой из них была меньше, чем δ, т. е. чтобы было $\Delta x_k<\delta,\ \forall k=\overline{1,n}$, а значит и $\lambda<\delta$. Далее, пусть снова $m_k=\inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $M_k=\sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$, и пусть x_k' и x_k' – точки отрезка $[x_{k-1},x_k]$, в которых достигаются значения m_k и M_k (рис. 7.7); эти точки существуют, на основании 2-ой теоремы Вейерштрасса. Поскольку, очевидно,

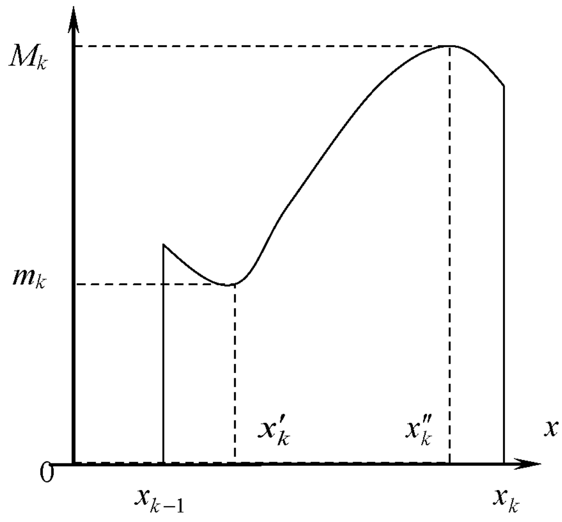


Рис. 7.7

$$|x'-x''|\le\Delta x_k,\ \text{а}\ \Delta x_k<\delta,\ \text{то и}\ |x'-x''|<\delta,$$

а значит, в силу (7.9), в этом случае

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

т. е.

$$M_k-m_k<\varepsilon.$$

Итак, если $\Delta x_k<\delta,\ \forall k=\overline{1,n}$, т. е. $\lambda<\delta$, то

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k-\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\varepsilon(b-a).$$

Поскольку ε можно взять сколь угодно малое, то отсюда следует, что

$$\lim_{\delta\to 0}(S-s)=0,$$

а отсюда, в свою очередь, вытекает интегрируемость функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Ирнмер 7.1. Вычислим интеграл $I=\int\limits_0^{\pi}\sin x dx$.

Поскольку функция $\sin x$ непрерывна на отрезке $[0,\pi]$, то она и интегрируема на нем. Поэтому предел интегральной суммы существует при любых способах дробления отрезка $[0,\pi]$. Для простоты разобьем отрезок на n равных частей точками $x_1=\frac{\pi}{n}, x_2=\frac{2\pi}{n},\dots,x_{n-1}=\frac{(n-1)\pi}{n}$ и в качестве точек ξ_k возьмем правые концы отрезков $[x_{k-1},x_k]$, т. е. положим

$$\xi_1=\frac{\pi}{n},\ \xi_2=\frac{2\pi}{n},\dots,\ \xi_n=\frac{n\pi}{n}.$$

Получим

$$\widetilde{S}=\sin\xi_1\cdot\Delta x_1+\sin\xi_2\cdot\Delta x_2+\ldots+\sin\xi_n\cdot\Delta x_n=$$
$$=\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}.$$

Используя формулу (см. раздел V1)

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi=\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

будем иметь

$$\widetilde{S}=\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}\cdot\sin\frac{\pi n}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{n}.$$

Пусть теперь $\lambda\to 0$; это значит, что $n\to\infty$. Получим

$$\int_0^{\pi}\sin x dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{2n}}=2.$$

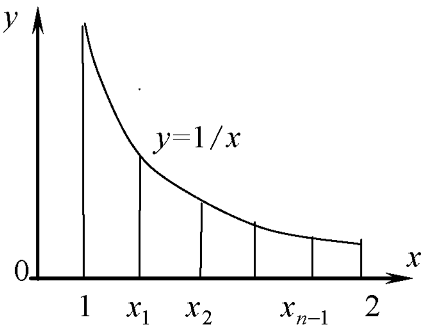


Рис. 7.8

Ирнмер 7.2. Вычислим интеграл $I=\int_1^2\frac{dx}{x}$. С этой целью отрезок $[1,2]$ разобьем точками $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ так, чтобы числа x_k образовывали геометрическую прогрессию:

$$x_1=q,\ x_2=q^2,\ x_3=q^3,\ldots,x_n=q^n;$$

при этом $x_0=1=q^0$. Поскольку $q^n=2$, то $q=\sqrt[n]{2}$.

Итак, получаем

$$x_1=\sqrt[n]{2},\ x_2=\left(\sqrt[n]{2}\right)^2,\ \ldots,x_n=\left(\sqrt[n]{2}\right)^n,$$

а значит

$$\widetilde{S}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta x_k}{x_k}=\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\left[\left(\sqrt[n]{2}\right)^2-\sqrt[n]{2}\right]\frac{1}{\left(\sqrt[n]{2}\right)^2}+\ldots+$$
$$+\left[\left(\sqrt[n]{2}\right)^n-\left(\sqrt[n]{2}\right)^{n-1}\right]\frac{1}{\left(\sqrt[n]{2}\right)^n}=$$

$$= n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \right) = n - \frac{n}{\sqrt[n]{2}} = n\left(1 - 2^{-\frac{1}{n}} \right).$$

Следовательно,

$$I = \lim_{n\to\infty} \widetilde{S} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 2^{-\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}\ln 2}{-\frac{1}{n}} = \ln 2.$$

6. Интегрнруемость ограннченной функцнн с конечным чнслом точек разрыва

Теорема 7.3. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет на нем лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке (рис. 7.9).

Примером функции, удовлетворяющей условиям этой теоремы, может служить функция $\sin\frac{1}{x}$, рассматриваемая на отрезке $[-\pi,\pi]$ (см. пример 3.19). В точке $x = 0$ она имеет разрыв 2-го рода, однако всюду на отрезке $[-\pi,\pi]$ удовлетворяет неравенству $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$.

Заметим, что если все разрывы функции на отрезке $[a,b]$ – 1–го рода и их – конечное число, то эту функцию называют кусочно–непрерывной на этом отрезке.

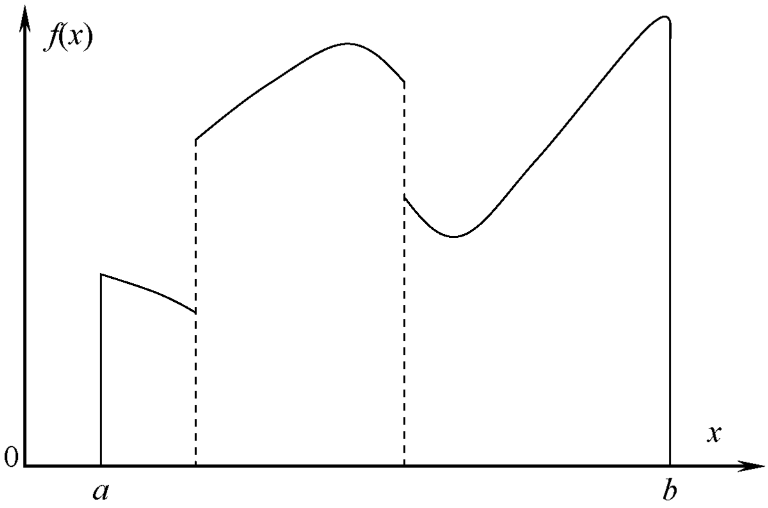


Рис. 7.9

■При доказательстве теоремы можно, не ограничивая общности, предполагать, что функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ имеет единственную точку разрыва x^*, причем $x^* \in (a,b)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим интервал $C_\varepsilon(x^*)$, а также два оставшихся промежутка: $E_1 = [a, x^* - \varepsilon]$ и $E_2 = [x^* + \varepsilon, b]$ (промежутки E_1 и E_2 – замкнутые, поскольку интервал $C_\varepsilon(x^*)$ – открытый). На основании теоремы Кантора, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $x', x'' \in E_1$ или $x', x'' \in E_2$ будет

$$\left(|x' - x''| < \delta\right) \Rightarrow \left(|f(x') - f(x'')| < \varepsilon\right). \tag{7.10}$$

При этом можно считать, что $\delta < \varepsilon$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на n частей так, чтобы для всех $k = 1,2,\ldots,n$ было $\Delta x_k < \delta$. Отрезки Δx_k разделим на две группы. К группе 1 отнесем те отрезкн, которые полностью лежат вне $C_\varepsilon\left(x^*\right)$, а к группе 11 – те отрезки, которые полностью или хотя бы частично принадлежат $C_\varepsilon\left(x^*\right)$.

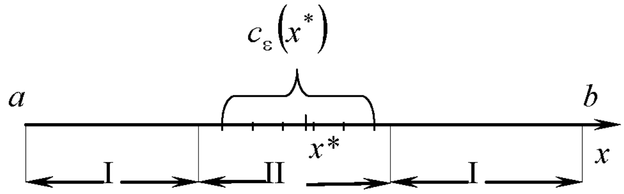


Рис. 7.10

Как и в доказательстве теоремы 7.2, рассмотрим величину

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} \left(M_k - m_k\right) \Delta x_k .$$

В данном случае она разбивается на две суммы, отвечающие отрезкам 1 и 11 групп. Для группы 1 имеем, в силу (7.10),

$$\sum_I \left(M_k - m_k\right) \Delta x_k < \varepsilon \sum_I \Delta x_k < \varepsilon(b - a).$$

Далее, положив $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, получим для 2–ой суммы

$$\sum_{II} \left(M_k - m_k\right) \Delta x_k \le (M - m) \sum_{II} \Delta x_k \le (M - m)(2\varepsilon + 2\delta) < 4(M - m)\varepsilon .$$

Итак,

$$\left(\Delta x_k < \delta, \forall k = 1,2,\ldots,n\right) \Rightarrow \left(S - s < \varepsilon[b - a + 4(M - m)]\right),$$

а так как ε можно взять сколь угодно малое, то отсюда и следует утверждение теоремы.□

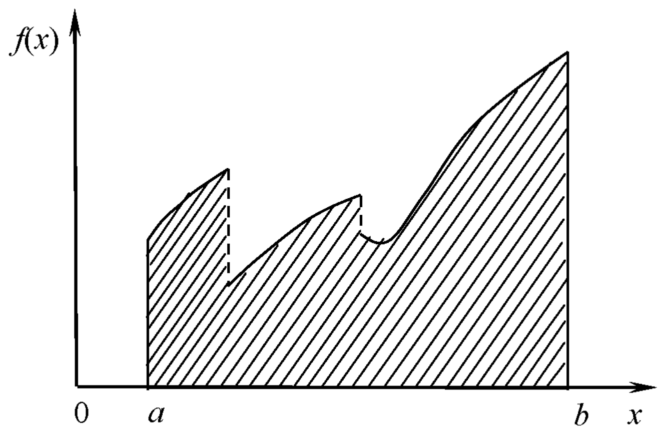


Рис. 7.11

Если функция $f(x)$ кусочно–непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a,b]$, то, очевидно, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь заштрихованной фигуры (см. рис. 7.11).

7. Теорема о квазнннтегральной сумме

Пусть функция $f(x)=\varphi(x)q(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Разобьем этот отрезок на n частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и на каждом из отрезков $[x_{k-1}-x_k]$ возьмем произвольные точки ξ_k и η_k. Составим сумму

$$S^* = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)q(\eta_k)\Delta x_k .$$

Если бы было $\eta_k = \xi_k,\ \forall k = 1,2,\ldots,n$, то сумма S^* была бы интегральной суммой для функции $f(x)=\varphi(x)q(x)$ на отрезке $[a,b]$. Если же, вообще говоря, $\eta_k \neq \xi_k$, то величину S^* назовем квазиинтегральной суммой.

Теорема 7.4. Если функции $\varphi(x)$ и $q(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то

$$\lim_{\lambda\to 0} S^*_\lambda = \int_a^b \varphi(x)q(x)dx . \qquad (7.11)$$

■Перепишем величину S^* так

$$S^* = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)q(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)[q(\eta_k)-q(\xi_k)]\Delta x_k ,$$

или, для краткости,

$$S^* = \tilde{S} + \breve{S} .$$

Поскольку $\tilde{S}$ – интегральная сумма для функции $\varphi(x)q(x)$, а эта функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ то

$$\lim_{\lambda\to 0} \tilde{S}_\lambda = \int_a^b \varphi(x)q(x)dx ,$$

и остается доказать, что

$$\lim_{\lambda\to 0} \breve{S}_\lambda = 0 . \qquad (7.12)$$

Поскольку функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует такое M>0, что $|\varphi(x)| \le M$ для всех $x \in [a,b]$. Далее, поскольку функция $q(x)$ также непрерывна на отрезке $[a,b]$, то, по теореме Кантора, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых $x', x'' \in [a,b]$ будет

$$(|x'-x''| < \delta) \Rightarrow (|q(x')-q(x'')| < \varepsilon).$$

Поэтому, если $\lambda < \delta$, то $|q(\eta_k)-q(\xi_k)| < \varepsilon,\ \forall k$, а значит

$$\left|\tilde{S}_\lambda\right| \le \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\left[q(\eta_k) - q(\xi_k)\right]\Delta x_k < M\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = M\varepsilon(b-a),$$

а так как ε может быть сколь угодно малое, то отсюда и следует (7.12), а значит и (7.11).□

Примечание. Легко убедиться, что одна из функций $\varphi(x)$ и $q(x)$ в теореме 7.4 может быть и не непрерывной, а лишь кусочно-непрерывной.

8. Иростейшне свойства онределенного ннтеграла

1°. $\int\limits_a^b dx = b - a$,

т. е. если $f(x) \equiv 1$, то интеграл равен разности верхнего и нижнего пределов интегрирования (существование последнего интеграла следует из очевидной непрерывности подынтегральной функции).

■Действительно, в этом случае равенство (7.4) дает

$$\int\limits_a^b dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0}\left[(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})\right] =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}(b-a) = b - a.\square$$

Геометрически свойство (1°) выражает тот очевидный факт, что если высота прямоугольника равна 1, то его площадь численно равна длине основания (рис. 7.12).

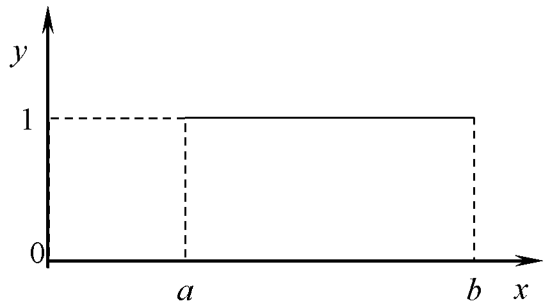


Рис. 7.12

2°. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, а c=const, то и функция $cf(x)$ интегрируема на этом отрезке, и

$$\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx, \tag{7.13}$$

т. е. постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла.

■Действительно, для любого разбиения отрезка $[a,b]$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Отсюда при $\lambda \to 0$, учитывая, что предел $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ по условию существует, убеждаемся и в существовании предела $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\Delta x_k$, а также в выполнении равенства (7.13).□

3°. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то и функция $f(x)+\varphi(x)$ интегрируема на этом отрезке, и

$$\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx, \qquad (7.14)$$

т. е. интеграл суммы интегрируемых функций равен сумме их интегралов.

■Действительно, если взять для всех сумм одно и то же разбиение и одни и те же точки ξ_k, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n}[f(\xi_k)+\varphi(\xi_k)]\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\Delta x_k .$$

Отсюда при $\lambda\to 0$, учитывая существование пределов обеих сумм в правой части, получим, что и предел левой части существует и удовлетворяет формуле (7.14).□

Очевидно, что свойство (3°) верно и для случая любого конечного числа слагаемых.

4°. Если $f(x)$ – интегрируемая и неотрицательная на отрезке $[a,b]$ функция, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0 .$$

■Действительно, в этом случае, в силу (7.4), интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ есть предел суммы неотрицательных слагаемых, а значит и он неотрицателен.□

5°. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $f(x)\ge\varphi(x)$ для всех $x\in[a,b]$, то и

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b \varphi(x)dx, \qquad (7.15)$$

т. е. функциональные неравенства можно интегрировать.

■Действительно, для всех $x\in[a,b]$ будет $f(x)-\varphi(x)\ge 0$, а значит, на основании свойства (4°),

$$\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]dx \ge 0,$$

$$\int\limits_a^b [f(x)-\varphi(x)]dx \geq 0,$$

или, в силу свойств 3° и 2°,

$$\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b \varphi(x)dx \geq 0,$$

откуда и следует (7.15).□

Геометрический смысл свойства (5°) совершенно очевиден, рис. 7.13.

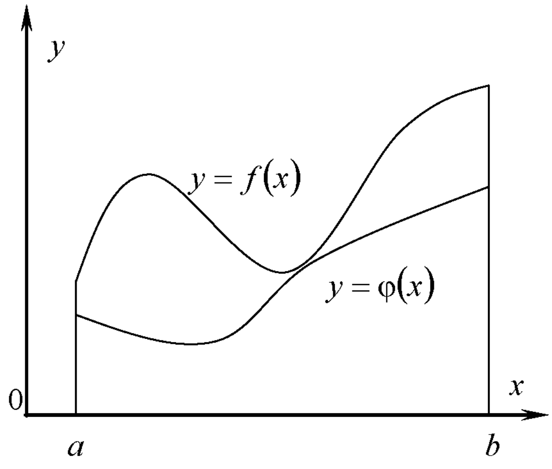


Рис. 7.13

6°. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ интегрируема на этом отрезке, и

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx. \tag{7.16}$$

■Обозначим $M_k^* = \sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} |f(x)|$, $m_k^* = \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} |f(x)|$. Очевидно, что $M_k^* - m_k^* \leq M_k - m_k$ (см. рис. 7.14). Поэтому для функции $|f(x)|$ получим $S^* - s^* = \sum\limits_{k-1}^{n}\left(M_k^* - m_k^*\right)\Delta x_k \leq \sum\limits_{k-1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k$, откуда, учитывая также, что $S^* \geq s^*$, будем иметь

$$0 \leq S^* - s^* \leq S - s.$$

Но, по условию, $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S_\lambda - s_\lambda) = 0$. Следовательно, и $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(S_\lambda^* - s_\lambda^*\right) = 0$, а значит функция $|f(x)|$ интегрируема.

Далее, поскольку

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)|\Delta x_k,$$

то и

$$\lim_{\lambda\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \leq \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)|\Delta x_k$$

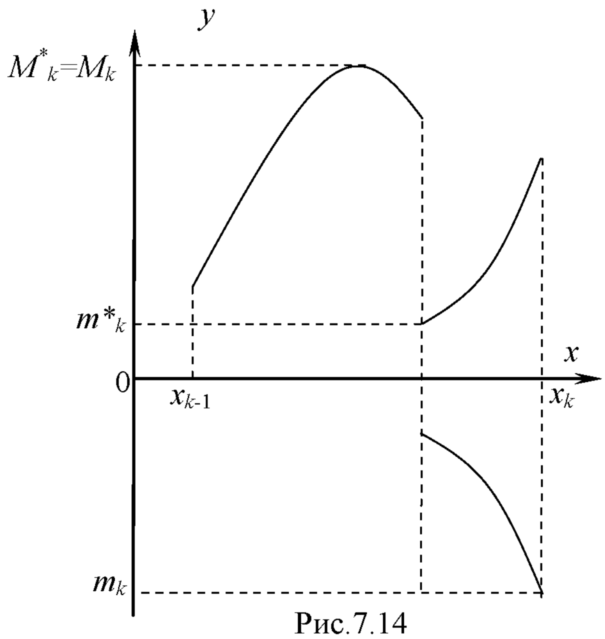


Рис.7.14

На основании непрерывности модуля перепишем это так

$$\left| \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)| \Delta x_k ,$$

откуда и следует (7.16).□

9. Свойство аддитивности интеграла

Сделаем предварительно одно замечание. До сих пор, рассматривая интеграл $\int_a^b f(x)dx$, мы молча предполагали, что $a < b$. Если же $a > b$, и функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то, по определению,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \ . \tag{7.17}$$

Это можно мотивировать следующим образом. Символ $\int_a^b f(x)dx$ означает, что нумерация точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ведется от точки a к точке b. Поэтому, если $b < a$, то $\Delta x_k < 0, \ \forall k$, и вместо (7.4) получим равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) |\Delta x_k|,$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = -\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \ .$$

Легко видеть, что доказанные выше свойства 1°-3° верны и для случая, когда $a > b$. В свойствах же (4°) и (5°) предположение о том, что $a < b$ необходимо (в случае, если $a > b$, неравенства, выражающие эти свойства, изменяют смысл). Наконец, в свойстве (6°) 6°при $a > b$ вместо (7.16), очевидно, надо писать

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)|dx \right| .$$

Заметим также, что, на основании (7.17), естественно – также по определению – положить

$$\int_a^a f(x)dx=0,$$

что согласуется и с геометрическим смыслом интеграла.

Теорема 7.5. Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a,b]$, $[b,c]$, $[a,c]$, то она интегрируема и на двух других отрезках, и при этом

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx, \tag{7.18}$$

каково бы ни было взаимное расположение точек a, b, c.

■Предположим сначала, что $a<b<c$, и, следовательно, функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,c]$. Разобьём этот отрезок на n частей так, чтобы точка $x=b$ оказалась одной из точек деления. Тогда для этого отрезка будет

$$S_\lambda - s_\lambda = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{[a,b]}(M_k - m_k)\Delta x_k + \sum_{[b,c]}(M_k - m_k)\Delta x_k .$$

По условию, предел левой части равен нулю при $\lambda \to 0$, а так как обе суммы, стоящие справа, неотрицательны, то и каждая из них стремится к нулю при $\lambda \to 0$, а значит интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_b^c f(x)dx$ существуют[*].

Далее, в этом случае

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{[a,b]} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{[b,c]} f(\xi_k)\Delta x_k ,$$

и, переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим формулу (7.18).

Пусть теперь, например, $a<c<b$, рис. 7.15, и, функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда, по уже доказанному,

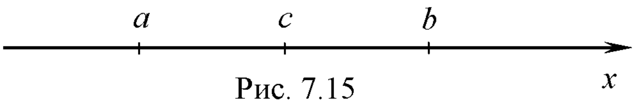


Рис. 7.15

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

т. е.

---

[*] Легко видеть, что мы фактически доказали следующее утверждение.

Теорема 7.5'. Если функция интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема и на любом отрезке $[c,d]\subset[a,b]$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx,$$

или, на основании (7.17),

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

что опять таки совпадает с (7.18).□

10. Интегральные теоремы о среднем

Теорема 7.6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a), \tag{7.19}$$

где $m \le \mu \le M$.

■Действительно, поскольку для всех $x \in [a,b]$ будет

$$m \le f(x) \le M, \tag{7.20}$$

то, в силу свойства (5°),

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx,$$

или, на основании свойств (1°) и (2°),

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

т. е.

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M, \tag{7.21}$$

а значит

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu,$$

где $m \le \mu \le M$. Отсюда и следует равенство (7.19).

При доказательстве молча предполагалось, что $a < b$. Однако легко видеть, что при $a > b$ из (7.20) все равно вытекает (7.21), а значит и доказательство теоремы остается в силе и при $a > b$.□

Примечание. Наиболее интересен случай, когда функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда числа M и m превращаются соответственно в $\max\limits_{[a,b]} f(x)$ и $\min\limits_{[a,b]} f(x)$, и, в силу 2-й теоремы Больцано – Коши существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что $f(\xi) = \mu$. Следовательно, для этого случая теорема 7.6 принимает вид.

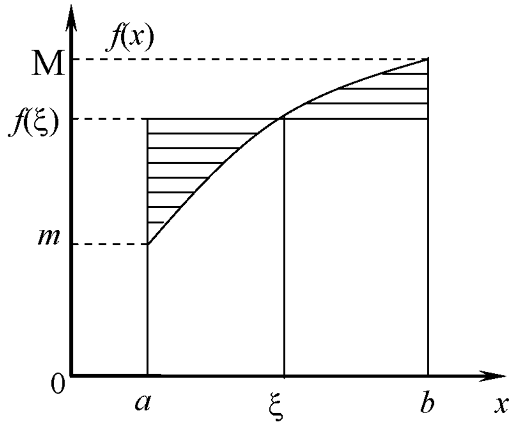


Рис. 7.16

Теорема 7.6′. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует, по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a,b)$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \quad (7.22)$$

Последняя формула имеет простой геометрический смысл. Она выражает тот факт, что площадь криволинейной трапеции равна площади некоторого прямоугольника с тем же основанием $[a,b]$ и с некоторой «средней» высотой $f(\xi)$, рис. 7.16. В связи с этим число $f(\xi)$ из равенства (7.22) называют интегральным средним функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Теорема 7.7. Если функции $\varphi(x)$ и $f(x)\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, причем функция $f(x)$ удовлетворяет на этом отрезке неравенству $m \le f(x) \le M$, а функция $\varphi(x)$ не меняет знака на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \mu \int_a^b \varphi(x)dx. \quad (7.23)$$

где $m \le \mu \le M$.

■Пусть сначала $\varphi(x) \ge 0$ всюду на отрезке $[a,b]$. Тогда из неравенства $m \le f(x) \le M$ следует, что для всех $x \in [a,b]$ будет

$$m\varphi(x) \le f(x)\varphi(x) \le M\varphi(x),$$

откуда

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \le M\int_a^b \varphi(x)dx, \quad (7.24)$$

т. е.

$$m \le \frac{\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int\limits_a^b \varphi(x)dx} \le M, \tag{7.25}$$

а значит

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int\limits_a^b \varphi(x)dx} = \mu,$$

а так как $m \le \mu \le M$, то формула (7.23) для этого случая доказана.
Заметим, что при переходе от (7.24) к (7.25) мы предполагали, что $\int\limits_a^b \varphi(x)dx \ne 0$ (т. е. что $\int\limits_a^b \varphi(x)dx > 0$). Но при $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = 0$ мы из (7.24) получили бы

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0,$$

и формула (7.23) все равно оказалась бы верной.

Пусть теперь $\varphi(x) \le 0$ всюду на отрезке $[a,b]$. Тогда $-\varphi(x) \ge 0$, $\forall x \in [a,b]$, и значит, в силу уже доказанного,

$$\int\limits_a^b f(x)[-\varphi(x)]dx = \mu \int\limits_a^b [-\varphi(x)]dx.$$

Если вынести множитель (–1) за знак обоих интегралов и сократить на него, снова получим (7.23).

Итак, теорема 7.7 полностью доказана. Легко видеть, что она верна и при $a > b$.□

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $\mu = f(\xi)$, где $\xi \in (a,b)$. Поэтому приходим к следующему частному случаю теоремы 7.7.

Теорема 7.7′. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $\varphi(x)$ не меняет на нем знака, то

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b \varphi(x)dx,$$

где $\xi \in (a,b)$.

Теоремы 7.6 и 7.7 называют соответственно 1–й и 2–й интегральными теоремами о среднем. Очевидно, что 1–я теорема получается, как частный случай, из 2–й теоремы, если $\varphi(x)=1,\ \forall x\in[a,b]$.

11. Интеграл с неременным верхннм нределом

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Возьмем произвольное $t\in[a,b]$ и рассмотрим интеграл $\int\limits_a^t f(x)dx$. При переменном t он является функцией аргумента t, которую мы обозначим $\Phi(t)$, т. е. положим

$$\Phi(t)=\int\limits_a^t f(x)dx.$$

Теорема 7.8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $\Phi(t)$ непрерывна при любом $t\in[a,b]$.

■Возьмем произвольное $t\in[a,b]$ и $t+\Delta t\in[a,b]$. Тогда

$$\Delta\Phi(t)=\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)=\int\limits_a^{t+\Delta t} f(x)dx-\int\limits_a^t f(x)dx,$$

или, в силу аддитивности интеграла,

$$\Delta\Phi(t)=\int\limits_t^{t+\Delta t} f(x)dx.$$

На основании теоремы 7.6, имеем отсюда

$$\Delta\Phi=\mu\Delta t. \tag{7.26}$$

Здесь $\mu_1\le\mu\le\mu_2$, где $\mu_1=\inf\limits_{[t,t+\Delta t]} f(x)$, $\mu_2=\sup\limits_{[t,t+\Delta t]} f(x)$. Поэтому

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\Phi=0,$$

что и доказывает теорему.□

Теорема 7.9. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=t$, то функция $\Phi(t)$ дифференцируема в этой точке, и

$$\Phi'(t)=f(t). \tag{7.27}$$

■Действительно, из (7.26) имеем

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\mu.$$

Если $\Delta t\to 0$, то $\mu_1\to f(t)$ и $\mu_2\to f(t)$ (в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке t), а значит и $\mu\to f(t)$, так что

$$\Phi'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=f(t).\ \square$$

Теорему 7.9 называют теоремой Барроу. Переписав (7.27) так

$$\left[\int_a^t f(x)dx\right]_t' = f(t), \tag{7.28}$$

мы видим, что теореме Барроу можно придать следующую формулировку:

Теорема 7.9′. Если подынтегральная функция непрерывна на некотором отрезке, то производная ее определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на этом пределе.

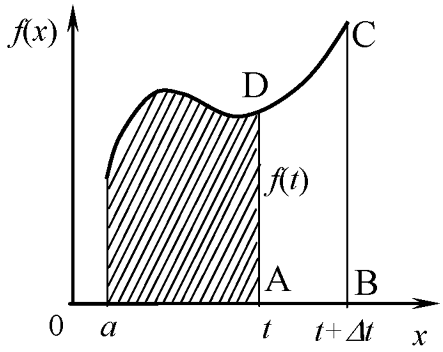


Рис. 7.17

Выясним геометрический смысл теоремы Барроу. Очевидно, что $\Phi(t)$ – это площадь заштрихованной фигуры (рис. 7.17), а значит $\Delta\Phi = S_{ABCD}$. Но тогда при $\Delta t \to 0$ фигуру ABCD можно в пределе считать прямоугольником, а значит

$$\Phi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S_{ABCD}}{AB} = f(t).$$

Теорему Барроу можно истолковать и физически. Будем считать, что x – это время, а $f(x)$ – скорость, зависящая от времени. Тогда интеграл $\int_a^t f(x)dx$ есть путь, пройденный точкой за время $[a, t]$, и, если t переменно, то и путь зависит от времени. Но тогда его производная по t равна скорости в данный момент t, откуда и следует (7.28).

Примечание 1. В формуле (7.28) обозначим x через t, а t – через x. Тогда она примет вид

$$\left[\int_a^x f(t)dt\right]_x' = f(x). \tag{7.29}$$

Отсюда следует очень важная

Теорема 7.10. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она имеет на этом отрезке первообразную (а значит она имеет на нем и бесчисленное множе-

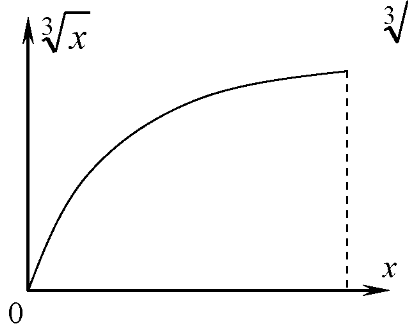


Рис. 7.18

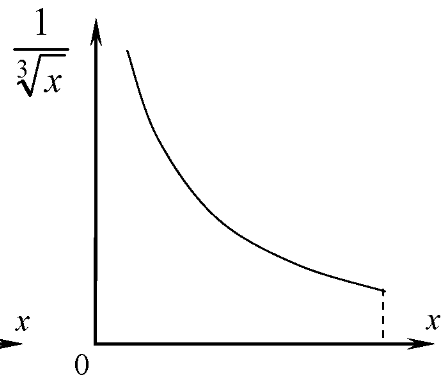


Рис. 7.19

ство первообразных).

■Действительно, если $x \in [a,b]$, то одной из первообразных функции $f(x)$, в силу (7.29), является функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.□

Примечание 2. Мы видели ранее, что производная ограниченной на данном отрезке функции может быть неограниченной функцией; примером может служить функция $y = \sqrt[3]{x}$, для которой $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (рис. 7.18, 7.19). Аналогично, производная непрерывной функции может быть разрывной функцией (см. рис. 7.20) и т. д. Таким образом, производная функции обладает, вообще говоря, «худшими» свойствами, чем сама функция, т. е. действие дифференцирования «ухудшает» свойства функции. Из доказанных же теорем 7.8 и 7.9 следует, что действие интегрирования, наоборот, «улучшает» свойства функции: интегрируемую (но не обязательно непрерывную) функцию оно превращает в непрерывную функцию (теорема 7.8), а непрерывную, но не обязательно дифференцируемую, функцию – в функцию дифференцируемую (теорема 7.9). Иными словами, операция интегрирования «сглаживает» функцию. Этот результат воспринимается естественно, поскольку интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, а значит оно должно обладать свойствами противоположного характера.

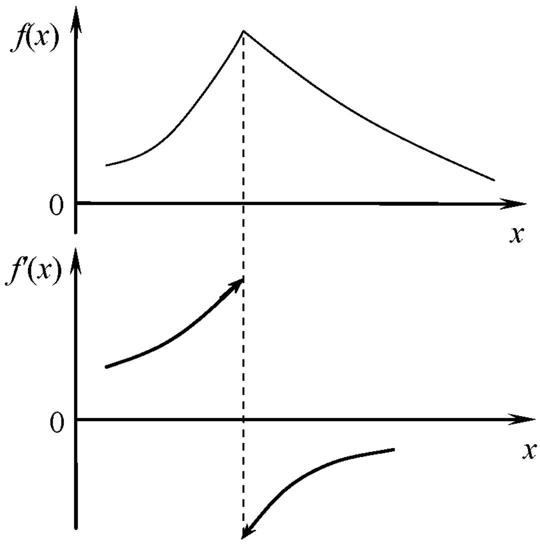


Рис. 7.20

12. Формула Иьютона–Лейбннца. Связь онределенного ннтеграла с неонределенным

Пусть $f(t)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, а $F(t)$ – одна из ее первообразных. Из равенства (7.28) следует, что и функция $\Phi(t) = \int\limits_a^t f(x)dx$ является первообразной функции $f(t)$. Но тогда $F(t)$ и $\Phi(t)$ различаются на некоторую константу, т. е.

$$\int\limits_a^t f(x)dx = F(t) + C, \qquad (7.30)$$

где C – неизвестное число, зависящее от выбора функции $F(t)$ и числа a. Для его нахождения положим $t = a$. Тогда получим из (7.30)

$$0 = F(a) + C,$$

откуда

$$C = -F(a),$$

а значит

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a).$$

Теперь уже можно зафиксировать величину t. Положив $t = b$, будем иметь

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{7.31}$$

или короче

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Формулу (7.31) называют формулой Ньютона – Лейбница. Она является важнейшей формулой интегрального исчисления. Эта формула позволяет вычислять определенный интеграл, не пользуясь его определением как предела интегральной суммы. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона – Лейбница сводится к нахождению первообразной для подынтегральной функции. Именно поэтому вычисление определенного интеграла и нахождение первообразной называют одним и тем же термином: интегрирование.

Ирнмер 7.3. Вычислим уже встречавшийся нам интеграл $\int_0^\pi \sin x dx$. Формула (7.31) дает сразу

$$\int_0^\pi \sin x dx = (-\cos x)\Big|_0^\pi = \cos x\Big|_\pi^0 = 1 - (-1) = 2,$$

что, естественно, совпадает с результатом, полученным в примере 7.1.

Установим связь между неопределенным и определенным интегралами.

С одной стороны,

$$\int f(x)dx = F(x) + C = [F(x) - F(a)] + C,$$

т. е.

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C, \tag{7.32}$$

(здесь a – произвольное, но фиксированное число).
С другой стороны,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \left[F(x)+C\right]\Big|_a^b,$$

т. е.

$$\int_a^b f(t)dt = \int f(x)dx\Big|_a^b. \qquad (7.33)$$

Формулы (7.32) и (7.33) выражают неопределенный интеграл через определенный и наоборот.

13. О связн между днфференцнальнымн н нтегральнымн теоремамн о среднем *)

Установим связь между теоремой Лагранжа и теоремой 7.6'. В силу последней,

$$\int_a^b f'(t)dt = f'(\xi)(b-a), \qquad (7.34)$$

где $\xi \in (a,b)$. Но, на основании формулы Ньютона – Лейбница,

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Итак,

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a),$$

что совпадает с теоремой Лагранжа. Поэтому теорему Лагранжа можно было бы рассматривать как следствие теоремы 7.6'. Однако, следует иметь в виду, что, написав равенство (7.34), мы предположили, что функция $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, в то время как в теореме Лагранжа требуется лишь, чтобы функция $f'(x)$ существовала на отрезке $[a,b]$, но не обязательно была непрерывна на нем.

Совершенно аналогична связь между теоремой Коши и теоремой 7.7'. Действительно, возьмем функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, такие, что $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ существуют на отрезке $[a,b]$, причем $\varphi'(x)$ не меняет знака на отрезке $[a,b]$ и не обращается на нем в нуль. Рассмотрим выражение $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, и пусть $q(x)$ – первообразная этой дроби, т. е. пусть

---

*) Здесь под 1–й и 2–й интегральными теоремами о среднем подразумеваются теоремы 7.6' и 7.7', в которых функция $f(x)$ считается непрерывной.

$$q'(x)=\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Тогда $f'(x)=q'(x)\varphi'(x)$, а значит

$$\int_a^b f'(x)dx=\int_a^b q'(x)\varphi'(x)dx,$$

или, на основании теоремы 7.7',

$$\int_a^b f'(x)dx=q'(\xi)\int_a^b \varphi'(x)dx, \qquad (7.35)$$

т. е.

$$f(b)-f(a)=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}[\varphi(b)-\varphi(a)],$$

откуда и вытекает теорема Коши.

Однако и здесь следует помнить, что, написав равенство (7.35), мы молча предполагали непрерывность функции $q'(x)=\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ на отрезке $[a,b]$, что фактически для теоремы Коши не обязательно.

Таким образом, можно говорить, что 1-я и 2-я интегральные теоремы о среднем (в вариантах 7.6' и 7.7') являются интегральными аналогами теорем Лагранжа и Коши соответственно.

14. Формула ннтегрнровання но частям для онределенного ннтеграла

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$, а также их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. На основании формулы (7.33),

$$\int_a^b udv=\int udv\Big|_a^b.$$

Но, как мы знаем,

$$\int udv=uv-\int vdu,$$

а значит

$$\int_a^b udv=\left(uv-\int vdu\right)\Big|_a^b=uv\Big|_a^b-\int vdu\Big|_a^b.$$

Окончательно

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu. \qquad (7.36)$$

Существование каждого из интегралов обеспечивается непрерывностью подынтегральной функции.

Нрнмер 7.4. Па основании формулы (7.36), имеем

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e\ln e - (e-1) = 1$$

15. Новые формы остаточного члена формулы Тейлора

Пусть функция $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема в некотором промежутке E, содержащем точку x_0. Тогда, как мы видели, в этом промежутке справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)$$

$$(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x), \quad (7.37)$$

причем, как было доказано,

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Формула Пьютона-Лейбница дает

$$\int_{x_0}^{x} r_n'(t)dt = r_n(x) - r_n(x_0),$$

а так как $r_n(x_0) = 0,$ то

$$r_n(x) = \int_{x_0}^{x} r_n'(t)dt.$$

Перепишем это так

$$r_n(x) = -\int_{x_0}^{x} r_n'(t)d(x-t).$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$r_n(x) = -r_n'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} r_n''(t)(x-t)dt,$$

а так как $r_n'(x_0) = 0,$ то

$$r_n(x) = \int_{x_0}^{x} r_n''(t)(x-t)dt,$$

или

$$r_n(x) = -\int_{x_0}^{x} r_n''(t) d\,\frac{(x-t)^2}{2!}.$$

Снова интегрируя по частям, имеем

$$r_n(x) = -r_n''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\Bigg|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} r_n'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}dt,$$

откуда

$$r_n(x) = \int_{x_0}^{x} r_n'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\,dt,$$

или

$$r_n(x) = -\int_{x_0}^{x} r_n'''(t) d\,\frac{(x-t)^3}{3!}.$$

Аналогично можем получить, что

$$r_n(x) = -r_n'''(t)\frac{(x-t)^3}{3!}\Bigg|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} r_n^{IV}(t)\frac{(x-t)^3}{3!}\,dt,$$

т. е.

$$r_n(x) = \int_{x_0}^{x} r_n^{IV}(t)\frac{(x-t)^3}{3!}dt.$$

Продолжая этот процесс, получим в конце концов

$$r_n(x) = \int_{x_0}^{x} r_n^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt,$$

а так как, на основании (7.37), $r_n^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$, то окончательно

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \tag{7.38}$$

Правую часть (7.38) называют интегральной формой Коши остаточного члена формулы Тейлора.

Предположим дополнительно, что функция $f^{(n+1)}(t)$ непрерывна в промежутке E. Тогда, учитывая, что функция $\varphi(t) = (x-t)^n$ не меняет знака на отрезке $[x_0, x]$, получим, на основании теоремы 7.7,

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt,$$

т. е.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{x_0}^{x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

или окончательно

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Правая часть есть так называемая форма Лагранжа остаточного члена формулы Тейлора. Она позволяет переписать формулу Тейлора (7.37) так

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Папомним, что здесь $\xi \in (x_0, x)$.

16. Замена неременной в онределенном ннтеграле

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Положим $x = \varphi(t)$, и пусть α и β – такие числа, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Предположим, кроме того, что:

а) функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$:

б) если $\alpha \le t \le \beta$, то $a \le \varphi(t) \le b$.

Докажем, что в этом случае справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (7.39)$$

При сделанных предположениях сложная функция $f[\varphi(t)]$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$. Поэтому оба интеграла из формулы (7.39) существуют, в силу непрерывности подынтегральных функций.

Пусть $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, тогда

$$\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\Big|_\alpha^\beta = \{F[\varphi(t)] + C\}\Big|_\alpha^\beta =$$

$$= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Формула (7.39) позволяет после выполнения интегрирования по переменной t не возвращаться к старой переменной x, а подставлять в полученную первообразную вместо новой переменной новые пределы интегрирования.

Нрнмер 7.5. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Положив $x = \operatorname{tg} t$, замечаем, что значениям $x = 0$ и $x = 1$ отвечают значения $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{4}$. Поэтому, на основании (7.39),

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{-6} t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + 2\cos 2t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}t + \sin 2t + \frac{1}{8}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + 1 + 0\right) = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}.$$

17. Ннтегралы от четных н нечетных функцнй в снмметрнчных нределах

Возьмем интеграл $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, где a – любое число. Имеем

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

В первом интеграле справа положим $x = -t$. Тогда, на основании формулы (7.39),

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt =$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$$

(на основании независимости определенного интеграла от обозначения переменной интегрирования). Итак,

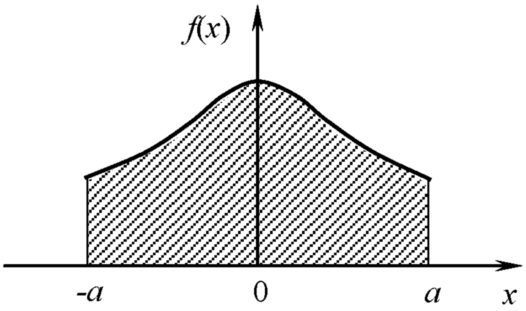


Рис. 7.21

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx,$$

т. е.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]dx. \qquad (7.40)$$

Пусть $f(x)$ – четная функция. Тогда $f(-x) = f(x)$, а значит

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

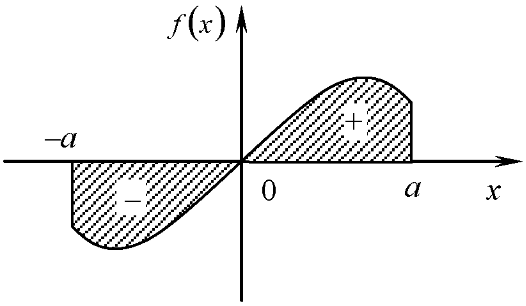


Рис. 7.22

Этот результат имеет простой геометрический смысл (рис. 7.21).

Пусть теперь $f(x)$ – нечетная функция. Тогда $f(-x) = -f(x)$, т. е. $f(x) + f(-x) = 0$, и формула (7.40) дает

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции с отрицательными функциями можно условно считать отрицательной, рис. 7.22.

18. Вычнсленне нлощадей фнгур нрн номощн ннтегралов

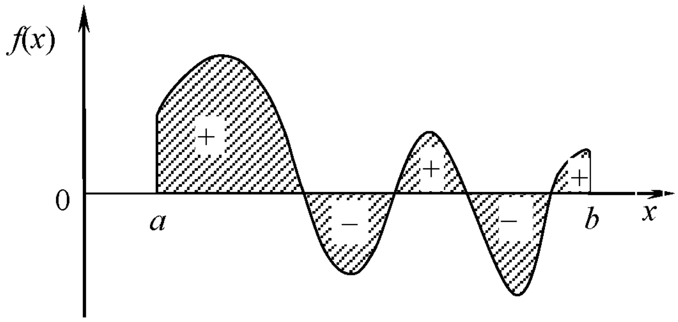


Рис.7.23

1°. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Из геометрического смысла определенного интеграла и из результата, полученного в конце предыдущего параграфа, следует, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, заключенных между линией $y=f(x)$ и осью Ox на отрезке $[a,b]$, рис. 7.23. Сумма же "модулей" этих площадей равна, очевидно,

$$\int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Если для всех $x\in[a,b]$ будет $f(x)\geq\varphi(x)$, то площадь фигуры, изображенной на рис. 7.24, очевидно, равна

$$\int\limits_a^b [f(x)-\varphi(x)]dx.$$

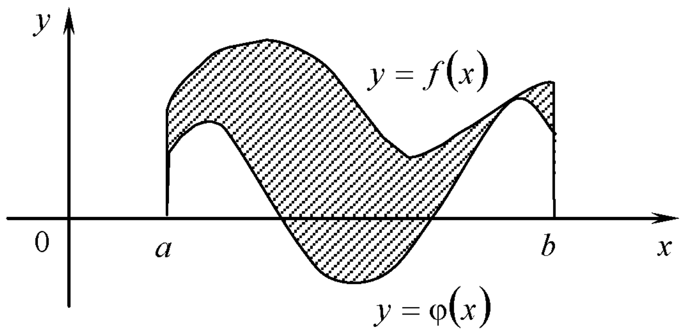


Рис.7.24

Нрнмер 7.6. Площадь фигуры, заключенной между параболами $y=x^2$ и $y^2=x$, рис. 7.25, равна

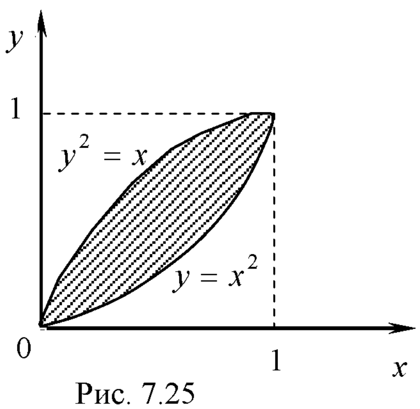


Рис. 7.25

$$S=\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

2°. Пусть теперь дуга $\overset{\smile}{AB}$ задана не декартовым уравнением, а параметрически:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \tag{7.41}$$

причем точкам A и B отвечают значения параметра $t=\alpha$ и $t=\beta$. Обозначим $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Будем считать, что функция $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$, и

$$(\alpha\leq t\leq\beta)\Rightarrow(a\leq\varphi(t)\leq b, \varphi(t)\geq 0).$$

Кроме того, мы естественно, считаем, что любая прямая $x=c$ $(a\leq c\leq b)$ пересекает дугу $\overset{\smile}{AB}$ только один раз, т. е. что определяемая уравнениями (7.41) функция $y=f(x)$ однозначна на отрезке $[a,b]$. Тогда площадь заштрихованной фигуры (рис. 7.26), очевидно, равна

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

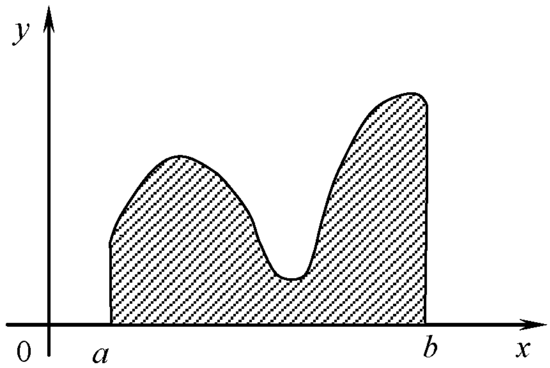


Рис. 7.26

Совершим в этом интеграле замену переменной по формуле $x=\varphi(t)$. Тогда, очевидно, $f[\varphi(t)]=\psi(t)$, и, на основании формулы (7.30), получим

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt .$$

Нрнмер 7.7. Вычислим площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b, рис. 7.27.

Параметрические уравнения дуги $\overset{\smile}{AB}$:

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$$

причем $0\le t\le\pi$. Поэтому учитывая симметрию эллипса, находим

$$S=2\int_\pi^0 b\sin t(-a\sin t)dt=-2ab\int_\pi^0 \sin^2 t\,dt=$$

$$=ab\int_0^\pi(1-\cos 2t)dt=ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^\pi=\pi ab .$$

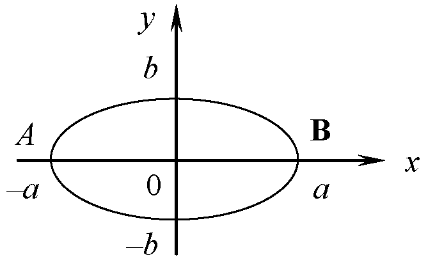


Рис.7.27

Этот результат легко было предусмотреть, учитывая, что площадь круга радиуса a равна πa^2, а эллипс есть равномерно деформированный круг с коэффициентом деформации $\frac{b}{a}$, так что должно быть

$$S=\frac{b}{a}\pi a^2=\pi ab .$$

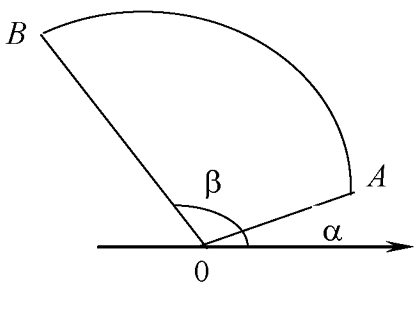


Рис. 7.28

3°. Пусть дуга $\overset{\smile}{AB}$ задана полярным уравнением $r=g(\varphi)$, где $g(\varphi)$ – однозначная, непрерывная и неотрицательная на отрезке $[\alpha,\beta]$ функция. Вычислим площадь сектора AOB, рис. 7.28.

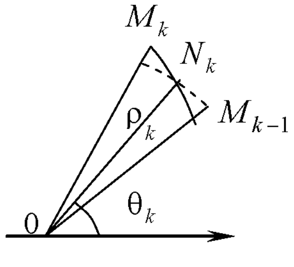


Рис. 7.29

Разобьем сектор на n частей лучами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$, …, $\varphi=\varphi_{n-1}$ и, как всегда, положим $\varphi_0=\alpha$,

$\varphi_n = \beta$. Кроме того, обозначим $\varphi_k - \varphi_{k-1} = \Delta\varphi_k$, $k = 1,2,\ldots,n$

Внутри каждого сектора $OM_{k-1}M_k$, рис. 7.29 проведем произвольный луч $\varphi = \theta_k$ и обозначим $ON_k = \rho_k$. Площадь кругового сектора с радиусом ρ_k и центральным углом $\Delta\varphi_k$ равна

$$\Delta S_k = \frac{1}{2}\rho_k^2 \Delta\varphi_k = \frac{1}{2}[g(\theta_k)]^2 \Delta\varphi_k .$$

Составим сумму (рис. 7.30)

$$\widetilde{S} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[g(\theta_k)]^2 \Delta\varphi_k .$$

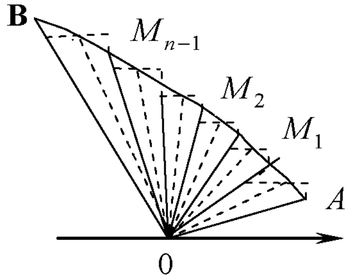


Рис.7.30

Она равна площади ступенчатой фигуры, составленной из круговых секторов.

Легко видеть, что $\widetilde{S}$ есть интегральная сумма для функции $\frac{1}{2}[g(\varphi)]^2$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, а т. к. эта функция непрерывна на нем, то, полагая $\lambda = \max\{\Delta\varphi_k\}$, получим для искомой площади

$$S = \lim_{\lambda\to 0} \widetilde{S}_\lambda = \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}[g(\theta_k)]^2 \ \ \varphi_k = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[g(\varphi)]^2 d\varphi .$$

Этот результат обычно записывают так

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi , \qquad (7.42)$$

подразумевая под r функцию $g(\varphi)$.

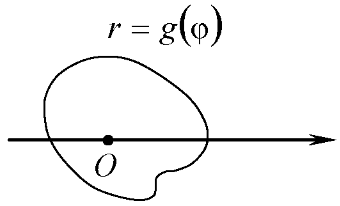


Рис.7.31

Легко убедиться, что формула (7.42) верна и для случая, когда линия $r = g(\varphi)$ – замкнутая, и полюс находится внутри нее, рис. 7.31. В этом случае, очевидно, надо положить, например, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$.

Нрнмер 7.8. Вычислим площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, рис. 7.32,

$$r = a(1 + \cos\varphi).$$

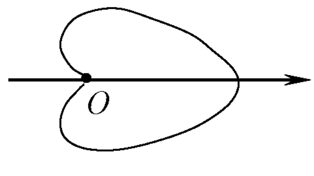


Рис.7.32

Имеем

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{3}{2}2\pi = \frac{3}{2}\pi a^2 .$$

19. Вычнсленне длнн дуг нрн номощн ннтегралов

Пусть в плоскости xOy задана дуга $\overset{\cup}{AB}$, рис. 7.33. Разобьем эту дугу на n частей точками M_1, M_2, …, M_{n-1} и впишем в нее ломаную $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$. Пусть $\tilde{s}$ – длина ломаной. Обозначим $\Delta s_k = M_{k-1}M_k \, (k = 1,2,\ldots,n)$, и пусть $\delta = \max\{\Delta s_k\}$. Предположим теперь, что $\delta \to 0$, т. е. что длина каждого звена ломаной стремится к нулю. Если существует предел $s = \lim\limits_{\delta \to 0} \tilde{s}_\delta$, не зависящий от способа разбиения дуги $\overset{\cup}{AB}$ точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, то он называется длиной дуги $\overset{\cup}{AB}$, а сама дуга в этом случае называется спрямляемой.

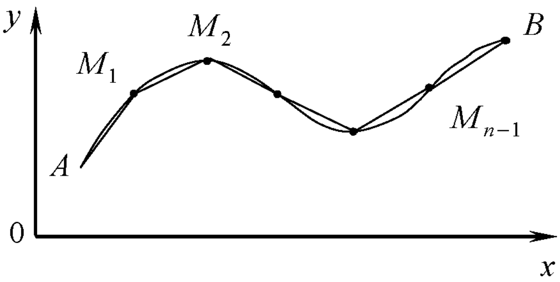


Рис.7.33

1°. Пусть дуга $\overset{\cup}{AB}$ задана декартовым уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Будем считать, что функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Обозначим x_k, y_k координаты точки $M_k \, (k = 1,2,\ldots,n)$, а $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, $y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$, рис. 7.34. Пусть, далее, $\lambda = \max\{\Delta x_k\}$. Тогда, очевидно, $(\lambda \to 0) \Leftrightarrow (\delta \to 0)$. Имеем

$$\tilde{s} = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k .$$

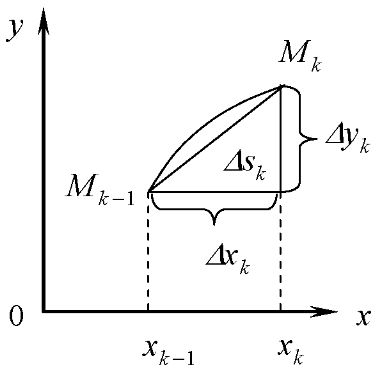


Рис.7.34

По

$$\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \, \Delta x_k .$$

Па основании теоремы Лагранжа,

$$\Delta y_k = f'(\xi_k) \Delta x_k ,$$

т. е.

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = f'(\xi_k),$$

где $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$. Следовательно, $\Delta s_k = \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k$, а значит

$$\tilde{s} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k . \qquad (7.43)$$

Справа стоит интегральная сумма для функции $\Phi(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$ на отрезке $[a,b]$, при этом значения ξ_k в этой сумме – это вполне определенные точки из теоремы Лагранжа. По, в силу условия, функция $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а значит точки ξ_k в интегральной сумме можно выбирать произвольно; в частности, в качестве ξ_k можно взять именно "лагранжевы" точки. Поэтому при $\lambda \to 0$ получим из равенства (7.43)

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Phi(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b \Phi(x)dx,$$

т. е.

$$s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

или короче

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx . \qquad (7.44)$$

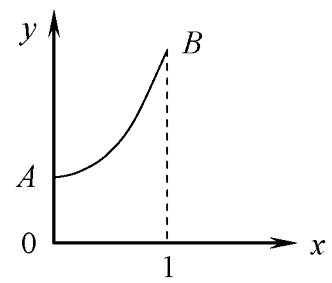


Рис. 7.35

Нрнмер 7.9. Длина дуги $\smile{AB}$ цепной линии $y = \mathrm{ch}x$ $(0 \le x \le 1)$, рис. 7.35, на основании (7.44), равна

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 x}\,dx = \int_0^1 \mathrm{ch}x\,dx = \mathrm{sh}x\Big|_0^1 = \mathrm{sh}1 = = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

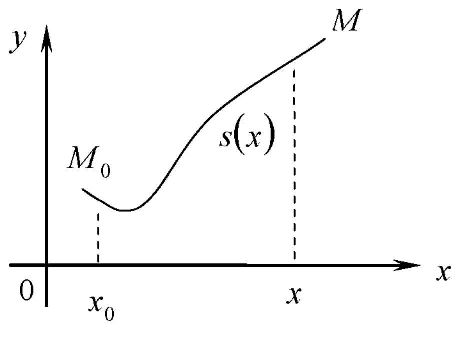


Рис. 7.36

Примечание. Пусть $s(x)$ – длина дуги линии $y = f(x)$ от фиксированной точки M_0 до "текущей" точки M, рис. 7.36. Тогда в силу (7.44),

$$s(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

где $y = f(x)$. Отсюда, на основании теоремы Барроу,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2} ,$$

что совпадает с формулой (5.15), принятой ранее без доказательства.

2°. Пусть дуга $\overset{\smile}{AB}$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{7.45}$$

причем движению точки M от A к B отвечает монотонное изменение параметра t от α до β. Совершим в формуле (7.44) замену переменной, положив $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция из параметрических уравнений (7.45). Тогда

$$y = f[\varphi(t)] = \psi(t), y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

а изменение x от a до b отвечает изменение t от α до β. Следовательно, на основании (7.39), формула (7.44) примет вид

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2} \varphi'(t) dt,$$

т. е.

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

или короче

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt. \tag{7.46}$$

Нрнмер 7.10. Пайдем длину первой арки циклоиды, рис. 7.37,

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

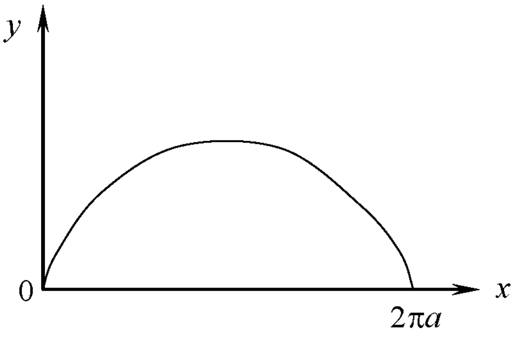


Рис. 7.37

Имеем, на основании (7.46),

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + (a \sin t)^2} dt =$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \, dt =$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} \, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = 4a \cos\frac{t}{2}\Big|_{2\pi}^{0} = 4a[1 - (-1)] = 8a.$$

Примечание 1. Легко убедиться, что формула (7.46) верна и в случае, когда вместо некоторой дуги $\overset{\smile}{AB}$ имеется замкнутая линия.

Кроме того, нетрудно видеть, что если кривая – пространственная, и ее параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases}$$

где $\alpha \le t \le \beta$, то, на основании формулы $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, для длины дуги $\overset{\smile}{AB}$ получим

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt,$$

где функции $\varphi'(t), \psi'(t)$, и $\chi'(t)$ предполагаются непрерывными.

Примечание 2. Пусть $\overset{\smile}{MM'}$ – элементарная дуга, отвечающая отрезку $[t, t + \Delta t]$ изменения параметра t. Обозначим $\overset{\smile}{MM'} = \Delta\breve{s}$, $MM' = \Delta s$. Имеем, в силу (7.46),

$$\Delta\breve{s} = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt,$$

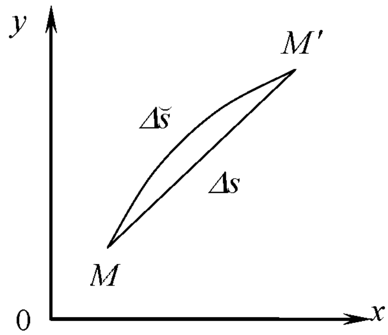


Рис.7.38

или на основании теоремы о среднем,

$$\Delta\breve{s} = \sqrt{[\varphi'(\theta)]^2 + [\psi'(\theta)]^2}\,\Delta t,$$

где $\theta \in (t, t + \Delta t)$.

Далее,

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau^*)]^2}\,\Delta t,$$

где $\tau \in (t, t + \Delta t), \tau^* \in (t, t + \Delta t)$. Следовательно,

$$\frac{\Delta\breve{s}}{\Delta s} = \frac{\sqrt{[\varphi'(\theta)]^2 + [\psi'(\theta)]^2}}{\sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau^*)]^2}}.$$

Если $\Delta t \to 0$, то $\theta \to t$, $\tau \to t$ и $\tau^* \to t$, а значит

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\breve{s}}{\Delta s} = 1.$$

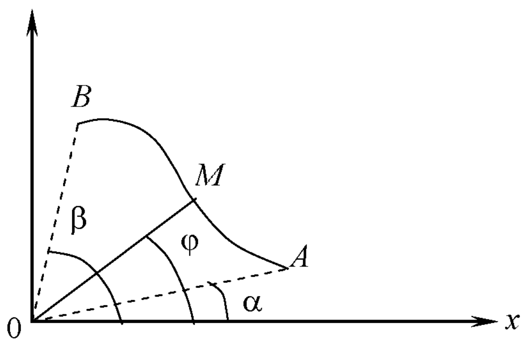


Рис. 7.39

Тем самым мы доказали, что длина бесконечно малой дуги спрямляемой линии эквивалентна длине стягивающей ее хорды. Это значит, что если

$\Delta t \to 0$, то $\Delta \breve{s} = \Delta s + O(\Delta s)$, рис. 7.38.

3°. Пусть дуга $\overset{\cup}{AB}$ задана полярным уравнением $r = g(\varphi)$. Поскольку $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то для любой точки $M \in \overset{\cup}{AB}$ будет

$$\begin{cases} x = g(\varphi)\cos\varphi, \\ y = g(\varphi)\sin\varphi, \end{cases}$$

т. е. мы снова пришли к параметрическому заданию, а поэтому формула (7.46) дает

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_{\varphi}'^2 + y_{\varphi}'^2}\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[g'(\varphi)\cos\varphi - g(\varphi)\sin\varphi]^2 + [g'(\varphi)\sin\varphi + g(\varphi)\cos\varphi]^2}\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[g'(\varphi)]^2 + [g(\varphi)]^2}\, d\varphi,$$

или короче,

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r_{\varphi}'^2 + r^2}\, d\varphi.$$

Нрнмер 7.11. Пайдем длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ (см. рис. 7.32). Учитывая симметричность кривой относительно полярной оси, получим

$$s = 2\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{(-a\sin\varphi)^2 + [a(1+\cos\varphi)]^2}\, d\varphi = 2a\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{\sin^2\varphi + 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi = 4a\int\limits_{0}^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\bigg|_{0}^{\pi} = 8a.$$

20. Вычнсленне объема нрн номощн ннтегралов

Пусть требуется вычислить объем произвольного тела, отнесенного к некоторой оси Ox, рис. 7.40. Будем считать, что площадь $s(x)$ сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, есть известная функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Проведем через эти точки секущие плоскости. Они разобьют тело на n слоев.

Па каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем произвольную точку ξ_k и вычислим $S(\xi_k)$. Произведение $S(\xi_k)\Delta x_k$ есть объем цилиндра с основанием $S(\xi_k)$ и высотой Δx_k. Составим сумму

$$\widetilde{V} = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k .$$

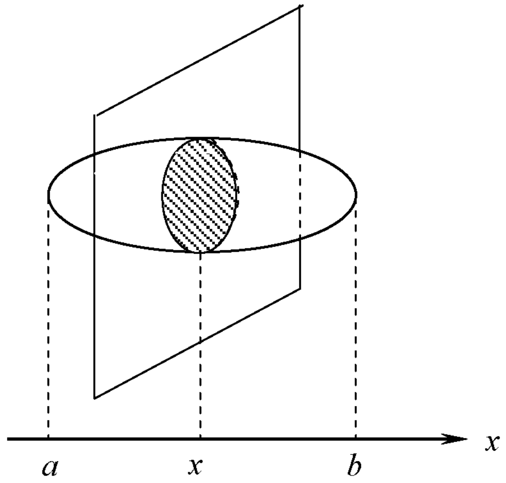


Рис. 7.40

Она равна объему "ступенчатого" тела, составленного из n цилиндрических тел. Обозначим теперь $\lambda = \max_k \{\Delta x_k\}$ и пусть $\lambda \to 0$. Тогда для искомого объема получим

$$V = \int_b^a S(x)dx . \qquad (7.47)$$

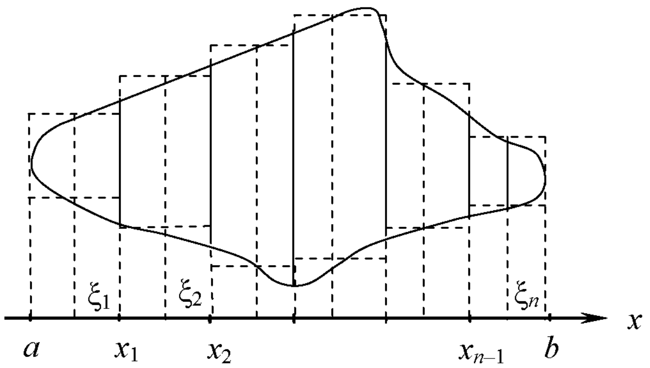


Рис. 7.41

Нрнмер 7.12. Вычислим объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ и плоскостью $z = H$, рис.7.42.

Формула (7.47) дает

$$V = \int_0^H S(z)dz .$$

Для нахождения $S(z)$ перепишем уравнение параболоида так

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{z}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{z}\right)^2} = 1 .$$

Используя результат примера 7.7, получим

$$S(z) = \pi a\sqrt{z} b\sqrt{z} = \pi abz ,$$

а значит

$$V = \pi ab \int_0^H z dz = \pi ab \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^H = \frac{1}{2}\pi abH^2 .$$

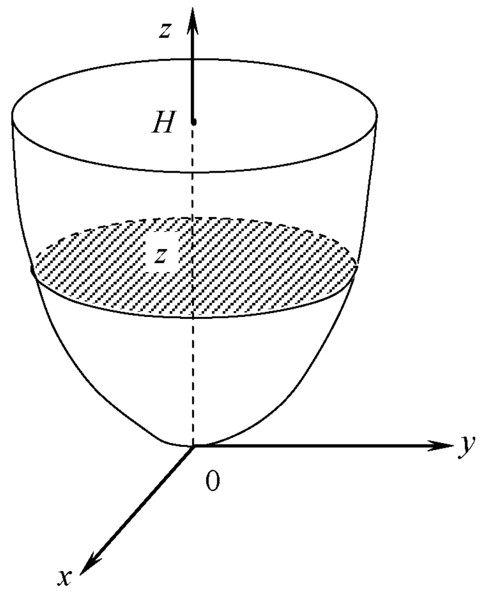


Рис. 7.42

Предположим теперь, что рассматриваемое тело образуется путем вращения вокруг оси Ox некоторой линии $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, рис. 7.43. Тогда при любом x

$$S(x) = \pi y^2,$$

а значит, в силу (7.47),

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx,$$

где под y подразумевается функция $f(x)$.

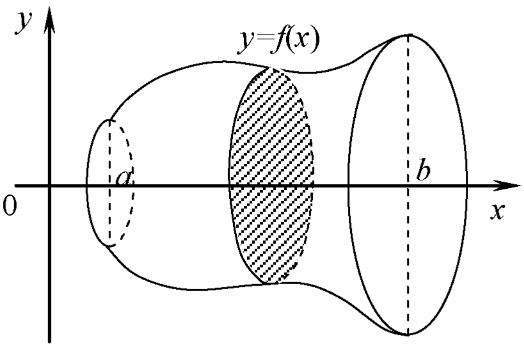


Рис. 7.43

Нрнмер 7.13. Вычислим объем веретенообразного тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной арки синусоиды $y = \sin x$, рис. 7.44.

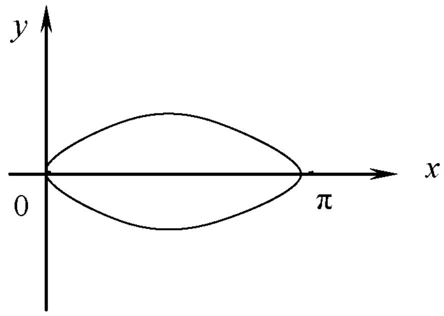


Рис. 7.44

Получим

$$V = \pi\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx =$$

$$\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

21. Вычнсленне нлощадей новерхностей вращення

Пусть дуга $\overset{\smile}{AB}$ линии $y = f(x)$, отвечающая отрезку $[a, b]$, вращается вокруг оси Ox (предполагается, что $f(x) \ge 0$, $\forall\ x \in [a, b]$). Разобьем дугу $\overset{\smile}{AB}$ на n частей точками $M_1, M_2, .., M_{n-1}$, и пусть x_k, y_k – координаты точки $M_k (k = 1, 2, ..., n)$. Впишем в дугу $\overset{\smile}{AB}$ ломаную $AM_1M_2..M_{n-1}B$, рис. 7.45. Ее звено $M_{n-1}M_n$ при вращении вокруг оси Ox описывает поверхность конуса (вообще говоря, усеченного). Ее площадь, следовательно, равна

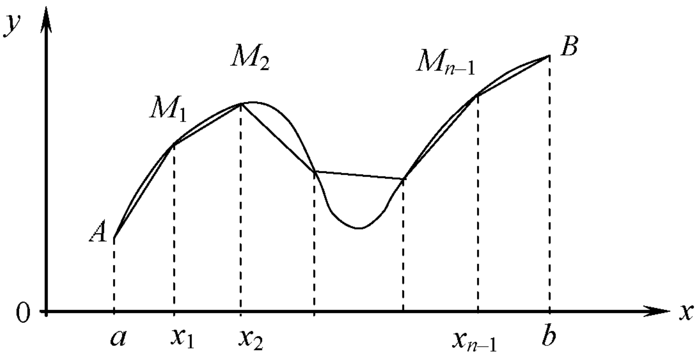


Рис. 7.45

$$\Delta S_k = \pi(y_{k-1} + y_k)\Delta s_k.$$

Составим сумму

$$\widetilde{S}=\pi\sum_{k=1}^{n}\left(y_{k-1}+y_k\right)\Delta s_k .$$

Пусть $\delta=\max\limits_k\{\Delta s_k\}$. Предположим теперь, что $\delta\to 0$, т. е. что длина каждого звена ломаной стремится к нулю. Если существует предел $S=\lim\limits_{\delta\to 0}\widetilde{S}_\delta$, то он называется площадью поверхности, образованной вращением дуги $\overset{\smile}{AB}$ вокруг оси Ox.

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Докажем, что в этом случае упомянутый предел существует и найдем его значение. Для этого перепишем выражение для $\widetilde{S}$ так

$$\widetilde{S}=\pi\left[\sum_{k=1}^{n}y_{k-1}\Delta s_k+\sum_{k=1}^{n}y_k\Delta s_k\right],$$

т. е.

$$\widetilde{S}_\lambda=\pi\left[\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{k-1})\sqrt{1+\left[f'\left(\xi_k^*\right)\right]^2}\,\Delta x_k+\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\sqrt{1+\left[f'\left(\xi_k^*\right)\right]^2}\,\Delta x_k\right], \quad (7.48)$$

где $\lambda=\max\limits_k\{\Delta x_k\}$.

Справа в (7.48) стоят суммы, в которых ξ_{k-1} и ξ_k – точки разбиения отрезка $[a,b]$, а ξ_k^* – точки из теоремы Лагранжа (см. п. 20). Поэтому обе суммы являются не интегральными для функции $\Phi(x)=f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$, а квазиинтегральными. В силу теоремы 7.4 о квазиинтегральной сумме (ее условия, очевидно, выполняются), получим из (7.48) при $\lambda\to 0$

$$S=\pi\left[\int_a^b\Phi(x)dx+\int_a^b\Phi(x)dx\right],$$

т. е.

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

или короче

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

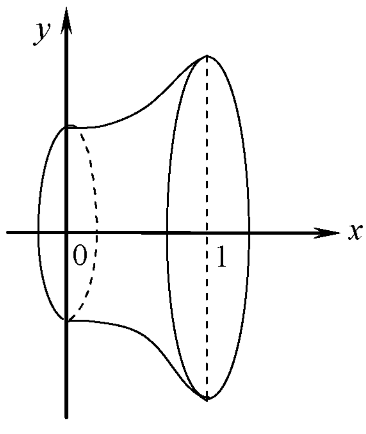


Рис. 7.46

Нрмер 7.14. Пайдем площадь поверхности, образованной вращением дуги линии $y=\operatorname{ch}x$ $(0\le x\le 1)$ вокруг оси Ox,

рис. 7.46.
Имеем

$$S = 2\pi\int_0^1 \operatorname{ch}x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx = 2\pi\int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\,dx =$$

$$= \pi\int_0^1 (\operatorname{ch}2x+1)dx = \pi\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh}2x + x\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh}2+1\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{e^2-e^{-2}}{4}+1\right).$$

22. Нахожденне коорднннат центров тяжестн. Теоремы Гульднна

Рассмотрим дугу $\overset{\smile}{AB}$ материальной линии $y = f(x)$, отвечающую отрезку $[a,b]$ оси Ox. Будем считать функцию $f'(x)$ непрерывной на отрезке $[a,b]$. Предполагая дугу однородной (ее линейную плотность можно, не ограничивая общности, считать равной 1), найдем центр тяжести C этой дуги.

Для этого разобьем дугу на n частей точками $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$. Пусть x_k, y_k – координаты точки M_k. Далее, пусть Δs_k – длина дуги $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$. Тогда

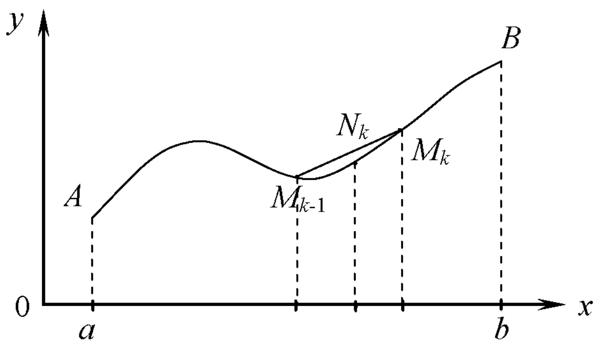


Рис. 7.47

$$\Delta s_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

или, на основании теоремы $7.6'$,

$$\Delta s_k = \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k,$$

где $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$. Пусть $n_k = f(\xi_k)$. Очевидно точка $N_k(\xi_k, n_k)$ принадлежит дуге $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$.

Каждую из малых дуг $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$ будем рассматривать как материальную точку с массой Δm_k, численно равной Δs_k, помещенную в точку N_k. Тогда, на основании полученной в аналитической геометрии формулы, имеем

$$\tilde{x}_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta s_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\, \Delta x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\, \Delta x_k}.$$

Пусть теперь $\lambda \to 0$. Тогда в пределе получим формулу

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx},$$

т. е.

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx},$$

и аналогично

$$y_c = \frac{\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}. \tag{7.49}$$

Перепишем формулу (7.49) так

$$y_c s = \int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

где s – длина дуги $\overset{\smile}{AB}$, т. е.

$$2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi y_c s.$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 7.11. Площадь поверхности, полученной при вращении дуги вокруг некоторой не пересекающей ее оси, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести этой дуги.

Эту теорему называют 1-й теоремой Гульдина.

Возьмем теперь материальную фигуру, ограниченную линиями $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, где функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и неотрицательны на отрезке $[a,b]$, причем $f(x) \geq \varphi(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Считая эту фигуру однородной с поверхностной плотностью $\rho = 1$, будем искать ее центр тяжести. Разобьем фигуру на n вертикальных полос. Масса каждой полосы численно равна $\Delta m_k = [f(\xi_k) - \varphi(\xi_k)]\Delta x_k$. Считая эту полосу материальной точкой с массой Δm_k и с координатами ξ_k и $\frac{1}{2}[f(\xi_k) + \varphi(\xi_k)]$, получим

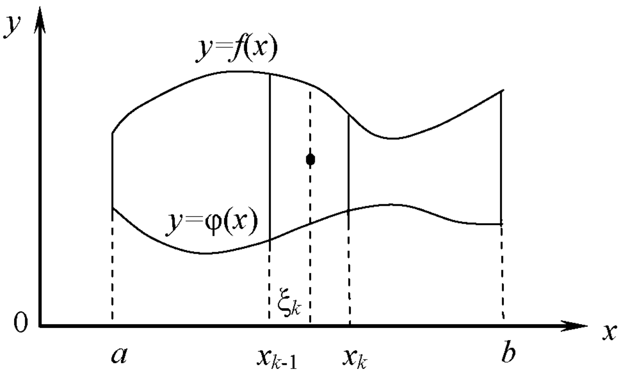


Рис. 7.48

$$\tilde{x}_c = \frac{\sum\limits_{k==1}^{n} \xi_k \Delta m_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta m_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k [f(\xi_k) - \varphi(\xi_k)]\Delta x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} [f(\xi_k) - \varphi(\xi_k)]\Delta x_k},$$

$$\tilde{y}_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\xi_k) + \varphi(\xi_k)]\Delta m_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta m_k} = \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} [f(\xi_k) + \varphi(\xi_k)][f(\xi_k) - \varphi(\xi_k)]\Delta x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} [f(\xi_k) - \varphi(\xi_k)]\Delta x_k} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \left\{[f(\xi_k)]^2 - [\varphi(\xi_k)]^2\right\}\Delta x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} [f(\xi_k) - \varphi(\xi_k)]\Delta x_k}.$$

В пределе, при $\lambda \to 0$, получим точные формулы:

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x[f(x) - \varphi(x)]dx}{\int\limits_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx}, \qquad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left\{[f(x)]^2 - [\varphi(x)]^2\right\}dx}{\int\limits_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx},$$

или

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b x[f(x) - \varphi(x)]dx, \qquad y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b \left\{[f(x)]^2 - [\varphi(x)]^2\right\}dx, \quad (7.50)$$

где S – площадь рассматриваемой фигуры.

В частности, если $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$, то для центра тяжести криволинейной трапеции, рис. 7.49, имеем

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b xy dx, \qquad y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 dx,$$

где под y подразумевается функция $f(x)$.

Перепишем вторую из формул (7.50) так

$$2\pi y_c S = \pi\int_a^b \left\{[f(x)]^2 - [\varphi(x)]^2\right\}dx,$$

или

$$\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi\int_a^b [\varphi(x)]^2 dx = 2\pi y_c S.$$

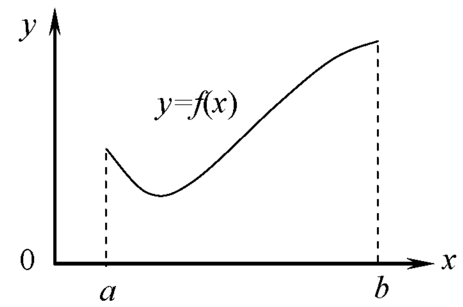


Рис. 7.49

Отсюда вытекает следующая

Теорема 7.12. Объем тела, полученного при вращении плоской фигуры вокруг на пересекающей ее оси равен площади этой фигуры, умноженной на длину окружности, описываемой ее центром тяжести.

Эту теорему называют 2-й теоремой Гульдина.

Нрнмер 7.15. Объем тела, образованного вращением круга радиуса r вокруг оси, удаленной от его центра на расстояние R, рис. 7.50, равен

$$V = \pi r^2 2\pi R = 2\pi^2 R r^2,$$

а площадь поверхности этого тела, как легко следует из 1-й теоремы Гульдина, равна

$$S = 2\pi r 2\pi R = 4\pi^2 r R.$$

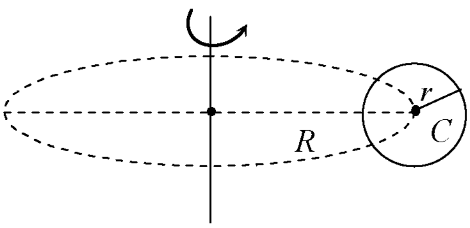


Рис. 7.50

23. Нрнмеры нрнменення ннтегралов к решенню фнзнческнх задач

Задача 1. Вычислить силу, с которой однородный стержень длины ℓ и массы M притягивает материальную точку массы m, находящуюся на линии продолжения стержня на расстоянии a от ближайшего его конца, рис. 7.51.

Пусть $[x_{k-1}, x_k]$ малый участок стержня (его называют элементарной частью, или просто элементом, стержня). Его масса находится из пропорции

$$\frac{\Delta M_k}{M}=\frac{\Delta x_k}{\ell},$$

откуда

$$\Delta M_k=\frac{M}{\ell}\Delta x_k .$$

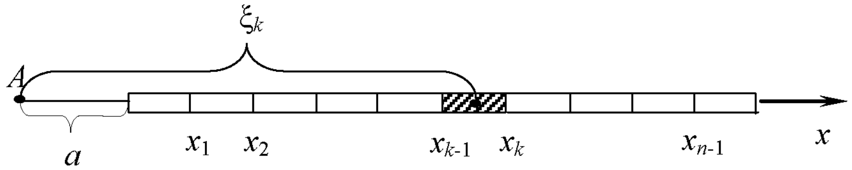


Рис. 7.51

Считая этот участок материальной точкой, получим, что он притягивает точку A с силой

$$\Delta F_k\approx\gamma\frac{m\Delta M_k}{\xi_k^2}=\gamma\frac{mM}{\ell}\frac{\Delta x_k}{\xi_k^2},^{*)}$$

а так как все силы $\overrightarrow{\Delta F_k}$ коллинеарны и сонаправлены, то суммарная сила

$$\widetilde{F}=\sum_{k=1}^{n}\Delta F_k=\gamma\frac{mM}{\ell}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta x_k}{\xi_k^2},$$

откуда в пределе, при $\lambda\to 0$, получим точную формулу

$$F=\gamma\frac{mM}{\ell}\int\limits_a^{a+\ell}\frac{dx}{x^2}=\gamma\frac{mM}{\ell}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^{a+\ell}=\gamma\frac{mM}{\ell}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+\ell}\right)=\gamma\frac{mM}{a(a+\ell)}.$$

Примечание. Оформление решения подобных задач можно сократить следующим образом. В физическом объекте задачи выделяется лишь один элемент, для которого вычисляется подлежащая нахождению величина, а затем сразу, опуская суммирование и последующий предельный переход, находим искомую величину в виде интеграла.

Задача 2. Вычислить потенциальную энергию песка, образующего коническую кучу с радиусом основания R и высотой H, если удельный вес песка равен p.

Выделяем элементарный объем и вычисляем его как объем цилиндра. Имеем

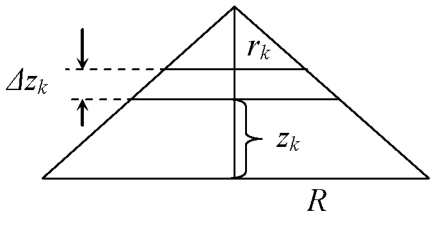


Рис. 7.52

$$\frac{r_k}{R}=\frac{H-z_k}{H},$$

откуда

$$r_k=\frac{R}{H}\left(H-z_k\right),$$

*) Здесь γ – постоянная тяготения.

а значит

$$\Delta V_k = \pi \frac{R^2}{H^2} (H - z_k)^2 \Delta z_k .$$

Потенциальная энергия этого элемента равна

$$\Delta E_k = p \Delta V_k z_k = \pi \frac{R^2}{H^2} p z_k (H - z_k)^2 \Delta z_k ,$$

так что

$$E = \int_0^H \pi \frac{R^2}{H^2} pz(H-z)^2 dz = \frac{\pi R^2 p}{H^2} \int_0^H (H^2 z - 2Hz^2 + z^3) dz =$$

$$= \frac{\pi R^2 p}{H^2} \left(\frac{H^2 z^2}{2} - \frac{2Hz^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right) \Bigg|_0^H = \frac{\pi R^2 H^4 p}{H^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi R^2 H^2 p}{12} .$$

Задача 3. Найти момент инерции однородной пластинки плотности ρ, ограниченной линиями $y = 0$, $x = 1$ и $y = \sqrt{x}$, относительно оси Oy.

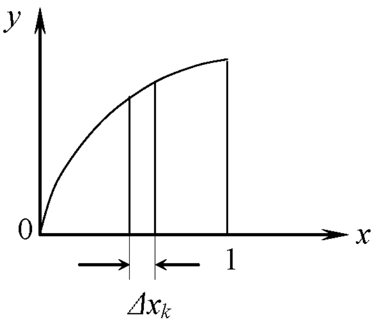


Рис. 7.53

Напомним, что момент инерции точки массы m относительно другой точки (или относительно оси), находящейся от нее на расстоянии r, равен $I = mr^2$. Поэтому элементом этой пластинки будет полоска ширины Δx_k, параллельная оси Oy. Ее масса равна $\Delta m_k = \rho y_k \Delta x_k = \rho \sqrt{x_k} \Delta x_k$, а значит ее момент инерции относительно оси Oy

$$\Delta I_k = \Delta m_k x_k^2 = \rho \sqrt{x_k} x_k^2 \Delta x_k ,$$

так что

$$I = \rho \int_0^1 \sqrt{x} x^2 dx = \rho \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{7} \rho x^{\frac{7}{2}} \Bigg|_0^1 = \frac{2}{7} \rho .$$

Задача 4. Однородная пластинка в форме полукруга радиуса R и плотности ρ вращается вокруг диаметра с угловой скоростью ω. Найти ее кинетическую энергию.

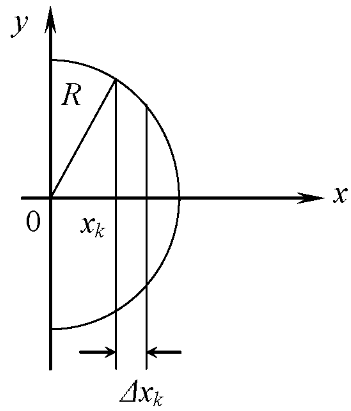


Рис. 7.54

Масса элементарного прямоугольника:

$$\Delta m_k = 2\rho y_k \Delta x_k = 2\rho \sqrt{R^2 - x_k^2} \Delta x_k ,$$

а значит ее кинетическая энергия

$$\Delta E_k = \frac{\Delta m_k v_k^2}{2} = \frac{\Delta m_k \omega^2 x_k^2}{2} = \rho \omega^2 \sqrt{R^2 - x_k^2} x_k^2 \Delta x_k .$$

Отсюда для кинетической энергии всей пластинки находим:

$$E = \rho\omega^2 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, x^2 dx .$$

Полагая $x = R\sin t$, получаем

$$E = \rho\omega^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t}\, R^2 \sin^2 t R\cos t dt = \rho\omega^2 R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{4}\rho\omega^2 R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8}\rho\omega^2 R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t) dt = \frac{1}{8}\rho\omega^2 R^4 \left(t - \frac{1}{4}\sin 4t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{8}\rho\omega^2 R^4 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{16}\pi\omega^2 R^4 \rho .$$

Легко видеть, что данная задача родственна предыдущей, так как кинетическая энергия пластинки отличается от ее момента инерции относительно оси вращения лишь множителем $\frac{\omega^2}{2}$.

Задача 5. Заряд q отталкивается от одноименного заряда q_1 на основании закона Кулона. Первоначальное расстояние между зарядами равно a, а окончательное $a+d$. Найти работу по перемещению заряда.

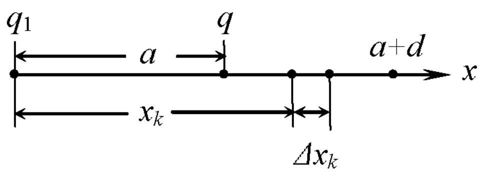


Рис. 7.55

Элементарная работа на участке Δx_k равна

$$\Delta A_k = \varepsilon \frac{q_1 q}{x_k^2} \Delta x_k ,$$

а значит

$$\mathrm{A} = \varepsilon q_1 q \int_a^{a+d} \frac{dx}{x^2} = \varepsilon q_1 q \left(-\frac{1}{x} \right)\Bigg|_a^{a+d} =$$

$$= \varepsilon q_1 q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d} \right).$$

Полагая $q = 1$, $d = +\infty$, получим $A = \varepsilon \frac{q_1}{a}$; это – т. н. потенциал электрического поля заряда q_1 в точке $x = a$.

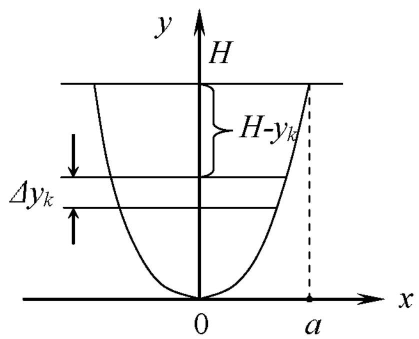


Рис. 7.56

Задача 6. Пластинка в форме параболического сегмента с высотой H и верхним основанием a, погружена вертикально в воду. Найти силу давления воды на каждую из сторон пластинки.

Парабола имеет уравнение вида $y = kx^2$. Полагая $x = a$, получим $y = H$, и значит $H = ka^2$, откуда $k = \frac{H}{a^2}$. Таким образом, уравнение параболы $y = \frac{H}{a^2}x^2$, т. е. $x^2 = \frac{a^2 y}{H}$. Площадь горизонтальной полоски ширины Δy_k равна

$$\Delta S_k = 2x_k \Delta y_k = 2\frac{a\sqrt{y_k}}{\sqrt{H}}\Delta y_k.$$

Сила давления воды на эту полоску

$$\Delta P_k = (H - y_k)\Delta S_k = 2\frac{a\sqrt{y_k}}{\sqrt{H}}(H - y_k)\Delta y_k.$$

Следовательно,

$$P = \frac{2a}{\sqrt{H}}\int_0^H \sqrt{y}(H - y)dy = \frac{2a}{\sqrt{H}}\int_0^H \left(Hy^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right)dy = \frac{2a}{\sqrt{H}}\left(\frac{2}{3}Hy^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^H =$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{H}}\left(\frac{2}{3}H^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}\right) = 2H^2 a\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{8a}{15}H^2.$$

Задачи и уиражиеиия к главе VII

1. При помощи определенного интеграла вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right].$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4x^2y^2$.

3. Найти площадь фигуры ограниченной линией $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8xy$.

4. Определить длину дуги линии $y^2 = \frac{4}{9}(2 - x)^3$, отсеченной прямой $x = -1$.

5. Вычислить длину дуги линии $y = \frac{x^2}{2} - 1$, отсеченной осью Ox.

6. Найти длину дуги линии

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3}, \\ y = 4 - \dfrac{t^2}{2}, \end{cases}$$

заключенной между точками пересечения с осью Ox.

7. Ветвь гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 \le y \le H)$ вращается вокруг оси Oy. Вычислить объем получаемого при этом тела (рис. 7.57).

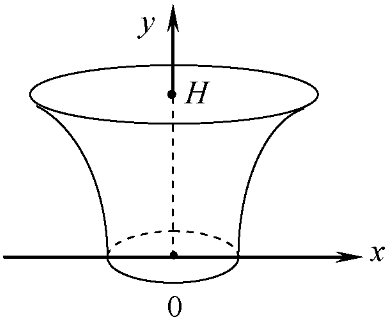


Рис. 7.57

8. На хордах астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, параллельных оси Oy, построены квадраты, стороны которых равны длинам хорд, и плоскости которых перпендикулярны плоскости xOy. Найти объем тела, образованного этими квадратами.

9. Вычислить момент инерции однородного полукольца радиуса R и массы M относительно касательной, параллельной диаметру (рис. 7.58).

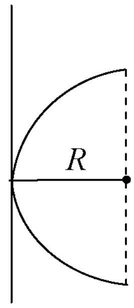


Рис. 7.58

10. Найти момент инерции однородной пластинки в форме эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$ и массой M относительно оси Ox.

11. Вычислить момент инерции относительно оси Oy однородной пластинки с плотностью ρ, ограниченной линиями $y = \sin x, y = 0$ и $x = \dfrac{\pi}{2}$.

12. С какой силой однородный стержень длины 2ℓ и массы M притягивает материальную точку массы m, расположенную относительно стержня так, как указано на рис. 7.59.

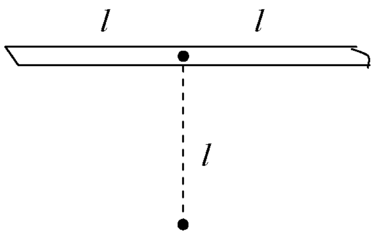


Рис. 7.59

13. Эллиптическая пластинка с полуосями a и b и с плотностью ρ вращается с угловой скоростью ω вокруг оси $2b$. Найти кинетическую энергию пластинки.

14. Однородная пластинка с плотностью ρ, ограниченная линиями

$x^2 - y^2 = 1$ и $x = 2$ $(x > 0)$, вращается вокруг оси Oy с угловой скоростью ω. Найти ее кинетическую энергию.

15. Однородный полукруг радиуса R и массы M, может вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с его диаметром, но удерживается в горизонтальном положении вертикальной нитью, рис. 7.60. Пользуясь теоремой о моментах сил, найти натяжение нити.

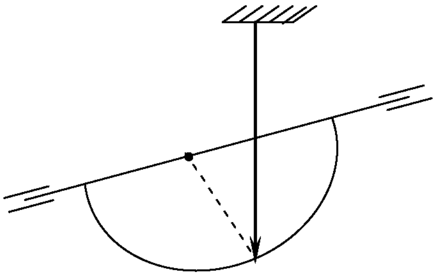


Рис. 7.60

16. Учитывая изменение силы тяжести с высотой, найти работу по поднятию тела массы m на высоту H над поверхностью Земли (радиус Земли равен R, а ее масса – M).

17. Вычислить момент инерции однородного квадрата со стороной a и массой M относительно оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали, рис. 7.61.

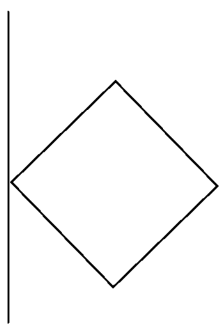


Рис. 7.61

18. Однородный стержень длины ℓ и массы M вращается в горизонтальной плоскости вокруг своего конца с угловой скоростью ω. Найти натяжение в точке закрепления, возникающее в результате действия центробежной силы, рис. 7.62.

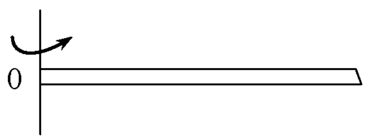


Рис. 7.62

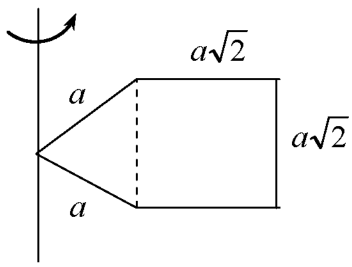


Рис. 7.63

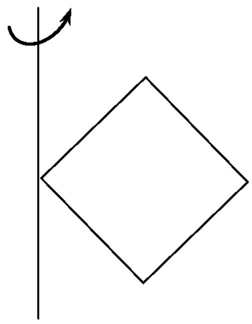


Рис. 7.64

19. Изображенная на рис. 7.63 однородная пластинка с плотностью ρ вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Найти натяжение в точке закрепления, возникающее в результате действия центробежной силы .

20. Квадрат со стороной a и массой M вращается вокруг оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали (рис. 7.64), с угловой скоростью ω. Найти натяжение в точке закрепления, возникающее в ре-

зультате действия центробежной силы.

21. Найти момент инерции однородного параболического тела (рис. 7.65) относительно его оси.

22. Вычислить потенциальную энергию опрокинутого однородного параболоида вращения (рис. 7.66), если его плотность равна ρ.

23. Однородное тело с плотностью ρ, ограниченное параболоидом

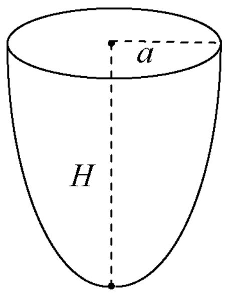


Рис. 7.67

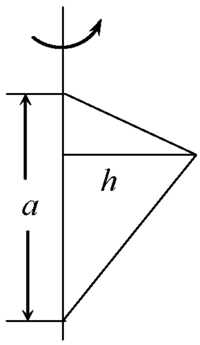


Рис. 7.68

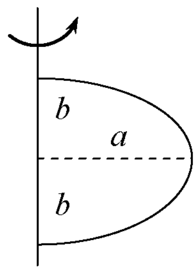


Рис. 7.69

вращения (рис. 7.67) и плоскостью, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти его кинетическую энергию.

24. Ветер оказывает равномерное давление p на треугольный флюгер с основанием a и высотой h. Найти суммарный момент силы давления

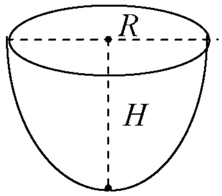


Рис. 7.65

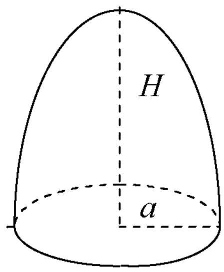


Рис. 7.66

относительно оси вращения (рис. 7.68).

25. Ветер оказывает равномерное давление p на флюгер в форме параболического сегмента (рис. 7.69). Найти суммарный момент силы давления относительно оси флюгера.

VIII. Песобствеииые иитегралы

1. Песобствеииые иитегралы иервого рода

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом участке отрезка $[a,b]$, где $b>a$. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x)dx\,.$$

При переменном b он является функцией аргумента b. Пусть $b\to+\infty$. Предел

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{8.1}$$

называется несобственным интегралом функции $f(x)$ на промежутке $[a,+\infty]$ и обозначается символом

$$\int_a^\infty f(x)dx\,. \tag{8.2}$$

Если предел (8.1) существует, то несобственный интеграл (8.2) называется сходящимся. В противном случае говорят, что несобственный интеграл (8.2) расходится. В частности, это будет тогда, когда предел (8.1) равен ∞.

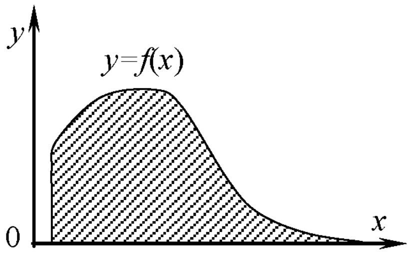


Рис. 8.1

Если при всех $x\ge a$ будет $f(x)\ge 0$, то интеграл (8.2) геометрически представляет собой площадь заштрихованной бесконечной области, рис. 8.1.

Пример 8.1. Имеем

$$\int_1^b\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\bigg|_1^b=1-\frac{1}{b},$$

а так как $\lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1}{b}=0$, то $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}=1$, т. е. интеграл $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}$ сходится.

Пример 8.2. Аналогично

$$\int_1^b\frac{dx}{x}=\ln x\big|_1^b=\ln b\,,$$

а значит

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=+\infty,$$

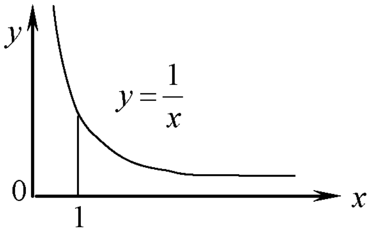


Рис. 8.2

т. е. интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ расходится. Это вызвано тем, что функция $\frac{1}{x}$ убывает при $x \to \infty$ недостаточно быстро.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,+\infty]$. Тогда она имеет в нем первообразную $F(x)$ и

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Следовательно, интеграл (8.2) в этом случае сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел $F(+\infty) = \lim\limits_{b \to +\infty} F(b)$, и в этом случае

$$\int_a^\infty f(x)dx = F(+\infty) - F(a). \qquad (8.3)$$

Это равенство обобщает формулу Ньютона–Лейбница на случай несобственного интеграла (8.2).

Формула (8.3) позволяет не только установить сходимость или расходимость несобственного интеграла, но и вычислить его в случае сходимости. Однако часто бывает достаточно лишь исследовать интеграл (8.2) на сходимость. Для этого функцию $F(x)$ находить не обязательно, т.е. необязательно выполнять интегрирование. Укажем на этот счет наиболее простые признаки сходимости несобственных интегралов, известные как признаки сравнения.

1°. Если при всех $x \geq a$ будет $0 \leq f(x) \leq q(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^\infty q(x)dx$ вытекает и сходимость интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$.

■Действительно, пусть

$$\int_a^\infty q(x)dx = Q,$$

где Q – некоторое число.

Тогда при любом $b > a$ будет $\int_a^b q(x)dx \leq Q$, а значит тем более

$$\int_a^b f(x)dx \leq Q.$$

Итак, при $b \to +\infty$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ возрастает, но не превосходит числа Q, а значит существует предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \le Q,$$

что и требовалось доказать.□

2°. Если при всех $x \ge a$ будет $0 \le q(x) \le f(x)$, и интеграл $\int_a^\infty q(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$.

■Действительно, в силу условия,

$$\int_a^b q(x)dx \underset{b\to+\infty}{\to} +\infty,$$

а так как при любом $b>a$ будет $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b q(x)dx$, то и $\int_a^b f(x)dx \underset{b\to+\infty}{\to} \infty$.□

Примечание. Очевидно, что интегралы $\int_a^\infty f(x)dx$ и $\int_c^\infty f(x)dx$ одновременно или сходятся или расходятся, если только в промежутке $[a,c]$ (или $[c,a]$, если $c<a$) функция $f(x)$ интегрируема. В связи с этим неравенство $0 \le f(x) \le q(x)$ в признаке 1° и неравенство $0 \le q(x) \le f(x)$ в признаке 2° могут выполняться не при всех $x \ge a$, а лишь начиная с некоторого $x=c>a$.

3° (предельный признак сходимости). Если, начиная с некоторого $x=a$ будет $f(x)\ge 0$, $q(x)\ge 0$, и при $x\to+\infty$ функции $f(x)$ и $q(x)$ есть бесконечно малые одного порядка: $q(x)=O^*[f(x)]$, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{q(x)}=m$ $(m>0)$, то интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ и $\int_a^\infty q(x)dx$ одновременно или сходятся, или расходятся.

■В силу условия

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{q(x)}=m,$$

где $m>0$. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $M>0$, что

$$(x>M) \Rightarrow \left(\left|\frac{f(x)}{q(x)}-m\right|<\varepsilon\right),$$

т. е.

$$(x>M)\Rightarrow\left(m-\varepsilon<\frac{f(x)}{q(x)}<m+\varepsilon\right). \tag{8.4}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $M\ge a$. Тогда из выражения (8.4) будем иметь

$$(x>M)\Rightarrow\big((m-\varepsilon)q(x)<f(x)<(m+\varepsilon)q(x)\big).$$

Поскольку ε произвольно, будем считать, что $\varepsilon<m$. Тогда

$$(x>M)\Rightarrow\big(0\le(m-\varepsilon)q(x)<f(x)<(m+\varepsilon)q(x)\big). \tag{8.5}$$

Пусть интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится. Тогда, на основании (8.5) и признака 1°, сходится интеграл $\int\limits_a^\infty (m-\varepsilon)q(x)dx$, а значит сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty q(x)dx$.

Если же интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ расходится, то, в силу (8.5) и признака 2°, расходится интеграл $\int\limits_a^\infty (m+\varepsilon)q(x)dx$, а значит расходится и интеграл $\int\limits_a^\infty q(x)dx$. □

Очевидно, и в признаке 3° неравенства $f(x)\ge 0$, $q(x)\ge 0$ могут выполняться не при всех $x\ge a$, а лишь начиная с некоторого $x=c>a$.

Исследуем теперь на сходимость $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^k}$, где $k\ne 1$ (случай, когда $k=1$, уже был рассмотрен в примере 8.2). Имеем

$$F(x)=\frac{x^{-k+1}}{-k+1}=-\frac{1}{(k-1)x^{k-1}}.$$

Следовательно, если $k>1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$, а значит интеграл сходится. Если же $k<1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\infty$, и интеграл расходится.

Таким образом, интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^k}$ сходится при всех $k>1$ и расходится, если $k<1$.

Отсюда и из признака 3° вытекает следующее утверждение:

Теорема 8.1. Если $f(x)\geq 0$ начиная с некоторого x, и если при $x\to+\infty$ будет $f(x)\approx O^*\left(\frac{1}{x^k}\right)$, то интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится при $k>1$ и расходится, если $k\leq 1$.

Пример 8.3. Исследуем на сходимость интеграл $\int_a^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt[3]{x-1}}dx$. Имеем при $x\to+\infty$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt[3]{x-1}}\sim\frac{\frac{\pi}{2}}{x^{4/3}}=O^*\left(\frac{1}{x^{4/3}}\right),$$

а так как $\frac{4}{3}>1$, то, на основании теоремы 8.1., данный интеграл сходится.

В признаках 1°–3° фигурировали несобственные интегралы от неотрицательных функций. Возьмем теперь случай, когда при $x>a$ функция $f(x)$ произвольным образом может менять знак. Укажем для этого случая следующий признак.

4°.Если сходится интеграл $\int_a^\infty |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$.

В этом случае последующий интеграл называют абсолютно сходящимся, а поэтому признак 4° означает, что если интеграл сходится абсолютно, то он сходится и в обычном смысле. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

■Для доказательства признака 4° введем функции $\varphi(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}$ и $\psi(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}$. Очевидно, что $\varphi(x)\geq 0$ и $\psi(x)\geq 0$ для всех x, и

$$f(x)=\varphi(x)-\psi(x),\ |f(x)|=\varphi(x)+\psi(x).$$

Пусть интеграл $\int_a^\infty |f(x)|dx$ сходится и равен некоторому числу Q. Тогда величина $\int_a^\infty |f(x)|dx$, монотонно возрастая при $b\to+\infty$, не превосходит при этом, числа Q. Но

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx .$$

Каждый из интегралов справа неотрицателен и не убывает при $b \to +\infty$, оставаясь меньше числа Q. Следовательно, оба этих интеграла имеют пределы при $b \to +\infty$. Обозначим их Q_1 и Q_2; очевидно, что $Q_1 + Q_2 = Q$. Но тогда

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \varphi(x)dx - \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \psi(x)dx = Q_1 - Q_2 ,$$

т. е. интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится, что и требовалось доказать. □

Мы рассматривали до сих пор несобственные интегралы вида $\int_a^\infty f(x)dx$. Подобно этому вводится и несобственный интеграл $\int_{-\infty}^a f(x)dx$. По определению,

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx .$$

Очевидно, что для такого интеграла верно (с соответствующими перефразировками) все то, что было сказано об интегралах вида (8.2).

Сумму интегралов $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ и $\int_a^\infty f(x)dx$ условно обозначим через $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

причем величины c и b стремятся соответственно к $-\infty$ и к $+\infty$ независимо одна от другой. Если хотя бы один из пределов в правой части не существует, т. е. если хотя бы один из интегралов $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ и $\int_a^\infty f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ считается расходящимся.

Интегралы вида $\int_{-\infty}^a f(x)dx$, $\int_a^\infty f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называют несобственными интегралами с бесконечными пределами, или несобственными интегралами 1-го рода.

Часто встречаются пределы $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{-b}^{b} f(x)dx$. Такой предел называется главным значением несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ и обозначается v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Очевидно, что если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и его главное значение, и в этом случае

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \approx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

однако из сходимости интеграла v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ еще не следует сходимость самого интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Например,

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{-b}^{b}\frac{x\,dx}{1+x^2} = 0$$

(ввиду нечетности подынтегральной функции). В то же время сам интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}dx$ расходится, так как $(x\to\infty)\Rightarrow\left(\frac{x}{1+x^2} = O^*\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, а значит каждый из интегралов $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}$ и $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{1+x^2}$ расходится.

2. Песобствеииые иитегралы 2-го рода

Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[a,b]$, но $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$. Будем также считать, что функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[c,b]$, где $a<c<b$. На отрезке же $[a,b]$ функция $f(x)$ не может быть интегрируемой, так как она не ограничена на нем.

Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число, такое, что $a+\varepsilon<b$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$. Предположим, что $\varepsilon\to 0$. Предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

называется несобственным интегралом от неограниченной функции $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ и обозначается обычным символом $\int_a^b f(x)dx$. Если этот предел существует, то интеграл называется сходящимся. В противном случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

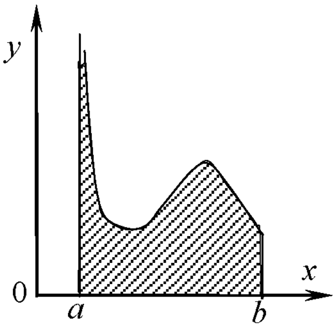


Рис. 8.3

Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a,b]$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь заштрихованной бесконечной области (рис. 8.3). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b]$ и пусть $F(x)$ – одна из ее первообразных. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}[F(b)-F(a+\varepsilon)]=F(b)-\lim_{\varepsilon\to 0}F(a+\varepsilon).$$

Следовательно, интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim_{\varepsilon\to 0}F(a+\varepsilon)$. Это будет, в частности, когда функция $F(x)$ непрерывна в точке $x=a$ (хотя бы справа). Обозначая предел $\lim_{\varepsilon\to 0}F(a+\varepsilon)$ через $F(a)$, получим

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Это обобщение формулы Ньютона–Лейбница на случай интеграла от неограниченной функции.

В качестве примера рассмотрим интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$, и исследуем его на сходимость при различных k. Имеем в данном случае

$$F(x)=\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}=\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}. \tag{8.6}$$

Если $k<1$, то, очевидно, $\lim\limits_{x\to a+0} F(x)<0$. Если же $k>1$, то $\lim\limits_{x\to a+0} F(x)=\infty$. Если же $k=1$, то вместо (8.6) имеем

$$F(x)=\ln(x-a),$$

а значит $\lim\limits_{x\to a+0} F(x)=\infty$.

Итак, интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$ сходится при всех $k<1$ и расходится, если $k\ge 1$.

Нетрудно видеть, что свойства интегралов от неограниченных функций аналогичны соответствующим свойствам несобственных интегралов 1-го рода.

Например, предельный признак сходимости, по аналогии с признаком 3°, читается так.

3'°. Если при $x\to a+0$ функции $f(x)$ и $q(x)$ являются неотрицательными бесконечно большими одного порядка, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b q(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Из этого признака и из результата, полученного для интеграла $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$, следует утверждение.

Теорема 8.2. Если при $x\in(a,b]$ будет $f(x)\ge 0$ и если

$$(x\to a+0)\Rightarrow\left(f(x)=O^*\left(\frac{1}{(x-a)^k}\right)\right),$$

то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится при $k<1$ и расходится при $k\ge 1$.

Пример 8.4. Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_e^1 \frac{\sqrt{x}\operatorname{arctg} x}{\left(e^{x^2}-1\right)\cos x}dx$.

Если $x\to +0$, то

$$\frac{\sqrt{x}\operatorname{arctg} x}{\left(e^{x^2}-1\right)\cos x}\sim\frac{\sqrt{x}x}{x^2}=\frac{1}{x^{1/2}},$$

а так как $\frac{1}{2} < 1$, то интеграл сходится.

Мы рассматривали интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ для случая, когда $f(x) \to \infty$ при $x \to a + 0$. Совершенно аналогично вводится несобственный интеграл для функции, бесконечно большой при $x \to b - 0$. В этом случае, по определению,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если же $f(x)$ обращается в бесконечность в точке $c \in (a, b)$, то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

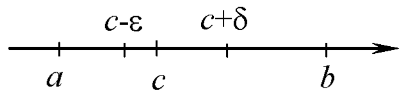


Рис. 8.4

т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx,$$

где ε и δ стремятся к нулю независимо друг от друга, рис. 8.4. Если хотя бы один из пределов в правой части не существует, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ является расходящимся. Формула Ньютона–Лейбница в этом случае, вообще говоря, не имеет места. Например, для интеграла $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ она дает

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2,$$

что абсурдно, поскольку интеграл от положительной функции не может быть отрицательным (в данном случае этот интеграл вообще расходится, так как $k = 2 > 1$).

Аналогично рассматривается случай, когда функция $f(x)$ обращается в бесконечность не в одной, а в нескольких точках отрезка $[a, b]$.

Интегралы от функций, неограниченных в промежутке интегрирования, называют несобственными интегралами 2-го рода.

Примечание 1. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода не следует противопоставлять друг другу, поскольку вторые получаются из первых, если в них, грубо говоря, поменять местами аргумент и функцию. Пусть, например,

$$(x \to +\infty) \Rightarrow \left(y = O^*\left(\frac{1}{x^k}\right) \right).$$

Тогда

$$(y \to +0) \Rightarrow \left(x = O^*\left(\frac{1}{y^{1/k}}\right) \right),$$

а поэтому, если интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ сходится при $k > 1$, то интеграл $\int\limits_0^1 f(x)dx$, $(x \to +0) \Rightarrow \left(f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^k}\right) \right)$, сходится при $\frac{1}{k} > 1$, т. е. при $k < 1$.

Примечание 2. Помимо несобственных интегралов 1-го и 2-го рода, встречаются и интегралы, имеющие одновременно несобственность и 1-го и 2-го рода. Каждый такой интеграл можно представить в виде суммы нескольких несобственных интегралов либо 1-го либо 2-го рода. Интеграл является сходящимся, если сходится каждый из составных интегралов.

Пример 8.5. Пусть

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{x \operatorname{arctg} x\, dx}{\left(\sqrt{x^6+1}\right)\ln\left(1+\sqrt{x^5}\right)}.$$

Очевидно

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x\, dx}{\left(\sqrt{x^6+1}\right)\ln\left(1+\sqrt{x^5}\right)} + \int\limits_1^\infty \frac{x \operatorname{arctg} x\, dx}{\left(\sqrt{x^6+1}\right)\ln\left(1+\sqrt{x^5}\right)}.$$

Для первого интеграла имеем

$$(x \to 0) \Rightarrow \left(f(x) \sim \frac{x^2}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{1/2}} \right),$$

а значит, этот интеграл сходится.

Для второго же интеграла получим

$$(x \to +\infty) \Rightarrow \left(f(x) \sim \frac{\frac{\pi}{2}x}{x^3 \ln\left(1+\sqrt{x^5}\right)} < \frac{\frac{\pi}{2}x}{x^4} = O^*\left(\frac{1}{x^3}\right) \right),$$

так что и этот интеграл сходится, а значит, сходится и первоначальный интеграл *I*.

Пример 8.6. Возьмем интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx$, где $q \ge 0$. При $x \to +\infty$ будет $f(x) \sim \frac{x^p}{x^q} = \frac{1}{x^{q-p}}$, так что для сходимости должно быть $q-p>1$. Далее, при $x \to +0$ будет $f(x) \sim x^p = \frac{1}{x^{-p}}$, а значит сходимость означает, что $-p<1$, т. е. $p>-1$.

3. Питегрироваиие ио частям и замеиа иеремеииой в иесобствеиином иитеграле

Пусть интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ – несобственный. Для определенности будем считать, что “несобственность” этого интеграла связана с верхним пределом интегрирования. При этом с целью одновременного рассмотрения несобственных интегралов как 1-го, так и 2-го рода, говоря об интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$, не будем исключать и случай, когда, например, $b=+\infty$.

Покажем, что на случай несобственных интегралов обобщаются формулы интегрирования по частям и замены переменной.

Возьмем интеграл $\int\limits_a^b udv$, где функции $u(x)$, $v(x)$, а так же $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны в промежутке $[a,b)$. Пусть $c \in [a,b)$ – произвольное число. Тогда, как мы знаем,

$$\int\limits_a^c udv = [u(c)v(c) - u(a)v(a)] - \int\limits_a^c vdu$$

(оба интеграла здесь собственные, и их существование очевидно). Переходя теперь к пределу при $c \to b-0$, получим

$$\int_a^b udv = [u(b)v(b) - u(a)v(a)] - \int_a^b vdu,$$

т. е.

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \tag{8.7}$$

Здесь под $u(b)v(b)$ подразумевается предел $\lim\limits_{x\to b-0} u(x)v(x)$. Если этот предел существует, то из сходимости интеграла $\int_a^b vdu$ следует сходимость интеграла $\int_a^b udv$ и наоборот.

Примечание 1. Легко видеть, что формула (8.7) верна и в случае, когда "несобственность" интеграла связана с его нижним пределом.

Примечание 2. Формула (8.7) бывает полезной не только для вычисления сходящегося несобственного интеграла, но и для самого исследования интеграла на сходимость, поскольку может случится, что интеграл $\int_a^b vdu$ в этом случае проще исходного интеграла $\int_a^b udv$. Возможен даже случай, когда исходный интеграл $\int_a^b udv$ является несобственным, а интеграл $\int_a^b vdu$ – уже собственный.

Пример 8.7. Возьмем интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$. Он является несобственным, поскольку $\lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} = -\infty$. Формула (8.7) дает

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x d\sqrt{x} = 2\left[\sqrt{x} \ln \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} \operatorname{ctg} x\, dx\right].$$

Но, по правилу Лопиталя,

$$\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\ln\sin x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+0}\frac{\operatorname{ctg} x}{-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}=-2\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{x^3}}{\sin x}=0\,.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\operatorname{ctg} x\,dx\,.$$

Вновь полученный интеграл легче исследовать на сходимость, чем исходный. Имеем при $x\to+0$

$$\sqrt{x}\operatorname{ctg} x\sim\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{x^{1/2}},$$

а так как $\frac{1}{2}<1$, то интеграл сходится.

Рассмотрим теперь интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ и предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b)$. Произведем в нем замену переменной по формуле $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонно возрастающая функция, а ее производная $\varphi'(t)$ непрерывна в промежутке $[\alpha,\beta]$ изменения переменной t, отвечающем промежутку $[a,b)$ изменения величины x (последнее означает, в частности, что $\varphi(\alpha)=a$, $\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)=b$).

Пусть $c\in(a,b)$ – произвольное число, а $\gamma\in(\alpha,\beta)$ – отвечающее ему значение переменной c. Тогда, как мы видели,

$$\int_a^c f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

(существование каждого из этих собственных интегралов очевидно). Переходя теперь к пределу при $c\to b-0$ (что равносильно соотношению $\gamma\to\beta-0$), получим

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,. \qquad (8.8)$$

При этом, как и для формулы (8.7), мы не просто установили равенство двух интегралов, но и показали, что сходимость одного из них влечет за собой сходимость другого.

Легко видеть, что формула (8.8) верна и в случае монотонного убывания функции $\varphi(t)$ в промежутке (α, β).

Кроме того, легко убедиться, что для формулы (8.8) справедливы оба примечания, сделанные в связи с формулой (8.7).

Пример 8.8. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$. Его сходимость следует из того, что

$$(x \to +\infty) \Rightarrow \left(\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} = O^*\left(\frac{1}{x^3}\right) \right).$$

Для вычисления этого интеграла положим $x = \operatorname{tg} t$. Эта замена превращает исходный интеграл в собственный. Действительно,

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t \; dt}{\cos^2 t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Задачи и уиражиеиия к главе VIII

Исследовать на сходимость интегралы:

1. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\left(x^3+1\right)^2}$; 2. $\int\limits_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$; 3. $\int\limits_0^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

4. $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+2}{x+1} dx$; 5. $\int\limits_0^{2} \frac{\sqrt{x}}{3^x - 2^x} dx$; 6. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\ln^{\varphi}\left(1+\sqrt{x}\right) \ln^{q}\left(1+\sqrt{x}\right)}$.

7. Бесконечный прямолинейный однородный стержень плотности ρ притягивает материальную точку массы m, удаленную от стержня на расстояние a. Вычислить силу притяжения.

IX. Диффереициальиое исчислеиие фуикций миогих иеремеииых

1. Точки и окрестиости в n-мериом иространстве

Точкой n-мерного пространства R^n (или R_n) называют упорядоченную совокупность n вещественных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$. Будем это записывать так:

$$M = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

или, что, то же самое, $M(x_1, x_2, ..., x_n)$. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называют координатами точки M.

Расстоянием между точками $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $N(y_1, y_2, ..., y_n)$ назовём величину

$$\rho(M, N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Мысленно вводя в n-мерном евклидовом пространстве E_n векторы $\vec{x}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ и $\vec{y}\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ и замечая, что

$$\rho(M, N) = |\vec{x} - \vec{y}|,$$

заключаем, что $\rho(M, N)$ обладает следующими свойствами модуля:

1°. $\rho(M, N) \geq 0$, причём $(\rho(M, N) = 0) \Leftrightarrow (M = N)$;

2°. $\rho(N, M) = \rho(M, N)$ для любых точек M и N из R_n;

3°. $\rho(M, P) \leq \rho(M, N) + \rho(N, P)$ (неравенство треугольника).

Пусть дана точка $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \in R_n$. Совокупность точек $M \in R_n$ таких, что $\rho(M_0, M) < \varepsilon$, называется ε-окрестностью точки M_0 и обозначается $C_\varepsilon(M_0)$. Таким образом,

$$C_\varepsilon(M_0) = \{M | M \in R_n, \rho(M_0, M) < \varepsilon\},$$

т. е.

$$C_\varepsilon(M_0) = \left\{ M(x_1, x_2, ..., x_n) \Big| \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^{(0)}\right)^2 < \varepsilon^2 \right\}. \quad (9.1)$$

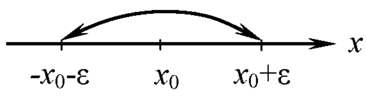


Рис. 9.1

При $n = 1$ имеем отсюда

$$C_\varepsilon(M_0) = \{x \| x - x_0| < \varepsilon\},$$

т. е. получаем окрестность точки на числовой оси в нашем прежнем понимании, рис. 9.1.

При $n = 2$ получим из (9.1)

$$C_\varepsilon(M_0) = \left\{ (x_1, x_2) \Big| \left(x_1 - x_1^{(0)}\right)^2 + \left(x_2 - x_2^{(0)}\right)^2 < \varepsilon^2 \right\},$$

т. е. в этом случае получаем внутренность круга

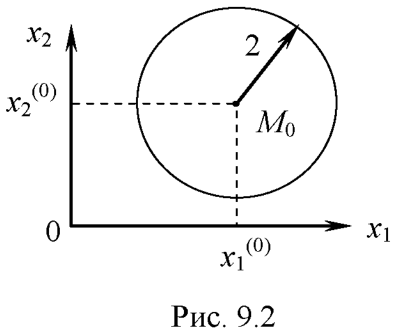


Рис. 9.2

радиусом ε с центром в точке M_0, рис. 9.2.

Аналогично при $n=3$ $C_\varepsilon(M_0)$ есть внутренность шара радиуса ε с центром в точке M_0.

Возьмём точку $M_0\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)\in R_n$, и пусть $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ – произвольные положительные числа. Множество

$$Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n}(M_0)=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\middle| x_i^{(0)}-\varepsilon_i<x_i<x_i^{(0)}+\varepsilon_i, \forall i=\overline{1,n}\right\}$$

называется n-мерным параллелепипедом с центром в точке M_0. Очевидно, что при $n=1$ будет

$$Q_\varepsilon(M_0)=C_\varepsilon(M_0);$$

при $n=2$ $Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(M_0)$ представляет собой прямоугольник с центром в точке M_0 и со сторонами длиной $2\varepsilon_1$ и $2\varepsilon_2$ параллельными координатным осям, рис. 9.3, и т. д.

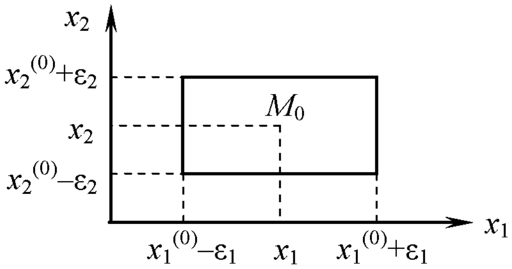


Рис 9.3

Лемма 9.1. При любом $\varepsilon>0$ существует такой параллелепипед $Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n}(M_0)$, что $Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n}(M_0)\subset C_\varepsilon(M_0)$, и, наоборот, для любого $Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n}(M_0)$ найдётся такое $\varepsilon>0$, что $C_\varepsilon(M_0)\subset Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k}(M_0)$.

■Пусть $M\in Q_{\delta,\delta,\ldots,\delta}(M_0)$. Тогда $x_i^{(0)}-\delta<x_i<x_i^{(0)}+\delta$ для всех $i=1,2,\ldots,n$, а значит

$$\rho(M_0,M)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_i^{(0)}\right)^2}<\sqrt{n\delta^2}=\delta\sqrt{n}.$$

Поэтому, положив $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, получи $\left(M\in Q_{\delta,\delta,\ldots,\delta}(M_0)\right)\Rightarrow\left(M\in C_\varepsilon(M_0)\right)$,

а это значит, что

$$Q_{\delta,\delta,\ldots,\delta}(M_0)\subset C_\varepsilon(M_0). \qquad (9.2)$$

Обратно, пусть даны $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$. Обозначим $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n\}$. Тогда, если $M\in C_\varepsilon(M_0)$, то для любого $k=1,2,\ldots,n$

$$\left|x_k-x_k^{(0)}\right|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_i^{(0)}\right)^2}=\rho(M_0,M)<\varepsilon,$$

т. е.

$$\left|x_k-x_k^{(0)}\right|<\varepsilon\le\varepsilon_i \quad \forall i=\overline{1,n}.$$

м, что $\rho(M_0,M)<\varepsilon$. Таким образом,

Таким образом,

$$\left(M \in C_\varepsilon(M_0)\right) \Rightarrow \left(M \in Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n}(M_0)\right),$$

а это значит, что

$C_\varepsilon(M_0) \subset Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n}(M_0)$. (9.3)

Из соотношений (9.2) и (9.3) и следует утверждение леммы.□

При $n = 2$ содержание леммы легко усматривается из чертежа (см. рис. 9.4).

Лемму 9.1 называют теоремой вложения.

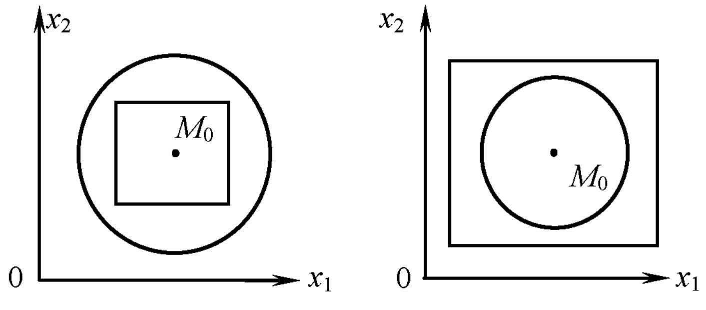


Рис. 9.4

2. Предел иоследовательиости точек

Рассмотрим последовательность точек $\{M_k\} \in R_n$ $(k = 1,2,3,\ldots)$. Точка $M \in R_n$ называется пределом последовательности $\{M_k\}$ (это записывается так: $M = \lim\limits_{k\to\infty} M_k$), если $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(M_k, M) = 0$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $K(\varepsilon)$, что

$$(k > K) \Rightarrow \left(M_k \in C_\varepsilon(M)\right).$$

Из леммы 9.1 следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = M$ тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n > 0$ найдётся такое $K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, что

$$(k > K) \Rightarrow \left(M_k \in Q_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n}(M)\right).$$

Очевидно, что если последовательность $\{M_k\}$ сходится к некоторой точке M, то к ней сходится и любая подпоследовательность $\{M_{k_\ell}\}$ этой последовательности.

Теорема 9.1. Для того, чтобы последовательность $\{M_k\} \in R_n$ сходилась к точке $M \in R_n$ необходимо и достаточно, чтобы для всех $i = 1,2,\ldots,n$ было

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i. \tag{9.4}$$

■<u>Необходимость</u>. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = M$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $K(\varepsilon)$, что $(k > K) \Rightarrow \left(M_k \in C_\varepsilon(M)\right)$, а значит тем более

$$(k > K) \Rightarrow \left(\left|x_i^{(k)} - x_i\right| < \varepsilon, \forall i = \overline{1,n}\right),$$

откуда и следует (9.4).

<u>Достаточность</u>. Пусть для всех $i = 1,2,\ldots,n$ выполняется (9.4). Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Для него найдётся такое $K(\varepsilon)$, что

$(k > K) \Rightarrow \left(\left|x_i^{(k)} - x_i\right| < \varepsilon, \forall i = \overline{1,n}\right)$, а поскольку $\rho(M_k, M) < \varepsilon\sqrt{n}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = M$. □

Из доказанной теоремы легко следует, что последовательность $\{M_k\}$ может иметь не более одного предела.

Множество $R \subset R_n$ называется ограниченным, если существует такое $L > 0$, что $R \subset C_L(0)$, т.е. если его можно заключить в некоторый шар с центром в начале координат.

Лемма 9.2. (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности точек $M_k \in R_n$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

■Пусть, для определённости, $n = 3$. Предположим, что последовательность точек $M_k(x_k, y_k, z_k)$ ограничена. Тогда ограничена каждая из числовых последовательностей $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{z_k\}$. На основании леммы Больцано-Вейерштрасса для числовых последовательностей, из ограниченной последовательности $\{x_k\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_i}\}$. Рассмотрим соответствующую подпоследовательность $\{y_{k_i}\}$. Являясь подпоследовательностью ограниченной последовательности $\{y_k\}$, она также ограничена, а значит содержит в себе сходящуюся подпоследовательность $\{y_{k_{i_j}}\}$. Возьмём теперь соответствующую подпоследовательность $\{z_{k_{i_j}}\}$ Она ограничена как подпоследовательность ограниченной последовательности $\{z_k\}$, а значит содержит в себе сходящуюся подпоследовательность $\{z_{k_{i_{j\ell}}}\}$.

Возьмём теперь подпоследовательности $\{x_{k_{i_{j\ell}}}\}$ и $\{y_{k_{i_{j\ell}}}\}$. Они сходятся как подпоследовательности сходящихся последовательностей $\{x_{k_i}\}$ и $\{y_{k_i}\}$.

Итак, последовательности $\{x_{k_{i_{j\ell}}}\}$, $\{y_{k_{i_{j\ell}}}\}$, $\{z_{k_{i_{j\ell}}}\}$ сходятся к некоторым пределам x, y, z, а это значит, на основании леммы 9.1, что последовательность $\{M_k(x_k, y_k, z_k)\}$ сходится к точке $M(x, y, z)$, что и требовалось доказать. □

3. Открытые и замкнутые множества в R_n

Пусть $R \subset R_n$ – некоторое множество. Точка M называется внутренней точкой множества R, если она принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью, т. е. если существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$(M \in R) \Rightarrow (C_\varepsilon(M) \subset R).$$

Множество называется открытым, если все его точки – внутренние.

Лемма 9.3. Любая ε окрестность любой точки $M \in R_n$ есть открытое множество.

■Пусть $N \in C_\varepsilon(M)$. Обозначим $\delta = \varepsilon - \rho(M,N)$ и рассмотрим множество. $C_\delta(N)$. Предположим, что $P \in C_\delta(N)$. Тогда $\rho(P,N) < \delta$, а значит в силу неравенства треугольника,

$$\rho(P,M) \le \rho(P,N) + \rho(N,M) < \rho(N,M) + \delta,$$

т. е.

$$\rho(P,M) < \varepsilon,$$

а значит

$$C_\delta(N) \subset C_\varepsilon(M)$$

(см. рис. 9.5).

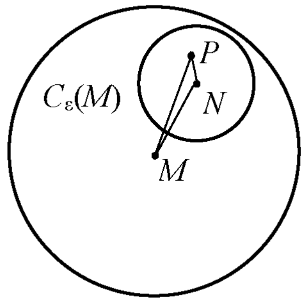


Рис. 9.5

Таким образом, $N \in C_\varepsilon(M) \Rightarrow C_\delta(N) \subset C_\varepsilon(M)$, т. е. произвольная точка N множества $C_\varepsilon(M)$ является внутренней его точкой, что и требовалось доказать. □

Точку $M \in R_n$ будем называть точкой прикосновения множества $R \subset R_n$, если любая окрестность этой точки содержит хотя бы одну точку множества R.

Очевидно, каждая точка множества является его точкой прикосновения (поскольку она содержит в себе уже, по крайней мере, одну эту точку).

Если точка $M \in R$ имеет окрестность, не содержащую никаких других точек множества R, кроме самой точки M, то точка M называется изолированной точкой множества R.

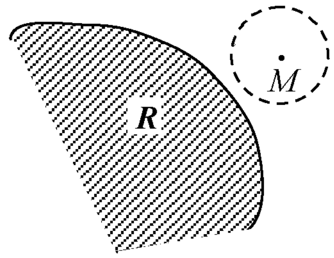


Рис. 9.6

Точка $M \in R_n$ называется предельной точкой (или точкой сгущения) множества R, если любая её окрестность содержит хотя бы одну точку множества R, отличную от M.

Очевидно, любая предельная точка множества является и его точкой прикосновения. Обратно, любая точка прикосновения является либо изолированной точкой множества, либо его предельной точкой (в последнем случае она может как принадлежать множеству, так и не принадлежать ему), рис. 9.6.

Пример 9.1. Пусть $n=1$ и пусть $R=(0;1)$. Тогда все точки интервала (0;1) являются предельными точками множества R, а значит и его точками прикосновения. Точки же $x=0$ и $x=1$ также являются предельными точками множества R, но не принадлежат этому множеству.

Пример 9.2. Если $R=[0;1]$, то точки $x=0$ и $x=1$ принадлежат множеству R, а значит, в этом случае множество точек прикосновения совпадает с самим множеством R.

Пример 9.3. Пусть множество R состоит из интервала (0,1) и точки $x=2$. Тогда точка $x=2$ есть изолированная точка множества R, а множество его точек прикосновения есть объединение отрезка [0,1] и точки $x=2$.

Совокупность всех точек прикосновения множества R называется замыканием множества R и обозначается $\overline{R}$. Очевидно, что всегда $R\subset\overline{R}$.

Множество R называется замкнутым, если $\overline{R}=R$, т. е. если все точки прикосновения множества принадлежат этому множеству.

Например, множество R=[0,1] в пространстве R_1 есть замкнутое множество.

Всё пространство R_n, как нетрудно видеть, одновременно есть и открытое, и замкнутое множество.

Лемма 9.4. Замыкание любого множества есть замкнутое множество.

■Пусть $R\subset R_n$ – произвольное множество. Требуется доказать, что $\overline{\left(\overline{R}\right)}=\overline{R}$. Выше мы отмечали, что всегда $R\subset\overline{R}$. Заменяя здесь R на $\overline{R}$, получим

$$\overline{R}\subset\overline{\left(\overline{R}\right)}\,. \tag{9.5}$$

Поэтому, если мы докажем, что одновременно

$$\overline{\left(\overline{R}\right)}\subset\overline{R}, \tag{9.6}$$

то отсюда и из (9.5) и будет следовать, что $\overline{\left(\overline{R}\right)}=\overline{R}$.

Пусть $M\in\overline{\left(\overline{R}\right)}$ – произвольная точка. Это значит, что M есть одна из точек прикосновения множества $\overline{R}$. Следовательно, в любой окрестности $C_\varepsilon(M)$ существует, по крайней мере, одна точка $N\in\overline{R}$. Поскольку $C_\varepsilon(M)$ есть открытое множество (лемма 9.3), то существует такая окрестность $C_\delta(N)$, что $C_\delta(N)\subset C_\varepsilon(M)$. Но соотношение $N\in\overline{R}$ означает, что N есть точка прикосновения множества R, а значит в $C_\delta(N)$ существует по крайней мере одна точка $R\in R$. Поскольку $C_\delta(N)\subset C_\varepsilon(M)$, то

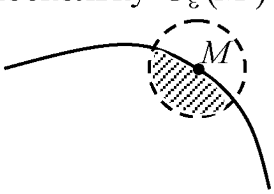


Рис. 9.7

тем более $P \in C_\varepsilon(M)$. Следовательно, в любой окрестности точки $M \in \overline{(\overline{R})}$ имеется точка P множества R, а это значит, что $M \in \overline{R}$. Таким образом, мы убедились, что $\left(M \in \overline{(\overline{R})}\right) \Rightarrow \left(M \in \overline{R}\right)$ откуда и следует (9.6). □

Точка $M \in R_n$ называется граничной точкой множества $R \subset R_n$, если в любой окрестности этой точки имеются как точки, принадлежащие множеству R, так и точки, не принадлежащие ему, рис. 9.7. При этом сама граничная точка может принадлежать множеству R, но может и не принадлежать этому множеству.

Совокупность всех граничных точек множества R называется его границей. Границу обычно обозначают ∂R. Очевидно, всегда

$$\partial R \subset \overline{R}$$

(поскольку каждая граничная точка множества является и его точкой прикосновения).

С другой стороны, каждая точка прикосновения множества является либо его граничной точкой, либо внутренней точкой этого множества, а значит

$$\overline{R} = R \cup \partial R .$$

Если R – открытое множество, то любая точка $M \in R$ – внутренняя, т. е. $M \notin \partial R$. Следовательно, в этом случае множества R и ∂R не имеют общих точек: $R \cap \partial R = 0$.

Пример 9.4. Возьмём в пространстве R_3 шар

$$C_R(0) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \middle| x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\right\} .$$

В силу леммы 9.3 он является открытым множеством. Его замыканием является замкнутый шар

$$\overline{C_R(0)} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \middle| x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le R^2\right\} .$$

Сфера

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \middle| x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\right\}$$

одновременно является границей обоих шаров. Однако в первом случае множества R и ∂R не имеют общих точек, а во вором случае, очевидно, $\partial R \subset R$.

Пусть теперь $R = \left\{(x_1, x_2, x_3) \middle| x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\right\}$. Любая точка этого множества является граничной, и при том других граничных точек данное множество не имеет, т. е. в этом случае множество R полностью состоит из своей границы:

$$\partial R = R .$$

4. Лииии и области в иространстве R_n

Множество точек $M \in R_n$, координаты которых являются непрерывными функциями некоторого параметра t:

$$x_i = \varphi_i(t),\ i = 1,2,\ldots,n;\ \alpha \le t \le \beta, \qquad (9.7)$$

называется непрерывной кривой в пространстве R_n (точнее дугой этой кривой). При этом точки $A(x_1(\alpha), x_2(\alpha), x_3(\alpha), \ldots, x_n(\alpha))$ и $B(x_1(\beta), x_2(\beta), x_3(\beta), \ldots, x_n(\beta))$ называют соответственно началом и концом дуги.

В частности, если

$$x_i = x_i^{(0)} + c_i t,\ i = 1,2,\ldots,n;\ -\infty < t < +\infty, \qquad (9.8)$$

то получим бесконечную прямую, проходящую через точку $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, в направлении вектора $\vec{c}\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Часть прямой, отвечающая изменению параметра t в некотором конечном промежутке, называется прямолинейным отрезком в пространстве R_n.

Соотношение (9.7) представим в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t), \\ ------ \\ x_n == \varphi_n(t). \end{cases}$$

Эти равенства естественно назвать параметрическими уравнениями данной линии. В частности, соотношениям (9.8) можно придать вид

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{(0)} + c_1 t, \\ x_2 = x_2^{(0)} + c_2 t, \\ -------- \\ x_n = x_n^{(0)} + c_n t. \end{cases}$$

Это – параметрические уравнения прямой в пространстве R_n. Разрешая последние равенства относительно t и приравнивая результаты, получим

$$\frac{x_1 - x_1^{(0)}}{c_1} = \frac{x_2 - x_2^{(0)}}{c_2} = \ldots = \frac{x_n - x_n^{(0)}}{c_n},$$

а это – канонические уравнения данной прямой в пространстве R_n.

Множество $R \subset R_n$ называется связным, если две любые его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству. Примером связного множества может служить квадрат $\{(x_1, x_2) \| x_1| < 1, |x_2| < 1\}$, рис. 9.8. В то же время множество $R = C_2(0) \cup C_1(4)$

не является связным, рис. 9.9.

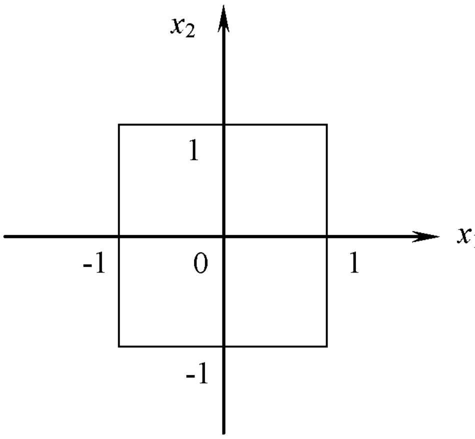


Рис. 9.8

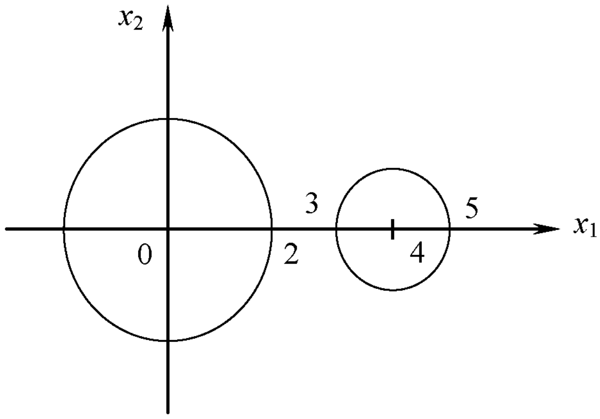


Рис. 9.9

Открытое связное множество называется областью. Множество, являющееся замыканием некоторой области называется замкнутой областью. Примером области может служить множество, изображённое на рис. 9.8. Пример замкнутой области (см. рис. 9.10)

$$-R=\{(x_1,x_2)|0\le x_1\le 4;0\le x_2\le 2\}.$$

Ограниченную замкнутую область называют компактом.

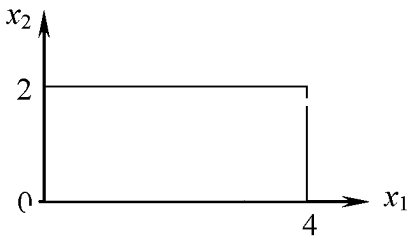


Рис. 9.10

5. Поиятие фуикции *n* иеремеииых

Пусть имеются n упорядоченных переменных: $x_1,x_2,...,x_n$. Предположим, что каждому конкретному набору этих переменных из некоторого множества $R\subset R_n$ отвечает одно или несколько значений вещественной переменной u. Тогда переменную u называют функцией n независимых переменных $x_1,x_2,...,x_n$. Это записывают так

$$u=f(x_1,x_2,...,x_n), \tag{9.9}$$

а множество R в этом случае называют областью определения данной функции (9.9) и обозначают D_u.

Если ввести точку $M(x_1,x_2,...,x_n)$ в пространство R_n, то вместо (9.9) можно писать просто: $u=f(M)$, т. е. в этом случае u трактуется как «функция точки» в n-мерном пространстве R_n.

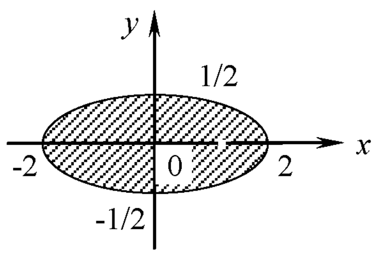


Рис. 9.11

В дальнейшем, если не будет специальных оговорок, мы будем рассматривать только однозначные функции.

Предположим, что число независимых переменных равно $n=2$. Тогда, вместо x_1 и x_2, эти переменные будем обозначать x и y, а их функцию – через z, т. е. будем писать: $z = f(x, y)$. Область определения такой функции представляет собой некоторое множество точек (x, y) плоскости xOy.

Пример 9.5. Пусть $z = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$. Очевидно, $D_z = \{(x, y) | 1 - x^2 - 2y^2 \geq 0\} = \{(x, y) | x^2 + 2y^2 \leq 1\}$, т. е. область определения есть компакт, ограниченный эллипсом $x^2 + 2y^2 = 1$, рис. 9.11.

Пример 9.6. Пусть теперь $z = \ln(1 - x^2 - 2y^2)$. Очевидно, в данном случае $D_z = \{(x, y) | x^2 + 2y^2 < 1\}$, т. е. область определения ограничена тем же эллипсом, но является теперь не замкнутой, а открытой, рис. 9.12.

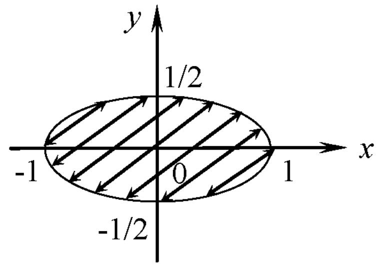


Рис. 9.12

Пример 9.7. Пусть, наконец, $z = \sqrt{\ln xy}$. Тогда $D_z = \{(x, y) | \ln xy \geq 0\} = \{(x, y) | xy \geq 1\}$. Легко видеть, что множество D_z в данном случае неограниченно и замкнуто, рис. 9.13.

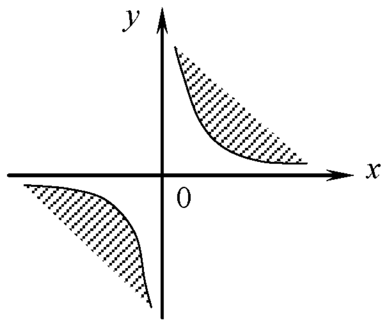


Рис. 9.13

Геометрически функция $z = f(x, y)$ изображается, вообще говоря, некоторой поверхностью в пространстве $Oxyz$. Эту поверхность естественно называть графиком данной функции, рис. 9.14.

При $n = 3$ независимые переменные x_1, x_2 и x_3, обычно обозначают x, y и z, а поэтому равенство (9.9) пишут в виде $u = f(x, y, z)$. Областью определения такой функции является некоторое множество точек в пространстве $Oxyz$.

В отличие от функций двух переменных, функции большего числа независимых переменных не могут изображаться при помощи графика. Тем не менее, свойства функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при произвольном n, совершенно аналогичны свойствам функций двух переменных. Иными словами, специфика функций *многих* переменных (по сравнению с функциями одной переменной) проявляется, в достаточно общем виде уже на функциях двух переменных. Поэтому, не ограничивая общности, а лишь во избежание излишней громоздкости записи,

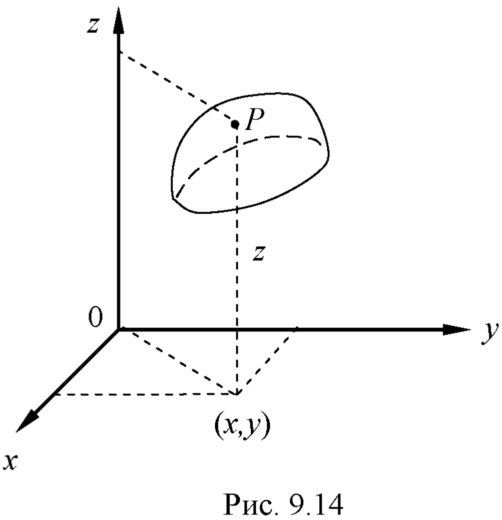


Рис. 9.14

и, кроме того, для сохранения возможности геометрической иллюстрации, мы будем рассматривать, главным образом, именно функции двух переменных.

6. Предел фуикции миогих иеремеииых

Число A называется пределом функции $f(x,y)$ в точке $M_0(a,b)$, если для любой последовательности точек $M_n(x_n,y_n)\in D_f$, сходящейся к точке M_0 *) будет $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=A$. В этом случае пишут, что

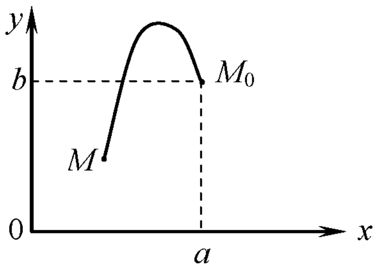


Рис. 9.15

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A,$$

или

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=A. \tag{9.10}$$

При этом молча предполагается, что величины x и y стремятся к числам a и b произвольным образом и независимо друг от друга, т. е. что точка $M(x,y)$ приближается к точке M_0 по произвольному пути (рис. 9.15).

Пример 9.8. Покажем, что функция $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не имеет предела в точке $O(0,0)$. Для этого возьмём две различные последовательности точек: $\left\{M_n\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ и $\left\{N_n\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^2}\right)\right\}$ (это значит, что в первом случае мы будем приближаться к точке O по прямой $y=x$, а во втором – по параболе $y=x^2$, рис. 9.16). Имеем

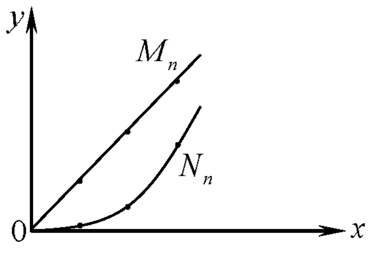


Рис. 9.16

$$\lim_{M_n\to 0}\frac{x_n y_n}{x_n{}^2+y_n{}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2},$$

*) Очевидно, в этом случае, точка M_0 должна быть предельной точкой множества D_f.

$$\lim_{N_n\to 0}\frac{x_n y_n}{x_n{}^2+y_n{}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}=0,$$

т. е. предел $\lim\limits_{M\to 0} f(x,y)$ зависит от траектории приближения точки M к точке 0.

В данном случае отсутствие предела функции в точке O связано, в частности, с тем, что в этой точке и числитель, и знаменатель функции обращаются в нуль. В то же время, например, в точке $M(1,1)$ функция имеет предел. Действительно, пусть $M_n \to (1,1)$ произвольным образом. Тогда $x_n = 1+\alpha_n$, $y_n = 1+\beta_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$. Тогда

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(1,1)} f(x,y)=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\alpha_n)(1+\beta_n)}{(1+\alpha_n)^2+(1+\beta_n)^2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

независимо от способа стремления к нулю бесконечно малых α_n и β_n. Таким образом,

$$\lim_{M\to(1,1)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}.$$

Как и для функции одной переменной, определение предела функции многих переменных можно сформулировать на языке $\varepsilon-\delta$:
число A называется пределом функции $f(x,y)$ в точке $M_0(a,b)$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)>0$, что

$$((x-a)^2+(y-b)^2<\delta^2)\Rightarrow(|f(x,y)-A|<\varepsilon, \qquad (9.11)$$

т. е.

$$(\rho(M,M_0)<\delta)\Rightarrow(|f(M)-A|<\varepsilon). \qquad (9.12)$$

Очевидно, что, на основании леммы 9.1, вместо выражения (9.11) можно писать

$$(|a-x|<\delta,|y-b|<\delta)\Rightarrow(|f(x,y)-A|<\varepsilon).$$

Отметим также, что выражения (9.10) и (9.12) записаны в форме, не зависящей от числа n независимых переменных.

Определение предела функции легко сформулировать и для случаев, когда, по крайней мере, одно из чисел a, b и A равно ∞.

Заметим также, что, поскольку исходное определение предела функции было сформулировано на основе предела числовой последовательности, то теория пределов, построенная для функций одной переменной, легко переносится на случай функции многих переменных. Например, предел суммы любого конечного числа функций равен сумме их пределов и т. п.

7. Повториые иределы

Пусть существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$. Здесь предполагается, что x и y стремятся к своим пределам a и b одновременно. Такой предел называют двойным, или двукратным (в случае функции трёх переменных предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b\\ z\to c}} f(x,y,z)$ называют тройным, или трёхкратным, и т. д.). Рассмотрим теперь следующий предел: $\lim\limits_{y\to b}\left[\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right]$. Здесь уже предполагается, что сначала производится предельный переход по переменной x, и лишь затем – по переменной y. Такой предел, в отличии от предыдущего, кратного, называют повторным. Меняя порядок предельного перехода, получим другой повторный предел: $\lim\limits_{x\to a}\left[\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right]$.

Пример 9.9. Возьмём функцию $f(x,y)=\dfrac{x^3+2y^2}{x^2+y^2}$. Имеем

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{2y^2}{y^2}=2;$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^3+2y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=0,$$

т. е. в данном случае оба повторных предела существуют, но не равны между собой.

Пример 9.10. Пусть теперь $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^3}$. Тогда

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3+y^2}{x^2+y^3}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}=\infty;$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^3+y^2}{x^2+y^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=0,$$

т. е. один из повторных пределов существует, а другой – нет.

Пример 9.11. Пусть

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(y-x)^2}.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right]=0,\ \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]=0,$$

т. е. оба повторных предела в точке O существуют и равны между собой. Между тем, предел $\lim\limits_{M\to 0} f(x,y)$ не существует. Действительно, приближаясь к точке O вдоль прямой $y=x$, получим

$$\lim_{M\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1,$$

а двигаясь, например, вдоль оси Ox, будем иметь $\lim\limits_{M\to 0} f(x,y)=0$, т. е. получаем два различных предела.

Пример 9.12. Пусть $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$. Здесь, наоборот, оба повторных предела в точке O не существуют. В то же время, если одновременно $x\to 0$, $y\to 0$, то первый множитель в выражении $f(x,y)$ бесконечно мал, а оба следующих множителя ограничены, так что $\lim\limits_{M\to 0} f(x,y)=0$, т. е. предел функции в точке O существует.

Теорема 9.2. Если

1) существует двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A$, и

2) при любом фиксированном y существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=\varphi(y)$.

То существует и повторный предел $\lim\limits_{y\to b}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to b}\left[\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right]$, и он равен двойному пределу.

■По условию, для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что

$$(|x-a|<\delta, |y-b|<\delta)\Rightarrow(|f(x,y)-A|<\varepsilon). \tag{9.13}$$

возьмём произвольное $y\in(b-\delta, b+\delta)$ и зафиксируем его. Переходя в выражении (9.13) к пределу, при $x\to a$, получим

$$(|y-b|<\delta)\Rightarrow(|\varphi(y)-A|<\varepsilon).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=A,$$

т. е.

$$\lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right]=A,$$

что и требовалось доказать. □

Легко видеть, что доказательство остаётся в силе и тогда, когда $A=\infty$. Кроме того, легко видоизменить доказательство для случаев, когда, по крайней мере, одно из чисел a и b заменено на ∞.

Примечание. Пусть, кроме выполнения условий 1 и 2, существует при любом фиксированном x предел $\varphi(x)=\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$. Тогда, мысленно поменяв местами величины x и y в проведённом только что доказательстве, получим, что существует и второй повторный предел:

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right],$$

также равный A, т. е. В этом случае оба повторных предела существуют и равны между собой.

8. Пеирерывиость и разрывы фуикций миогих иеремеииых

Пусть функция $f(x,y)$ определена на некотором множестве R в плоскости xOy и пусть $M_0(x_0,y_0)$ – некоторая предельная точка этого множества, причём $M_0\in R$. Функция $f(x,y)$ называется непрерывной в точке M_0, если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

т. е. если

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0). \tag{9.14}$$

На языке ε,δ это определение звучит так: функция $f(x,y)$ непрерывна в точке M_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что

$$(M\in R,\rho(M,M_0)<\delta)\Rightarrow(|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon). \tag{9.15}$$

Предположим теперь, что функция $z=f(x,y)$ определена на множестве R, и пусть $M_0(x_0,y_0)$ – некоторая точка этого множества. Придадим значению x приращение Δx, а y оставим неизменным. Величина $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ называется частным приращением функции $z=f(x,y)$ по переменной x в точке M_0 и обозначается $\Delta_x z(M_0)$. Предположим теперь, что $x=x_0=const$, а величина

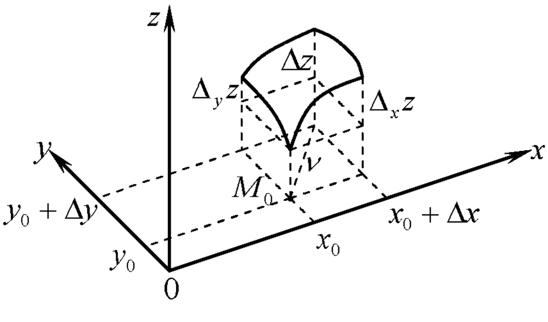


Рис. 9.17

$y=y_0$ получает приращение Δy. Разность $\Delta_y z(M_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ называется частным приращением функции по переменной y в точке M_0. Пусть, наконец, величины x и y одновременно получают приращения Δx и Δy. Разность $\Delta z(M_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ называется полным приращением функции в точке $M_0(x_0, y_0)$. Отметим, что, вообще говоря, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Введём обозначение

$$v = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Очевидно, что

$$(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0) \Leftrightarrow (v \to 0).$$

Теперь равенству (9.14) можно придать вид

$$\lim_{v \to 0} \Delta z = 0. \tag{9.16}$$

Это равенство выражает определение непрерывности функции на языке приращений.

Равенство (9.14) и эквивалентное ему равенство (9.16) определяют непрерывность функции $z = f(x, y)$ по совокупности её переменных x и y.

Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной x, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$, т. е. если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x z = 0$. Аналогично определяется непрерывность функции $z=f(x,y)$ по переменной y. Очевидно, что если функция непрерывна в точке по совокупности переменных, то она непрерывна в этой точке и по каждой из них в отдельности. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 9.13. Возьмём функцию, определённую так:

$$z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{при } (x = y = 0). \end{cases} \tag{9.17}$$

Мы видели (см. пример 9.8), что предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ не существует, так что функция (9.17) в точке (0,0) не непрерывна. В то же время $f(x,0)=0$ при всех x (включая и $x = 0$), а значит и $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = 0$, и аналогично, $\lim\limits_{y \to 0} f(y,0) = 0$. Таким образом, функция $f(x,y)$ в точке (0,0) непрерывна по каждой из переменных x и y, но не непрерывна по их совокупности.

Всё сказанное обобщается на случай функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. В частности, выражения (9.14) и (9.15) в этом случае сохраняют прежний вид, а вместо (9.16) получим $\lim\limits_{v \to 0} \Delta u = 0$, где $v = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i^{\,2}}$.

Отметим, что в случае n переменных $(n \geq 3)$ непрерывность функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по совокупности переменных влечёт за собой её непрерывность не только по каждой из них, но и непрерывность по каждой паре переменных x_i, x_k, непрерывность по каждой тройке переменных x_i, x_j, x_k

и т. д.

Функция $f(M)$ называется непрерывной на множестве $R \subset R_n$, если она непрерывна в каждой точке $M \in R$.

Всякая предельная точка области определения R функции $f(M)$, не являющаяся точкой непрерывности этой функции, называется её точкой разрыва.

Пример 9.14. Функция $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ имеет единственную точку разрыва (0,0).

Пример 9.15. Функция $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$ имеет разрыв в каждой точке, для которой $x = y$, рис. 9.18.

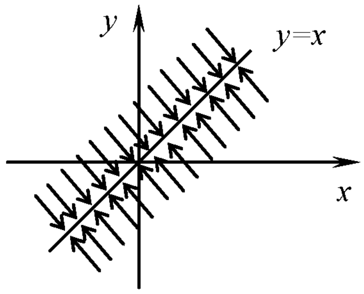


Рис. 9.18

9. Свойства иеирерывиых фуикций

Легко видеть, что на случай функций многих переменных переносятся теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций, теорема о непрерывности сложной функции, а также лемма о сохранении знака функции. В частности, последняя утверждает, что если функция $f(M)$ определена на множестве $R \subset R_n$ и непрерывна в его предельной точке $M_0 \in R$, причём $f(M_0) \neq 0$, то существует такая окрестность $C_\varepsilon(M_0)$, что на множестве $C_\varepsilon(M_0) \cap R$ функция $f(M)$ имеет тот же знак, что и $f(M_0)$.

Перейдём теперь к функциям, непрерывным не на произвольном множестве, а в некоторой области D.

Теорема 9.3. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D и существуют в D такие точки A и B, что $f(A)$ и $f(B)$ имеют разные знаки, то имеется по крайней мере одна такая точка $N(\varepsilon, n) \in D$, что $f(N) = 0$.

■Поскольку множество D есть область, то оно связно. Поэтому точки A и B можно соединить некоторой непрерывной дугой $\breve{AB}$. Пусть

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) - \end{cases}$$

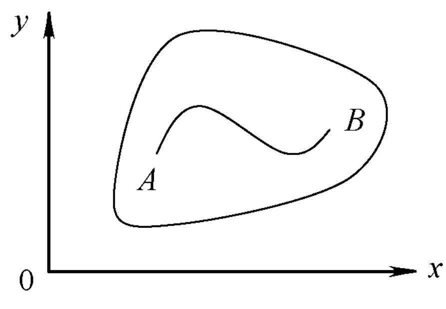


Рис. 9.19

её уравнения, и пусть точкам A и B отвечают значения параметра α и β. При монотонном изменении t от α до β

точка $M(x,y)$ описывает дугу $A\breve{B}$, рис. 9.19. Введём функцию $\phi(t)=f[\varphi(t),\Psi(t)]$. Поскольку функции $\varphi(t)$и $\Psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$,то и функция $\phi(t)$, на основании теоремы о непрерывности сложной функции, непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$. Но $f(A)=f[\varphi(\alpha),\Psi(\alpha)]=\phi(\alpha)$, и, точно так же, $f(B)=\phi(\beta)$, а так как, в силу условия, числа $\phi(\alpha)$ и $f(\beta)$ имеют разные знаки, то, на основании теоремы Больцано-Коши для функций одной переменной, существует по крайней мере одно значение $0\in(\alpha,\beta)$, такое, что $\phi(0)=0$, т. е. $f[\varphi(0),\Psi(0)]=0$, а значит существует по крайней мере одна точка $N\in A\breve{B}$, что $f(N)=0$.□

Доказанная теорема обобщает 1-ю теорему Больцано-Коши на многомерный случай.

Теорема 9.4. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области D. Тогда, принимая в ней два некоторых значения, она принимает в этой области и все промежуточные значения.

Примечание. Теоремы 9.3 и 9.4, очевидно, верны как для открытой, так и для замкнутой области D.

Теорема 9.5. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то она ограничена в ней и снизу, и сверху, т. е. существуют такие числа m и M, что для всех $(x,y)\in D$ будет $m\le f(x,y)\le M$.

Теорема 9.6. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то она достигает в ней своих точных верхней и нижней граней, т. е. существуют такие точки $(x_1,y_1)\in D$ и $(x_2,y_2)\in D$, что $f(x_1,y_1)=M$, $f(x_1,y_1)=m$, где $M=\sup\limits_D f(x,y)$, $m=\inf\limits_D f(x,y)$.

Теоремы 9.5 и 9.6 называют соответственно 1-й и 2-й теоремами Вейерштрасса и доказываются, благодаря лемме Больцано-Вейерштрасса (см. лемму 9.2), точно так же, как и для функции одной переменной.

Функция $f(x,y)$, непрерывная в области D, называется равномерно непрерывной в ней, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для произвольных точек $M'(x',y')\in D$ и $M''(x'',y'')\in D$ будет

$$(\rho(M',M'')<\delta)\Rightarrow(|f(M')-f(M'')|<\varepsilon). \qquad (9.18)$$

Неравенство $\rho(M',M'')<\delta$ означает, что $M''\in C_\delta(M')$. Очевидно (см. лемму 9.1), вместо этого можно потребовать, чтобы было $M''\in Q_{\delta,\delta}(M')$. Тогда вместо выражения (9.18) получим

$$(|x'-x''|<\delta,|y'-y''|<\delta)\Rightarrow(|f(x',y')-f(x'',y'')<\varepsilon).$$

Теорема 9.7 (Кантора). Если функция непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она и равномерно непрерывна в ней.

Доказательство не содержит в себе ничего нового по сравнению с одномерным случаем (опять таки благодаря лемме Больцано-Вейерштрасса).

10. Частиые ироизводиые фуикции

Пусть функция $z = f(x, y)$ задана в некоторой области D. Возьмём точку $(x_0, y_0) \in D$ и придадим x приращение Δx, такое, что $(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$. Вычислим разность $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ и составим отношение $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x},$$

то он называется частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x и обозначается $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, или $f'_x(x_0, y_0)$. Аналогично определяется частная производная функции по переменной y:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Если частные производные вычислены не в конкретной фиксированной точке (x_0, y_0), а в «текущей» точке (x, y), то их обозначают просто $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ (или $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$). При переменных x и y они являются, вообще говоря, функциями от x и y.

Очевидно, $\frac{\partial z}{\partial x}$ находится по обычным правилам и формулам дифференцирования, но при этом дифференцирование ведётся только по переменной x, а y считается постоянным. Аналогично, при вычислении $\frac{\partial z}{\partial y}$ предполагается, что $x = const$. Вообще, частная производная функции любого числа переменных по одной из них вычисляется в предположении, что все переменные, кроме переменной дифференцирования, сохраняют постоянные значения.

Пример 9.16. Пусть $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Пример 9.17. Пусть $u = x\sin\left(y + z^2\right)$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin\left(y + 2z^2\right),\ \frac{\partial u}{\partial y} = x\cos\left(y + z^2\right),\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2z\cos\left(y + z^2\right).$$

Пример 9.18. Пусть функция $z = f(x, y)$ задана неявно уравнением

$$xz^3 + yz^2 = x - y.$$

Дифференцируем это уравнение по переменной x как тождество в предположении, что $y = const$, а z есть функция от x. Получим

$$z^3 + x3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + y2z\frac{\partial z}{\partial x} = 1,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - z^3}{3xz^2 + 2yz}.$$

Совершенно аналогично имеем

$$x3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 + y2z\frac{\partial z}{\partial y} = -1,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1 + z^2}{3xz^2 + 2yz}.$$

Выясним геометрический смысл частных производных для случая двух независимых переменных. Возьмём функцию $f(x, y)$, произвольную точку (x_0, y_0) и проведём плоскости $x = x_0$ и $y = y_0$, перпендикулярные плоскости xOy. Они пересекут поверхность $z = f(x, y)$ по кривым $z = f(x_0, y)$ и $z = f(x, y_0)$, рис. 9.20. Функция $z = f(x, y_0)$ есть функция одной переменной: x, и её производная в точке x_0 равна

$$\left[f(x, y_0)\right]_x'\Big|_{x=x_0} = f'_x(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

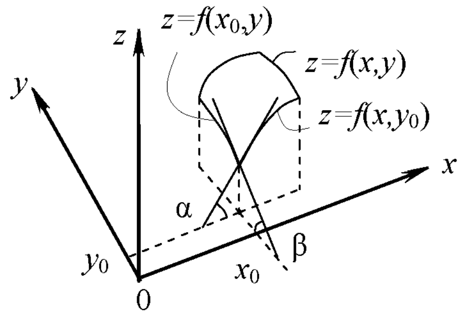


Рис. 9.20

В то же время она равна $\mathrm{tg}\alpha$, а значит $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \mathrm{tg}\alpha$. Совершенно аналогично убеждаемся в том, что $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \mathrm{tg}\beta$.

Итак, частные производные функции $f(x, y)$ геометрически представляют собой тангенсы углов наклона касательных к сечениям поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $x = const$ и $y = const$.

11. Полиый диффереициал фуикции

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ и её частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ заданы в некоторой области, содержащей точку (x, y), а в самой этой точке величины $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ есть непрерывные функции. Придав x и y приращения Δx и Δy, получим

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

т. е.

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

В силу теоремы Лагранжа, отсюда имеем

$$\Delta z = \frac{\partial f(\xi, y + \Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, n)}{\partial y}\Delta y,$$

где $\xi \in (x, x + \Delta x)$, $n \in (y, y + \Delta y)$.

Поскольку функции $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны в точке (x, y), то

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\xi, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\partial f(x, n)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

а значит

$$\frac{\partial f(\xi, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \alpha_1, \quad \frac{\partial f(x, n)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \alpha_2,$$

где α_1 и α_2 – бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Теперь получаем

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y. \qquad (9.19)$$

Если одновременно $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, то $\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y = o(v)$, где, как мы ранее обозначали, $v = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. В то же время величина $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y$ относительно Δx и Δy, а значит, если не будет одновременно $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$, то

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y = O^*(v),$$

т. е. эта величина есть главная часть бесконечно малой Δz.

Главная часть бесконечно малого приращения функции, линейная относительно бесконечно малых Δx и Δy, называется полным дифференциалом этой функции и обозначается dz. Функция, имеющая в данной точке полный дифференциал, т. е. функция, полное приращение которой в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + o(v), \tag{9.20}$$

называется дифференцируемой в этой точке. Тем самым доказано, что если функция $z = f(x, y)$ имеет в данной точке непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, то она дифференцируема в этой точке.

Равенство (9.20) определяет дифференцируемость функции $z = f(x, y)$ «по совокупности переменных x и y». Мы видим, что это значительно больше, чем дифференцируемость данной функции по каждой из переменных x и y в отдельности. Ведь для получения формулы (9.20) мы предполагали, что $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке (x, y) не просто существуют, но и непрерывны. Одного же существования частных производных в данной точке может оказаться недостаточно для дифференцируемости функции в этой точке.

Пример 9.19. Возьмём функцию $z = \sqrt[3]{xy}$ и точку (0,0). Имеем в этой точке

$$\Delta_x z = \sqrt[3]{(0 + \Delta x)\cdot 0} - \sqrt[3]{0\cdot 0} = 0,$$

а значит и $f'_x(0{,}0) = 0$, и, аналогично, $f'_y(0{,}0) = 0$, Поэтому выражение (9.20) в этом случае запишется так:

$$\Delta z = o(v),$$

т. е.

$$\sqrt[3]{\Delta x \Delta y} = o(v). \tag{9.21}$$

Это равенство должно выполняться при любом способе стремления Δx и Δy к нулю. Между тем, при $\Delta x = \Delta y$ будем иметь из (9.21)

$$\sqrt[3]{\Delta x^2} = o(v),$$

т. е.

$$\sqrt[3]{\Delta x^2} = o(\Delta x),$$

что абсурдно. Таким образом, функция $z = \sqrt[3]{xy}$ имеет в точке (0,0) обе частные производные, но не дифференцируема в ней.

Возвратимся к произвольной функции $z = f(x, y)$, фигурирующей в формуле (9.20). Назовём величины Δx и Δy дифференциалами независимых переменных x и y и обозначим их соответственно dx и dy. Тогда формула для полного дифференциала примет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (9.22)$$

Величины $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ и $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ называют частными дифференциалами функции $z = f(x, y)$ по переменным x и y соответственно и обозначают $d_x z$ и $d_y z$. Тогда из (9.22) следует, что полный дифференциал функции равен сумме её частных дифференциалов.

Для функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ вместо (9.20), очевидно, будем иметь

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i + o(v),$$

а полный дифференциал определяется формулой

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i.$$

Пример 9.20. Пусть $z = \sqrt{x - y}$. Тогда

$$dz = \frac{1}{2\sqrt{x-y}}dx - \frac{1}{2\sqrt{x-y}}dy.$$

Пример 9.21. Для функции $u = xy^2z^3$ аналогично имеем

$$du = y^2z^3dx + 2xyz^3 + 3xy^2z^2dz.$$

Пример 9.22. Для иллюстрации приближенного равенства $\Delta z \approx dz$, вытекающего при малых v из (9.20), возьмём функцию $z = xy$. Вычислим её дифференциал и приращение в точке (4;3) при $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = 0{,}2$. Имеем

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y =$$
$$= 0{,}3 + 0{,}8 + 0{,}02 = 1{,}12;$$
$$dz = y\Delta x + x\Delta y = 0{,}3 + 0{,}8 = 1{,}1.$$

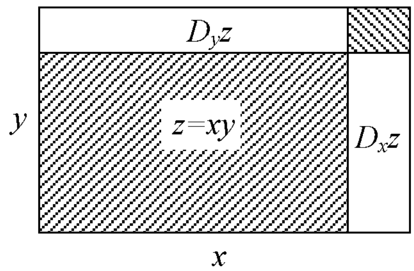


Рис. 9.21

Разность $\Delta z - dz$ есть обозначенная «двойной» штриховкой площадь малого прямоугольника со сторонами Δx и Δy.

12. Примеиеиие иолиых диффереициалов в ириближеииых вычислеииях

1. На основании (9.20), при малых Δx и Δy будет

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\approx\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y,$$

откуда

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y. \quad (9.23)$$

Пример 9.23. Вычислим приближённо $\sqrt{3{,}05^2+3{,}93^2}$. Для этого введём в рассмотрение функцию $z=\sqrt{x^2+y^2}$. В данном случае

$$x_0=3;\ y_0=4;\ \Delta x=0{,}05;\ \Delta y=-0{,}07;\ f(x_0,y_0)=\sqrt{3^2+4^2}=5,$$

а значит формула (9.23) даёт

$$\sqrt{3{,}05^2+3{,}93^2}\approx f(x_0,y_0)+\frac{x_0}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}\Delta x+\frac{y_0}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}\Delta y=$$

$$=5+\frac{3\cdot0{,}05-4\cdot0{,}07}{5}=5-\frac{0{,}13}{5}=4{,}974.$$

2. Пусть из эксперимента получены следующие результаты:

$$x=x_0\pm\delta x,\ \ y=y_0\pm\delta y,$$

где δx и δy – максимальные в условиях этого эксперимента погрешности, характеризующие степень точности эксперимента. Требуется по этим данным вычислить $z=f(x,y)$ и оценить погрешность полученного результата.

Пусть Δx и Δy – истинные погрешности измерения величин x и y. Тогда погрешность вычисления величины z равна

$$\Delta z\approx dz=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y,$$

откуда

$$|\Delta z|\le\left|\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right|\cdot|\Delta y|. \quad (9.24)$$

Но о Δx и Δy известно лишь, что $|\Delta x|\le\delta x,\ |\Delta y|\le\delta y.$ Поэтому из (9.24) следует, что тем более

$$|\Delta z|\le\left|\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right|\delta x+\left|\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right|\delta y.$$

Обозначая правую часть этого выражения через δz, получим окончательно

$$z=f(x_0,y_0)\pm\delta z.$$

Пример 9.24. Для радиуса основания и высоты цилиндра получены следующие данные:

$$R=6\,\text{см}\pm0{,}1\,\text{см};\ H=10\ \text{см}\pm0{,}2\,\text{см}.$$

Вычислим по ним объём цилиндра.

Из формулы $V = \pi R^2 H$ получаем, на основании (9.24),

$$| \Delta V | \leq \left| \frac{\partial V(R_0, H_0)}{\partial R} \right| \delta R + \left| \frac{\partial V(R_0, H_0)}{\partial H} \right| \delta H = 2\pi R_0 H_0 \delta R + \pi R_0^2 \delta H =$$

$$= (2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 10 \cdot 0{,}1 + \pi \cdot 36 \cdot 0{,}2)\text{см}^3 = 19{,}2\pi \text{ см}^3,$$

а значит

$$V = \pi \cdot 36 \cdot 10 \text{см}^3 \pm 19{,}2\pi \text{см}^3 = (360 \pm 19{,}2)\pi \text{ см}^3.$$

13. Диффереицироваиие сложиых фуикций

Рассмотрим функцию $z = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y)$, $\nu = \psi(x, y)$. Здесь предполагается, что функция $f(u, \nu)$ определена в некоторой области D, а величины x и y изменяются так, что при этом точки (u, v) не выходят за пределы области D. В этом случае $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ есть сложная функция переменных x и y. Будем считать, что функция $z = f(u, v)$ дифференцируема по совокупности переменных u и v, а функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ дифференцируемы по каждому из своих аргументов. При этих условиях найдём $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Придадим величине x приращение Δx. Тогда u и v получат приращение $\Delta_x u$ и $\Delta_x \nu$, а значит и $z = f(u, v)$, на основании (9.19), получит приращение, равное

$$\Delta_x z = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial f}{\partial \nu} \Delta_x \nu + \alpha_1 \Delta_x u + \alpha_2 \Delta_x v.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial f}{\partial \nu} \cdot \frac{\Delta_x \nu}{\Delta x} + \alpha_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \alpha_2 \frac{\Delta_x \nu}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\alpha_1 \to 0$ и $\alpha_2 \to 0$ а поэтому в пределе получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial x}. \tag{9.25}$$

Совершенно аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial y}. \tag{9.26}$$

Пример 9.25. Пусть $z = u + v^2$, где $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x + y)$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot 2x + 2v \frac{1}{x + y} = 2\left[x + \frac{\ln(x + y)}{x + y} \right];$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=1\cdot\cos y+2v\cdot\frac{1}{x+y}=\cos y+\frac{2\ln(x+y)}{x+y}.$$

Формулы (9.25) и (9.26) легко распространяются на случай любого числа промежуточных аргументов и любого числа аргументов промежуточных аргументов. Пусть, например, $z=f(u,v,w)$, где $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, $w=\chi(x,y)$. Тогда, очевидно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Пусть теперь $w=f(u,v)$, где $u=\varphi(x,y,z)$, $v=\psi(x,y,z)$. Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Пусть $z=f(x,u,v)$, где x – независимая переменная, а $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$. Тогда z в конечном счёте есть функция одной переменной x, и

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Величину $\frac{dz}{dx}$, в отличие от частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$, называют полной производной. При её вычислении величины u и v считаются не постоянными (как при вычислении $\frac{\partial z}{\partial x}$), а функциями аргумента x.

Если аргумент x в функции z явно не содержится, а входит в неё лишь через u и v, т. е. если $z=f(u,v)$, где $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$, то $\frac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$ и формула для полной производной примет вид:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}. \tag{9.27}$$

Пусть теперь функция $z=f(x,y)$ задана неявно при помощи уравнения

$$F(x,y,z)=0.$$

Дифференцируя это равенство по x как тождество, получим

$$F'_x+F'_z\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \tag{9.28}$$

и аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \qquad (9.29)$$

Итак, при дифференцировании неявных функций можно поступать и не непосредственно (см. пример 9.18), а сразу пользоваться «готовыми» формулами (9.28) и (9.29).

14. Пивариаитиость формы иолиого диффереициала

Рассмотрим для определённости случай, когда $z = f(u,v)$, где $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$. Тогда полный дифференциал функции $z = f[\varphi(x,y), \psi(x,y)]$ равен, в силу формул (9.25) и (9.26),

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right),$$

т. е., на основании формулы (9.22),

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Итак, дифференциал сложной функции выглядит так же, как если бы u и v были независимыми переменными. Иными словами, мы доказали сейчас инвариантность формы (см. главу 1V) полного дифференциала функции многих переменных.

Пример 9.26. Пусть функция $z = f(x,y)$ задана уравнением

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1. \qquad (9.30)$$

Найдём её полный дифференциал.

В силу свойства инвариантности, полный дифференциал левой части уравнения находится так, как если бы величина z была независимой переменной, а не функцией переменных x и y. Поэтому, взяв полный дифференциал обеих частей уравнения (9.30), получим

$$-2\cos x \cdot \sin x dx - 2\cos y \cdot \sin y dy - 2\cos z \cdot \sin z dz = 0,$$

т. е.

$$\sin 2x dx + \sin 2y dy + \sin 2z dz = 0,$$

откуда

$$dz = -\frac{\sin 2x}{\sin 2z}dx - \frac{\sin 2y}{\sin 2z}dy.$$

Отсюда, между прочим, следует, что $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sin 2x}{\sin 2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sin 2y}{\sin 2z}$.

Применяя эти же рассуждения к уравнению общего вида

$F(x,y,z)=0,$ ещё раз получим формулы (9.28) и (9.29).

15.Одиородиые фуикции. Тождество Эйлера

Функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ называется однородной функцией k-й степени, если для неё выполняется тождество

$$f(tx_1,tx_2,...,tx_n)=t^k f(x_1,x_2,...,x_n). \qquad (9.31)$$

При этом число k может быть любым вещественным числом (не обязательно целым и не обязательно положительным).

Пример 9.27. Функция $z=2x^2+3xy+\dfrac{y^3}{x}$ есть однородная функция 2-й степени.

Пример 9.28. Функция $z=x^2y+\sqrt{x^6-y^6}\ln\dfrac{y}{x}$ является однородной функцией 3-й степени.

Пример 9.29. Функция $u=\sqrt[3]{x+2y+5z}$ есть однородная функция степени $\dfrac{1}{3}$.

Пример 9.30. Функция $z=\dfrac{1}{x+3y}$ – это однородная функция (–1)-степени.

Пусть $f(x_1,x_2,...,x_n)$ – однородная функция k-й степени. Поскольку t в тождестве (9.31) может быть любым, то положим $t=\dfrac{1}{x_1}$. Тогда получим

$$f\left(1,\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},...,\frac{x_n}{x_1}\right)=\frac{1}{x_1^k}f\left(x_1,x_2,...,x_n\right).$$

Обозначая левую часть через $\varphi\left(\dfrac{x_2}{x_1},\dfrac{x_3}{x_1},...,\dfrac{x_n}{x_1}\right)$, будем иметь

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=x_1^k\varphi\left(\frac{x_2}{x1},\frac{x_3}{x_1},...,\frac{x_n}{x_1}\right).$$

В частности, при $k=0$ получаем

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\varphi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},...,\frac{x_n}{x_1}\right), \qquad (9.32)$$

т. е. в этом случае функция зависит по существу не от переменной n аргументов, а от $n-1$отношений этих аргументов к одному из них.

Пример 9.31. Функция $z=\dfrac{x+y}{x-y}$ является однородной функцией 0-й степени. Равенство (9.32) для неё запишется так:

$$z=\frac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}.$$

Возьмём теперь для простоты записи функцию двух переменных $f(x,y)$ и предположим, что она является однородной функцией *k*-степени, имеющей в некоторой области D непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Пусть $(x_0,y_0)\in D$ – произвольная точка. Тогда

$$f(tx_0,ty_0)=t^k f(x_0,y_0).$$

Дифференцируя это тождество по t, имеем

$$f'_x(tx_0,ty_0)x_0+f'_y(tx_0,ty_0)y_0=kt^{k-1}f(x_0,y_0).$$

Полагая здесь $t=1$ и заменяя фиксированную точку (x_0,y_0) на «текущую» точку (x,y), получим

$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=kf(x,y).$$

Эту формулу называют тождеством Эйлера для однородных функций. Для однородной функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ оно, очевидно, записывается так:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=kf(x_1,x_2,...,x_n).$$

Для $k=2$ эта формула используется, в частности, в теоретической механике.

16. Частиые ироизводиые высших иорядков

Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Предположим, что $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, в свою очередь, дифференцируемы и по x, и по y. Тогда, дифференцируя $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ по x, получим производную 2-го порядка функции $z=f(x,y)$ по переменной x. Её обозначают $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, или $f''_{xx}(x,y)$.

Дифференцируя функцию $\frac{\partial z}{\partial x}$ по переменной y, получим т.н. смешанную частную производную 2-го порядка, обозначаемую через $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, или $f''_{xy}(x,y)$. Аналогично, дифференцируя функцию $\frac{\partial z}{\partial x}$ по x и по y, получим частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (или $f''_{yx}(x,y)$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (или $f''_{yy}(x,y)$).

Пример 9.32. Пусть $z = x^3 y - \frac{y^2}{x}$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \frac{y^2}{x^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - \frac{2y}{x},$$

а значит

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy - \frac{2y^2}{x^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3x^2 + \frac{2y}{x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 + \frac{2y}{x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2}{x}.$$

В частности, мы видим, что для данной функции выполняется равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

т. е. смешанная производная не зависит от порядка дифференцирования. Докажем, что этот факт имеет общий характер.

Теорема 9.8. (Шварца). Если функция $z = f(x,y)$ и её частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ непрерывны в точке (x_0, y_0) и в некоторой её окрестности, то

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}.$$

■Для доказательства составим выражение

$$\Delta_{xy} z = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].$$

Положив

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0),$$

получим

$$\Delta_{xy} z = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0). \tag{9.33}$$

Поскольку $\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x, y_0)$, а функция $f'_x(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), то и величина $\varphi'(x)$ существует в некоторой окрестности этой точки. Поэтому из равенства (9.33), в силу теоремы Лагранжа, имеем

$$\Delta_{xy}z = \varphi'(\xi_1)\Delta x,$$

т. е.

$$\Delta_{xy}z = [f'_x(\xi_1, y_0 + \Delta y) - f'_x(\xi, y_0)]\Delta x, \qquad (9.34)$$

где $\xi_1 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$.

Но функция $f'_{xy}(x, y)$ также определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Поэтому, снова применяя теорему Лагранжа, получим из равенства (9.34)

$$\Delta_{xy}z = f''_{xy}(\xi_1, \eta_1)\Delta y \Delta x,$$

где $\eta_1 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$.

Представим теперь величину $\Delta_{xy}z$ в виде

$$\Delta_{xy} = [f(x + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] - [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)].$$

Вводя функцию

$$\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y),$$

будем иметь

$$\Delta_{xy}z = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0)$$

или

$$\Delta_{xy}z = \psi'(\eta_2)\Delta y,$$

т. е.

$$\Delta_{xy}z = [f'_y(x_0 + \Delta x, \eta_2) - f'_y(x_0, \eta_2)]\Delta y.$$

Здесь $\eta_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$.

Повторное применение теоремы Лагранжа даёт

$$\Delta_{xy}z = f''_{yx}(\xi_2, \eta_2)\Delta x \Delta y,$$

где $\xi_2 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$.

Сравнивая оба выражения для $\Delta_{xy}z$ и сокращая на $\Delta x \Delta y$, получим

$$f''_{xy}(\xi_1, \eta_1) = f''_{yx}(\xi_2, \eta_2).$$

Отсюда в пределе при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, учитывая непрерывность смешанных производных, будем иметь

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0),$$

что и требовалось доказать. □

Очевидно, теорема Шварца верна для функций любого числа переменных.

Аналогично вводятся частные производные 3-го порядка функции $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Применяя теорему Шварца к функциям $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, получим, например, что

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}.$$

Аналогичный факт верен и для частных производных ещё более высоких порядков.

17. Полиые диффереициалы высших иорядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в некоторой области D непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Тогда (см. §11) в любой точке $(x, y) \in D$ она имеет полный дифференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

При фиксированных dx и dy и при переменных x и y величина dz есть функция величин x и y. Если функции $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ имеют непрерывные частные производные по x и по y, т. е. если частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ непрерывны в области D, то dz как функция переменных x и y имеет полный дифференциал $d(dz)$. Он обозначается $d^2 z$ и называется полным дифференциалом 2-го порядка функции $z = f(x, y)$. Имеем

$$d^2 z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

т. е.

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Символически это записывают так:

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

Правую часть этой формулы следует понимать как квадрат дифференциального оператора

$$\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy$$

(его линейность очевидна), применённый к функции $z=f(x,y)$.

Точно так же, полагая $d^3z=d\left(d^2z\right)$, получим

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3,$$

т. е.

$$d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial z}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z.$$

Методом индукции легко показать, что при любом натуральном m будет

$$d^mz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m z.$$

Для функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ этот результат, очевидно, запишется так

$$d^mu=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial}{\partial x_{n1}}dx_n\right)^m u.$$

18. Формула Тейлора для фуикции миогих иеремеиных

Предположим, что в области D функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные всех порядков до $(m+1)$-го включительно. Возьмём произвольную точку $(x_0,y_0)\in D$ и рассмотрим новую точку $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ такую, чтобы отрезок прямой, соединяющей точки (x_0,y_0) и $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ полностью принадлежал области D.

Введём вспомогательную функцию $F(t)=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$, определённую на отрезке [0,1] и имеющую на нём, в силу сделанных предположений, непрерывные производные 1-го, 2-го, …, $(m+1)$-го порядков. Но тогда для этой функции на отрезке [0,1] выполняется формула Тейлора в форме Маклорена (см. раздел V)

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\ldots+\frac{F^{(m)}(0)}{m!}t^m+\frac{F^{(m+1)}(\tau)}{(m+1)!}t^{m+1}, \qquad (9.35)$$

где $\tau\in(0,1)$[*)]. Полагая $t=1$, получим

$$F(t)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\ldots+\frac{F^{(m)}(0)}{m!}+\frac{F^{(m+1)}(\tau)}{(m+1)!}. \qquad (9.36)$$

Но

$$F(0)=f(x_0,y_0).$$

Далее, на основании формулы (9.27),

$$F'(t)=f'_x(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta y,$$

откуда

$$F(0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)f(x_0,y_0).$$

Аналогично

$$F''(t)=f''_{xx}(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)(\Delta x)^2+2f''_{xy}(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta x\Delta y+$$
$$+f'_{yy}(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)(\Delta y)^2$$

и т. д. В конечном счёте, будем иметь

$$F^{(m)}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^m f(x_0,y_0);$$

$$F^{(m+1)}(\tau)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{m+1} f(x_0+\tau\Delta x,y_0+\tau\Delta y).$$

Подставляя всё это в выражение (9.35) и полагая $\xi=x_0+\tau\Delta x$, $\eta=y_0+\tau\Delta y$ получим

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)f(x_0,y_0)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^m f(x_0,y_0)+$$
$$+\frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{m+1} f(\xi,\eta). \qquad (9.37)$$

Это и есть формула Тейлора для функции двух переменных. Она естественным образом распространяется и на случай функции n переменных.

[*)] Вид последнего слагаемого в правой части формулы (9.35) будет получен в разделе XVI.

19. Экстремум фуикции миогих иеремеиных

Пусть функция $f(M)$ определена в области $D \subset R_n$. Тогда точка $M_0 \in D$ называется точкой максимума этой функции, если существует такая окрестность $C_\varepsilon(M)$, что для всех точек $M \in C_\varepsilon(M_0) \cap D$ будет $f(M) < f(M_0)$. Если же для всех $M \in C_\varepsilon(M_0) \cap D$ будет $f(M) > f(M_0)$, то точка M_0 называется точкой минимума функции $f(M)$.

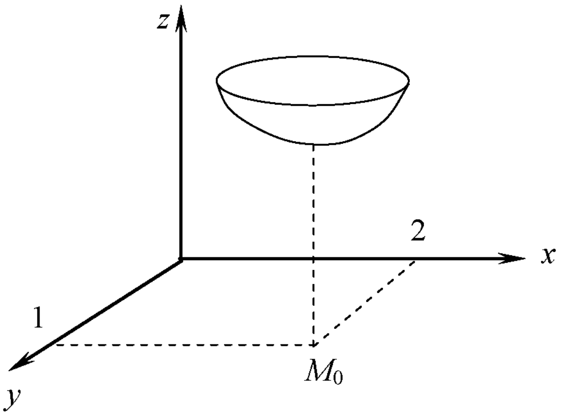


Рис. 9.22

Пример 9.33. Возьмём функцию $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 2$. Очевидно, что $z(1,2) = 2$, а во всех остальных точках $M(x,y)$ будет $z(M) > 2$. Следовательно, точка $M_0(1,2)$ является точкой минимума данной функции, рис. 9.22.

Возьмём для сокращения записей функцию двух переменных. Предположим, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет, например, максимум. Тогда всюду вблизи точки (x_0, y_0) будет $f(x,y) < f(x_0, y_0)$. В частности, для всех x, близких к x_0, будет $f(x,y) < f(x_0, y_0)$ (это значит, что на прямой $y = y_0$, параллельной оси Ox функция $f(x,y)$ имеет максимум в точке $x = x_0$). В силу необходимого условия экстремума функции одной переменной, в этом случае величина $f'_x(x, y_0)\Big|_{x = x_0} = f'_x(x_0, y_0)$ либо равна нулю, либо не существует. Тот же результат получим и для $f'_y(x_0, y_0)$. Кроме того, очевидно, что это верно и для функции любого числа переменных. Таким образом, можно считать доказанным следующее утверждение.

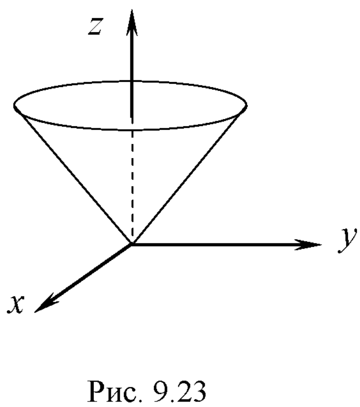


Рис. 9.23

Теорема 9.9. Если в данной точке функция n переменных имеет экстремум, то каждая из её частных производных 1-го порядка в этой точке либо обращается в нуль, либо не существует*).

Случай отсутствия частных производных в точке экстремума иллюстрируется, например, функцией $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

---

*) Легко представить случай, когда в точке экстремума одни частные производные обращаются в нуль, а другие – не существуют.

рис. 9.23. Имеем для неё

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

а значит в точке (0,0), где функция имеет минимум, обе частные производные не существуют.

Теорема 9.9. является лишь необходимым условием существования экстремума. Действительно, пусть, например, $z=x^2-y^2$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$, т. е. в точке (0,0) обе частные производные обращаются в нуль. Однако, экстремума в этой точке, очевидно, нет, поскольку в любой её окрестности функция принимает как положительные, так и отрицательные значения, рис. 9.24. Точнее говоря, в точке (0,0) достигается минимум функции по переменной x и максимум – по переменной y, но не достигается экстремум «по совокупности» переменных x и y. Точки такого типа называют седловыми (или точками минимакса).

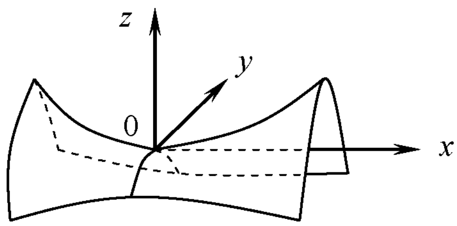


Рис. 9.24

Исследование функции в точке, подозрительной на экстремум, производится, как и в случае функции одной переменной, по её производным 2-го порядка.

20. Необходимые сведеиия о квадратичиых формах

Квадратичной формой называется однородная (см. §15) функция 2-й степени вида

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k,$$

т. е.

$$\begin{aligned}F=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+...+a_{1n}x_1x_n+\\&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+...+a_{2n}x_2x_n\\&-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+...+a_{nn}x_n^2\end{aligned}\qquad(9.37)$$

С квадратичной формой (9.37) можно связать матрицу

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right). \qquad (9.38)$$

В выражении (9.37) все числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ и все числа $a_{ik}\left(i,k=\overline{1,n}\right)$ будем считать вещественными и кроме того, будем предполагать, что $a_{ik}=a_{ki}\ \forall i,k$. Таким образом, матрица (9.38) (её называют матрицей квадратичной формы (9.37)) – симметрическая.

Квадратичную форму (9.37) называют положительно определённой, если при всех $x_1, x_2, \dots, x_n$ будет $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ причём

$$\left(F(x_1, x_2, \dots, x_n)=0\right) \Leftrightarrow \left(x_1=x_2=\dots=x_n\right).$$

Квадратичную форму называют отрицательно определённой, если при всех $x_1, x_2, \dots, x_n$ будет $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ причём

$$\left(F(x_1, x_2, \dots, x_n)=0\right) \Leftrightarrow \left(x_1=x_2=\dots=x_n\right).$$

Квадратичную форму называют знакопеременной, если при одних значениях $x_1, x_2, \dots, x_n$ будет $F(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ при других – $F(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$, а значит при третьих, в силу теоремы Больцано-Коши, – $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. На основании матрицы (9.38) составим определители

$$\varDelta_1 = a_k,\ \varDelta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \varDelta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots,\ \varDelta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Здесь $\Delta_n = DetA$, а $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ называют диагональными минорами матрицы A.

В курсе линейной алгебры будет доказано следующее утверждение.

Теорема 9.9 (Сильвестра-Якоби). Для того чтобы квадратная форма (9.37) была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы определитель её матрицы и все её диагональные миноры были положительны. Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки определителей $\varDelta_1, \varDelta_2, \dots, \varDelta_n$ чередовались, начиная со знака « – », т. е. чтобы было

$$\varDelta_1 < 0,\ \varDelta_2 > 0, \dots, \varDelta_3 > 0,\ (-1)^n \varDelta_n > 0.$$

21. Достаточиые условия экстремума фуикции n иеремеииых

Пусть $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$ – стационарная точка $f(M)$ т. е. пусть

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2}=\ldots=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}=0\,. \tag{9.39}$$

Будем считать, что существует окрестность $C_\varepsilon(M_0)$, в которой функция $f(M)$ иметь непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков. Тогда для любой точки $M_0\left(x_1^{(0)}+\Delta x_1, x_2^{(0)}+\Delta x_2, \ldots, x_n^{(0)}+\Delta x_n\right)\in C_\varepsilon(M_0)$ на основании формулы Тейлора будет

$$f(M)=f(M_0)+\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)f(M_0)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2 f(N) \tag{9.40}$$

где N – точка с координатами $\xi_i=x_i^{(0)}+\tau\Delta x_i$, $i=1,2,\ldots,n$, $\tau\in(0,1)$, т. е. N – точка прямолинейного отрезка M_0M .

В силу (9.39), получим из (9.40)

$$f(M)=f(M_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2 f(N),$$

т. е.

$$f(M)=f(M_0)+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f(N)}{\partial x_i\partial x_k}\Delta x_i\Delta x_k\,. \tag{9.41}$$

Поскольку все частные производные $\dfrac{\partial}{\partial x_i\partial x_k}$ непрерывны в точке M_0 то при всех i и k

$$\lim_{N\to M_0}\frac{\partial^2 f(N)}{\partial x_i\partial x_k}=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i\partial x_k},$$

а значит

$$\frac{\partial^2 f(N)}{\partial x_i\partial x_k}=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i\partial x_k}+\alpha_{ik}\,,$$

где $\alpha_{ik}\to 0$, при $N\to M_0$. Поэтому равенство (9.41) принимает вид

$$F(M)=f(M_0)+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i\partial x_k}\Delta x_i\Delta x_k+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\alpha_{ik}\Delta x_i\Delta x_k\,.$$

Обозначим

$$\Delta\rho=\rho(M_0,M),\ y_i=\frac{\Delta x_i}{\Delta\rho}\quad(i=1,2.,\ldots,n).$$

Тогда получим

$$f(M)=f(M_0)+\frac{\rho^2}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_k}y_i y_k+\frac{\Delta\rho^2}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\alpha_{ik}y_i y_k .$$

Полагая для краткости $a_{ik}=\dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_k}$, будем иметь окончательно

$$f(M)-f(M_0)=\frac{\rho^2}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\alpha_{ik}y_i y_k+o\left(\Delta\rho^2\right). \qquad (9.42)$$

Если $\Delta\rho$ мало, то знак разности $f(M)-f(M_0)$ в равенстве (9.42) определяется знаком первого слагаемого правой части, т. е. знаком выражения

$$\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}y_i y_k , \qquad (9.43)$$

которое представляет собой квадратичную форму переменных $y_1, y_2, ..., y_n$. Отметим, что при этом величины $y_1, y_2, ..., y_n$ не могут одновременно обращаться в нуль, поскольку

$$y_1^2+y_2^2+...+y_n^2=\frac{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+...+\Delta x_n^2}{\Delta\rho^2}.$$

Возможны следующие случаи:

1. Квадратичная форма (9.43), порождаемая полным дифференциалом 2-го порядка функции $f(M)$ в точке M_0 положительно определённая. Тогда при всех значениях $y_1, y_2, ..., y_n$ будет

$$\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}y_i y_k>0,$$

а значит, на основании (9.42), $f(M)-f(M_0)>0$

$$f(M)>f(M_0),$$

а значит, в этом случае функция $f(M)$ имеет в точке M_0 минимум.

2. Квадратичная форма (9.43) – отрицательно определённая. Рассуждая точно так же, как и в случае 1, установим, что тогда в точке M_0 функция $f(M)$ имеет максимум.

3. Квадратичная форма (9.43) – знакопеременная. Тогда в любой окрестности точки, подозреваемой на экстремум, она принимает как положительные, так и отрицательные, значения, а значит, в этом случае, разность $f(M)-f(M_0)$ может быть как положительной, так и отрицательной. Следовательно, экстремума в точке M_0 в данном случае нет.

Из сказанного только что и из теоремы 9.9 вытекает следующее утверждение.

Теорема 9.10. Пусть M_0 является стационарной точкой функции

$f(M)$ и пусть в этой точке и в некоторой её окрестности функция $f(M)$ имеет непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков. Тогда

1. Если определитель

$$
\Delta_n(M_0)=\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1\,\partial x_n} \\
\dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2\partial x_n} \\
- - - & - - - & - - - & - - - \\
\dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_n^2}
\end{vmatrix}
$$
[*]

и все его главные диагональные миноры $\Delta_1(M_0)$, $\Delta_2(M_0)$, …, $\Delta_{n-1}(M_0)$ – положительны, то в точке M_0 функция $f(M)$ имеет минимум;

2. Если определители $\Delta_1(M_0)$, $\Delta_2(M_0)$…, $\Delta_2(M_0)$, $\Delta_n(M_0)$ имеют соответственно знаки –, +, –, +,…, то в точке M_0 функция $f(M)$ имеет максимум;

3. Если $\Delta_n(M_0)\neq 0$, а числа $\Delta_1(M_0)$, $\Delta_2(M_0)$ …, $\Delta_{n-1}(M_0)$, $\Delta_n(M_0)$ ни положительны, ни знакочередуются по закону –,+,–,+,…, то в точке M_0 функция $f(M)$ не имеет экстремума.

Пример 9.34. Пусть в 1-м октанте $(x>0, y>0, z>0)$ задана функция

$$u = x + y + z + \frac{16}{xyz}.$$

Исследуем её на экстремум.

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{16}{x^2 yz},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - \frac{16}{xy^2 z},\quad \frac{\partial u}{\partial z} = 1 - \frac{16}{xyz^2}.$$

Для нахождения стационарных точек полагаем $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 yz = 16, \\ xy^2 z = 16, \\ xyz^2 = 16. \end{cases} \tag{9.44}$$

---

[*] Этот определитель называют определителем Гессе, или гессианом функции $f(M)$ в точке M_0.

Разделив 1-е уравнение на 2-е, а затем- 2-е на 3-е, получим

$$\frac{x}{y}=1,\ \frac{y}{z}=1.$$

Итак, в области $D=\{(x,y,z)|x>0,\quad y>0,\quad z>0\}$ система (9.44) имеет единственное решение $x=y=z=2$, т. е. функция имеет в области D единственную стационарную точку $M_0(2,2,2)$.

Имеем, далее,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{32}{x^3yz},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{16}{x^2y^2z},\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}=\frac{16}{x^2yz^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{32}{xy^3z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{16}{xy^2z^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{32}{xyz^3}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2}=1,\ \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2},\ \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x\partial z}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2}=1,\ \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y\partial z}=\frac{1}{2},\ \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial z^2}=1.$$

Составляем определители

$$\Delta_3(M_0)=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}.$$

Получаем

$$\Delta_1(M_0)=1>0,\qquad \Delta_2(M_0)=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{4}>0,$$

$$\Delta_3(M_0)=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}>0.$$

На основании теоремы 9.10 в точке $M_0(2,2,2)$ функция имеет минимум. При этом

$$f(M_0)=8.$$

Примечание. Теорема 9.10 решает проблему исследования функции многих переменных на экстремум не полностью. Возможен случай, когда

$\Delta_n(M_0)=0$. В этом случае $d^2 f(M_0)=0$, и тогда равенство (9.42) имеет вид

$$f(M)-f(M)=o\left(\Delta\rho^2\right),$$

где правая часть включает в себя полный дифференциал функции $f(M)$ 3-го порядка, исследование которого, вообще говоря, намного сложнее. В этом случае вопрос о наличии экстремума в точке M_0 остается открытым и требует дополнительного исследования.

22. Условиый экстремум фуикции

Рассмотренный выше экстремум функции $f(M)$ называют безусловным. Это значит, что если M_0 – точка экстремума функции, то неравенство $f(M)<f(M_0)$ (или $f(M)>f(M_0)$) выполняется для всех точек M в некоторой окрестности $C_\varepsilon(M_0)$.

Предположим теперь, что упомянутое неравенство выполняется не для всех $M \in M_0 C_\varepsilon(M_0)$, а лишь для тех, координаты $x_1, x_2, ..., x_n$ которых удовлетворяют некоторым условиям

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n)=0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n)=0, \\ ------------- \\ \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n)=0, \end{cases} \tag{9.45}$$

где $m<n$. Эти условия называют уравнениями связи.

Пусть R – множество точек $M \in R_n$, для которых выполняются уравнения (9.45). Если для всех точек $M \in C_\varepsilon(M_0) \cap R$ справедливо равенство $f(M)>f(M_0)$ (или $f(M)>f(M_0)$), то говорят, что функция $f(M)$ имеет в точке M_0 условный экстремум (соответственно максимум или минимум) при уравнениях связи (9.45).

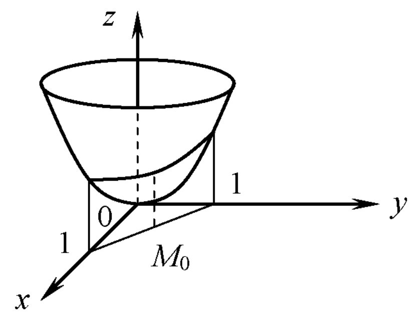


Рис. 9.25

Пример 9.35. Возьмём функцию $z=x^2+y^2$. Она имеет в точке (0,0) безусловный минимум, равный нулю. Найдём теперь минимум этой функции при условии $x+y-1=0$. Очевидно, при этом условии будет $z_{\min}>0$.

Для нахождения точки условного минимума, рассматриваем функцию $z(x)=\left(x^2+y^2\right)\Big|_{y=1-x}$. Она равна

$$z=x^2+1-2x+^2=2x^2-2x+1.$$

Отсюда

$$\frac{dz}{dx}=4x-2,$$

а значит, полагая $\dfrac{dz}{dx}=0$, получим искомую точку $M_0\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

Выведем необходимые условия условного экстремума. Для определённости будем рассматривать сначала случай, когда $n=4$, $m=2$, т. е. рассмотрим функцию $u=f(x,y,z,t)$ с уравнениями связи

$$\begin{cases}\varphi(x,y,z,t)=0,\\ \psi(x,y,z,t)=0.\end{cases} \tag{9.46}$$

Будем предполагать, что и функция f и функции φ и ψ имеют в рассматриваемой области непрерывные частные производные по всем своим аргументам.

Уравнения (9.46) определяют величины z и t как функции переменных x и y:

$$z=g(x,y),\ t=h(x,y). \tag{9.47}$$

Пусть функция $f(x,y,z,t)$ при связях (9.46) имеет в точке $M_0(x_0,y_0,z_0,t_0)$ условный экстремум. Тогда функция $f(x,y,g(x,y),h(x,y))$ имеет в точке (x_0,y_0) безусловный экстремум. Поэтому в данной точке равны нулю обе её частные производные, а значит и полный дифференциал. В силу инвариантности полного дифференциала, последнее условие можно записать так

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0. \tag{9.48}$$

Здесь все частные производные вычислены в точке M_0, а под dz и dt подразумеваются дифференциалы функций (9.47) в точке (x_0,y_0).

Взяв полные дифференциалы обеих частей выражений (9.46), получим

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}dz+\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}dt=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial}dx+\dfrac{\partial\psi}{\partial}dy+\dfrac{\partial\psi}{\partial}dz+\dfrac{\partial\psi}{\partial}dt=0.\end{cases}$$

Будем считать, что здесь, как и в равенстве (9.48), все частные производные взяты в точке M_0, а dz и dt –

полные дифференциалы функций $g(x,y)$ и $h(x,y)$, вычисленные в точке (x_0,y_0).

Умножив тождества (9.49), соответственно, на числа λ и μ (пока произвольные) и сложим почленно с тождеством (9.48). Получим

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)dy+$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)dz+\left(\frac{\partial f}{\partial t}dt+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)dt=0. \qquad (9.50)$$

Подберём теперь числа λ и μ так, чтобы было

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial z}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}+\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial z}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial t}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}+\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial t}=0;\end{cases}$$

это возможно, если

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi(M_0)}{\partial z} & \dfrac{\partial\psi(M_0)}{\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi(M_0)}{\partial t} & \dfrac{\partial\psi(M_0)}{\partial t}\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (9.51)$$

При таких λ и μ получим из равенства (9.50)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)dy=0. \qquad (9.52)$$

Здесь dx и dy – произвольные приращения переменных x и y, а так как равенство (9.52) выполняется при любых dx и dy, то

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial y}=0.$$

Итак, для нахождения шести неизвестных: x_0,y_0,z_0,t_0,λ и μ – мы имеем 6 уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}+\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}+\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}+\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}+\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial t}=0, \\ \varphi(x,y,z,t)=0, \\ \psi(x,y,z,t)=0. \end{cases} \qquad (9.53)$$

Введём вспомогательную функцию

$$F(x,y,z,t;\lambda,\mu)=f(x,y,z,t)+\lambda\varphi(x,y,z,t)+\mu\psi(x,y,z,t).$$

Тогда система (9.53) означает, что равны нулю частные производные этой функции по каждому из 6-и её аргументов. Таким образом, нахождение точки условного экстремума функции $f(x,y,z,t)$ сводится к нахождению стационарной точки функции $F(x,y,z,t;\lambda,\mu)$.

Всё сказанное легко распространяется на случай любого числа n аргументов функции $f(M)$ и любого числа m связей. Очевидно, для функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и уравнений связи (9.45) вводится вспомогательная функция

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_n), \qquad (9.54)$$

а поэтому вместо (9.53) будем иметь систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\sum\limits_{k=2}^{m}\lambda_k\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}=0, \\ \text{— — — — — — — — — — — —} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}=0, \\ \varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0, \\ \text{— — — — — — — — — — — —} \\ \varphi_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0. \end{cases} \qquad (9.55)$$

Описанный метод называют методом Лагранжа, а числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – неопределёнными множителями Лагранжа.

Система (9.55) даёт лишь необходимое условие условного экстремума, т. е. из неё находится лишь точка, подозрительная на условный экстремум. Вопрос же о наличии условного экстремума в этой точке решается дополнительным исследованием. Опишем его схему.

Заметим, прежде всего, что если рассматривать лишь точки $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющие уравнениям (9.45) (т. е. точки $M \in R$), то функция (9.54) совпадает с функцией $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Поэтому если числа $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}; \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, ..., \lambda_m^{(0)}$ есть решение системы (9.55) и если обозначить

$$F\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}; \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, ..., \lambda_m^{(0)}\right) = \phi(x_1, x_2, ..., x_n),$$

то

$$f\left(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, ..., x_n^{(0)} + \Delta x_n\right) - f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) =$$
$$= \phi\left(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, ..., x_n^{(0)} + \Delta x_n\right) - \phi\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right),$$

или на основании формулы Тейлора,

$$\Delta f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) = \frac{1}{2} d^2\phi\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) + o\left(\Delta\rho^2\right). \quad (9.56)$$

Величина $d^2\phi\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ есть квадратичная формула от переменных $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, которые ниже мы будем обозначать $dx_1, dx_2, ..., dx_n$. Эти величины независимы, поскольку, в силу (5.45),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1(M_0)}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial\varphi_1(M_0)}{\partial x_2}dx_2 + ... + \dfrac{\partial\varphi_1(M_0)}{\partial x_n}dx_n = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi_2(M_0)}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial\varphi_2(M_0)}{\partial x_2}dx_2 + ... + \dfrac{\partial\varphi_2(M_0)}{\partial x_n}dx_n = 0, \\ ------------------------------- \\ \dfrac{\partial\varphi_m(M_0)}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial\varphi_m(M_0)}{\partial x_2}dx_2 + ... + \dfrac{\partial\varphi_m(M_0)}{\partial x_n}dx_n = 0. \end{cases} \quad (9.57)$$

Ранг этой СЛАУ равен m, по аналогии с выражением (9.51) для случая $n = 4, m = 2$, мы молча предполагали выше, что, например,

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial\varphi_1(M_0)}{\partial x_{n-m+1}} & \dfrac{\partial\varphi_1(M_0)}{\partial x_{n-m+2}} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1(M_0)}{\partial x_n} \\
\dfrac{\partial\varphi_2(M_0)}{\partial x_{n-m+1}} & \dfrac{\partial\varphi_2(M_0)}{\partial x_{n-m+2}} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_2(M_0)}{\partial x_n} \\
- & - & - & - \\
\dfrac{\partial\varphi_m(M_0)}{\partial x_{n-m+1}} & \dfrac{\partial\varphi_m(M_0)}{\partial x_{n-m+2}} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m(M_0)}{\partial x_n}
\end{vmatrix} \neq 0,
$$

а значит, она имеет $n-m$ свободных неизвестных, рис. 9.26. Поэтому из системы (9.57) можно выразить, например, $dx_{n-m+1}, dx_{n-m+2}, \ldots, dx_n$ через $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-m}$. Подставляя результат в $d^2\phi\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, получим новую квадратичную форму

$$B(dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-m}) = \sum_{i,k=1}^{n-m} b_{ik}\, dx_i dx_k .$$

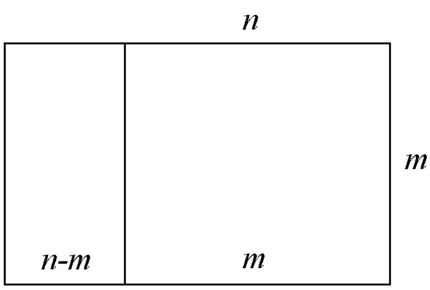


Рис. 9.26

Если она – положительно определённая, то, на основании (9.56), точка M_0 есть точка условного минимума. Если квадратичная форма B – отрицательно определённая, то в точке M_0 – условный максимум. Если же B – знакопеременная квадратичная форма, то условного экстремума в точке M_0 нет.

Пример 9.36. Исследуем функцию $u = x - 2y + 2z$ на экстремум при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Составляем функцию $F(x, y, z; \lambda) = x - 2y + 2z + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 9\right)$. Система (9.55) в этом случае имеет вид

$$
\begin{cases}
1 + 2\lambda x = 0, \\
-2 + 2\lambda y = 0, \\
2 + 2\lambda z = 0, \\
x^2 + y^2 + z^2 = 9.
\end{cases}
$$

Имеем из неё

$$x = -\frac{1}{2\lambda},\ y = \frac{1}{\lambda},\ z = -\frac{1}{\lambda},$$

а значит

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 9,$$

т. е.

$$\frac{9}{4\lambda^2}=9,$$

откуда $4\lambda^2=1$, а значит $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$. Итак, имеется две точки, подозрительные на условный экстремум: $M_1(-1,2,-2)$ и $M_2(1,-2,2)$.

Для точки M_1 получаем

$$\phi(x,y,z)=x-2y+2z+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2-9\right).$$

Поскольку

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=1+x,\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=-2+y,\quad \frac{\partial\phi}{\partial z}=2+z,$$

то

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=1,\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=1,\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=1,$$

а значит

$$d^2\phi(M_1)=dx^2+dy^2+dz^2. \tag{9.58}$$

Но уравнение связи даёт

$$xdx+ydy+zdz=0,$$

а потому в точке M_1:

$$-dx+2dy-2dz=0,$$

откуда

$$dx=2dy-2dz. \tag{9.59}$$

Следовательно,

$$B(dy,dz)=4dy^2-8dydz+4dz^2+dy^2+dz^2=5dy^2-8dydz+5dz^2.$$

Составим определитель

$$\Delta_2(M_1)=\begin{vmatrix}5 & -4\\ -4 & 5\end{vmatrix}.$$

Поскольку $\Delta_1(M_1)=5>0$, $\Delta_2(M_1)=9>0$, то в точке M_1 – условный минимум, причём $u_{\min}=-9$.

Легко видеть, что в точке M_2 – условный максимум, и $u_{\max}=9$.

Примечание. Выкладки, произведенные после равенства (9.58), в данном случае излишни, поскольку из (9.58) следует, что $d^2\phi(M_1)>0$ при любых значениях dx, dy и dz, а не только при выполнении условия (9.59). Упомянутые же только что выкладки мы провели с целью более чёткого описания алгоритма в общем случае исследования.

Пример 9.37. Исследуем на условный экстремум функцию $u=xyz$

при условиях $x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0.$

Составляем функцию

$$F(x,y,z;\lambda,\mu)=xyz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)+\mu(x+y+z).$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x}=yz+2\lambda x+\mu,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=xz+2\lambda y+\mu,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=xy+2\lambda z+\mu.$$

Система (9.55) запишется так

$$\begin{cases} yz+2\lambda x+\mu=0,\\ xz+2\lambda y+\mu=0,\\ xy+2\lambda z+\mu=0,\\ x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y+z=0. \end{cases} \tag{9.60}$$

Решая её, находим точки $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $M_3\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, а также точки $M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $M_5\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $M_6\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Остановимся на точке M_1. Имеем из (9.60)

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}+\frac{2}{\sqrt{6}}\lambda+\mu=0,\\ \frac{1}{6}-\frac{4}{\sqrt{6}}\lambda+\mu=0, \end{cases}$$

откуда $\frac{1}{2}-\sqrt{6}\lambda=0$, т. е. $\lambda=\frac{1}{2\sqrt{6}}$, а значит

$$\mu=\frac{1}{3}-\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

Таким образом,

$$\phi(x,y,z)=xyz+\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(x^2+y^2+z^2-1\right)+\frac{1}{6}(x+y+z),$$

так что

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=yz+\frac{x}{\sqrt{6}}+\frac{1}{6},\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=xz+\frac{y}{\sqrt{6}}+\frac{1}{6},\quad \frac{\partial\phi}{\partial z}=xy+\frac{z}{\sqrt{6}}+\frac{1}{6},$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \ \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=z,\ \ \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}=y,\ \ \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \ \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}=x,\ \ \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\frac{1}{\sqrt{6}},$$

откуда

$$\frac{\partial^2\phi(M_1)}{\partial x^2}=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \ \frac{\partial^2\phi(M_1)}{\partial x\partial y}=-\frac{2}{\sqrt{6}},\ \ \frac{\partial^2\phi(M_1)}{\partial x\partial z}=\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\frac{\partial^2\phi(M_1)}{\partial y^2}=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \ \frac{\partial^2\phi(M_1)}{\partial y\partial z}=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \ \frac{\partial^2\phi(M_1)}{\partial z^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно,

$$d^2u(M_1)=\frac{1}{\sqrt{6}}dx^2+\frac{1}{\sqrt{6}}dy^2+\frac{1}{\sqrt{6}}dz^2-\frac{4}{\sqrt{6}}dxdy+\frac{2}{\sqrt{6}}dxdz+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{6}}dydz. \qquad (9.61)$$

Далее уравнения связи дают

$$\begin{cases}2xdx+2ydy+2zdz=0,\\ dx+dy+dx=0.\end{cases}$$

В точке M_1 эта система выглядит так

$$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{6}}dx+\frac{1}{\sqrt{6}}dy-\frac{2}{\sqrt{6}}dz=0,\\ dx+dy+dz=0,\end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases}dx+dy-2dz=0,\\ dx+dy+dz=0,\end{cases}$$

откуда находим

$$dz=0,\ dy=-dx,$$

и из (9.61) получим $B(dx)$.

$$B(dx)=\frac{1}{\sqrt{6}}dx^2+\frac{1}{\sqrt{6}}dx^2+\frac{4}{\sqrt{6}}dx^2=\sqrt{6}dx^2.$$

В данном случае $\Delta_i(M_1)=\sqrt{6}>0$, а значит в точке M_1 – условный минимум, причем, как легко видеть, $u(M_1)=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$. Такой же результат будем иметь и в точках M_2 и M_3, в точках же M_4, M_5 и M_6 легко получим условный максимум.

Примечание. С теорией экстремумов тесно связан вопрос о наибольшем и наименьшем значениях функции $f(M)$ на компакте R. Найдем значения $f(M)$ во всех точках условного максимума, лежащих внутри R, а также во всех точках условного максимума, лежащих на ∂R. Наибольшее из этих чисел и есть, очевидно, $\max\limits_{R} f(M)$. Аналогично, $\min\limits_{R} f(M)$ есть наименьший из минимумов функции внутри R и условных минимумов на ∂R.

23. Касательиая и иормальиая илоскость иространствеииой лииии

Заметим, прежде всего, что линию в пространстве можно задать двумя способами.

1^0. В параметрической форме линия задается уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases} \tag{9.62}$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ – функции, непрерывные в рассматриваемом (конечном или бесконечном) промежутке изменения параметра t.

Например, уравнения

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt, \end{cases}$$

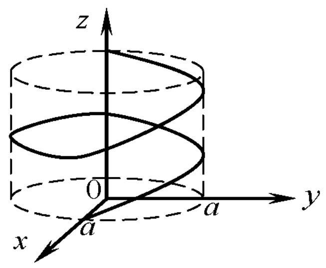


Рис. 9.27

изображают так называемую винтовую линию, лежащую на цилиндре $x^2 + y^2 = a^2$, рис. 9.27.

Очевидно, что три скалярных уравнения (9.62) эквивалентны одному векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

где $\vec{r}(t)$ – известная вектор-функция.

2^0. Линию в пространстве можно задать и как результат пересечения некоторых двух поверхностей, т. е. системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{9.63}$$

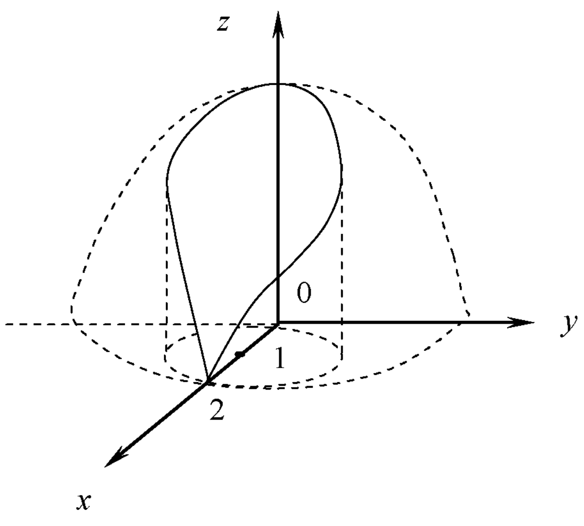


Рис. 9.28

Например, уравнения

$$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ (x-1)^2+y^2=1, \end{cases}$$

изображают (см. рис. 9.28) линию пересечения верхней полусферы и кругового цилиндра.

Примечание. В ряде случаев можно, положив в уравнениях (9.63), например, $z=t$, найти из них $x(t)$ и $y(t)$. Тем самым будет сделан переход от системы (9.63) к параметрическому заданию линии.

Пусть некоторая кривая задана уравнениями (9.62). Возьмем на ней точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, рис. 9.29, отвечающую значению $t=t_0$. Будем считать функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ дифференцируемыми в точке t_0.

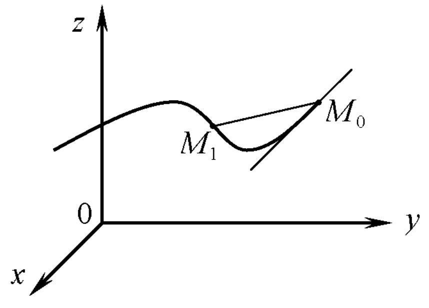


Рис. 9.29

Придадим параметру t приращение Δt; тогда получим близкую к точке M_0 точку $M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ этой же кривой. Уравнение секущей M_0M_1:

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}.$$

Перепишем их так:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Пусть теперь $\Delta t\to 0$. Тогда точка M, неограниченно приближается к точке M_0, и в пределе получим из последнего выражения уравнения касательной к кривой в точке M_0:

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\chi'(t_0)}.$$

Направляющий вектор $\vec{t}=\varphi'(t_0)\vec{i}+\psi'(t_0)\vec{j}+\chi'(t_0)\vec{k}$ этой касательной называют просто вектором касательной данной кривой в точке M_0.

Пример 9.38. Возьмем винтовую линию

$$\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t, \\ z=3t, \end{cases}$$

и точку $(1,\sqrt{3},\pi)$ на ней. Этой точке отвечает значение $t=\frac{\pi}{3}$. Поэтому из равенств

$$x'(t) = -2\sin t,\ y'(t) = 2\cos t,\ z'(t) = 3$$

получаем для касательной в точке $(1, \sqrt{3}, \pi)$ следующие уравнения

$$\frac{x-1}{\sqrt{3}} = \frac{y-\sqrt{3}}{1} = \frac{z-\pi}{3}.$$

Плоскость, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной к кривой в этой точке, называется нормальной плоскостью данной кривой в этой точке. Очевидно, ее уравнение:

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \chi'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

24. Касательиая илоскость и иормаль к иоверхиости

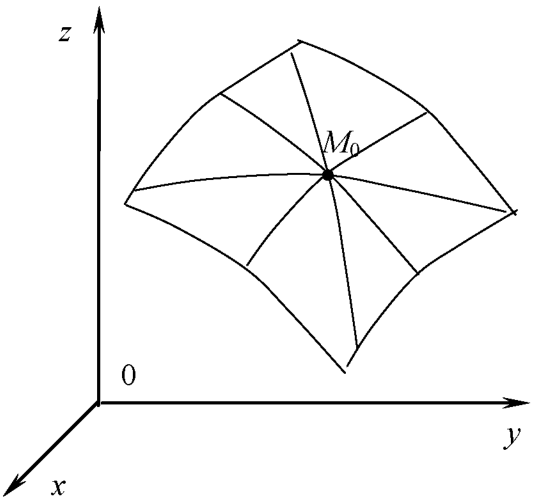


Рис.9.31

Возьмем некоторую поверхность $F(x, y, z) = 0$ и на ней точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Проведем через эту точку множество всевозможных линий, лежащих на этой поверхности. Пусть

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases} \qquad (9.64)$$

уравнения одной из этих линий, а t_0 – значение параметра t, отвечающее точке M_0, рис. 9.31. Пусть функция $F(x, y, t)$ имеет в точке M_0 непрерывные частные производные, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ будут дифференцируемы в точке t_0.

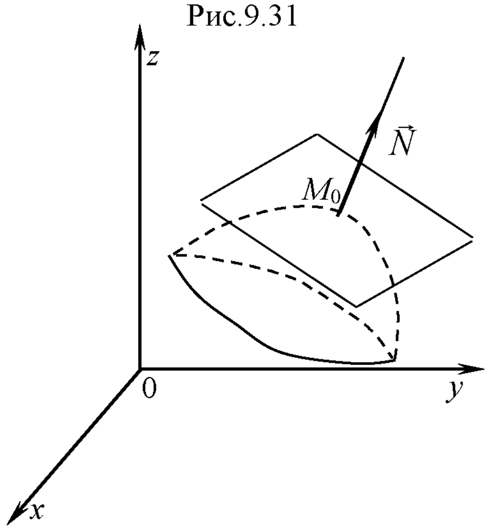


Рис 9.32

Поскольку линия (9.64) лежит на поверхности, то $F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \equiv 0$. Взяв полную производную по t от обеих частей этого тождества, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}\varphi'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\psi'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\chi'(t) \equiv 0. \qquad (9.65)$$

Положим здесь $t = t_0$, тогда $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Введем в рассмотрение векторы

$$\vec{a} = \varphi'(t_0)\vec{i} + \psi'(t_0)\vec{j} + \chi'(t_0)\vec{k} \text{ и}$$
$$\vec{N} = F'_x(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + F'_y(x_0, y_0, z_0)\vec{j} +$$
$$+F'_z(x_0, y_0, z_0)\vec{k}.$$

Тогда выражение (9.65) примет вид $(\vec{N}, \vec{a}) = 0$; а значит, $\vec{a} \perp \vec{N}$. Взяв различные кривые на поверхности, мы будем иметь разные векторы $\vec{a}$, но вектор $\vec{N}$ при этом будет оставаться одним и тем же. Итак, касательные ко всем рассматриваемым кривым перпендикулярны одному и тому же вектору $\vec{N}$, а значит, все эти касательные лежат в одной плоскости. Ее называют касательной плоскостью данной поверхности в точке M_0. Поскольку вектор $\vec{N}$ есть нормальный вектор этой плоскости, то ее уравнение запишется так:
$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной плоскости, называется нормалью данной поверхности в этой точке. Очевидно, ее канонические уравнения:
$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, x_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, x_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, x_0)}.$$

Пусть теперь поверхность задана явно уравнением
$$z = f(x, y).$$
Перепишем это уравнение так:
$$f(x, y) - z = 0.$$

Тогда
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \ \frac{\partial F}{\partial z} = -1,$$
и уравнение касательной плоскости примет вид:
$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$
т. е.
$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Примечание. Пусть кривая задана уравнениями (9.63), и требуется получить уравнения касательной к ней в точке M_0. Для этого достаточно провести в точке M_0 касательные плоскости к поверхностям $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$. Линия их пересечения, очевидно, и будет искомой касательной.

Пример 9.39. К линии
$$\begin{cases} xyz = 6, \\ x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 31, \end{cases}$$
проведем касательную в точке $M_0(1,2,3)$.

Согласно (9.65) уравнение касательной плоскости к 1-ой поверхности

$$6(x-1)+3(y-2)+2(z-3)=0\,,$$

т. е.

$$6x+3y+2z-18=0\,.$$

Ее нормальный вектор

$$\vec{N}_1=\{6{,}3{,}2\}.$$

Уравнение касательной плоскости ко 2-й поверхности:

$$2(x-1)+12(y-2)+12(z-3)=0\,,$$

т. е.

$$x+6y+6z-31=0\,,$$

и получаем 2-й нормальный вектор

$$\vec{N}_2=\{1{,}6{,}6\}.$$

Следовательно, направляющий вектор касательной

$$\vec{\tau}=\left[\vec{N}_2,\vec{N}_1\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 6 & 6\\ 6 & 3 & 2\end{vmatrix}=\{-6{,}34{,}-33\}.$$

Искомые уравнения:

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{-34}=\frac{z-3}{33}.$$

25. Геометрический смысл иолиого диффереициала фуикции двух иеремеииых

Проведем к поверхности $z=f(x,y)$ касательную плоскость в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Ее уравнение:

$$z-z_0=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0). \tag{9.66}$$

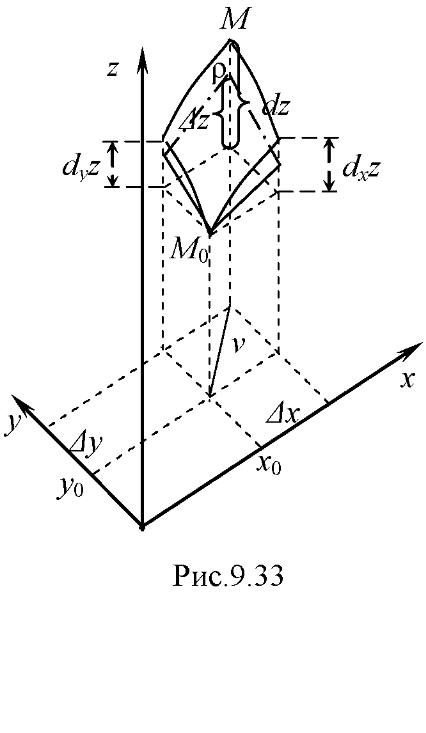


Рис.9.33

Возьмем на этой плоскости точку $M(x,y,z)$, близкую к точке M_0 и обозначим

$$x-x_0=\Delta x\,,\ y-y_0=\Delta y\,,\ z-z_0=\Delta z\,.$$

Тогда равенство (9.66) примет вид

$$\Delta z=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y\,.$$

Справа стоит полный дифференциал функции $z=f(x,y)$ в точке (x_0,y_0). Следовательно, полный дифференциал функции двух переменных геометрически представляет собой приращение аппликаты точки касательной плоскости к графику этой функции в данной точке (ср. с геометрическим смыслом дифференциала функции одной переменной). Если $v \to 0$, то отрезок PM между поверхностью и касательной плоскостью, как было доказано, есть $o(v)$.

26. Огибающая одиоиараметрического семейства илоских лииий

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, C) = 0, \tag{9.67}$$

где C – произвольная постоянная. Придавая величине C конкретные значения, будем получать из уравнения (9.67) разные кривые одного и того же типа. Поэтому говорят, что уравнение (9.67) изображает семейство линий. Величину C называют параметром семейства. Например, уравнение $y = Cx^2$ изображает семейство парабол, осью которых является ось Oy, рис. 9.34.

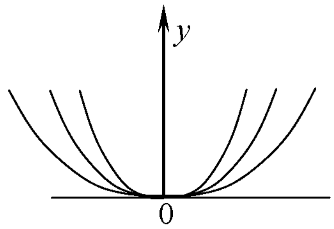


Рис. 9.34

Уравнение $y = C^2x^2$ также определяет семейство парабол с общей осью Ox, но их ветви направлены только вверх, рис. 9.35. Сама же ось Ox входит, очевидно, в оба семейства (ей отвечает значение $C = 0$). Уравнение $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ изображает семейство окружностей, касающихся оси $0y$ в начале координат, рис. 9.36.

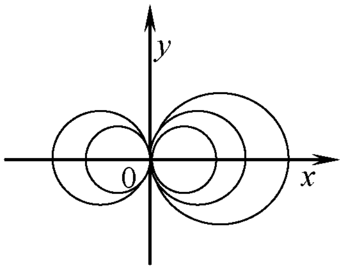


Рис. 9.36

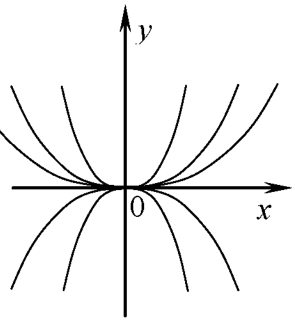


Рис. 9.35

Огибающей данного семейства линий называется такая линия, которая в каждой своей точке касается одной и только одной линии семейства и, тем самым, вся состоит из точек касания, рис. 9.37. Например, эволюта кривой есть огибающая семейства всех нормалей этой линии (см. раздел V).

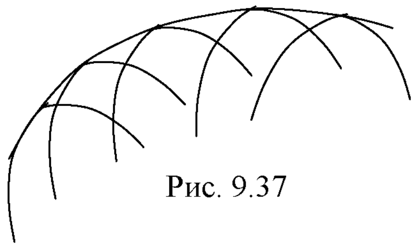


Рис. 9.37

Предположим, что семейство (9.67) имеет огибающую. Покажем как найти ее уравнение. Пусть (x, y) – произвольная точка огибающей. Через нее проходит некоторая линия семейства, отвечающая некоторому значению C, т. е. при этих x, y и C будет $F(x, y, C) = 0$. Взяв другую точку на огибающей, получим другую линию семейства, т. е. линию, отвечающую другому значению C, а значит, для новых значений x, y и C снова будет $F(x, y, C) = 0$ и т. д. Таким образом, для любой точки (x, y) на огибающей выполняется равенство

$$F(x, y, C(x, y)) = 0\,. \tag{9.68}$$

Если бы функция $C(x, y)$ была известна, то было бы известно и уравнение огибающей.

Взяв дифференциал от обеих частей тождества (9.68) и пользуясь инвариантностью полного дифференциала, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial C}dC = 0\,. \tag{9.69}$$

В то же время, поступая аналогично с равенством (9.67), будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0\,, \tag{9.70}$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{-\dfrac{\partial F}{\partial y}}\,.$$

Но $\dfrac{dy}{dx}$ есть угловой коэффициент касательной к линии семейства. Поскольку в каждой точке (x, y) огибающей касательные к огибающей и к соответствующей кривой семейства совпадают, то величина $\dfrac{dy}{dx}$, найденная из равенства (9.69), должна совпадать с величиной $\dfrac{dy}{dx}$, найденной из равенства (9.70), а для этого должно быть

$$\frac{\partial F}{\partial C}dC = 0\,.$$

При этом $dC \not\equiv 0$, так как в противном случае было бы $C = const$ для всех точек (x, y) на огибающей. Следовательно, $\dfrac{\partial F}{\partial C} = 0$. Поскольку величина F есть функция от x, y и C, то и $\dfrac{\partial F}{\partial C}$, вообще говоря, есть функция переменных x, y и C, которую затем следует подставить в (9.68).

Итак, уравнение огибающей семейства (9.87) (если оно существует) находится путем исключения C из равенств

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0, \\ \dfrac{\partial F(x,y,C)}{\partial c}=0. \end{cases} \qquad (9{,}71)$$

Пример 9.40. Возьмем семейство парабол $y=Cx^2+\dfrac{1}{C}$. Система (9.71) для него запишется так:

$$\begin{cases} Cx^2+\dfrac{1}{C}-y=0, \\ x^2-\dfrac{1}{C^2}=0. \end{cases}$$

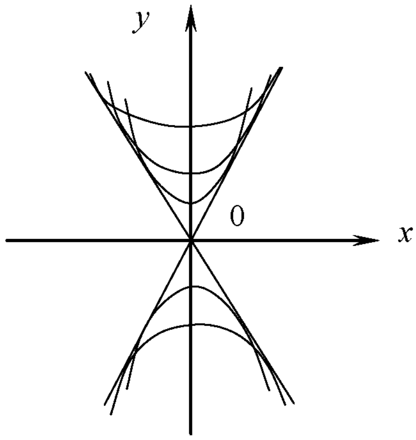


Рис. 9.38

Второе уравнение дает

$$C=\pm\frac{1}{x},$$

а значит уравнение огибающей:

$$\pm\frac{1}{x}x^2\pm x-y=0,$$

т. е.

$$\pm(x+x)-y=0.$$

Итак, огибающая здесь представляет собой пару прямых $y=2x$ и $y=-2x$, рис. 9.38.

Примечание. Линия, найденная из системы (9.71), может и не быть огибающей. Она может представлять собой геометрическое место т. н. особых точек линий (9.67) (например, точек возврата или угловых точек), см. рис. 9.39. Действительно, точка пересечения P двух "близких" кривых семейства находится из системы

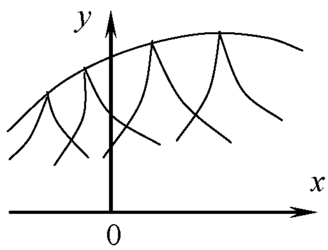


Рис. 9.39

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0, \\ F(x,y,C+\Delta C)=0, \end{cases}$$

которую можно переписать так

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0, \\ F(x,y,C+\Delta C)-F(x,y,C)=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0, \\ \dfrac{F(x,y,C+\Delta C)-F(x,y,C)}{\Delta C}=0. \end{cases}$$

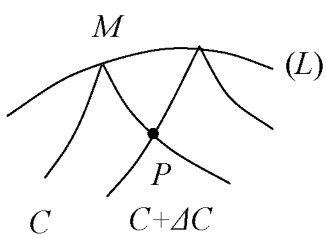


Рис. 9.40

Если $\Delta C \to 0$, то точка P неограниченно приближается к точке M, и в пределе получим, что координаты любой точки M на кривой (L) удовлетворяют системе (9.71).

Итак, исключив C из системы (9.71) необходимо еще вычислить, является ли найденная линия огибающей. Обычно это делается на основании геометрических соображений.

Задачи и уиражиеиия к главе IX

1. Найти область определения функции

$$z = \arcsin \frac{y}{x} + \sqrt{\sin\left(x^2 + y^2\right)}.$$

2. Заменяя приращение функции ее полным дифференциалом, вычислить приближенно

$$3.\ \ln\left(1{,}05^2 + 0{,}93^3 - 1\right).$$

4. То же для $\sqrt{1{,}08^2 + 1.95^3}$.

5. То же для $\sqrt[3]{2{,}96^2 - 1{,}06^3}$.

6. При изменении треугольника получены следующие данные: стороны $a = 1m \pm 0{,}02m$; $b = 2m \pm 0{,}03m$; угол между ними $\varphi = 60° \pm 1°$. С какой точностью может быть вычислена третья сторона?

7. Используя формулу Тейлора 2-го порядка для функции $z = x^3 y^2 + 3xy^4$, вычислить приближенно $z(2{,}1;0{,}95)$.

8. То же для $e^{0{,}1} \ln 1{,}2$.

9. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$.

10. То же для функции $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

11. Исследовать на экстремум функцию $u = x^2 + y^2 + z^2$, при условии $x + y + z = 1$.

12. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$, в области $\left\{(x, y)\middle| 0 \le x \le 2; -1 \le y \le 2\right\}$.

13. На параболе $y = 1 - x^2$ найти точку, ближайшую к прямой $x + y = 2$.

14.На параболе $y^2 = 8(x+2)$ найти точку, наименее удаленную от прямой $2x - y + 8 = 0$.

15.На поверхности $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ найти точку, касательная плоскость в которой образует одинаковые углы с координатными осями.

16.Доказать, что сумма квадратов отрезка, отсеченных на осях координат плоскостью, касательной к поверхности $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{2}{3}}$ в любой ее точке, равна d^2.

17.К поверхности $2x^2 + y^2 + z^2 = 22$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x - y - 2z = 0$.

18. К поверхности $z = xy$ провести касательную плоскость, перпендикулярную прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$.

19.К линии $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x + 2 = 5 \end{cases}$ провести касательную в точке $\left(2{,}2\sqrt{3{,}3}\right)$.

20.К поверхности $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 12$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $6x + 3y + 2z - 7 = 0$.

21.К поверхности $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 8$ провести касательную плоскость, параллельную прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$.

22.К поверхности $xz + yz + xy = 5$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $3x + 2y + 3z = 0$.

23.Найти огибающую семейства окружностей с центрами на оси $0x$, радиусы которых служат ординаты точек линии $y^2 = 4x$.

24.Найти огибающую семейства эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, произведение полуосей которых есть постоянная величина l.

25.Найти огибающую семейства окружностей с центрами на оси $0x$, радиусами которых служат ординаты точек прямой $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

X. Кратиые иитегралы

1. Некоторые задачи, ириводящие к иоиятию двойиого иитеграла

1. Вычисление массы неоднородной пластинки. Пусть пластинка занимает область $\overline{D}$ в плоскости xOy и пусть $\rho(x,y)$ – ее плотность. Разделим эту пластинку на n произвольных частей ΔD_1, ΔD_2,… ΔD_n и их площади обозначим ΔS_1, ΔS_2, … ΔS_n. В каждой из областей ΔD_k возьмем произвольную точку (x_k, y_k), вычислим $\rho(x_k, y_k)$ и умножим результат на ΔS_k. Величина $\Delta m_k = \rho(x_k, y_k)\cdot\Delta S_k$ приближенно равна массе элементарной площадки ΔD_k. Составим сумму $\tilde{m} = \sum\limits_{k=1}^{n}\rho(x_k, y_k)\Delta S_k$, величина которой равна массе всей пластинки в том случае, если ее плотность изменяется не плавно, а скачками – при переходе от одной области ΔD_k к другой.

Пусть λ_k – диаметр [*] области ΔD_k и пусть $\lambda = \max\lambda_k$. Предположим, что $\lambda \to 0$. Это значит, что каждая из областей ΔD_k стягивается в соответствующую точку (x_k, y_k) (при этом их число n, разумеется, неограниченно растет). Искомая масса пластинки, очевидно, равна

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(x_k, y_k)\Delta S_k. \tag{10.1}$$

2. Вычисление потока жидкости через сечение трубы. Пусть поперечное сечение трубы занимает область D в плоскости xOy (см. рис. 10.1), а $v(x,y)$ – скорость жидкости, протекающей через сечение D за единицу времени (его называют потоком жидкости через это сечение).

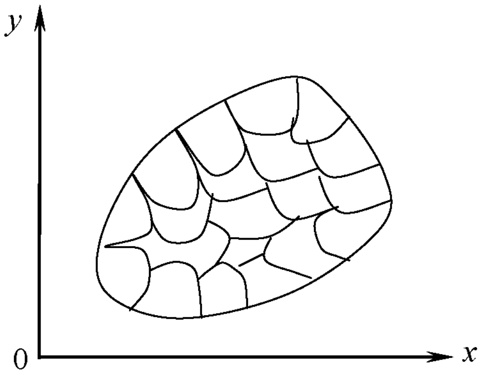


Рис. 10.1

Разбиваем, как в задаче 1, область D на n частей ΔD_k с площадями ΔS_k $(k = 1,2,...,n)$. Поток жидкости через область ΔD_k приближенно равен

$$\Delta Q_k = v(x_k, y_k)\Delta S_k,$$

где (x_k, y_k) – произвольная точка области ΔD_k. Если бы величина $v(x,y)$ изменялась не плавно, а скачками – при переходе через границы соседних областей ΔD_k, то поток через сечение D был бы равен

---

[*] Диаметром любой области D называют величину $\sup(M', M'')$, где $M', M'' \in D$.

$$\widetilde{Q}=\sum_{k=1}^{n} v(x_k,y_k)\Delta S_k.$$

Пусть теперь каждая из областей ΔD_k стягивается в точку. Тогда для искомого потока получим

$$Q=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} v(x_k,y_k)\Delta S_k,$$

где λ – наибольший из диаметров областей ΔD_1, $\Delta D_2,\ldots,\Delta D_n$.

2. Двойиой иитеграл и его геометрический смысл

Пусть D – произвольная ограниченная область в плоскости xOy, а $\overline{D}$ – её замыкание. Предположим, что в области $\overline{D}$ задана функция $f(x,y)$. Разобьём эту область на n частей ΔD_1, $\Delta D_2,\ldots$ ΔD_n с площадями ΔS_1, $\Delta S_2,\ldots$ ΔS_n. На каждой из площадок ΔD_k возьмем произвольную точку (x_k,y_k), вычислим $f(x_k,y_k)$ и умножим результат на ΔS_k. Составим сумму

$$\widetilde{S}=\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta S_k,$$

которая называется интегральной суммой функции $f(x_k,y_k)$ в области D.

Пусть λ – наибольший из диаметров областей ΔD_k. Предположим, что $\lambda\to 0$, то есть что каждая из областей ΔD_k стягивается в точку (x_k,y_k). Если существует предел $\lim\limits_{\lambda\to 0}\widetilde{S}_\lambda$, не зависящий от способа дробления области $\overline{D}$, то он называется двойным интегралом функции $f(x,y)$ в области D и обозначается $\iint\limits_D f(x,y)ds.$

Итак, по определению

$$\iint\limits_D f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta S_k. \qquad (10.2)$$

В частности, формулу (10.1) можно теперь переписать так

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)ds. \qquad (10.3)$$

Функция, для которой существует интеграл $\iint\limits_D f(x,y)ds$, называется интегрируемой в области D. Очевидно, что ограниченность функции в области D является необходимым условием интегрируемости этой функции в данной области.

Предположим для определенности, что функция $f(x,y)$ непрерывна и неотрицательна в области $\overline{D}$. Тогда $f(x_k,y_k)\Delta S_k$ есть объем элементарного столбика с основанием ΔD_k и высотой $f(x_k,y_k)$. Величина $\widetilde{S}$ равна, следовательно объему "ступенчатого" тела, составленного из всех таких столбиков. В пределе при $\lambda \to 0$ получим, что интеграл $\iint\limits_D f(x,y)ds$ геометрически представляет собой объем так называемого цилиндрического тела с основанием $\overline{D}$, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$.

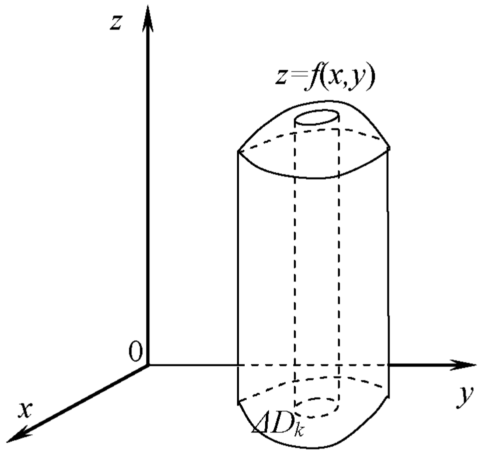


Рис.10.2

Отметим в заключение, что при фиксированных функции $f(x,y)$ и области D интеграл $\iint\limits_D f(x,y)ds$ является постоянным числом.

Примечание. Мы ввели представление о двойном интеграле на совершенно элементарном уровне. Такие важные здесь понятия, как площадь произвольной фигуры, объем произвольного тела (мера в случае пространства R^n) мы рассматривали как «сами собой разумеющиеся» и получали их свойства на основании соображений наглядности. Вместо этого можно было бы построить приемлемо стройную теорию мер хотя бы для $n=2$, т.е. на плоскости, чего мы не станем делать (для экономии времени) именно в угоду соображениям наглядности.

3. Осиовиые теоремы об иитегрируемости фуикции

Пусть функция $f(x,y)$ ограничена в области $\overline{D}$. Тогда она ограничена и в каждой из областей ΔD_k $(k=1,2,...,n)$. Обозначим $M_k = \sup f(x,y)$, $m_k = \inf f(x,y)$. Составим суммы

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta S_k, \quad s = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta S_k.$$

Они называются соответственно верхней и нижней суммой Дарбу для функции $f(x,y)$ в области D. Их свойства аналогичны свойствам сумм Дарбу для одномерного случая. Поэтому, как и для функции одной переменной, здесь имеет место

Теорема 10.1. Для того чтобы функция $f(x,y)$была интегрируема в области D, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \to 0}(S_\lambda - s_\lambda) = 0.$$

Отсюда, в силу теоремы Кантора для функций многих переменных вытекает следующая

Теорема 10.2. Функция, непрерывная в области D, интегрируема в этой области D.

Доказательство проводится так же как и в одномерном случае. Можно доказать также, что если функция $f(x,y)$ ограничена в области $\overline{D}$ и имеет в ней разрывы лишь на конечном числе линий с конечной длиной, то она интегрируема в области D.

4. О свойствах двойиого иитеграла

Ввиду полной аналогии определения интегралов $\int_a^b f(x)dx$ и $\iint_D f(x,y)ds$ свойства двойных интегралов совершенно аналогичны свойствам определенных интегралов. Поэтому мы ограничимся лишь формулировкой части этих свойств.

1. $\iint_D ds = S$, где S – площадь области D.

Геометрический смысл этого свойства совершенно очевиден.

2. Если функции $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ интегрируемы в области D, а C_1 и C_2 – постоянные числа, то и функция $C_1 \cdot f(x,y) + C_2 \cdot \varphi(x,y)$ интегрируема в области D и при этом

$$\iint_D [C_1 \cdot f(x,y) + C_2 \cdot \varphi(x,y)]ds = C_1 \iint_D f(x,y)ds + C_2 \iint_D \varphi(x,y)ds.$$

3. Если функции $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ интегрируемы в области D и если $f(x,y) \ge \varphi(x,y)$ всюду в D, то и

$$\iint_D f(x,y)ds \ge \iint_D \varphi(x,y)ds.$$

В частности,

$$(f(x,y) \ge 0, (x,y) \in D) \Rightarrow (\iint_D f(x,y)ds \ge 0).$$

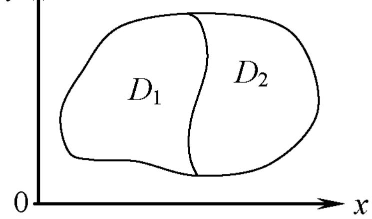


Рис.10.3

4. (Аддитивность относительно области интегрирования). Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области D, то она интегрируема и в каждой ее части, и наоборот. При этом, если $D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = \varnothing$ (рис. 10.3), то

$$\iint\limits_{D} f(x,y)ds = \iint\limits_{D_1} f(x,y)ds + \iint\limits_{D_2} f(x,y)ds.$$

5. (Теорема о среднем). Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области $\overline{D}$, то существует по крайней мере одна такая точка $(\xi,\eta)\in D$, что $\iint\limits_{D} f(x,y)ds = f(\xi,\eta)\cdot S$.

5. Вычислеиие двойиого иитеграла ио ирямоугольиой области

Теорема 10.3. Пусть функция $f(x,y)$ определена в прямоугольнике $\overline{D}$, ограниченном прямыми $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ и пусть:

1) Существует двойной интеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)ds = J$;

2) При любом фиксированном $x\in[a,b]$ существует определенный интеграл

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)dy.$$

Тогда существует и интеграл

$$\int_a^b \varphi(x,y)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx,$$

и он также равен J.

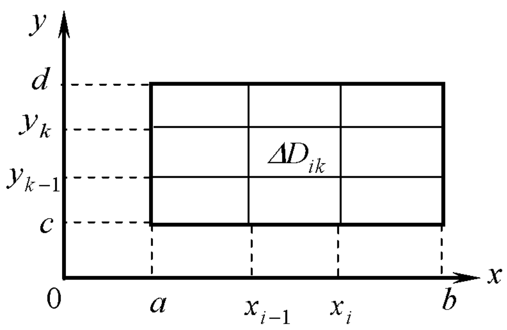


Рис.10.4

■Для доказательства разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $x_1,x_2,...,x_{n-1}$, а промежуток $[c,d]$ – на m частей точками $y_1,y_2,...,y_{n-1}$ и положим $x_0=a$, $x_n=b$, $y_0=c$, $y_m=d$ (рис. 10.4). Кроме того обозначим $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$, $y_k-y_{k-1}=\Delta y_k$. Проводя прямые $x=x_i$ $(i=1,2,...,n-1)$ и $y=y_k$ $k=1,2,..m-1$, разделим прямоугольник D на mn элементарных прямоугольников. Пусть ΔD_{ik} – один из них.

Обозначим

$$m_{ik} = \inf_{\Delta D_{ik}} f(x,y), \quad M_{ik} = \sup_{\Delta D_{ik}} f(x,y)$$

Тогда для всех $(x,y)\in\Delta D_{ik}$ будет

$$m_{ik} \le f(x,y) \le M_{ik}.$$

В частности, при любом $x=\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ и при любом $y\in[y_{k-1},y_k]$ будет

$$m_{ik} \le f(\xi_i,y) \le M_{ik}.$$

Интегрируя это неравенство по y в промежутке $[y_{k-1},y_k]$, получим

$$m_{ik}\cdot\Delta y_k\le\int\limits_{y_{k-1}}^{y_k}f(\xi_i,y)dy\le M_{ik}\cdot\Delta y_k. \tag{10.4}$$

Написанный здесь интеграл существует на основании условия 2) теоремы.

Суммируя неравенства (10.4) по k от 1 до m, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{m}m_{ik}\cdot\Delta y_k\le\int\limits_c^d f(\xi_i,y)dy\le\sum_{k=1}^{m}M_{ik}\cdot\Delta y_k,$$

то есть

$$\sum_{k=1}^{m}m_{ik}\cdot\Delta y_k\le\varphi(\xi_i)\le\sum_{k=1}^{m}M_{ik}\cdot\Delta y_k.$$

Умножим это неравенство на Δx_i и просуммируем по всем $i=1,2,...,n$.

Получим $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{m}m_{ik}\cdot\Delta y_k\right)\cdot\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\cdot\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{m}M_{ik}\cdot\Delta y_k)\right)\cdot\Delta x_i$.

Поскольку величина $\Delta x_i\Delta y_k$ есть площадь области ΔD_{ik}, то крайние члены этого неравенства есть нижняя и верхняя суммы Дарбу для функции $f(x,y)$ в области D, т.е. это неравенство можно представить так

$$s\le\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\cdot\Delta x_i\le S$$

Пусть теперь одновременно все Δx_i и Δy_k стремятся к нулю. Тогда, на основании условия 1) теоремы, будет $s\to J$, $S\to J$, а значит и

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\cdot\Delta x_i\to J$$

Но пределом последней суммы есть интеграл $\int\limits_a^b\varphi(x)dx$, следовательно, мы доказали, что $\int\limits_a^b\varphi(x)dx=J$, то есть что

$$\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx=\iint\limits_D f(x,y)ds.$$

В стоящем слева интеграле сначала производится интегрирование по переменной y, а затем – по переменой x. В связи с этим такой интеграл называют повторным (сравнить с понятиями двойного и повторного пределов функции $f(x,y)$в главе 1X). Поэтому, переписав последнюю формулу так

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy \right] dx, \tag{10.5}$$

мы видим что двойной интеграл можно вычислить путем его сведения к повторному.□

Примечание. Если, кроме условий 1) и 2), выполняется еще условие:

3) при любом фиксированном $y \in [c,d]$ существует интеграл

$$\psi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx,$$

то тогда существует и второй повторный интеграл

$$\int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx \right] dy.$$

также равный J. Следовательно, в этом случае, кроме формулы (10.5), мы имеем и другую, равносильную ей, формулу

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx \right] dy. \tag{10.6}$$

Пример 10.1. Вычислим объем тела, ограниченного поверхностью $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ и плоскостями $x = 0, x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = a$ (рис. 10.5).

Исходя из геометрического смысла двойного интеграла, на основании формулы (10.5), имеем

$$V = \int\limits_0^2 \left[\int\limits_0^1 \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) dy \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{5}{3}.$$

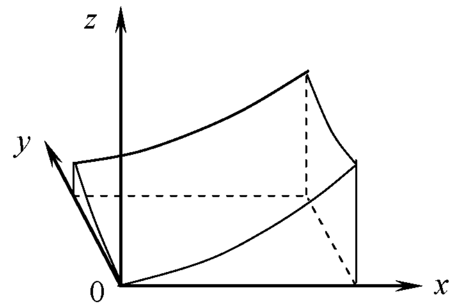


Рис. 10.5

6. Вычислеиие двойиого иитеграла в случае ироизвольиой области

Теорема 10.4. Пусть область $\overline{D}$ ограничена снизу и сверху линиями $y = q_1(x)$ и $y = q_2(x)$, а слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$, и пусть:

1). Существует двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)ds = \mathrm{J}$;

2). При каждом фиксированном $x \in [a,b]$ существует интеграл

$$\varphi(x)=\int\limits_{q_1(x)}^{q_2(x)} f(x,y)dy.$$

Тогда существует и интеграл

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{q_1(x)}^{q_2(x)} f(x,y)dy\right]dx.$$

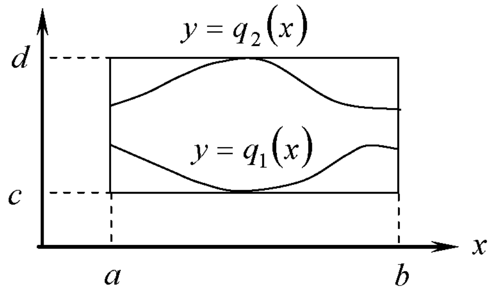


Рис. 10.6

и он также равен J.

■Заключим область D в прямоугольник $\overline{D_1}$, образованный прямыми $x=a$, $x=b$, $y=c, y=d$ (рис. 10.6). Определим в нем функцию

$$f_1(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & \forall(x,y)\in D,\\ 0, & \forall(x,y)\notin D.\end{cases}$$

Очевидно, что функция $f_1(x,y)$ интегрируема в области $\overline{D_1}$, причем

$$\iint\limits_{D_1} f_1(x,y)ds=\iint\limits_{D} f(x,y)ds.$$

Далее

$$\int\limits_c^d f_1(x,y)dy=\int\limits_c^{q_1(x)} f_1(x,y)dy+\int\limits_{q_1(x)}^{q_2(x)} f_1(x,y)dy+\int\limits_{q_2(x)}^{d} f_1(x,y)dy=$$

$$=0+\int\limits_{q_1(x)}^{q_2(x)} f_1(x,y)dy+0=\int\limits_{q_1(x)}^{q_2(x)} f_1(x,y)dy,$$

а значит, в силу условия 2), при каждом фиксированном $x\in[a,b]$ существует интеграл

$$\int\limits_c^d f_1(x,y)dy.$$

Итак, для функции $f_1(x,y)$ выполняются условия теоремы 10.3, так что

$$\iint\limits_{D_1} f_1(x,y)ds=\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f_1(x,y)dy\right]dx,$$

то есть

$$\iint\limits_{D} f(x,y)ds=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx, \tag{10.7}$$

что и требовалось доказать. □

Примечание 1. Пусть область ограничена слева и справа линиями $x = h_1(y)$ и $x = h_2(y)$, а сверху и снизу – прямыми $y = c, y = d$ (рис. 10.7), и пусть:

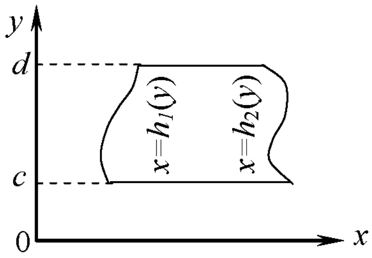


Рис.10.7

1) существует двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)ds = J$;

2) при любом фиксированном $y \in [c,d]$ существует интеграл

$$\varphi(y) = \int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dx.$$

Тогда существует и интеграл

$$\int\limits_c^d \varphi(y)dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right] dy,$$

также равный J, то есть в этом случае

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right] dy. \qquad (10.8)$$

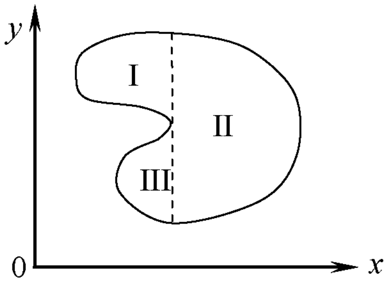


Рис. 10.8

Это утверждение доказывается точно так же, как и предыдущая теорема.

Примечание 2. Если D – область более сложной формы (рис. 10.8), чем рассматриваемая выше, то ее разбивают на конечное число областей рассмотренного вида и к каждой из них применяют либо формулу (10.7), либо формулу (10.8), после чего используют аддитивность интеграла.

Пример 10.2. Вычислим массу пластинки ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ (рис. 10.9), если ее плотность равна $2\sqrt{x}$. На основании формул (10.3) и (10.7) имеем

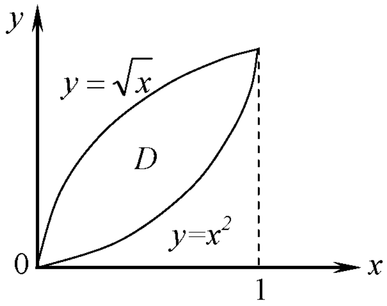


Рис. 10.9

$$m = \iint\limits_D 2 \cdot \sqrt{x} ds = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} 2 \cdot \sqrt{x} dy \right) dx =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right) dx = 2\int\limits_0^1 \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = 2\int\limits_0^1 \left(x - x^{\frac{5}{2}} \right) dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{7} \cdot x^{\frac{7}{2}} \right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{7} \right) = \frac{3}{7}.$$

Примечание 3. Если $f(x,y) \geq 0$ для всех $(x,y) \in D$, то формула (10.7) имеет простой геометрический смысл. Действительно, в этом случае

$$S(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy,$$

а значит, трактуя двойной интеграл как объем цилиндрического бруса (смотри главу 11V), получим

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \int\limits_a^b S(x)dx,$$

то есть

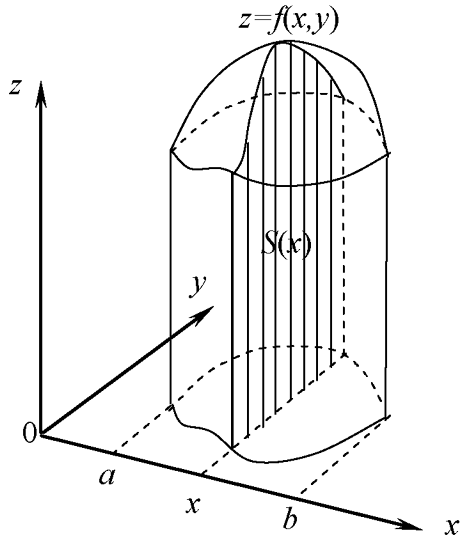


Рис.10.10

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx,$$

что совпадает с формулой (10.7). Аналогичное замечание касается и формулы (10.8).

Примечание 4. В связи с формулами (10.7) и (10.8) интеграл $\iint\limits_D f(x,y)ds$ часто обозначают еще $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Величину $ds = dxdy$ называют при этом элементом площади в декартовых координатах (рис. 10.11).

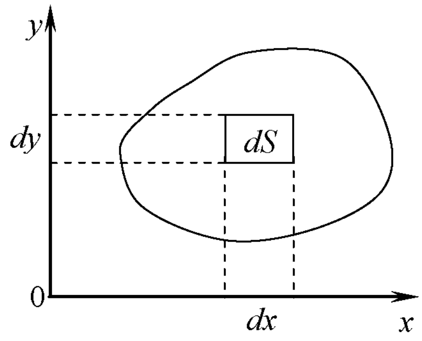


Рис.10.11

7. Вычислеиие илощадииоверхиости ири иомощи двойиого иитеграла

Пусть Σ – часть поверхности $z = f(x,y)$, проектирующаяся в область $\overline{D}$ плоскости xOy. Разобьем $\overline{D}$ на n частей $\Delta D_1, \Delta D_2, .., \Delta D_n$ и пусть ΔS_k – площадь области ΔD_k. В каждой из областей ΔD_k возьмем произвольную точку $M_k(x_k, y_k)$ (рис. 10.12), а на поверхности Σ – отвечающую ей точку $P_k(x_k, y_k, z_k)$. Проведем в точке P_k касательную плоскость к поверхности Σ. Пусть $\Delta\Sigma_k$ – та часть этой плоскости, которая проектируется в область ΔD_k, а $\Delta\sigma_k$ – площадь этой площадки. Составим сумму

$$\widetilde{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} \Delta\sigma_k .$$

Обозначим через λ наибольший из диаметров областей ΔD_k и предположим, что $\lambda \to 0$. Если существует предел

$$\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta\sigma_k ,$$

не зависящий от способа дробления области $\overline{D}$, то он называется площадью поверхности Σ, а сама поверхность в этом случае называется квадрируемой.

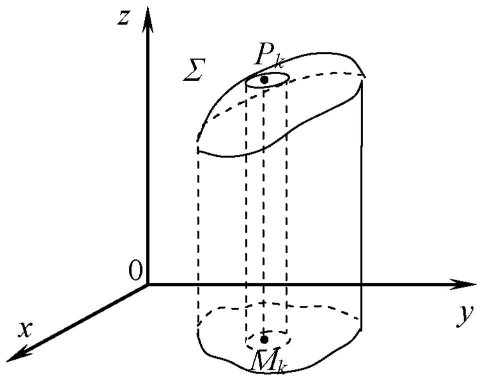


Рис.10.12

Предположим, что функция $f(x, y)$ имеет в области $\overline{D}$ непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Докажем, что тогда поверхность Σ квадрируема и получим формулу для ее площади.

Уравнение касательной плоскости к поверхности Σ в точке P_k имеет (смотри главу 1X) вид

$$z - z_k = \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x}(x - x_k) + \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y}(y - y_k),$$

или

$$-\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x}(x - x_k) - \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y}(y - y_k) + (z - z_k) = 0.$$

Следовательно, нормальный вектор этой плоскости равен

$$\vec{n}_k = -\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}. \qquad (10.9)$$

Далее

$$\Delta S_k = \Delta\sigma_k \cdot \cos\gamma_k ,$$

а так в силу (10.9),

$$\cos\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y}\right]^2 + 1}},$$

то

$$\Delta\sigma_k = \Delta S_k \cdot \sqrt{\left[\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y}\right]^2 + 1}.$$

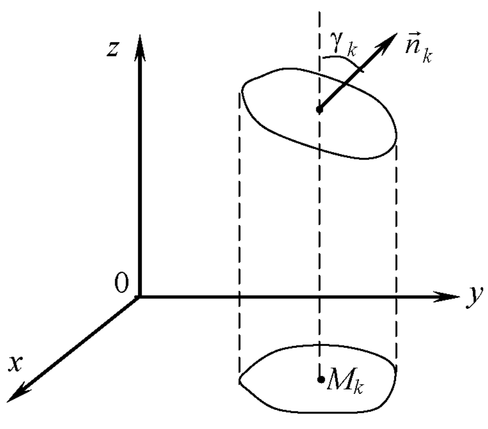


Рис. 10.13

Поэтому

$$\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left[\frac{\partial f(x_k,y_k)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial f(x_k,y_k)}{\partial y}\right]^2+1}\cdot \Delta S_k .$$

Сумма под знаком предела является интегральной суммой для функции $\phi(x,y)=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ в области D. На основании сделанных предположений, эта функция непрерывна в области $\overline{D}$, а значит окончательно

$$\sigma = \iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,ds. \qquad (10.10)$$

Эта формула является пространственным аналогом формулы

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx .$$

для длины дуги плоской линии.

Пример 10.3. Найти площадь части поверхности $z=2\sqrt{x}$, вырезан-

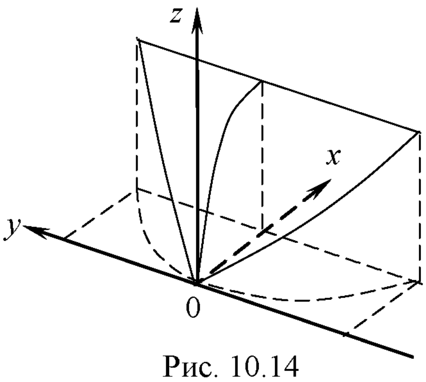


Рис. 10.14

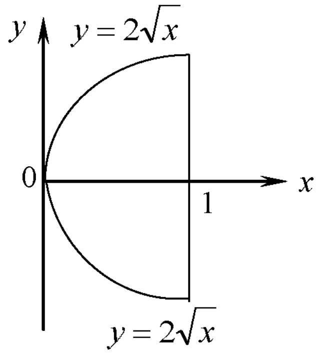


Рис. 10.15

ной поверхностью $y^2=4x$ и плоскостью $x=1$ (рис. 10.14, 10.15). Имеем в данном случае $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$, а значит формула (10.10) дает

$$\sigma=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\frac{1}{x}}ds=\int_0^1\left(\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}dy\right)dx=4\int_0^1\sqrt{x+1}=\frac{8}{3}\sqrt{(x+1)^3}\Big|_0^1=\frac{8}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

8. Физические иприложеиия двойиых иитегралов

1. Вычисление массы однородной пластинки. Мы уже видели, что масса пластинки, занимающей область $\overline{D}$ в плоскости xOy и имеющей плотность $\rho(x,y)$, выражается формулой (10.3).

2. Вычисление моментов инерции пластинки. Рассмотрим ту же пластинку, и пусть ΔD_k – ее элементарная часть, рис. 10.16. Момент инерции области ΔD_k относительно точки O равен приближенно

$$(\Delta I_0)_k = r_k^2 \Delta m_k = \left(x_k^2 + y_k^2\right)\rho(x_k, y_k)\Delta S_k,$$

а значит, момент инерции всей пластинки равен

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\rho(x, y)ds.$$

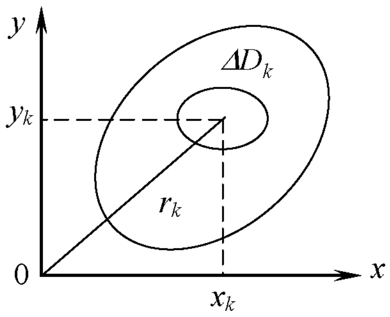


Рис. 10.16

Если пластинка однородная, то есть если $\rho(x, y) \equiv \rho \equiv const,$ то

$$I_0 = \rho\iint_D \left(x^2 + y^2\right)ds.$$

Очевидно, что моменты инерции неоднородной пластины относительно осей Ox и Oy равны соответственно:

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x, y)ds, \qquad I_y = \iint_D x^2\rho(x, y)ds.$$

Откуда, в частности, следует что $I_0 = I_x + I_y$

3. Нахождение центра тяжести пластинки. Разобьем пластинку на части $\Delta D_1, \Delta D_2, \ldots, \Delta D_n$. В каждой из областей ΔD_k возьмем произвольную точку $M_k(x_k, y_k)$. Рассматривая пластинку как дискретную совокупность n материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ с массами $\Delta m_1 = \rho(x_1, y_1)\Delta s_1$, $\Delta m_2 = \rho(x_2, y_2)\Delta s_2, \ldots,$ $\Delta m_n = \rho(x_n, y_n)\Delta s_n$, получим для абсциссы центра тяжести:

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \Delta m_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta m_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \rho(x_k, y_k)\Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k)\Delta s_k},$$

откуда в пределе при $\lambda \to 0$ будем иметь точную формулу

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\rho(x, y)ds}{\iint\limits_D \rho(x, y)ds},$$

и, аналогично,

$$y_c = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)ds}{\iint\limits_D \rho(x,y)ds}.$$

Если пластинка – однородна, то, сокращая обе дроби на число ρ, получим

$$x_c = \frac{\iint\limits_D xds}{S},\ y_c = \frac{\iint\limits_D yds}{S},$$

где S – площадь пластинки.

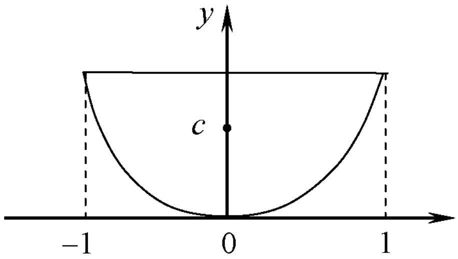


Рис. 10.16

Пример 10.4. Найдем центр тяжести однородной фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 1$ (рис. 10.16).

Очевидно, что $x_c = 0$. Далее

$$\iint\limits_D yds = \int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{x^2}^{1} ydy\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} y^2\Big|_{x^2}^{1} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(1 - x^4\right)dx =$$

$$\int\limits_{0}^{1}\left(1 - x^4\right)dx = \left(x - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5};$$

$$S = \int\limits_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)dx = 2\int\limits_{0}^{1}\left(1 - x^2\right)dx = 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3};$$

а значит,

$$y_c = \frac{4}{5} \div \frac{4}{3} = \frac{3}{5}.$$

9. Тройиой иитеграл, его вычислеиие и иримеиеиие

Изучение тройных интегралов является естественным обобщением на трёхмерный случай теории, относящейся к двойным интегралам.

Пусть функция $f(x,y,z)$ задана в ограниченной замкнутой области D пространства R_3. Разобьем область D некоторыми поверхностями на n частей $\Delta D_1, \Delta D_2, ..., \Delta D_n$ с объемами $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. В каждой из областей ΔD_k возьмем произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и вычислим значение $f(x_k, y_k, z_k)$. Составим сумму

$$\widetilde{S} = \sum f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k .$$

Она называется интегральной суммой функции $f(x, y, z)$ в области D.

Обозначим через λ наибольший из диаметров областей ΔD_1, $\Delta D_2, \ldots$, ΔD_n. Пусть теперь $\lambda \to 0$; это значит, что область D подвергается неограниченному дроблению так, что каждая из областей ΔD_k стягивается в соответствующую точку M_k. Если существует предел $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\widetilde{S}_\lambda\right)$, не зависящий от способа дробления области D, то он называется тройным интегралом функции $f(x, y, z)$ по области D и обозначается

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dv .$$

Итак, по определению,

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dV = \lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k .$$

Именно из этого определения и следует полная аналогия двойных и тройных интегралов, в частности, совпадение их свойств. Например, вместо равенства

$$\iint\limits_D ds = S_D$$

теперь мы имеем

$$\iiint\limits_D dV = V_D ,$$

где V_D – объем области D.

Точно так же, как для определенных и двойных интегралов, можно установить, что если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области D, то интеграл $\iiint\limits_V f(x, y, z)dV$ существует.

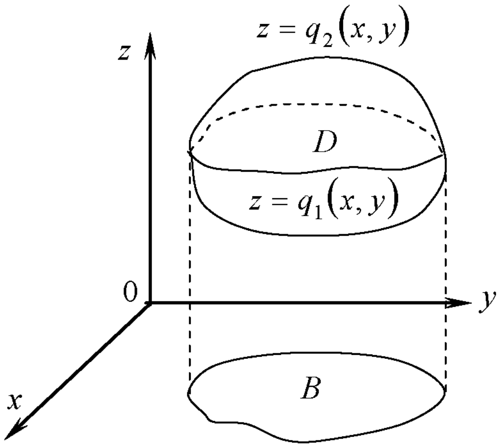


Рис. 10.17

Тройной интеграл не имеет геометрического смысла, но ему можно придать физический смысл. Пусть $f(x, y, z) \ge 0$ для всех $(x, y, z) \in D$. Тогда функцию $f(x, y, z)$ можно рассматривать как плотность вещества в области D. В этом случае величина $f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$ приближённа равна массе вещества в области ΔD_k. Суммируя

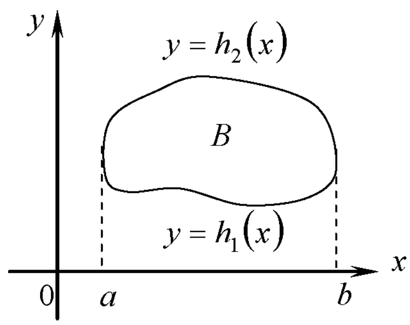


Рис. 10.18

эти массы и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим, что интеграл $\iiint\limits_D f(x,y,z)dv$ есть масса вещества во всей области D.

Вспоминая формулу для вычисления двойного интеграла и способ её получения, нетрудно вывести и формулу для вычисления тройного интеграла. Пусть $z = g_1(x,y)$ и $z = g_2(x,y)$ – уравнения нижней и верхней границ областей D, рис 10.17. Далее, пусть B – двумерная область, полученная в результате проектирования области D на плоскость xOy, рис.10.18, а $y = h_1(x)$ и $y = h_2(x)$*) $(a \le x \le b)$ – уравнения нижней и верхней границ области B. Тогда, рассуждая аналогично случаю двойного интеграла, получим в конечном счете формулу, выражающую тройной интеграл через повторный:

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left[\int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx. \qquad (10.11)$$

При этом порядок интегрирования по каждой из переменных x, y, z может быть и изменен.

Величину $dv = dxdydz$ называют элементом объема в декартовых координатах. Её вид напоминает о том, что в процессе вывода формулы (10.11) область D разбивается на элементарные прямоугольные параллелепипеды со сторонами $\Delta x_i, \Delta y_j$ и Δz_k.

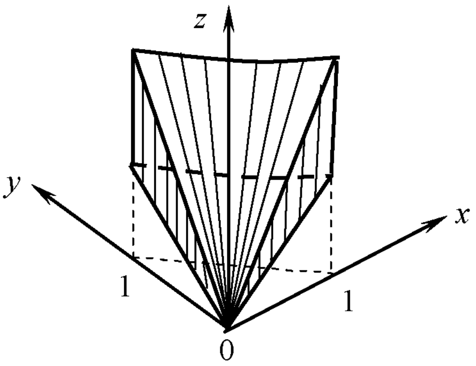


Рис. 10.19

Пример. 10.5. Вычислить массу тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ и конусами $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, если его плотность в каждой точке равна $\rho(x,y,z) = xyz$, рис. 10.19 и рис. 10.20.

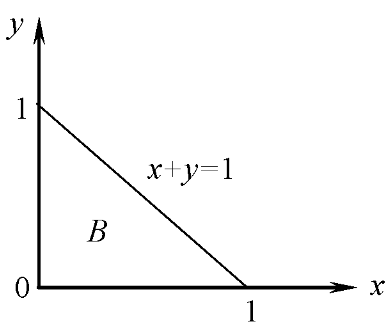


Рис. 10.20

На основании физического смысла тройного интеграла имеем для данного случая

$$m = \iiint\limits_D xyzdv.$$

*) Функции $g_1(x,y)$, $g_2(x,y)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ предполагаются однозначными.

В силу формулы (10.11) получаем отсюда

$$m=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2\sqrt{x^2+y^2}} xyzdz\right)dy\right]dx=\int_0^1\left[x\int_0^{1-x}y\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2\sqrt{x^2+y^2}} zdz\right)dy\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x\int_0^{1-x}yz^2\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2\sqrt{x^2+y^2}}dy\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left[x\int_0^{1-x}y3\left(x^2+y^2\right)dy\right]dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1\left[x\int_0^{1-x}\left(x^2y+y^3\right)dy\right]dx=\frac{3}{2}\int_0^1 x\left(\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=$$

$$=\frac{3}{8}\int_0^1 x\left[2x^2(1-x)^2+(1-x)^4\right]dx=$$

$$=\frac{3}{8}\int_0^1\left(2x^3-4x^4+2x^5+x-4x^2+6x^3-4x^4+x^5\right)dx=$$

$$=\frac{3}{8}\int_0^1\left(8x^3-8x^4+3x^5+x-4x^2\right)dx=$$

$$=\frac{3}{8}\left(2x^4-\frac{8}{5}x^5+\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{8}\left(2-\frac{8}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{40}.$$

Кроме вычисления масс неоднородных тел, тройные интегралы, очевидно, могут быть использованы для вычисления моментов инерции, нахождения центров тяжести тел (как однородных, так и неоднородных) и т. д.

Задачи и уиражиеиия к главе X

1. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $z=2x^2+y^2$ и плоскостями $z=0$, $y=x$, $y=2x$, $x=1$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $z=xy+2$ и плоскостями $z=0$, $y=0$, $x+y=1$, $x+2y=2$.

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $z=x^2+4y^2$ и плоскостями $z=0$, $y=\frac{x}{2}$, $y=x$, $x=1$.

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+2y^2$, $y=x^2$ и плоскостями $z=0$, $y=1$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $z^2 = xy$ и плоскостями $x + y = 1$, $x + y = 2$, $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 2x^2 + y^2$, $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и плоскостями $y = 2$, $z = 0$.

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = xy$, $xy = 1$, $xy = 2$ и плоскостями $z = 0$, $y = 1$, $y = 2$.

8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $y = 2x^2$ и плоскостями $z = 0$, $z = y$, $y = 2$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $2 = (y-1)^2$ и плоскостью $z = 0$.

10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y^2 = 2x$, $z = 2xy$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, $(y \geq 0)$.

11. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $x + y = 4$, $y = x$, $y = \frac{x}{3}$ и поверхностью $z = x^2 + 2y^2$.

12. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $z = x^2 + y^2$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 1$ и поверхностью $y = \ln x$.

13. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x^2 + z^2 = 1$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$.

14. Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ и $y = \ln x$, если ее плотность в каждой точке равна $\rho = x + y$.

15. Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $y = \sqrt{x-1}$ и $x + y = 3$, если ее плотность в каждой точке равна $\rho = xy$.

16. Найти массу пластинки, ограниченной линиями $xy = 1$, $xy = 2$, $y = 1$, $y = 2$, если ее плотность в каждой точке равна $\rho = xy$.

17. Найти центр тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$ и $xy = 2$.

18. Найти центр тяжести однородной пластинки (рис 10.21), ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 + x$ и $y = 2 - x$.

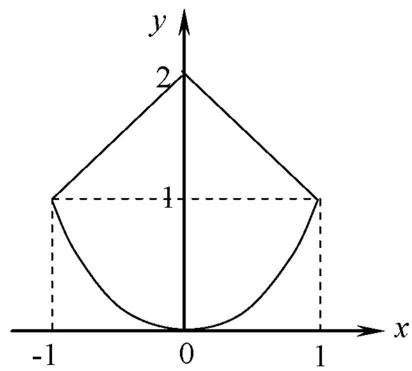


Рис.10.21

19. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $y = x^2$ и плоскостями $y = 1$, $z = \frac{1}{2}$, $z = y$.

20. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $y = x^2$ и плоскостями $z = 0$, $z = y$, $y = 1$.

21. Найти массу тела, ограниченного поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, если его плотность в каждой точке равна z.

22. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ и плоскостями $z = 0$, $x + z = 6$, если его плотность в каждой точке равна x.

23. Найти массу тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $y = 2$, и поверхностями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$, если его плотность в каждой точке равна x^2.

24. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $z = y^2$ и плоскостью $z = y$, если его плотность в каждой точке равна $x^2 yz$.

25. Вычислить массу тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ и поверхностью $z = x^2 + y^2$, если его плотность равна $\rho = x + y + z$.

26. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z = 2x^2 + y^2$, $y = x^2$ и плоскостями $y = 1$, $z = 0$, если его плотность в каждой точке равна $\rho = y^2 + z$.

27. Найти массу тела, ограниченного плоскостями $z = x + y$, $z = 2(x + y)$, $y = x$, $y = 2x$, $y = 2$, если его плотность равна $\rho = x + y + z$.

28. Найти момент инерции относительно оси Ox однородного тела с плотностью ρ, ограниченного поверхностью $z = y^2$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

29. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностью $z = x^2 + y^2$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$.

30. Найти момент инерции тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $x + z = 2$ и $x + 2z = 2$, относительно начала координат.

XI. Кратиые иитегралы в криволииейиых коордииатах

1. Криволииейиые коордииаты иа илоскости

Пусть в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ плоскости xOy заданы непрерывные функции $u = p(x, y)$ и $v = q(x, y)$. Взяв конкретные x и y, получим конкретные u и v. Поэтому можно говорить, что каждой точке $(x, y) \in \overline{D}$ отвечает точка (u, v) некоторой другой плоскости uOv.

Пусть $\overline{G}$ – множество точек (u, v) при условии, что точки (x, y) заполняют всю область $\overline{D}$. Легко видеть, что множество $\overline{G}$ есть замкнутая область.

Будем считать, что если $(u, v) \in \overline{G}$, то система

$$\begin{cases} u = p(x, y), \\ v = q(x, y) \end{cases} \tag{11.1}$$

однозначно разрешима относительно x и y. Тогда между точками областей $\overline{D}$ и $\overline{G}$ имеет место взаимно однозначное соответствие, причем, очевидно, точкам $(x, y) \subset \partial\overline{D}$ отвечают точки $(u, v) \subset \partial\overline{G}$.

Говорят, что формулы (11.1) осуществляют отображение области $\overline{D}$ плоскости xOy в область $\overline{G}$ плоскости uOv. Область $\overline{G}$ при этом называют образом области $\overline{D}$.

Разрешая равенства (11.1) относительно x и y, получим

$$\begin{cases} x = g(u, v), \\ y = h(u, v). \end{cases} \tag{11.2}$$

Взяв произвольные числа u и v, такие, что $(u, v) \in \overline{G}$, однозначно определим по ним некоторую точку (x, y) в области $\overline{D}$. Поэтому величины u и v могут играть роль координат точки (x, y).

Геометрическое место точек $(x, y) \in \overline{D}$, для которых координата u сохраняет постоянное значение u_0, называется координатной линией координаты u. Из уравнения (11.1) следует, что уравнение этой линии $p(x, y) = u_0$.

Придавая величине u_0 всевозможные значения, получим так называемой семейство координатных линий координаты u. Благодаря взаимной однозначности соответствия, через каждую точку $(x, y) \in \overline{D}$ проходит одна и только одна линия семейства.

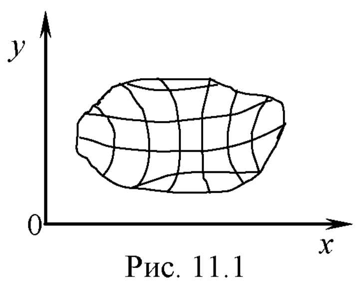


Рис. 11.1

Аналогично определяются координатные линии координаты v, также образующие семейство, рис. 11.1.

Поскольку линии обоих семейств являются, вообще говоря, кривыми, то u и v называют криволинейными координатами точки (x, y).

Примером криволинейных координат могут служить полярные координаты. Формулы (11.2) в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{11.3}$$

Если область D не содержит начала координат, а $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, то формулы (11.3) допускают следующее однозначное разрешение относительно ρ и φ:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Итак, при указанных условиях между парами чисел (x, y) и (ρ, φ) имеется взаимное однозначное соответствие. Координатными линиями координат ρ и φ являются окружности $x^2 + y^2 = const$ и лучи, выходящие из начала координат, рис. 11.2.

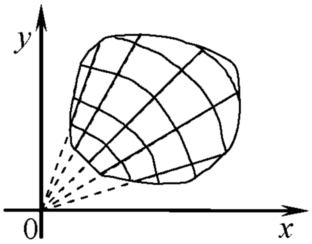


Рис. 11.2

2. Элемеит илощади в криволииейиых коордииатах

Возьмем в плоскости uOv элементарный прямоугольник с вершинами $Q_1(u, v)$, $Q_2(u + \Delta u, v)$, $Q_3(u + \Delta u, v + \Delta v)$ и $Q_4(u, v + \Delta v)$, рис. 11.3. Его прообразом в плоскости xOy является некоторый криволинейный четырехугольник, образованный двумя парами координатных линий, рис. 11.4.

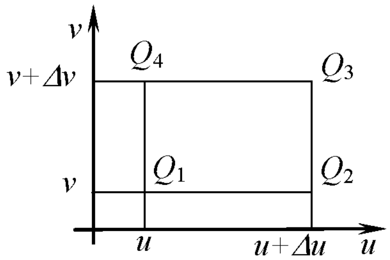


Рис. 11.3

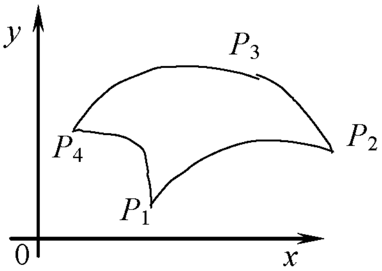


Рис. 11.4

Его вершины находятся в точках

$$P_1(g(u, v), h(u, v)), P_2(g(u + \Delta u, v), h(u + \Delta u, v)),$$
$$P_3(g(u + \Delta u, v + \Delta v), h(u + \Delta u, v + \Delta v)) \text{ и } P_4(g(u, v + \Delta v), h(u, v + \Delta v)).$$

Положим для краткости $\delta=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}$. Тогда считая, что функции $g(u,v)$ и $h(x,y)$ имеют в области $\overline{G}$ непрерывные частные производные $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$, $\frac{\partial h}{\partial u}$ и $\frac{\partial h}{\partial v}$, получим, что с точностью до величины $o(\delta)$, точки P_1, P_2, P_3 и P_4 можно заменить точками

$$P_1'\left(g(u,v), h(u,v)\right)$$

$$P_2'\left(g(u,v)+\frac{\partial g}{\partial u}\Delta u, h(u,v)+\frac{\partial h}{\partial u}\Delta u\right),$$

$$P_3'\left(g(u,v)+\frac{\partial g}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial g}{\partial v}\Delta v, h(u,v)+\frac{\partial h}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial h}{\partial v}\Delta v\right) \text{ и}$$

$$P_4'\left(g(u,v)+\frac{\partial g}{\partial v}\Delta v, h(u,v)+\frac{\partial h}{\partial v}\Delta v\right)^{*)}.$$

Поскольку $\overrightarrow{P_1'P_2'}=\left\{\frac{\partial g}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial h}{\partial u}\Delta u\right\}$ и $\overrightarrow{P_4'P_3'}=\left\{\frac{\partial g}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial h}{\partial u}\Delta u\right\}$, то $\overrightarrow{P_4'P_3'}=\overrightarrow{P_1'P_2'}$, а значит, фигура $P_1'P_2'P_3'P_4'$ есть параллелограмм. Его площадь, следовательно, равна $\left|\left[\overrightarrow{P_1'P_2'}, \overrightarrow{P_2'P_3'}\right]\right|$. Но $\overrightarrow{P_2'P_3'}=\left\{\frac{\partial g}{\partial v}\Delta v, \frac{\partial h}{\partial v}\Delta v\right\}$, а значит

$$\left|\left[\overrightarrow{P_1'P_2'}, \overrightarrow{P_2'P_3'}\right]\right|=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial g}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial h}{\partial u}\Delta u & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial h}{\partial v}\Delta v & 0 \end{vmatrix}=\vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial h}{\partial u}\Delta u \\ \frac{\partial g}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial h}{\partial v}\Delta v \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}\Delta u\Delta v\vec{k}.$$

Определитель

---

*) Здесь и ниже предполагается, что частные производные $\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}$ и $\frac{\partial h}{\partial v}$ вычислены в точке (u,v).

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}$$

называется определителем Якоби, или якобианом, функций $g(u,v)$ и $h(u,v)$ и обозначаются $\frac{\partial(g,h)}{\partial(u,v)}$.

Итак

$$\left[\overrightarrow{P_1'P_2'}, \overrightarrow{P_2'P_3'}\right]=J(u,v)\Delta u\Delta v\vec{k},$$

а значит

$$S_{P_1'P_2'P_3'P_4'}=\left|J(u,v)\right|\Delta u\Delta v.$$

Отсюда следует, что и площадь четырехугольника $P_1'P_2'P_3'P_4'$ с точностью до величины $o\left(\delta^2\right)$ равна $\left|J(u,v)\right|\Delta u\Delta v$. Поэтому в качестве элемента площади в криволинейных координатах берется величина $\left|J(u,v)\right|dudv$.

В частности, для полярных координат имеем

$$g(\rho,\varphi)=\rho\cos\varphi,\ h(\rho,\varphi)=\rho\sin\varphi,$$

а значит

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial \rho} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial h}{\partial \rho} & \frac{\partial h}{\partial \varphi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}=\rho,$$

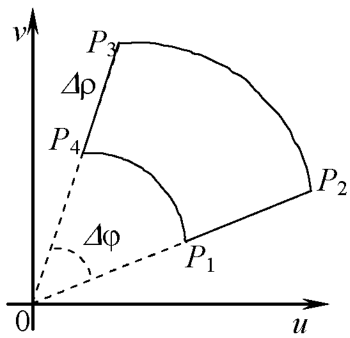


Рис. 11.5

а так как всегда $\rho\geq 0$, то и элемент площади в полярных координатах равен

$$ds=\rho d\rho d\varphi.$$

Следовательно, с точностью до малых высшего порядка фигуру $P_1P_2P_3P_4$ можно считать прямоугольником со сторонами $P_1P_2=\Delta\rho$ и $P_1P_4=\rho\Delta\varphi$, рис. 11.5

3. Вычислеиие илощади в криволииейиых коордииатах

Пусть область $\overline{G}$ в плоскости uOv является образом области $\overline{D}$ в плоскости xOy. Разобьем область $\overline{G}$ на элементарные прямоугольники прямыми $u=const$ и $v=const$. Тогда область $\overline{D}$ разобьется координатными линиями на элементарные четырехугольники. Площадь ik-го четырехугольника равна $\left|J(u_i,v_k)\right|\Delta u_i\Delta v_k+o\left(\delta_{ik}^2\right)$. Суммируя эти четырехугольники, получим, что площадь области $\overline{D}$ приближенно равна величине

$$\overline{S}=\sum_{i,k}\left|J\left(u_i,v_k\right)\right|\Delta u_i\Delta v_k.$$

Пусть теперь каждый из прямоугольников в плоскости uOv стягивается в точку. Тогда – благодаря непрерывности функций $g(u,v)$ и $h(u,v)$ – элементарные четырехугольники в плоскости xOy также будут стягиваться в точки. Учитывая также непрерывность якобиана в области G, получим в пределе для области S_D точную формулу

$$S_D=\iint_G\left|J\left(u,v\right)\right|dudv. \qquad (11.4)$$

Эта формула позволяет, в частности, выяснить геометрический смысл якобиана. Для этого применим к формуле (11.4) теорему о среднем. Получим:

$$S_D=\left|J\left(\xi,\eta\right)\right|S_G, \qquad (11.5)$$

т. е.

$$\frac{S_D}{S_G}=\left|J\left(\xi,\eta\right)\right|. \qquad (11.6)$$

Здесь (ξ,η) – некоторая точка внутри области G.

Предположим теперь, что область G мала, а (u,v) – произвольная ее точка. Тогда, в силу (11.6),

$$\frac{S_D}{S_G}\approx\left|J\left(u,v\right)\right|,$$

а значит,

$$S_D\approx\left|J\left(u,v\right)\right|S_G.$$

Отсюда вытекает следующий вывод: при отображении плоскости uOv на плоскость xOy величина $\left|J\left(u,v\right)\right|$ является коэффициентом растяжения плоскости uOv в данной точке (u,v).

4. Замеиа иеремеииых в двойиом иитеграле

Пусть имеется интеграл $\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy=I$ и пусть область D отображается при помощи формул (11.1) в область G плоскости uOv, причем это отображение взаимно однозначно. Разобьем область G произвольным образом на области $\Delta G_1,\Delta G_2,..,\Delta G_n$ с площадями $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,..,\Delta\sigma_n$. Тогда и область D разбивается соответствующими линиями на области $\Delta D_1,\Delta D_2,..,\Delta D_n$ с площадями $\Delta s_1,\Delta s_2,..,\Delta s_n$. В каждой из областей ΔD_k возьмем произвольную точку и составим сумму

$$\tilde{S} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta s_k .$$

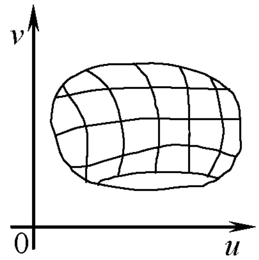


Рис. 11.6

На основании формулы (11.5),

$$\Delta s_k = |I(\xi_k, \eta_k)| \Delta\sigma_k ,$$

где (ξ_k, η_k) – некоторая точка области ΔG_k. Возьмем в качестве точки (x_k, y_k) ту точку области ΔD_k, которая отображается именно в точку (ξ_k, η_k) (поскольку интеграл I существует, то точка (x_k, y_k) в интегральной сумме может быть взята произвольно). Иными словами, мы положим

$$x_k = g(\xi_k, \eta_k), \quad y_k = h(\xi_k, \eta_k).$$

Тогда интегральная сумма примет вид:

$$\tilde{S} = \sum_{k=1}^{n} f\left(g(\xi_k, \eta_k), h(\xi_k, \eta_k)\right) |J(\xi_k, \eta_k)| \Delta\sigma_k .$$

Считая функцию $f(x, y)$, непрерывной в области D, получим в пределе

$$I = \iint_D f\left(g(u,v), h(u,v)\right) |J(u,v)| d\sigma ,$$

т. е.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G f\left(g(u,v), h(u,v)\right) |J(u,v)| dudv . \qquad (11.7)$$

Это и есть формула замены переменных в двойном интеграле. Очевидно, формула (11.4) является частным случаем формулы (11.7) при $f(x,y) = 1$.

В частности, для полярных координат формула (11.7) запишется так:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi . \qquad (11.8)$$

Примечание. Предположим, что в некоторых точках или даже вдоль некоторых линий нарушается какое-нибудь из условий, при которых была выведена формула (11.7), т. е. либо взаимная однозначность отображения области D в область G, либо непрерывность функций $g(u,v)$ и $h(u,v)$ или их частных производных $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$, $\frac{\partial h}{\partial u}$ и $\frac{\partial h}{\partial v}$. Заключим эти точки и линии в плоскости xOy в некоторую малую область D_ε, и пусть G_ε – образ области D_ε в плоскости uOv. Обозначим S_ε и σ_ε площади областей D_ε и G_ε. На основании (11.7), имеем

$$\iint_{D \setminus D_\varepsilon} f(x,y)dxdy = \iint_{G \setminus G_\varepsilon} f\left(g(u,v), h(u,v)\right) |J(u,v)| dudv \qquad (11.9)$$

Интеграл справа, вообще говоря, отличается от интеграла

$$\iint_G f\left(g(u,v),h(u,v)\right)\left|J(u,v)\right|dudv$$

на величину $$\iint_{G_\varepsilon} f\left(g(u,v),h(u,v)\right)\left|J(u,v)\right|dudv.$$

Если координатная функция ограничена в области G, то последний интеграл мал при малом σ_ε и в пределе при $s_\varepsilon \to 0$ и $\sigma_\varepsilon \to 0$ получим из (11.9) формулу (11.7), т. е. формула (11.7) оказывается верной и в этом случае.

В частности, в случае полярных координат точке $(0,0)$ плоскости xOy отвечает бесчисленное множество точек (ρ,φ), заполняющих весь от-

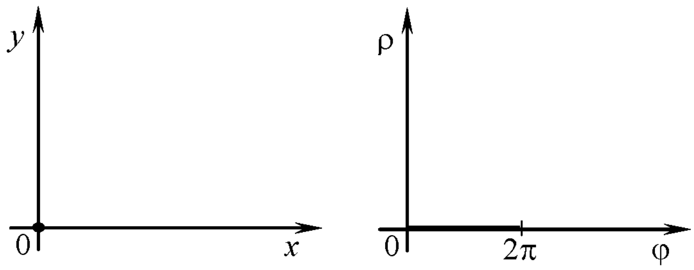


Рис. 11.7

резок $[0,2\pi]$, рис. 11.7 т. е. в точке $(0,0)$ плоскости xOy нарушается взаим-

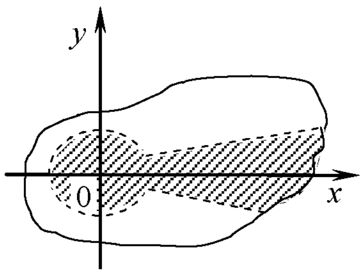


Рис. 11.8

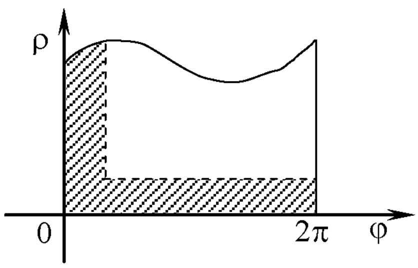


Рис. 11.9

ная однозначность отображения. Поэтому если область D содержит начало координат, то формула (11.8) может оказаться неверной. Однако, она верна для не заштрихованных областей $D \setminus D_\varepsilon$ и $G \setminus G_\varepsilon$ (рис. 11.8 и рис. 11.9).

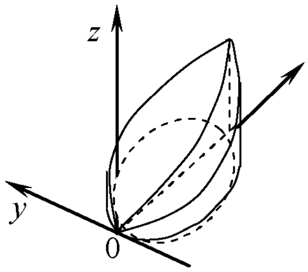


Рис. 11.10

Если величина $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho$ ограничена в области G, то устремляя к нулю площади областей D_ε и G_ε (т. е. их меры), получим в пределе формулу (11.8) и для этого случая.

Пример 11.1. Вычислим объем тела, ограниченного плоскостью $z=0$ и поверхностями $(x-1)^2+y^2=1$ и $z=x^2+y^2$ (рис. 11.10). Имеем

$$V=\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy.$$

Перейдем здесь к полярным координатам. В данном случае

$$f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho = \left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right)\rho = \rho^3,$$

а поэтому формула (11.8) дает

$$V = \iint\limits_G \rho^3 d\rho d\varphi.$$

Перепишем уравнение границы области D (рис. 11.11) в виде

$$x^2 + y^2 = 2x.$$

В полярных координатах это уравнение выглядит так:

$$\rho^2 = 2\rho\cos\varphi,$$

т. е. $\rho = 2\cos\varphi$ (рис. 11.12).

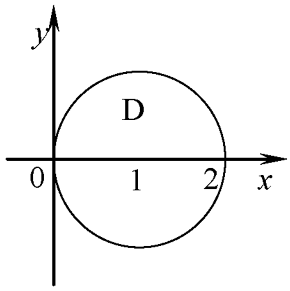


Рис. 11.11

Следовательно, на основании (11.8),

$$V = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho \right) d\varphi = \frac{1}{4} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^4 \Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\varphi \right) d\varphi = \frac{3}{2}\pi.$$

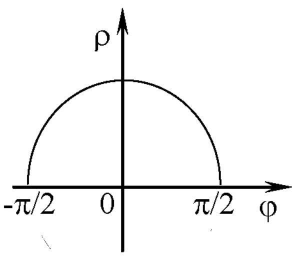


Рис. 11.12

Примечание. При решении конкретных задач область G можно и не изображать на чертеже, а пределы интегрирования по каждой из переменных ρ и φ определять, исходя сразу из вида области D.

5. Питеграл Пуассоиа и его вычислеиие

Будем рассматривать несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Его называют интегралом Пуассона; он является одним из наиболее часто встречающихся несобственных интегралов в математике и ее приложениях, в первую очередь – в теории вероятностей. Геометрически он представляет собой площадь бесконечной $(-\infty < x < +\infty)$ фигуры, расположенной между осью Ox и кривой $y = e^{-x^2}$, рис. 11.13.

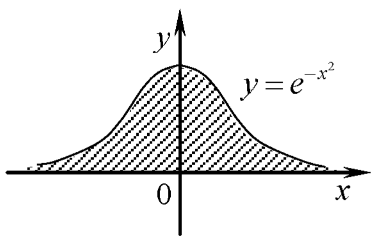


Рис. 11.13

Поскольку неопределенный интеграл $\int e^{-x^2}dx$ не выражается в конечном виде через элементарные функции (т. е. является «не берущимся»), то для вычисления интеграла Пуассона нельзя воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница, а значит следует воспользоваться другим, специальным приемом.

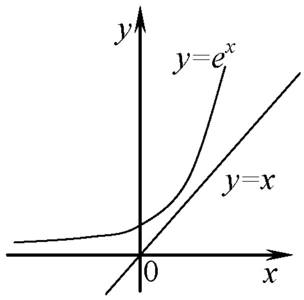


Рис. 11.14

Прежде всего, отметим, что интеграл Пуассона является сходящимся несобственным интегралом первого рода. Действительно, при всех $x > 0$ будет $e^x > x$, (рис. 11.14), а значит, при всех x будет $e^{x^2} > x^2$, т. е. $e^{-x^2} < \frac{1}{x^2}$. Поскольку показатель знаменателя $2 > 1$, то несобственные интегралы $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx$ сходятся, а значит сходится и равный их сумме несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$. При этом из четности функции e^{-x^2} следует, что

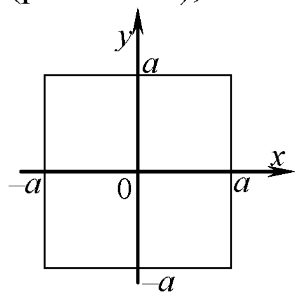


Рис. 11.15

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Для вычисления интеграла Пуассона рассмотрим квадрат
$$D_a = \{(x, y) \mid -a \le x \le a, -a \le y \le a\},$$ рис. 11.15.

Имеем

$$\iint\limits_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}ds = \int\limits_{-a}^{a}\left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a}\left(e^{-x^2}\int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}dy\right)dx = \int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}dy \cdot \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx,$$

т. е.
$$\iint\limits_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}ds = \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2. \qquad (11.10)$$

Пусть теперь $a \to \infty$. Тогда область D_a в пределе превращается во всю плоскость xOy, которую мы обозначим D_∞. Поэтому

$$\iint\limits_{D_\infty} e^{-(x^2+y^2)}ds = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2, \qquad (11.11)$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\iint_{D_\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds}\,. \qquad (11.12)$$

Заметим, что поскольку равенство (11.11) получено из (11.10) предельным переходом при $a \to \infty$, то под величиной $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ в формуле (11.12) фактически подразумевается предел $\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx$, а это есть v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$, т. е. главное значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Но, как мы выделили, интеграл Пуассона сходится, а значит, его главное значение совпадает с самим интегралом.

Итак, для вычисления интеграла Пуассона теперь достаточно вычислить «несобственный» двойной интеграл, стоящий справа в равенстве (11.12). Поскольку подынтегральная функция в нем фактически есть функция одного аргумента: $x^2 + y^2$, то целесообразно совершить переход к полярным координатам. Для этого введем сначала круг $B_a = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\right\}$, рис. 11.16.

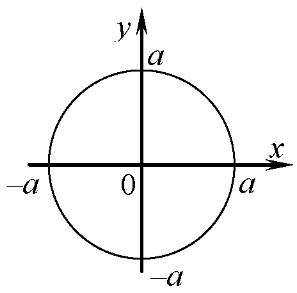


Рис. 11.16

Тогда

$$\iint_{B_a} e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\varphi = 2\pi \int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho =$$

$$= \pi \int_0^a e^{-\rho^2} d\left(\rho^2\right) = \pi e^{-\rho^2} \Big|_a^0 ,$$

т. е.

$$\iint_{B_a} e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds = \pi\left(1 - e^{-a^2}\right). \qquad (11.13)$$

Отсюда в пределе при $a \to \infty$ получим

$$\iint_{B_\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds = \pi\,. \qquad (11.14)$$

Но, на основании перехода от (11.13) к (11.14), область B_∞ есть круг бесконечно большого радиуса, т. е. вся плоскость xOy. Поэтому, заменяя

B_∞ на D_∞, перепишем равенство (11.14) так

$$\iint\limits_{D_\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds = \pi . \qquad (11.15)$$

Но тогда из формулы (11.12) находим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .$$

Это и есть формула для вычисления интеграла Пуассона.

Примечание. Заменяя равенство (11.14) равенством (11.15), мы считаем, что

$$\iint\limits_{B_\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds = \iint\limits_{D_\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds . \qquad (11.16)$$

Оба интеграла являются интегралами по всей плоскости xOy, однако в первом интеграле эта плоскость получена как квадрат с бесконечно большой стороной, а во втором – как круг бесконечно большого радиуса. Поэтому для доказательства истинности равенства (11.16) покажем, что предел

$$\lim_{B \to D_\infty} \iint\limits_{B} e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds$$

не зависит от того, каким способом область B расширяется на всю плоскость xOy.

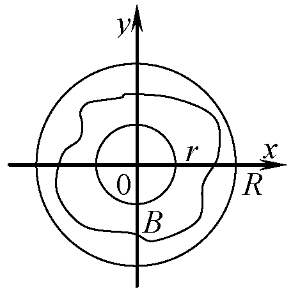


Рис. 11.17

Пусть $r < R$. Рассмотрим круги B_r и B_R, и пусть B – область произвольной формы, такая, что $B_r \subset B \subset B_R$, рис. 11.17. Тогда, поскольку $e^{-\left(x^2+y^2\right)} > 0$ при всех (x, y), то

$$\iint\limits_{B_r} e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds < \iint\limits_{B} e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds < \iint\limits_{B_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds . \qquad (11.17)$$

Но, на основании формулы (11.14)

$$\lim_{r \to \infty} \iint\limits_{B_r} e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds = \pi , \quad \lim_{R \to \infty} \iint\limits_{B_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds = \pi .$$

Поэтому из (11.17), в силу известного свойства пределов, следует, что и $\lim\limits_{B \to D_\infty} \iint\limits_{B} e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds = \pi$, какую бы форму не имела область B.

6. Криволииейиые коордииаты в иространстве

Пусть ограниченная замкнутая область D пространства $Oxyz$ взаимно однозначно отображается в область G пространства $Ouvw$ при помощи формул

$$\begin{cases} u = p(x, y, z), \\ v = q(x, y, z), \\ w = r(x, y, z), \end{cases} \tag{11.18}$$

где правые части есть непрерывные в области D функции. При этом поверхность ∂D отображается в поверхность ∂G.

Из равенства (11.18) для любой точки $(u, v, w) \in G$ имеем

$$\begin{cases} x = g(u, v, w), \\ y = h(u, v, w), \\ z = l(u, v, w). \end{cases} \tag{11.19}$$

Следовательно, задание тройки чисел (u, v, w) равносильно заданию тройки чисел (x, y, z), в связи с чем величины u, v и w называют криволинейными координатами точки (x, y, z) в пространстве.

Геометрическое место точек, для которых одна из криволинейных координат сохраняет постоянное значение, называется координатной поверхностью этой координаты. Очевидно, для каждой из координат u, v и w существует целое семейство координатных поверхностей. При этом через каждую точку области D проходит по одной поверхности каждого семейства.

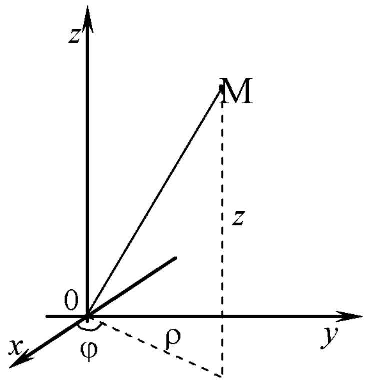


Рис. 11.18

Примером криволинейных координат в пространстве являются так называемые цилиндрические координаты. Ими являются величины ρ, φ и z, задание которых, очевидно, полностью характеризуют положение точки M в пространстве (рис. 11.18). Формулы (11.19) в данном случае имеют вид

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

причем здесь $\rho \geq 0$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Координатными поверхностями являются:

а) для координаты ρ – круговые цилиндры, осью которых является ось Oz (откуда и происходит название этой системы координат);

б) для координаты φ – полуплоскости, «выходящие» из оси Oz;

в) для координаты z – плоскости параллельные плоскости xOy.

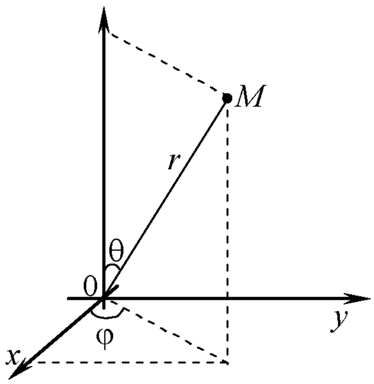


Рис. 11.19

Вторым примером криволинейных координат в пространстве являются величины r, φ и θ, называемые сферическими координатами точки M (рис. 11.19). Очевидно,

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

причем $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Координатными поверхностями являются:

а) для координаты r – сферы с центром в точке O (откуда и название этих координат);

б) для координаты φ – круговые «полуконусы», осью которых служит ось Oz;

в) для координаты θ – полуплоскости, выходящие из оси Oz.

В случае цилиндрических и сферических координат взаимно однозначное соответствие отображения нарушается вдоль оси Oz.

7. Элемеит объема в криволииейиых коордииатах

Возьмем в области G элементарный прямоугольный параллелепипед, образованный тремя парами плоскостей, параллельных плоскостям uOv, uOw, vOw. Ему отвечает в области D элементарное тело, образованное пересечением трех пар координатных поверхностей. Предполагая, что функции $g(u,v,w)$, $h(u,v,w)$ и $l(u,v,w)$ имеют в области G непрерывные частные производные по каждому из аргументов, заключаем (ср. с §2), что объем упомянутого элементарного тела с точностью до малых высшего порядка равен объему прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $\left\{\frac{\partial g}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial h}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial l}{\partial u}\Delta u\right\}$, $\left\{\frac{\partial g}{\partial v}\Delta v, \frac{\partial h}{\partial v}\Delta v, \frac{\partial l}{\partial v}\Delta v\right\}$ и $\left\{\frac{\partial g}{\partial w}\Delta w, \frac{\partial h}{\partial w}\Delta w, \frac{\partial l}{\partial w}\Delta w\right\}$. Смешанное произведение этих векторов равно

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial h}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial l}{\partial u}\Delta u \\ \frac{\partial g}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial h}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial l}{\partial v}\Delta v \\ \frac{\partial g}{\partial w}\Delta w & \frac{\partial h}{\partial w}\Delta w & \frac{\partial l}{\partial w}\Delta w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w} \\ \frac{\partial l}{\partial u} & \frac{\partial l}{\partial v} & \frac{\partial l}{\partial w} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \Delta w .$$

Определитель:

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w}\\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w}\\ \frac{\partial l}{\partial u} & \frac{\partial l}{\partial v} & \frac{\partial l}{\partial w}\end{vmatrix}$$

называется якобианом функций $g(u,v,w)$, $h(u,v,w)$ и $l(u,v,w)$ (его обозначают еще $\frac{\partial(g,h,l)}{\partial(u,v,w)}$). Итак, объем упомянутого косоугольного параллелепипеда равен

$$\Delta V=|J(u,v,w)|\Delta u\Delta v\Delta w. \tag{11.20}$$

Поэтому элементом объема в криволинейных координатах называют величину

$$dV=|J(u,v,w)|dudvdw.$$

Применим этот результат к цилиндрическим и сферическим координатам.

Для цилиндрических координат имеем

$$J(\rho,\varphi,z)=\begin{vmatrix}\frac{\partial g}{\partial \rho} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} & \frac{\partial g}{\partial z}\\ \frac{\partial h}{\partial \rho} & \frac{\partial h}{\partial \varphi} & \frac{\partial h}{\partial z}\\ \frac{\partial l}{\partial \rho} & \frac{\partial l}{\partial \varphi} & \frac{\partial l}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho,$$

а так как всегда $\rho\ge 0$, то элемент объема в цилиндрических координатах равен

$$dV=\rho d\rho d\varphi dz.$$

Аналогично в сферических координатах

$$J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\left(r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi+r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\right)\cos\theta+$$

$$+\left(r\sin^2\theta\cos^2\varphi+r\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)r\sin\theta=r^2\left(\cos^2\theta\sin\theta+\sin^3\theta\right)=r^2\sin\theta.$$

Поскольку эта величина всегда положительна, то элемент объема в сферических координатах равен

$$dV=r^2\sin\theta\, d\theta d\varphi dr.$$

Геометрический смысл обоих полученных результатов легко усматривается из чертежей (рис. 11.20 и рис. 11.21).

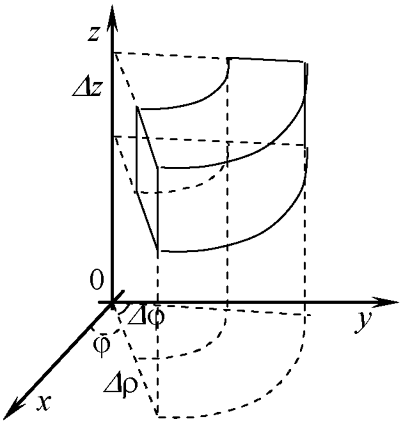


Рис. 11.20

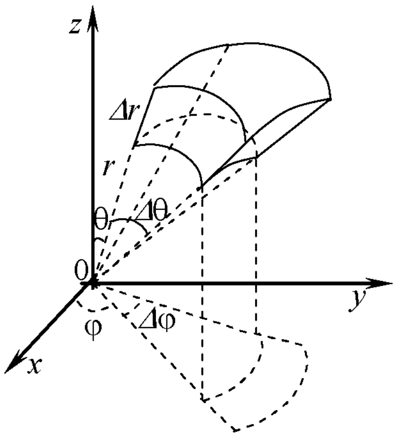


Рис. 11.21

8. Замеиа иеремеииых в тройиом иитеграле

Формула (11.20) позволяет для объема области D получить следующую формулу

$$V_D = \iiint\limits_G \left|J(u,v,w)\right| dudvdw. \qquad (11.21)$$

Теперь, рассуждая так же, как и в двумерном случае, легко получить общую формулу замены переменных в тройном интеграле:

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_G f\big(g(u,v,w),h(u,v,w),l(u,v,w)\big)\left|J(u,v,w)\right| dudvdw, \qquad (11.22)$$

содержащую в себе как частный случай и формулу (11.21).

Для цилиндрических и сферических координат формула (11.22) имеет соответственно вид

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz,$$

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_G f(r\sin 0\cos\varphi, r\sin 0\sin\varphi, r\cos\varphi)r^2\sin 0 drd\varphi d0.$$

Пример 11.2. Найдем массу тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ $(z \geq 0)$ (рис. 11.22), если его плотность в каждой точке численно равна z.

Уравнение данных поверхностей в цилиндрических координатах имеют вид

$$z = \rho^2, \ \rho^2 + z^2 = 2,$$

т. е.

$$z=\rho^2,\ z=\sqrt{2-\rho^2}\ .$$

Решая их совместно, найдем, что эти поверхности пересекаются по окружности

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=1. \end{cases}$$

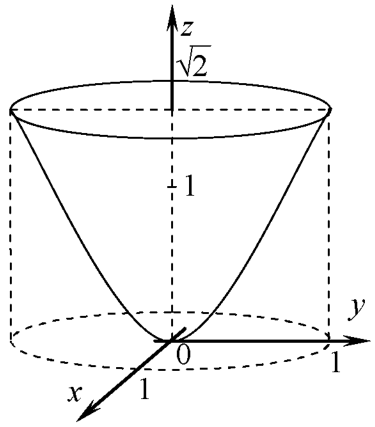


Рис. 11.22

Поэтому: $\qquad m=\iiint\limits_D zdxdydz=$

$$=\iiint\limits_G z\rho d\rho d\varphi dz=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\int\limits_0^1\left(\int\limits_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}\rho zdz\right)d\rho\right]d\varphi=$$

$$=2\pi\int\limits_0^1\left(\rho\int\limits_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}zdz\right)d\rho=\pi\int\limits_0^1\rho z^2\Big|_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}d\rho=$$

$$=\pi\int\limits_0^1\rho\left(2-\rho^2-\rho^4\right)d\rho=\pi\int\limits_0^1\left(2\rho-\rho^3-\rho^5\right)d\rho=\pi\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\pi\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{12}\pi.$$

Пример 11.3. Вычислим момент инерции относительно точки O однородного шара, ограниченного сферой $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ (рис. 11.23), если его плотность численно равна 1.

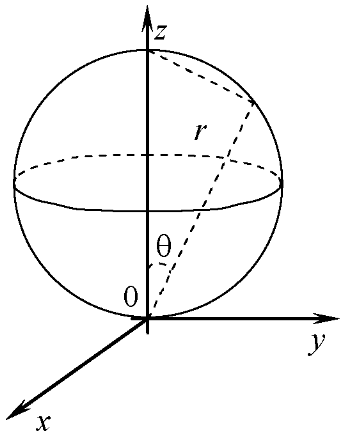


Рис.11.23

Данная сфера имеет в сферических координатах уравнение

$$r=2\cos\theta$$

(это следует из декартова уравнения сферы, если в него вместо x, y и z подставить их выражения через r, θ и φ). Поэтому:

$$I_0=\iiint\limits_D\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\iiint\limits_G r^2r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{2\cdot\cos\theta}r^4\sin\theta\, dr\right)d\theta\right]d\varphi=2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\theta\int\limits_0^{2\cos\theta}r^4dr\right)d\theta=2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\frac{r^5}{5}\Bigg|_0^{2\cos\theta}d\theta=$$

$$=\frac{64\pi}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\sin\theta\, d\theta=\frac{64\pi}{5}\cdot\frac{\cos^6\theta}{6}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^0=\frac{64\pi}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{32\pi}{15}.$$

Задачи и уиражиеиия к главе XI

1. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$, $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4\left(x^2 - y^2\right)$ и плоскостью $z = 0$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 = 2y$ и плоскостями $z = 0$, $y = x$, $z = x + y$.

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $\left(x^2 + y^2\right)^2 = R^2\left(x^2 - y^2\right)$ и плоскостью $z = 0$.

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4x$, $z = \sqrt{x}$ и плоскостью $z = 0$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2y$, $z = x^2 + y^2$ и плоскостями $z = 0$, $y = \sqrt{3}x$ $(x \geq 0)$.

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = xy$, $x^2 + y^2 = 4$.

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$, $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 0$.

8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2 - 4y^2$, $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $z = 0$, $y = 0$, $y = x$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 = x + y$ и плоскостями $z = 0$, $z = x + y$.

10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $z = (y + 2)^2$ и плоскостью $z = 0$.

11. Найти площадь поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, находящейся внутри поверхности $x^2 + y^2 = 2x$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = x$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.

13. Найти площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = x$ от окружности $x^2 + y^2 = 2x$.

14. Найти площадь части поверхности $z=\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)$, вырезанной плоскостью $z=0$ и поверхностью $x^2+y^2=1$ $(z>0)$.

15. Найти массу пластинки, ограниченной линией $x^2+y^2=8xy$, если плотность в каждой её точке равна $\gamma=x^2+y^2$.

16. Найти момент инерции однородного сегмента, отсекаемого прямой $y=x$ от окружности $x^2+y^2=2x$, относительно оси Ox.

17. Найти момент инерции относительно начала координат однородной пластинки, ограниченной линией $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$.

18. Найти центр тяжести полукруга радиуса R, если его плотность численно равна расстоянию от диаметра.

19. Найти центр тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями $x^2+y^2=2y$, $y=x$, $y=-x$ $(y\geq|x|)$.

20. Найти центр тяжести однородного полукруга радиуса R.

21. Найти момент инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $x^2+(y-1)^2=1$ и $y=\sqrt{3}x$, относительно начала координат.

22. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $z^2=x^2+y^2$.

23. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2+x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$ и $z^2=x^2+y^2$.

24. Найти массу тела, ограниченного плоскостями $x=0$, $z=0$, $y=0$, $y+x+z=2$ и поверхностью $x^2+y^2=1$, если его плотность в каждой точке равна $\gamma=x+y$.

25. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$, если его плотность в каждой точке равна $\gamma=z$.

26. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностью $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=4$, относительно начала координат.

27. Найти момент инерции однородного цилиндра радиуса R, высоты H и плотности γ относительно образующей.

28. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

29. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверх-

ностью $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=4$.

30. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностью $2z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=x+y$.

31. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$ и $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

32. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

33. Найти центр тяжести той части однородного шара $x^2+y^2+z^2\le R^2$, которая лежит в первом октанте.

34. Найти центр тяжести той части однородного шара, $x^2+y^2+z^2\le R^2$, которая лежит в первом и втором октантах.

35. Найти объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=z\left(x^2+y^2\right)$.

36. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностью $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=z^4$ относительно начала координат.

37. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$ и $z=\sqrt{x^2+y^2}$, относительно начала координат.

38. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z^2+x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$, $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$.

39. Найти массу шара $x^2+y^2+z^2\le 4z$, если его плотность численно равна расстоянию от начала координат.

40. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z=2x^2+2y^2$, $z=3-x^2-y^2$.

41. Найти момент инерции однородного шара $x^2+y^2+z^2\le 4z$ относительно начала координат.

42. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностью $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=z$, относительно начала координат.

43. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностью $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=z^2$, относительно начала координат.

44. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x^2+y^2=2x$ и плоскостями $z=x, z=2x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматгиз, 1959. – Т.1,2,3.
2. Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1964.
3. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1965.
4. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. Вып. 1. – М.: Наука, 1967.
5. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 2. – М.: Наука, 1973.
6. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988.
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
9. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). Учебное пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1983.

ОГЛАВЛЕИИЕ
Часть 1

Навчальний посібник

СЕИЧУК Юрій Федоровнч

МАТЕМАТИЧИИЙ АИАЛІЗ ДЛЯ ИИЖЕИЕРІВ

Частнна І

Відповідальний за випуск Курпа Л.В.

В авторській редакції

Комп'ютерний набір орігінал-макета

План 2003 р.

Підписано до друку Формат . Папір друк. Друк – різографія.
Умов. друк. арк. . Облік. вид. арк. . Тираж 500 прим. Зам. №
Ціна договірна.

Підрозділ оперативного друку НТУ“ХП1”. Різограф
НТУ“ХП1”, 61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21