Министерство образования Российской Федерации

Челябинский государственный университет

В.И.УХОБОТОВ

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие

Рекомендовано Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения классических университетов в качестве учебного пособия

Челябинск

2002

ББК В1я7
У895

Ухоботов В.И.

У895 Математика для экономистов: Учеб. пособие / Челяб. гос. ун-т. Челябинск, 2002. 166 с.

ISBN 5-7271-0600-1

Излагается теоретический материал по курсу «Математика», содержатся такие её разделы, как геометрия и алгебра, математический анализ и дифференциальные уравнения.

Изложение теоретического материала сопровождается иллюстративными примерами. Показывается возможность применения математических понятий в экономических исследованиях.

Предназначается студентам I курса экономических и управленческих специальностей вузов.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Челябинского государственного университета.

Рецензенты: кафедра экономико-математических методов и статистики Южно-Уральского государственного университета; *А.Ф.Шориков,* доктор физико-математических наук, зав. кафедрой информационных систем в экономике Уральского государственного экономического университета

$У\frac{1702010000-046}{4К8(03)-02}$ Без объявл. ББК В1я73-1

ISBN 5-7271-0600-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тема 0
МНОЖЕСТВА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

Понятие *множества* в математике выведено из понятия совокупности предметов, связанных какими-то общими свойствами. Предметы, собранные во множество, являются *элементами* данного множества. Множество однозначно определяется его элементами. Множества обозначаются заглавными буквами.

Пример. Множество всех натуральных чисел обозначается буквой N.
Запись

$$a \in X$$

означает, что предмет a является элементом множества X (читается: "a является элементом X"). Отрицание, то есть предмет a не является элементом множества X, обозначается записью

$$a \notin X.$$

Множество часто задается в следующем виде: элементы множества заключаются внутри фигурных скобок $\{\ldots\}$.

Пример. Одно и тоже множество можно задать путем определения

$$A = \{\text{гласные звуки слов " ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ "}\}$$

и путем перечисления его элементов

$$A = \{\text{Е,О,И,Я}\}.$$

Пустое множество. Определением

$$\{\text{натуральные числа } x, \text{ удовлетворяющие уравнению } x+2=1\}$$

задается такое множество, в котором нет ни одного элемента. Такие множества называются *пустыми* и обозначаются знаком $\varnothing$. Запись

$$A = \varnothing$$

означает, что множество A является пустым.

Действия с множествами

Объединением двух множеств A *и* B называется множество, каждый элемент x которого является элементом либо множества A, либо множества B,либо их обоих. Объединение обозначается $A \bigcup B$. Таким образом,

$$A \bigcup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением двух множеств A *и* B называется множество, каждый элемент x которого принадлежит как множеству A, так и множеству B. Пересечение обозначается $A \bigcap B$. Таким образом,

$$A \bigcap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Разностью двух множеств A и B называется множество, каждый элемент x которого принадлежит множеству A и не принадлежит множеству B. Разность обозначается $A \setminus B$ и читается “A минус B”. Таким образом,

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Замечание. В отличие от объединения, пересечение и разность двух множеств может быть пустым множеством, даже если множества A и B не являются пустыми.

Свойства введенных операций

1. $A \bigcup \varnothing = A;\ A \bigcap \varnothing = \varnothing;\ A \setminus \varnothing = A;\ \varnothing \setminus A = \varnothing.$

2.Коммутативность операций объединения и пересечения

$$A \bigcup B = B \bigcup A;\ A \bigcap B = B \bigcap A.$$

3. Ассоциативность операций объединения и пересечения

$$(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C); \quad (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)..$$

4. Идемпотентность операций объединения и пересечения

$$A \bigcup A = A;\ A \bigcap A = A\,.$$

5. Дистрибутивность пересечения относительно объединения

$$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$$

и дистрибутивность объединения относительно пересечения

$$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C).$$

6. $A \setminus (A \setminus B) = A \bigcap B$.

7. $A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C), \quad A \setminus (B \bigcap C) = (A \setminus B) \bigcup (A \setminus C)$.

Доказательство равенства 6. Пусть элемент $x \in A \setminus (A \setminus B)$. Тогда $x \in A$ и $x \notin A \setminus B$. Следовательно, $x \in A$ и $x \in B$. Таким образом, $x \in A \bigcap B$.

Пусть теперь $x \in A \bigcap B$. Тогда $x \in A$ и $x \in B$. Следовательно, $x \notin A \setminus B$. Стало быть, $x \in A \setminus (A \setminus B)$.

Доказательство второго равенства 7. Пусть $x \in A \setminus (B \bigcap C)$. Тогда $x \in A$ и $x \notin B \bigcap C$. Пусть, например, $x \notin B$. Тогда $x \in A \setminus B$. Следовательно ,

$$x \in (A \setminus B) \bigcup (A \setminus C).$$

Пусть теперь выполнено это включение. Тогда, например, $x \in A \setminus B$. Следовательно, $x \in A$ и $x \notin B$. Стало быть, $x \notin B \bigcap C$. Поэтому, $x \in A \setminus \left(B \bigcap C \right)$.

Упражнение. Доказать все оставшиеся равенства.

Тема 1
ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА НА МНОЖЕСТВЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Положительным действительным числом называется последовательность десятичных цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 с одной запятой между ними:

$$a_{-k}a_{-k+1}...a_{-1},a_0a_1...a_n..., \qquad (1)$$

причём слева от запятой стоит конечное число цифр, отличных от 0.

Отрицательным действительным числом называется последовательность (1) со знаком “ – ” перед ней:

$$-a_{-k}a_{-k+1}...a_{-1},a_0a_1...a_n.... \qquad (2)$$

Нулём называется последовательность, состоящая из одних нулей. Обозначается 0.

Числа вида 12,786999… и 12,787 считаются одинаковыми.

Множество действительных чисел обозначается буквой R. Запись $a \in R$ означает, что a – действительное число.

Знак $\in$ читается как *принадлежит, содержится.*

Модулем действительного числа a называется само число a, если оно нуль или положительное. Если a является отрицательным числом (2), то его модулем будет положительное число (1). Модуль обозначается $|a|$.

Свойства модуля

1. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
2. $|ab| = |a||b|, \quad \forall a \in R, \forall b \in R$.
3. $|-a| = |a|, \quad \forall a \in R$.
4. $|a|^2 = a^2 = |a^2|, \quad \forall a \in R$.

Замечание. Знак $\Leftrightarrow$ читается как “ *тогда и только тогда*”. Знак $\forall$ читается как *любой, всякий*.

Упражнение. Доказать эти свойства модуля.

Отношение порядка на множестве R. Для двух положительных действительных чисел

$$a = a_{-k}a_{-k+1}...a_{-1},a_0a_1...a_na_{n+1}...,$$
$$b = a_{-k}a_{=k+1}...a_{-1},a_0a_1...a_nb_{n+1}..., \qquad (3)$$

у которых до ($n+1$)-го разряда стоят одинаковые цифры, полагаем $a<b$ тогда и только тогда, когда $a_{n+1}<b_{n+1}$. Если b– положительное число, а число a – отрицательное или ноль, то всегда $a<b$. Если a и b – отрицательные числа, то $a<b$ тогда и только тогда, когда $|b|<|a|$.

Запись $a<b$ читается “a меньше b ”. Эквивалентная запись $b>a$ читается “b больше a”.

Свойства отношения порядка

1. Если $a<b$,$b<c$,mo $a<c$.
2. Если $a<b$, то существует действительное число c такое, что $a<c<b$.

Упражнение. Доказать эти свойства.

Наряду с отношением “меньше” или “больше” используют отношение $a \le b$ (меньше или равно) или $b \ge a$ (больше или равно).

Упражнение. Доказать следующие свойства модуля:

1. $|a| \le b \Leftrightarrow -b \le |a| \le b, \quad \forall a \in R, b$– любое положительное число или ноль.
2. $|a+b| \le |a|+|b|, \quad \forall a \in R, \forall b \in R$.
3. $||a|-|b|| \le |a-b|, \quad \forall a \in R, \forall b \in R$.

Множества в R. Наиболее часто будут встречаться следующие множества действительных чисел:

1. Интервал (a,b) – это множество действительных чисел x, каждое из которых удовлетворяет условию $a<x<b$. Это можно записать так $(a,b)=\{x \in R| \quad a<x<b\}$.
2. Отрезок $[a,b]=\{x \in R| \quad a \le x \le b\}$.
3. Полуинтервалы $[a,b)=\{x \in R| \quad a \le x < b\}$ и $(a,b]=\{x \in R| \quad a < x \le b\}$.

Замечание. В дальнейшем будем использовать также запись $A \subset R$, которая означает, что A является некоторым множеством действительных чисел.

Определение. Множество $A \subset R$ называется ограниченным сверху (снизу), если существует такое число $b \in R$, что $a \le b$ $(b \le a)$ для всех $a \in A$. Множество A называется ограниченным, если оно ограничено как сверху, так и снизу.

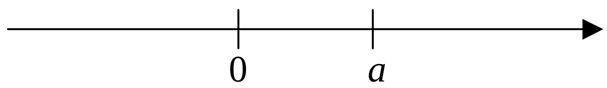
Упражнение. Доказать, что множество $A \subset R$ является ограниченным тогда и только тогда, когда существует положительное число b такое, что $|a| \le b$ для всех чисел $a \in A$.

Определение. Число c называется точной верхней (нижней) гранью множества A, если выполнены следующие условия:
1. $a \le c \; (c \le a)$ для всех чисел $a \in A$.
2. Для любого числа $b < c \; (c < b)$ найдётся число $a \in A$ такое, что $b < a \; (a < b)$.

Точная верхняя (нижняя) грань множества A обозначается $\sup A$ ($\inf A$).
Упражнение. Доказать, что у множества $A = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \ldots\}$ $\sup A = 1$, $\inf A = 0$.

Теорема. Всякое ограниченное сверху (снизу) множество A имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.
Доказательство. Проведём его для точной верхней грани. Будем считать, что это множество имеет положительные числа (3) и они ограничены сверху числом b (3). Отсюда получим, что у всех чисел a слева от какого-то $(-k)$-го разряда стоят нули. Из всех чисел a (3) возьмём те, у которых в $(-k)$-м разряде стоит самая большая цифра. Если такое число одно, то оно и будет точной верхней гранью. Если таких чисел несколько, то среди них берём те, у которых в $(-k+1)$ разряде стоит самая большая цифра и так далее. В результате построим число, которое будет точной верхней гранью рассматриваемого множества .

Числовая ось. Числовой осью называется прямая, на которой отмечена точка ноль, указано положительное направление и отрезок единичной длины. Всякому действительному числу a на числовой оси соответствует точка, и наоборот (см. рис.).



Список кратких обозначений. Уже по предыдущему изложению видно, что некоторые выражения встречаются в математических текстах часто. Для них используются специальные обозначения:

$\exists$ – существует, найдётся
$\forall$ – любой
$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда, когда
$\Rightarrow$ – следует;
$\in$ – принадлежит;
$\subset$ – содержится.

Тема 2
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

При рассмотрении ряда задач действительных чисел «не хватает». Например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решения на множестве действительных чисел. Возникает потребность в расширении понятия числа. Действительные числа «заполняют» всю числовую ось. Поэтому остаётся возможность отождествить новые числа с точками плоскости.

Введём на плоскости прямоугольную систему координат XOY. Каждая точка плоскости однозначно определяется своими координатами $(x; y)$. Назовём ***комплексным числом*** z пару действительных чисел $(x; y)$ (**порядок важен)** со следующими операциями:

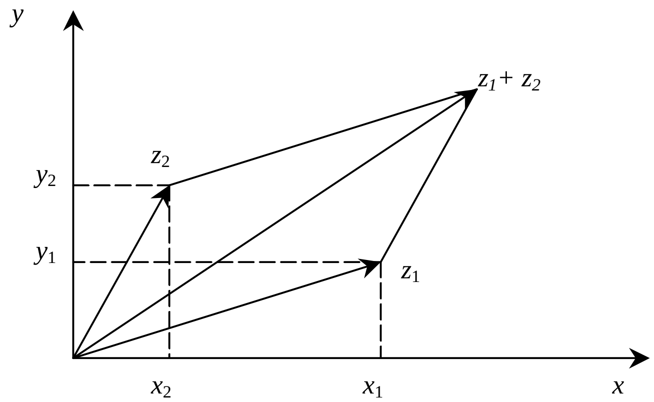
1. Сложение. Если $z_i = (x_i; y_i),\ i = 1,2,$ то

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2). \tag{1}$$

2. Умножение

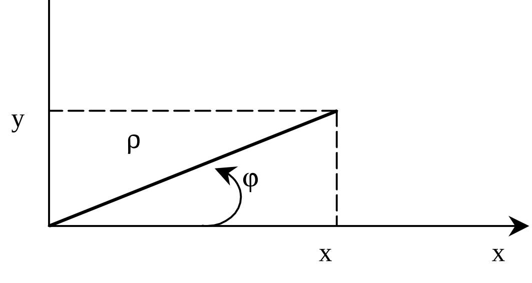
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{2}$$

Геометрический смысл операции сложения. Каждое комплексное число z_i отождествим с вектором на плоскости с координатами $(x_i; y_i)$. Сумма этих векторов определяется по правилу параллелограмма и имеет координаты $(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$ (см. рис.).



Геометрический смысл операции умножения. Введем на плоскости полярную систему координат (см. рис.). Тогда

$$x = \rho\cos\varphi \quad , \quad y = \rho\sin\varphi, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad . \tag{3}$$



Следовательно,

$$x_1x_2 - y_1y_2 = \rho_1\rho_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$
$$x_1y_2 + x_2y_1 = \rho_1\rho_2\sin(\varphi_1+\varphi_2) \qquad (4)$$

Таким образом, операция умножения (2) означает, что ***полярные радиусы*** ρ_i перемножаются, а углы φ_i складываются.

Рассмотрим комплексные числа вида $z=(x;0)$. Они располагаются на оси OX. Для двух таких чисел операции (1) и (2)

$$z_1+z_2=(x_1+x_2;0), \quad z_1z_2=(x_1x_2;0)$$

превращаются в обычные операции сложения и умножения действительных чисел. Каждое действительное число x мы отождествляем с комплексным числом вида $(x;0)$. В частности, единица отождествляется с $(1;0)$.

Рассмотрим специальное число $i=(0;1)$. Тогда из (2) получим, что

$$i^2 = ii = (-1;0) \Rightarrow i^2+(1;0)=(0;0).$$

Поскольку комплексные числа (1; 0) и (0; 0) отождествляются соответственно с 1 и с 0, то предыдущее равенство примет вид

$$i^2+1=0. \qquad (5)$$

Стандартная запись комплексного числа. Используя операции (1) и (2), запишем комплексное число в виде

$$z=(x;y)=(x;0)+(0;1)(y;0).$$

Отсюда и из отождествления комплексных чисел $(x;0),(y;0)$ с действительными числами x, y, получим

$$z=x+iy. \qquad (6)$$

Числа $x=\operatorname{Re}z$ – действительная, а $y=\operatorname{Im}z$ – мнимая части комплексного числа z. *Число* i *– мнимая единица*.

Операции сложения и умножения комплексных чисел, записанных в стандартной форме, примут вид

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2);$$
$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2+i^2y_1y_2=$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2).$$

Модулем комплексного числа z называется

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=x+iy. \qquad (7)$$

Свойства операций сложения и умножения. Они обладают всеми основными свойствами, какими обладают эти операции с действительными числами.

1. $z_1+z_2=z_2+z_1$ (коммутативность).
2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (ассоциативность).
3. $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$ (дистрибутивность).

Вычитание комплексных чисел. Эта операция для комплексных чисел, записанных в стандартной форме, принимает следующий вид:

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)\,. \qquad (8)$$

Деление комплексных чисел. Эта операция производится по следующему правилу:

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,. \qquad (9)$$

Если, $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$ называется *комплексно-сопряжённым* числом. Верно равенство

$$z\bar{z} = x^2 + y^2\,. \qquad (10)$$

Тригонометрическая форма комплексного числа. Подставим в (6) формулы (3). Получим

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \ \rho = |z|\,. \qquad (11)$$

Из формул (4) получим ***формулу Муавра:***

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,. \qquad (12)$$

Отсюда получим, что *n*-я степень (*n* = 1,2,3…) комплексного числа (11) имеет вид

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,. \qquad (13)$$

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа. Рассмотрим вопрос об извлечении корня *n*-ой степени из числа (11). Это означает, что требуется найти такое комплексное число

$$w = R(\cos\psi + i\sin\psi),$$

чтобы $\quad w^n = z \quad \Leftrightarrow \quad R^n(\cos n\psi + \sin n\psi) = \rho\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\,.$

Отсюда получим равенства

$$R^n = \rho \quad \Leftrightarrow \quad R = \sqrt[n]{\rho},$$

$$\cos n\psi = \cos\varphi, \quad \sin n\psi = \sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0,1,\dots,n-1.$$

Таким образом, корни задаются следующими формулами:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right),\ k = 0,1,\dots,n-1\,. \qquad (14)$$

Решение квадратного уравнения. Рассмотрим квадратное уравнение

$$az^2 + bz + c = 0\,.$$

Здесь a,b,c – комплексные числа и $a \neq 0$. Поделим уравнение на число a. Получим

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Отсюда находим корни уравнения

$$z_{1,2}=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}. \qquad (15)$$

Пусть a,b,c – действительные числа и дискриминант

$$D=b^2-4ac<0.$$

Тогда из (15) получим

$$z_{1,2}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}. \qquad (16)$$

Так как $\cos\pi=-1, \sin\pi=0$, то $D=|D|(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Из формулы (14) получим, что $\sqrt{D}=\pm i\sqrt{|D|}$. Подставив эти значения в формулу (16), получим два корня

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{|D|}}{2a}. \qquad (17)$$

Разложение многочленов. Рассмотрим уравнение n-й степени

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n=0, \qquad (18)$$

где a_i – заданные комплексные числа, причем $a_0 \neq 0$.

Основная теорема алгебры (без доказательства).Уравнение (18) *всегда* имеет хотя бы один корень.

Обозначим через z_1 корень уравнения (18). Тогда можем представить

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n=(z-z_1)(b_0z^{n-1}+b_1z^{n-2}+...+b_{n-2}z+b_{n-1}),$$

где b_i – комплексные числа, причем $b_0=a_0$. Многочлен $b_0z^{n-1}+b_1z^{n-2}+...+b_{n-2}z+b_{n-1}$ также имеет корень z_2. Поэтому,

$$b_0z^{n-1}+b_1z^{n-2}+...+b_{n-2}z+b_{n-1}=(z-z_2)(c_0z^{n-2}+c_1z^{n-3}+...+c_{n-3}z+c_{n-2}).$$

Продолжая эту процедуру дальше, получим следующую формулу разложения многочлена:

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}...(z-z_m)^{k_m}. \qquad (19)$$

Здесь z_i $(i=1,2,...,m)$ – *различные комплексные корни* уравнения (18). Числа k_i называются *кратностями* корней, причем их сумма

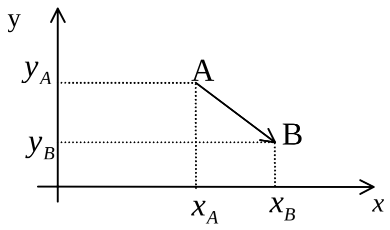
$$\sum_{i=1}^{m}k_i=n.$$

Замечание. Здесь мы ввели сокращенную запись для суммы

$$\sum_{i=j}^{m}a_i=a_j+a_{j+1}+...+a_m.$$

Тема 3
ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Декартова система координат. Введем на плоскости прямоугольную систему координат ХОУ. Тогда каждая точка A плоскости однозначно определяется своими координатами $(x_A; y_A)$. Рассмотрим две точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$. Тогда вектор $\overline{A}\vec{B}$ задается своими координатами $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ (см. рис.)



Расстояние между двумя точками задается формулой

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\,.$$

Окружностью *радиуса* R *с центром в точке* A называется геометрическое место точек на плоскости, отстоящих от точки A на расстояние радиуса R. Уравнение окружности имеет вид

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2.$$

Круг *радиуса* R *с центром в точке* A задается с помощью неравенства

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 \le R^2.$$

Прямой на плоскости называется множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению

$$ax + by + c = 0. \qquad (1)$$

Здесь a, b, c – заданные числа, причем $a^2 + b^2 \ne 0$. Если $b \ne 0$, то уравнение (1) можно разрешить относительно координаты y:

$$y = kx + \beta,\; k = -\frac{a}{b},\quad \beta = -\frac{c}{b}. \qquad (2)$$

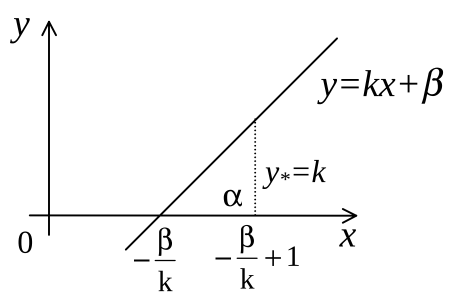
Пусть заданы две разные точки $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B; y_B)$. Подставим их в уравнение прямой (2). Получим

$$\begin{cases} y_A = kx_A + \beta, \\ y_B = kx_B + \beta. \end{cases}$$

Пусть $x_A \ne x_B$. Тогда

$$y_A - y_B = k(x_A - x_B) \Rightarrow k = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B},\; \beta = y_A - kx_A.$$

Геометрический смысл коэффициента k. Из рисунка



видно, что

$$k = tg\alpha\,. \qquad (3)$$

Таким образом, коэффициент k равен тангенсу угла, который образует прямая с осью ОХ.

Условие параллельности двух прямых. Рассмотрим две прямые

$$\begin{cases} y = k_1 x + \beta_1, \\ y = k_2 x + \beta_2. \end{cases}$$

Из формулы (3) получим условия их параллельности:

$$k_1 = k_2; \quad \beta_1 \neq \beta_2. \qquad (4)$$

Пусть прямые заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

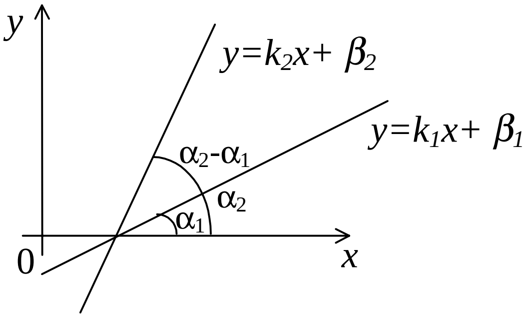
Из формул

$$k_i = -\frac{a_i}{b_i}; \quad \beta_i = -\frac{c_i}{b_i}, \quad i = 1,2$$

и из условия (4) получим условие параллельности прямых (5)

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}; \quad \frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2}\,. \qquad (6)$$

Угол между прямыми. Пусть прямые заданы уравнениями (2). Тогда,



как видно из рисунка,

$$tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\,. \qquad (7)$$

Пусть прямые заданы уравнениями (5). Подставим в формулы (7) $k_i = -\dfrac{a_i}{b_i}$.

Получим

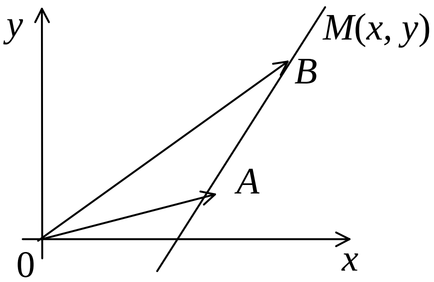
$$tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{-\dfrac{a_2}{b_2} - \left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right)}{1 + \left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right)\left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right)} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}\,. \qquad (8)$$

Условие перпендикулярности двух прямых. Угол между перпендикулярными прямыми равен $\frac{\pi}{2}$. Из формул (7) и (8) получим условия перпендикулярности

$$1 + k_1 k_2 = 0\,, \qquad (9)$$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0\,. \qquad (10)$$

Уравнение прямой в параметрической форме. Как видно из рисунка,



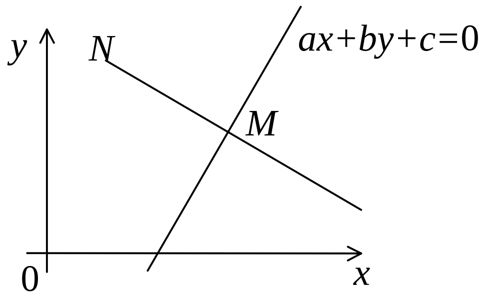
для точки M, лежащей на прямой AB, верно равенство

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB},\ t \in R,$$

которое в координатной форме можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A), \\ y = y_A + t(y_B - y_A). \end{cases} \qquad (11)$$

Геометрический смысл коэффициентов a и b в уравнении (1).



Возьмем точку M, лежащую на прямой (1). Рассмотрим прямую

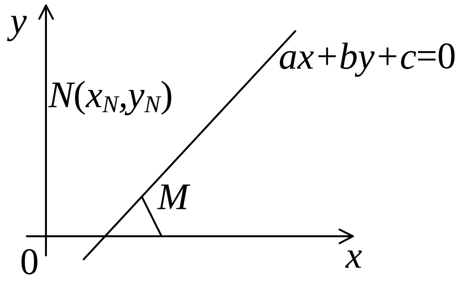
$$(-b)x + ay + (bx_M - ay_M) = 0\,. \qquad (12)$$

Из формулы (10) следует, что эта прямая перпендикулярна прямой (1). Точка $N(x_M + a;\ y_M + b)$ лежит на прямой (12). В самом деле,

$$(-b)(x_M + a) + a(y_M + b) + (bx_M - ay_M) = 0\,.$$

Следовательно, вектор $\overrightarrow{MN}$ *с координатами* (a,b) *перпендикулярен прямой* (1).

Расстояние от точки до прямой. Рассмотрим прямую, заданную уравнением (1). Вычислим расстояние d от точки N до этой прямой.



Запишем уравнение прямой, проходящей через точку N и перпендикулярной исходной прямой. Так как вектор с координатами (a,b) перпендикулярен прямой (1), то уравнение этой прямой имеет вид

$$\begin{cases} x = x_N + ta, \\ y = y_N + tb. \end{cases} \tag{13}$$

Найдем значение параметра t, при котором получится точка M. Подставим в уравнение (1) формулы (13). Получим $a(x_N + ta) + b(y_N + tb) + c = 0$. Отсюда находим

$$t = \frac{-ax_N - by_N - c}{a^2 + b^2}.$$

Следовательно,

$$d^2 == (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 = (ta)^2 + (tb)^2 = \frac{(-ax_N - by_N - c)^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2},$$

$$d = \frac{|ax_N + by_N + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{14}$$

Расстояние между параллельными прямыми. Пусть заданы две параллельные прямые. Тогда их можно задать уравнениями

$$ax + by + c_1 = 0, \quad ax + by + c_2 = 0, \quad c_1 \neq c_2.$$

Возьмем точку M, лежащую на первой прямой. Найдем расстояние от этой точки до второй прямой. Это и будет искомым расстоянием между прямыми. Из формулы (14) имеем

$$d = \frac{|ax_M + by_M + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Уравнение отрезка, соединяющего две точки M и N. Запишем уравнение прямой, проходящей через эти точки в параметрической форме

$$x = x_M + t(x_N - x_M), \quad y = y_M + t(y_N - y_M), \quad \forall t \in R.$$

При $t = 0$ получим точку M, а при $t = 1$ получим точку N. Если t изменяется от 0 до 1, то получаются точки отрезка MN. Следовательно, отрезок задается уравнениями

$$\begin{cases} x = (1-t)x_M + tx_N, \\ y = (1-t)y_M + ty_N, \quad \forall t \in [0,1]. \end{cases}$$

Полуплоскость. Прямая (1) делит плоскость на две полуплоскости, в одной из которых координаты (x, y) точек удовлетворяют неравенству $ax + by + c < 0$, а во второй – $ax + by + c > 0$. Неравенства

$$ax + by + c \leq 0, \quad ax + by + c \geq 0$$

задают замкнутые полуплоскости, то есть вместе с самой прямой.

Пересечение полуплоскостей (если оно не пусто) задает на плоскости выпуклый многоугольник. Следовательно, выпуклый многоугольник на плоскости можно задать с помощью системы линейных неравенств.

$$a_i x + b_i y + c_i \le 0, \quad i = 1,2,...,k. \tag{15}$$

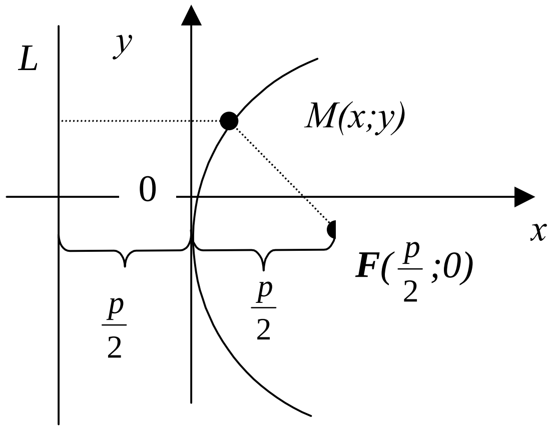
Задача. Записать с помощью линейных неравенств треугольник ABC, если координаты этих точек A, B и C заданы. Найти расстояние от каждой вершины этого треугольника до противоположной стороны. Определить углы этого треугольника. Вычислить координаты медианы этого треугольника.

Тема 4

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Парабола – геометрическое место точек на плоскости, одинаково удаленных от данной точки (*фокуса*) и данной прямой (*директрисы*).

Вывод уравнения параболы.



Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox была перпендикулярна директрисе L, а ось Oy делит расстояние p от фокуса F до директрисы пополам. Возьмем точку $M(x;y)$, лежащую на параболе. Тогда

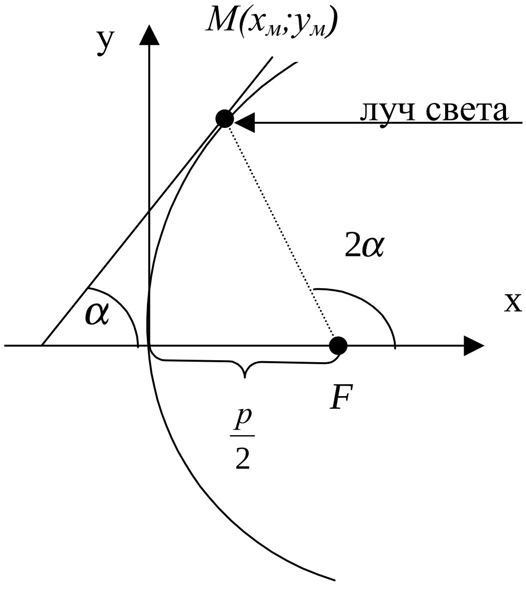
$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

Отсюда получаем *каноническое уравнение параболы:*

$$y^2=2px.$$

Оптическое свойство параболы. Рассмотрим параболическое зеркало, направленное на солнце. Будем считать, что лучи света параллельны оси параболы. После отражения от зеркала луч света пересекает ось Ox в некоторой точке. Найдем эту точку.



Уравнение прямой, по которой пойдет луч после отражения от зеркала, имеет вид

$$y=(x-x_M)tg2\alpha+y_M,$$

$$tg\,2\alpha=\frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}.$$

Из школьного курса известно, что $tg\alpha=y'(x_M)$ (значение производной функции $y(x)=\sqrt{2px}$). Таким образом, $tg\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{x_M}}$. Полагая в уравнении прямой

$y=0$, найдем координату x точки пересечения этой прямой с осью ОХ:

$$x = x_M - \frac{y_M}{tg 2\alpha} = x_M - \frac{\sqrt{2px_M}(1-tg^2\alpha)}{2tg\alpha} = x_M - \frac{\sqrt{2px_M}(1-\frac{1}{4}\frac{2p}{x_M})}{2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{x_M}}} =$$

$$= x_M - (x_M - \frac{p}{2}) = \frac{p}{2}.$$

Таким образом, лучи света после отражения от параболического зеркала пересекаются в фокусе параболы.

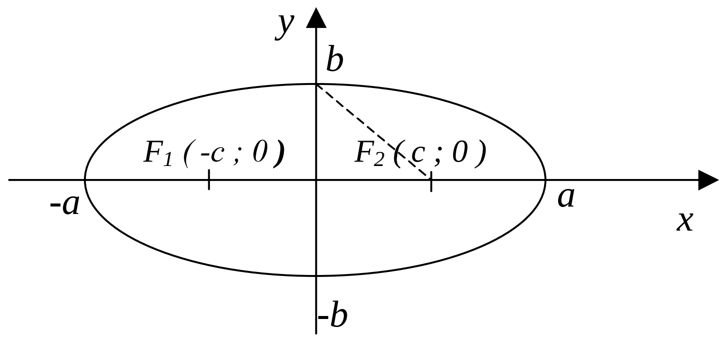
Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 (*фокусов*) есть величина постоянная.

Как построить эллипс? В фокусы вбивают по гвоздику, к ним привязывают концы нитки, вставляют карандаш и оттягивают им нитку так, чтобы она была всегда в натянутом положении. Кривая, которую начертит при движении карандаш на плоскости и будет эллипсом.

Вывод уравнения эллипса. Расстояние между фокусами обозначим через $2c$. Сумму расстояний от точек эллипса до фокусов обозначим через $2a$. Тогда

$$a > c.$$

Систему координат выберем так, чтобы ось Ох проходила через фокусы эллипса, а ось Оу делила расстояние между фокусами пополам.



Возьмем точку $M(x,y)$, лежащую на эллипсе. Тогда

$$|MF_2| + |MF_1| = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad \Rightarrow$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = xc + a^2.$$

Возведем обе части последней формулы в квадрат и получим

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right).$$

Поделим это равенство на его правую часть. Получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Обозначим

$$b^2=a^2-c^2,\quad b<a\,.$$

Получим *каноническое уравнение эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad .$$

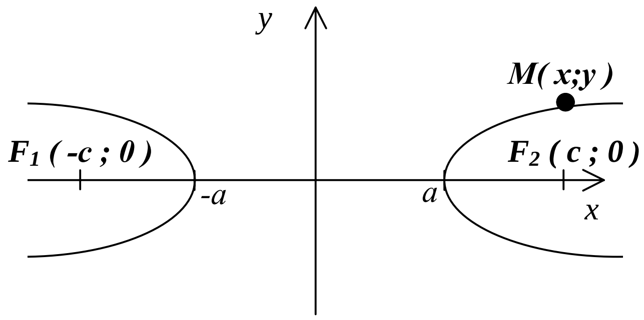
Параметры a и b называются полуосями эллипса, причем a – большая полуось, b – малая полуось. Отношение $\dfrac{c}{a}=\varepsilon<1$ называется *эксцентриситетом* эллипса.

Гиперболой называется геометрическое место точек на плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (*фокусов*) есть величина постоянная.

Вывод уравнения гиперболы. Расстояние между фокусами обозначим через $2c$. Разность расстояний от точек гиперболы до фокусов обозначим через $2a$. Тогда

$$a<c\,.$$

Систему координат выберем так, чтобы ось Ох проходила через фокусы гиперболы, а ось Оу делила расстояние между фокусами пополам.



Тогда $\big||MF_2|-|MF_1|\big|=2a \quad\Rightarrow\quad MF_2-MF_1=\pm 2a \;\Rightarrow\; MF_2=MF_1\pm 2a$. Следовательно,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a\quad\Rightarrow$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=x^2-2xc+c^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2$$

$$\Rightarrow\quad xc-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\Rightarrow$$

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2\left(x^2-2xc+c^2+y^2\right)\Rightarrow$$

$$x^2\left(c^2-a^2\right)-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right).$$

Поделим последнее равенство на его правую часть. Получим

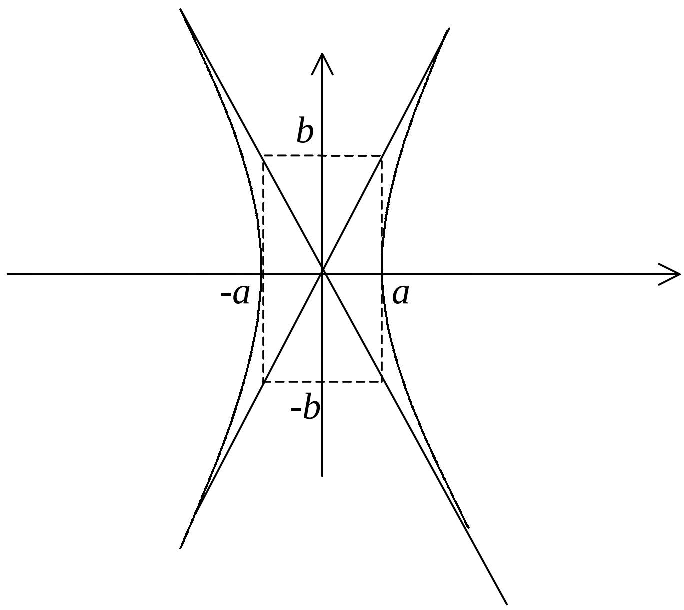
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

Обозначим

$$b^2=c^2-a^2.$$

Тогда *каноническое уравнение гиперболы* примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$



Параметр a называется вещественной полуосью, b– мнимой полуосью. Отношение $\frac{c}{a}=\varepsilon>1$ называется *эксцентриситетом гиперболы*. Прямые

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\,;\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

называются *асимптотами* гиперболы.

Замечание. Рассмотренные кривые второго порядка (парабола, эллипс и гипербола) имеют важную роль отчасти и из-за того, что движение космических тел под воздействием силы тяготения в зависимости от начальных условий происходит по одной из этих кривых. Так, например, все планеты Солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Тема 5
ПОНЯТИЕ n–МЕРНЫХ ВЕКТОРОВ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

Пример 1. Пусть предприниматель торгует n видами товаров, запасы которых обозначим соответственно $x_1, x_2, ..., x_n$. Их можно записать в виде таблицы:

Товар	Сахар	Мука	Крупа	…	Гречка
Кол-во, т	x_1	x_2	x_3		x_n

Если же договориться о порядке нумерации товаров, то их запасы можно записывать в виде n-мерного вектор-столбца

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ :::: \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Пример 2. На плоскости Ox_1x_2 каждая точка M однозначно определяется своими координатами (x_1, x_2), то есть ее можно задать с помощью вектора

$$\overline{O}\overline{M} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Определение. Арифметическим n-мерным вектор-столбцом (или просто n-мерным вектором) называется упорядочный набор из n действительных чисел (1). Числа x_i называются координатами вектора. Порядок чисел **существенен.**

Действия с n-мерными векторами

Пример 1. Пусть запасы товара предпринимателя характеризуются вектором $\bar{x}$ и измерены в тоннах. Мы хотим задать количество товаров в кг. Тогда будем иметь вектор

$$1000\,\bar{x} = \begin{pmatrix} 1000x_1 \\ 1000x_2 \\ :::::::::: \\ 1000x_n \end{pmatrix}.$$

Пример 2 .Умножение вектора $\overrightarrow{OM}$ на число $a \in R$ означает получить вектор

$$a\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \end{pmatrix}.$$

Определение. Произведением n-мерного вектора $\overline{x}$ на число $a \in R$ называется вектор вида

$$a\overline{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Пусть запасы товаров у предпринимателя характеризуются вектором $\overline{x}$, и он еще привез некоторое количество товаров. Завоз характеризуется вектором $\overline{y}$. Тогда у него будет количество товаров, которое характеризуется вектором

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Пример 2. На плоскости при сложении по правилу параллелограмма вектора $\overrightarrow{OM}$ с координатами (x_1, x_2) с вектором $\overrightarrow{ON}$ с координатами (y_1, y_2) получим вектор, имеющий координаты

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}.$$

Определение. Суммой двух n-мерных векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ называются n-мерный вектор $\overline{x} + \overline{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Нулевым вектором называется вектор, у которого все координаты равны нулю. Он обозначается $\overline{0}$.

Свойства введённых операций

1. $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ (коммутативный закон сложения).
2. $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$ (ассоциативный закон сложения).
3. $\overline{x} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{x} = \overline{x}$.
4. Для любого вектора $\overline{x}$ существует вектор $(-\overline{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ такой, что

   $\overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{0}$.

5. $1\bar{x} = \bar{x}; \quad 0\bar{x} = \bar{0}$.

6. Для любых чисел a, b и для любого вектора $\bar{x}$ выполнены равенства:

   6.1. $a(b\bar{x}) = (ab)\bar{x}$.

   6.2. $(a+b)\bar{x} = a\bar{x} + b\bar{x}$.

7. Для любого числа a и для любых векторов $\bar{x}, \bar{y}$ выполнено равенство $a(\bar{x} + \bar{y}) = a\bar{x} + a\bar{y}$.

Множество арифметических n-мерных векторов с введенными операциями сложения и умножения векторов на действительные числа называется ***n*-мерным линейным вещественным пространством**. Оно обозначается R^n.

Пространство R^1 – это числовая ось, R^2 – числовая плоскость и так далее.

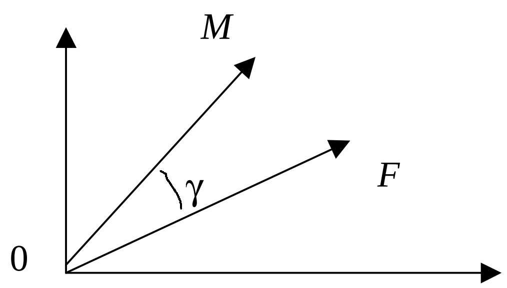
Скалярное произведение векторов

Пример 1. Пусть запасы товаров предпринимателя равны

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, а цены на рынке этих товаров характеризуются вектором

$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, где c_i – стоимость единицы i-го вида товара. Тогда у предпринимателя имеется товаров на сумму $x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n$ денежных единиц.

Пример 2. Скалярное произведение двух векторов на плоскости



$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

определяется формулами

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OF} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OF}\right| \cos\gamma = x_1c_1 + x_2c_2.$$

Определение. Скалярным произведением двух n-мерных векторов называется число

$$<\bar{x}; \bar{c}> = x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n. \qquad (2)$$

Свойства скалярного произведения

1. $<\bar{x}\,;\,\bar{y}> = <\bar{y}\,;\,\bar{x}>$.

2. $<\bar{x}\,;\bar{x}> = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2} \geq 0, \quad <\bar{x}, \bar{x}> = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$.

3. $<\overline{x};a\overline{y}+b\overline{z}>=a<\overline{x},\overline{y}>+b<\overline{x},\overline{z}>, \quad a\in R, b\in R$.

Упражнение. Доказать эти свойства.

4. $|<\overline{x};\overline{y}>|\le\sqrt{<\overline{x},\overline{x}>}\cdot\sqrt{<\overline{y},\overline{y}>}$ (неравенство Коши – Буняковского).

Доказательство. Рассмотрим функцию переменного $t\in R$ $f(t)=<t\overline{x}+\overline{y};t\overline{x}+\overline{y}>$. По свойству 2 скалярного произведения эта функция $f(t)\ge 0$ при всех $t\in R$. По свойству 3 ее можно представит в следующем виде:

$$f(t)=<t\overline{x},t\overline{x}>+<t\overline{x},\overline{y}>+<\overline{x}t,\overline{y}>+<\overline{y},\overline{y}>=$$
$$=t^2<\overline{x},\overline{x}>+2t<\overline{x},\overline{y}>+<\overline{y},\overline{y}>.$$

Таким образом, функция $f(t)$ является квадратным многочленом относительно t. Этот многочлен неотрицателен и коэффициент при t^2 неотрицателен. Поэтому его дискриминант

$$D=4<\overline{x},\overline{y}>^2-4<\overline{x},\overline{x}><\overline{y},\overline{y}>\le 0.$$

Стало быть, $<\overline{x},\overline{y}>^2\le<\overline{x},\overline{x}><\overline{y},\overline{y}>$. Извлекая корень из обеих частей этого соотношения, получим требуемое неравенство Коши – Буняковского.

Замечание. Неравенство Коши – Буняковского без привлечения понятия скалярного произведения можно записать так: для любых действительных чисел $x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n$ выполнено неравенство

$$\left|x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\right|\le\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2}.$$

Замечание. Линейное пространство R^n, в котором определено скалярное произведение, называется *евклидовым*.

Норма вектора и ее свойство

Определение. Нормой вектора $\overline{x}$ из R^n называется число

$$\|\overline{x}\|=\sqrt{<\overline{x},\overline{x}>}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}.$$

Свойства нормы

1. $\|\overline{x}\|\ge 0$ и $\|\overline{x}\|=0\Leftrightarrow\overline{x}=\overline{0}$.
2. Для любого числа a и для любого вектора $\overline{x}$ выполняется $\|a\overline{x}\|=|a|\|\overline{x}\|$.

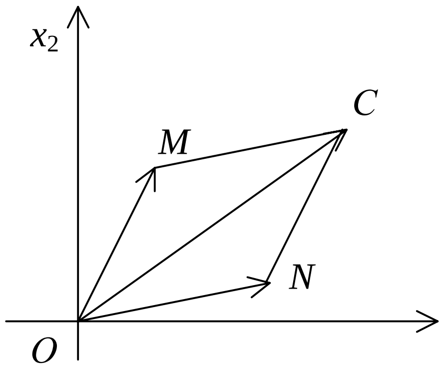
   В самом деле,

$$\|a\overline{x}\|=\sqrt{<a\overline{x},a\overline{x}>}=\sqrt{a^2<\overline{x},\overline{x}>}.$$

3. Для любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ выполнено неравенство $\|\overline{x}+\overline{y}\|\le\|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|$.

Замечание. В случае векторов на плоскости имеем

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$$
$$\left|\overrightarrow{OC}\right|\le\left|\overrightarrow{OM}\right|+\left|\overrightarrow{ON}\right|$$



неравенство треугольника. Это название за неравенством сохраняется и в общем случае.

Доказательство неравенства треугольника. Имеем

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = <\bar{x}+\bar{y}, \bar{x}+\bar{y}> = <\bar{x},\bar{x}> + <\bar{x},\bar{y}> + <\bar{y},\bar{x}> + <\bar{y},\bar{y}> =$$
$$= \|\bar{x}\|^2 + 2<\bar{x},\bar{y}> + \|\bar{y}\|^2 .$$

По неравенству Коши – Буняковского $<\bar{x},\bar{y}> \le \|\bar{x}\|\|\bar{y}\|$. Поэтому

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 \le \|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2 = \left(\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|\right)^2 .$$

Извлекая корень из обеих частей этого неравенства, получим требуемое неравенство треугольника.

Тема 6

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ, БАЗИС

Определение. Вектор $\bar{y} \in R^n$ называется *линейной комбинацией* векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$ из R^n, если существует набор чисел $c_1, c_2, ..., c_k$, такой, что

$$\bar{y} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_k\bar{x}_k .$$

Определение. Говорят, что векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k \in R^n$ являются *линейно зависимыми*, если существует ненулевой набор чисел $c_1, c_2, ..., c_k$, такой, что

$$c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_k\bar{x}_k = \bar{0} \quad . \qquad (1)$$

Если равенство (1) возможно только когда все числа c_i равны нулю, то векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$ называются *линейно независимыми.*

Пример. Рассмотрим векторы

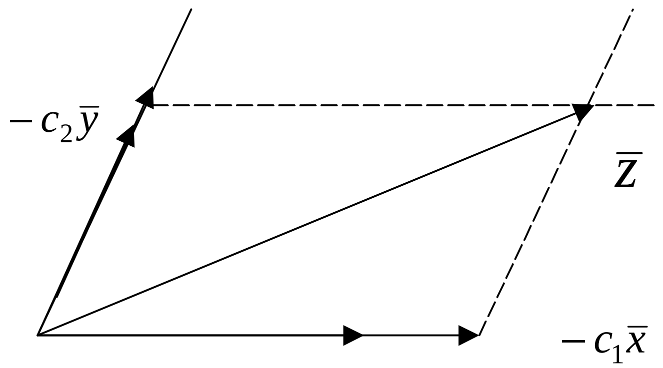
$$\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \bar{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \ldots,\ \bar{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

и покажем, что они линейно независимы. Действительно, запишем для них равенство (1)

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+c_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $c_1=0, c_2=0, \ldots, c_n=0$.

Пример. Любые три вектора $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ на плоскости являются линейно зависимыми (см. рис.).



Теорема. Любые m векторов в R^n при $m>n$ являются линейно зависимыми.

Доказательство. Составим для векторов $\bar{x}_i=\begin{pmatrix}x_{1i}\\x_{2i}\\\vdots\\x_{ni}\end{pmatrix}$, $i=1,2,\ldots,m$ равенство (1)

$$c_1\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\\vdots\\x_{n1}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\\vdots\\x_{n2}\end{pmatrix}+\ldots+c_m\begin{pmatrix}x_{1n}\\x_{2n}\\\vdots\\x_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим эти равенства как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_i. Получим n однородных уравнений с m неизвестными.

Чуть позже докажем, что любая система линейных однородных алгебраических уравнений, у которой число неизвестных больше числа уравнений, всегда имеет ненулевое решение. Теорема доказана.

Определение. Векторы $\overline{x}_1,...,\overline{x}_n$ из R^n образуют базис в R^n, если они линейно независимы.
Пример. Ранее рассмотренные вектора $\overline{e}_1,...,\overline{e}_n$ образуют базис.

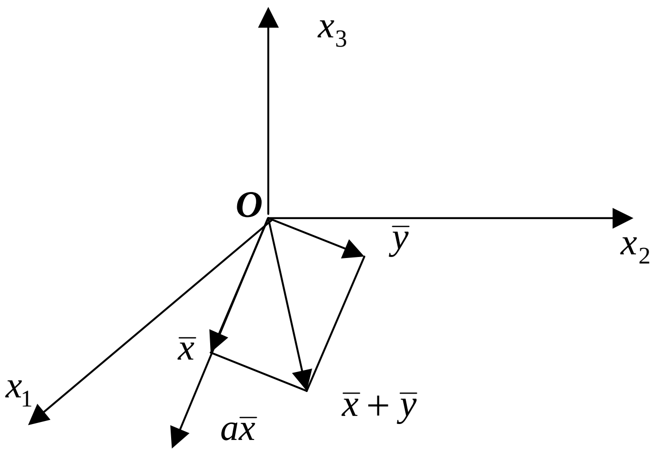
Теорема *(о разложении вектора по базису)*. Всякий вектор $\overline{y}$ из R^n единственным образом раскладывается по базису $\overline{x}_1,...,\overline{x}_n$ в виде
$$\overline{y} = c_1\overline{x}_1 + c_2\overline{x}_2 + \ldots + c_n\overline{x}_n. \qquad (2)$$
Доказательство. Вначале докажем существование разложения (2). Рассмотрим $n+1$ векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{y}$. По предыдущей теореме они линейно зависимы. Это значит, что существуют числа $a_0, a_1,..., a_n$, не все равные нулю, такие, что
$$a_0\overline{y} + a_1\overline{x}_1 + a_2\overline{x}_2 + \ldots + a_n\overline{x}_n = \overline{0}. \qquad (3)$$
Предположим, что $a_0 = 0$. Тогда из (3) имеем равенство
$$a_1\overline{x}_1 + a_2\overline{x}_2 + \ldots + a_n\overline{x}_n = \overline{0}.$$
Так как векторы $\overline{x}_1,...,\overline{x}_n$ образуют базис, то $a_1 = 0, a_2 = 0,..., a_n = 0.$ Значит, все числа a_i в разложении (3) равны нулю. Получили противоречие.
Таким образом, $a_0 \neq 0$. Из (3) получим
$$\overline{y} = \left(-\frac{a_1}{a_0}\right)\overline{x}_1 + \ldots + \left(-\frac{a_n}{a_0}\right)\overline{x}_n.$$
Что и требовалось доказать.

Докажем единственность разложения (2). Предположим, что существует еще одно разложение
$$\overline{y} = c_1^*\overline{x}_1 + c_2^*\overline{x}_2 + \ldots + c_n^*\overline{x}_n.$$
Вычтем это равенство из (2). Получим
$$\left(c - c_1^*\right)\overline{x}_1 + \ldots + \left(c - c_n^*\right)\overline{x}_n = \overline{0}.$$
Так как векторы $\overline{x}_1,...,\overline{x}_n$ образуют базис, то $\left(c - c_1^*\right) = 0, \ldots, \left(c - c_n^*\right) = 0$.
Теорема доказана.

Замечание. Числа $c_1, c_2,..., c_n$ в формуле (2) называется *координатами* вектора $\overline{y}$ в базисе $\overline{x}_1,...,\overline{x}_n$.

Линейные пространства в R^n

Определение. Множество $X \subset R^n$ называется линейным пространством, если оно замкнуто относительно операции сложения векторов и умножения вектора на число, то есть выполнены условия
$$\overline{x}, \overline{y} \in X \Rightarrow \overline{x} + \overline{y} \in X; \quad \overline{x} \in X, a \in R \Rightarrow a\overline{x} \in X.$$
Пример. Рассмотрим в трехмерном пространстве плоскость, проходящую через начало координат (например, плоскость x_1Ox_2).



Если вектор лежит в этой плоскости, то после умножения его на число, полученный вектор будет лежать в этой плоскости. Сумма двух векторов из этой плоскости будет также лежать в этой плоскости.

Любая прямая, проходящая через начало, координат также образует линейное пространство.

Определение. Число k называется размерностью линейного пространства X, если существует k линейно независимых векторов $\bar{x}_1,...,\bar{x}_k$ в X, а любые $k+1$ векторы в X являются линейно зависимыми. Векторы $\bar{x}_k,...,\bar{x}_k$ называются базисом в пространстве X.

Пример. Размерность плоскости в трехмерном пространстве равна 2, а размерность прямой – 1.

Точно так же, как и в теореме о разложении вектора по базису, доказывается, что для любого вектора $\bar{y} \in X$ существует единственное разложение $\bar{y} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_n\bar{x}_n$.

Тема 7
МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ. РАНГ МАТРИЦЫ

Матрицей называется таблица чисел

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \longleftarrow \text{строка} \\ \uparrow \text{столбец} & \end{array} \qquad (1)$$

Числа a_{ij} называются координатами или элементами матрицы A.

Матрицы будем обозначать большими буквами. Если матрица A имеет m строк и n столбцов, то будем говорить, что она имеет размерность m x n и писать $A(m$ x $n)$.

Пример. Матрицы

$$A(1\times 1) = a \text{ – число; } A(2\times 2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$A(n\times 1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}; A(1\times n) = \ (a_{11}a_{12}...a_{1n}\ )\ .$$

Пример. Пусть предприятие может выпускать n видов готовой продукции, используя m видов сырья. Пусть на изготовление единицы j-й готовой продукции используется a_{ij} единиц i-го сырья. Матрица A (1), составленная из этих чисел, характеризует технологический процесс. Она называется *технологической* матрицей.

Замечание. Матрица, состоящая из одних нулей называется нулевой матрицей и обозначается ***O*.**

Действия с матрицами

1. Умножить матрицу A на число b означает умножить каждую ее координату на это число, то есть

$$bA = \begin{pmatrix} ba_{11} & \cdots & ba_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ba_{m1} & \cdots & ba_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Сложить две матрицы одинаковой размерности означает сложить соответствующие координаты этих матриц, то есть

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Транспонировать матрицу означает поменять местами ее строки со столбцами, то есть

$$A^{*} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Замечание. Транспонированная матрица обозначается знаком * наверху.

4. ***Умножение матрицы на вектор.*** Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \overline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A\overline{x}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где

$$b_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n\,. \qquad (3)$$

Пример. Пусть предприятие выпускает x_i единиц i-го вида готовой продукции, i=1,..,n. Тогда оно тратит $b_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n$ единиц j-го сырья. Значит, результатом умножения (2) технологической матрицы A на вектор $\overline{x}$, характеризующий выпуск, будет вектор $\overline{b}$, j-я координата которого равна числу единиц затраченного j-го сырья.

5. ***Умножение матрицы A (m×n) на матрицу B (n×k).***

Результатом является матрица $C(m\times k)$, i-й столбец которой получается при умножении матрицы A на i-й столбец матрицы B. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{11} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{11} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{mi} \end{pmatrix}.$$

Свойства введенных операций

1. $A + B = B + A$.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. $A + 0 = A$.
4. $1 \times A = A$.
5. $a\,(bA) = (ab)\,A$ (для любых действительных чисел a и b).

6. Для любого действительного числа a выполнены равенства
   6.1. $a(A+B) = aA + aB$;
   6.2. $a(AB) = (aA)B = A(aB)$.
7. $A(B+C) = AB + AC$; $(A+B)C = AC + BC$.
8. $A(BC) = (AB)C$.
9. $(A^*)^* = A$.
10. $(aA)^* = a A^*$ для любого действительного числа a.
11. $(A+B)^* = A^* + B^*$.
12. $(AB)^* = B^* A^*$.

Упражнение. Проверить эти свойства самостоятельно.

Пример. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $AB \neq BA$. Таким образом, умножение матриц не коммутативно ***(нельзя переставлять местами !).*** Далее,

$$A^* B^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ B^* A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(AB)^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $A^* B^* \neq (AB)^*$.

Квадратные матрицы и их определители

Определение. Матрица называется квадратной, если у нее количество столбцов равняется количеству строк.

Пример. Если предприятие из n видов сырья может выпускать n видов готовой продукции, то технологическая матрица будет квадратной.

Определение. Квадратная матрица называется *единичной*, если у нее по диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны 0.

Единичная матрица обозначается E. Таким образом,

$$E(2\times2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad E(3\times3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad E(n\times n)=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

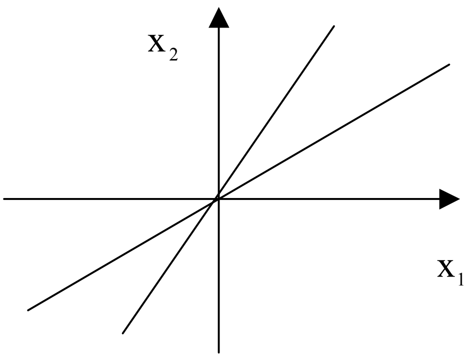
Упражнение. Доказать, что

1. $A\,E = E\,A = A$ для любой квадратной матрицы A.
2. $E^* = E$.

Определитель квадратной матрицы

Матрица размерности 1×1 является числом, и ее определителем называется это число. Для того, чтобы дать определение определителя матрицы размерности 2×2, рассмотрим систему из двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=0\end{cases}.$$



Каждое из этих уравнений задает на плоскости прямую, проходящую через начало координат.

Эти прямые совпадают, если $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=0$.

Определение. Определителем матрицы

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$$

называется число

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}. \qquad (4)$$

Чтобы понять, как ввести определитель матрицы произвольного порядка, запишем определитель матрицы второго порядка в следующей форме:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}\,det(a_{22})+a_{12}(-1)^{1+2}\,det(a_{21}).$$

Определитель матрицы общего n-го порядка

Предположим, что мы научились вычислять определитель матрицы размерности $(n\text{-}1)\times(n\text{-}1)$. Тогда определитель матрицы размерности $n\times n$ определим следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ a_{1n}(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Замечание. Будем говорить вместо «определитель матрицы n-го порядка» просто «определитель n-го порядка».

Вычисление определителя третьего порядка. Из формул (4) и (5) имеем

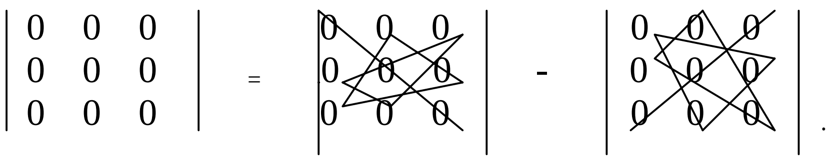
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad .$$

Таким образом,

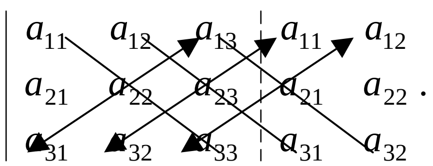
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \qquad (6)$$

Первая схема запоминания формулы определителя 3-го порядка



Числа, находящиеся в вершинах треугольников, перемножаются, а произведения берутся с соответствующими знаками.

Вторая схема запоминания формулы определителя 3-го порядка



Числа, соединенные линиями без стрелок, перемножаются и результат берется со знаком плюс. Результат умножения чисел, соединенных линиями со стрелками, берется со знаком минус.

Свойства определителя

1. $\det A = \det A^*$.

Проверим для определителя второго порядка. Имеем

$$det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = det\, A^*.$$

Замечание. При транспонировании матрицы меняются местами столбцы со строками. Поэтому в силу свойства 1 все свойства определителя, верные для столбцов, остаются верными и для строк (и наоборот).

2. При перестановке местами двух соседних столбцов (строк) определитель меняет знак.

Проверим это свойство для определителя второго порядка. Из формулы (4) получим равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

3. Если у определителя какой-то столбец (строка) состоит из одних нулей, то этот определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть какая-то строка состоит из одних нулей. Переставляя ее поочередно с соседними строками, поставим ее на первое место. Определитель при этом может только поменять знак. Но из определения определителя следует, что определитель с нулевой первой строкой равен нулю. Следовательно, исходный также равнялся нулю.

4. Имеет место следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}+b_1 & a_{k2}+b_2 & \cdots & \cdots & a_{kn}+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказательство. Переставляя поочередно местами строки, сделаем k-ю строку первой. Тогда, как следует из определения определителя,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & \cdots & \cdots & a_{1n}+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+b_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Замечание. Точно такое же равенство верно и для столбцов.

5. При умножении всех элементов какой-то строки (столбца) на одно и тоже число, определитель умножается на это число.

Доказательство. Меняя поочередно местами строки, можно считать , что эта строка находится на первом месте. Тогда

$$\begin{vmatrix} ba_{11} & \cdots & ba_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ba_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots = b(a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots) =$$

$$= b\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6. Если у определителя две одинаковых строки (столбца), то этот определитель равен нулю.

Доказательство. Для определителя второго порядка имеем

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ba = 0 .$$

Допустим, что это свойство доказано для определителя (n-1)-го порядка. Рассмотрим определитель n-го порядка. Поочередно переставляя местами строки, поставим две одинаковые строки на второе и третье место. Тогда, каждый определитель (n-1)-го порядка, фигурирующий в формуле (5), по индукционному предположению будет равен нулю. Поэтому и определитель n-го порядка будет равен нулю.

Следствие. Определитель не изменится, если к какой-то строке (столбцу) прибавить другую строку (другой столбец), умноженную на какое-то число.

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}+ba_{s1} & a_{k2}+ba_{s2} & \cdots & a_{kn}+ba_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+b\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7. Определитель треугольного вида равен произведению диагональных элементов, то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Доказательство. Для определителя второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}.$$

Пусть эта формула доказана для определителя (n-1)-го порядка. Тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Треугольный определитель второго типа в свойстве 7 получается из рассмотренного только что определителя треугольного вида путем транспонирования.

Следствие. Определитель единичной матрицы равен единице.

8. Определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей .

Доказательство. Проведем для определителей второго порядка. Пусть

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = \begin{vmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{vmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\det(AB) = (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (c\alpha + d\gamma)(a\beta + b\delta) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) =$$

$$= (\det A)(\det B).$$

Пример. Вычислим определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 20.$$

Ранг матрицы. Рассмотрим матрицу

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем из матрицы строки и столбцы так, чтобы получились квадратные матрица первого, второго и так далее порядков. Считаем определители этих квадратных матриц. Наивысший порядок отличного от нуля определителя называется *рангом матрицы A* и обозначается $r(A)$.

Очевидно, что $r(A)$ не превосходит как числа строк, так и числа столбцов.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркивая нулевые столбцы, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3.$$

Следовательно, $r(A)$=2.

Действия с матрицей, не меняющие ее ранг.

1. Транспонирование матрицы.
2. Отбрасывание нулевого столбца (строки).
3. Перестановка местами двух столбцов (строк).
4. Умножение всех элементов какого-то столбца (строки) на число, отличное от нуля.
5. Прибавление к столбцу какого-то столбца, умноженного на какое-то число (со строками аналогично).

Замечание. Эти свойства следуют из свойств для определителя.

Пример. Вычислим ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A)=2.$$

Тема 8

СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $a_{ij},\ b_i$ – заданные числа, а x_j – неизвестные.

Матричная запись системы уравнений. Введем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ bm \end{pmatrix}.$$

Тогда, используя операцию умножения матрицы на вектор-столбец, получим

$$A\bar{x} = \bar{b}. \tag{2}$$

Системы ступенчатого вида. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1k}x_k + \alpha_{1(k+1)}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2k}x_k + \alpha_{2(k+1)}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \alpha_{kk}x_k + \alpha_{k(k+1)}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{kn}x_n = \beta_k, \\ \text{где} \quad \alpha_{11} \neq 0, \quad \alpha_{22} \neq 0, \ldots, \quad \alpha_{kk} \neq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Переменные $x_{k+1},\ldots,x_n$ могут принимать произвольные значения. Они называются **свободными переменными**. Переменные $x_k, x_{k-1},\ldots,x_2, x_1$ – **главные переменные**. Они вычисляются через свободные переменные следующим образом: из последнего уравнения находим

$$x_k = -\frac{\alpha_{kk+1}}{\alpha_{kk}}x_{k+1} - \ldots - \frac{\alpha_{kn}}{\alpha_{kk}}x_n + \frac{\beta_k}{\alpha_{kk}}.$$

Затем x_k подставляем в (k-1)-е уравнение и находим x_{k-1} и так далее.

Обычно свободные переменные обозначаются буквами $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-k}$. Таким образом, для системы ступенчатого вида (3) записать решение не представляет труда.

Определение. Две системы уравнений называются эквивалентными, если у них одинаковое число неизвестных и каждое решение одной системы является решением второй системы, и наоборот.

Действия с системами, приводящие к эквивалентным

1. Перестановка местами двух уравнений системы.
2. Умножение всех коэффициентов какого-то уравнения на ненулевое число.
3. Сложение или вычитание двух уравнений системы.
4. Если все коэффициенты какого-то уравнения равны нулю, то есть $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$, то это уравнение можно отбросить.

Метод Гаусса приведения системы к ступенчатому виду

1. Ищем среди уравнений системы (1) то уравнение, у которого коэффициент при переменном x_1 отличен от нуля. Ставим это уравнение на первое место.

2. Считаем, что число a_{11} отлично от нуля. **Мысленно** умножаем первое уравнение на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и вычитаем полученное уравнение из второго. В результате во вновь полученном втором уравнении коэффициент при переменной x_1 равен нулю. Мысленно умножаем первое уравнение на $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и результат вычитаем из третьего уравнения. Во вновь полученном третьем уравнении коэффициент при x_1 равен нулю. И так далее.

В результате получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^*x_2 + \ldots + a_{2n}^*x_n = b_2^* \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{m2}^*x_2 + \ldots + a_{mn}^*x_n = b_m^* \end{cases}.$$

3. Может оказаться, что среди вновь полученных уравнений имеется уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$ *и* $b \neq 0$ (например, $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$). Тогда система (1) не имеет решений.

Система (1) называется несовместной, если она не имеет решений.

4. Может оказаться, что среди вновь полученных уравнений есть уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$. Тогда это уравнение отбрасываем, и во вновь полученной системе число уравнений будет меньше, чем в исходной.

Не трогая первое уравнение, начинаем исключать с помощью второго уравнения переменную x_2 из третьего и так далее n-го уравнений по описанной выше процедуре и так далее.

В результате, либо на каком-то шаге мы установим, что система (1) несовместна, либо придем к системе ступенчатого вида.

Замечание. В системе (3) последнее уравнение разделим на число a_{kk}, отличное от нуля. Тогда коэффициент при x_k будет равен единице. С помощью этого уравнения исключаем переменную x_k из всех других уравнений. Коэффициент при переменной x_{k-1} сделаем равным единице. С помощью этого уравнения исключаем переменную x_{k-1} из остальных уравнений и так далее. В результате получим систему следующего вида:

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \alpha_{1(k+1)}^* x_{k+1} + \ldots + \alpha_{1n}^* x_n = \beta_1^* \\ \quad x_2 \qquad + \alpha_{2\,(k+1)}^* x_{k+1} + \ldots + \alpha_{2n}^* x_n = \beta_2^* \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_k + \alpha_{k\,(k+1)}^* x_{k+1} + \ldots + \alpha_{kn}^* x_n = \beta_k^*. \end{cases} \qquad (4)$$

Теорема (Кронекера – Капелли). Для того чтобы система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

имела решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$rang\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}b_2 \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}b_m \end{pmatrix}.$$

То есть, чтобы ранг матрицы этой системы равнялся рангу расширенной матрицы.

Упражнение. Доказать эту теорему, приводя систему (1) методом Гаусса к ступенчатому виду. При этом ранги получающихся матриц не меняются.

Системы уравнений, у которых число неизвестных равно числу уравнений.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

такой системы является квадратной.

Теорема. Если матрица системы (1) при $n = m$ имеет определитель, отличный от нуля, то эта система имеет единственное решение.

Доказательство. Начинаем приводить методом Гаусса систему (1) к ступенчатому виду. После каждой операции определитель вновь полученной матрицы может отличаться от определителя исходной матрицы только знаком. В процессе приведения не может получиться уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$. Значит, процесс отбрасывания уравнений не происходит.

Приходим к системе треугольного вида

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases} \tag{6}$$

Определитель полученной матрицы отличен от нуля и равен произведению диагональных элементов. Таким образом, $\alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn} \neq 0$.Значит, все диагональные элементы α_{jj} отличны от нуля. Решение восстанавливается единственным образом: $x_n = \dfrac{\beta_n}{\alpha_{nn}}$ и так далее.

Теорема. Если система (1) при $n=m$ имеет единственное решение, то определитель ее матрицы отличен от нуля.

Доказательство. Приведем систему к ступенчатому виду. Так как система имеет единственное решение, то уравнение вида $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$ не появляется и свободных переменных не будет. Следовательно, получившаяся система имеет вид (6). Все числа α_{jj} отличны от нуля. Поэтому, определитель матрицы системы (6) отличен от нуля. Стало быть, определитель исходной матрицы так же отличен от нуля.

Однородная система уравнений, у которой число неизвестных равно числу уравнений.

Пусть все числа b_i в системе (1) при $n=m$ равны нулю. Получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0. \end{cases} \qquad (7)$$

Такая система уравнений называется однородной. Она всегда имеет нулевое решение.

Теорема. Для того чтобы система (7) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Доказательство вытекает из двух предыдущих теорем .

Следствие. Для того чтобы определитель матрицы (5) равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы ее столбцы (строки) были линейно зависимы.

Доказательство. Согласно определению линейной зависимости вектор-столбцов столбцы матрицы (5) являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда система уравнений (7) имеет ненулевое решение. Отсюда и из предыдущей теоремы получим доказательство следствия.

Обратная матрица. Рассмотрим квадратную матрицу $A(n\text{x}n)$.

Определение. Матрица $B(n\text{x}n)$ называется обратной к матрице A, если их произведение равно единичной матрице, то есть

$$AB=E\,. \qquad (8)$$

Теорема. Если определитель матрицы A равен нулю, то обратной матрицы не существует.

Доказательство. Предположим, что обратная матрица существует. Тогда $\det(AB)=\det E=1$. Далее, определитель произведения двух матриц, равен произведению их определителей. Поэтому, $(\det A)\cdot(\det B)=1$. Так как $\det A=0$, то получили противоречие. Следовательно, обратной матрицы не существует.

Теорема. Пусть определитель матрицы A отличен от нуля, тогда обратная матрица существует и единственна.

Доказательство. Запишем искомую матрицу в виде

$$B=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \dots & u_1 \\ x_2 & y_2 & \dots & u_2 \\ \dots & & & \\ x_n & y_n & \dots & u_n \end{pmatrix}.$$

Матричное равенство (8) в координатной форме имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \dots & u_1 \\ x_2 & y_2 & \dots & u_2 \\ \dots & & & \\ x_n & y_n & \dots & u_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для определения обратной матрицы B получаем n систем уравнений, отличающихся друг от друга только правыми частями. Решаем одновременно все эти системы методом Гаусса. Запишем матрицы этих систем в виде

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Сведем эти системы к ступенчатому виду, а затем, поднимаясь вверх, разрешим их относительно главных переменных.

В результате получим матрицу такого вида

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & & & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right).$$

Матрица, стоящая справа является обратной.

Замечание. Покажем, что

$$BA=E. \tag{9}$$

В самом деле, из равенства (8) следует, что определитель обратной матрицы отличен от нуля. Поэтому для нее существует обратная матрица C, то есть

$$BC=E. \tag{10}$$

Умножим равенство (8) на матрицу C. Получим, $(AB)C=EC$. Следовательно, $C=(AB)C=A(BC)=AE=A$. Отсюда и из равенства (10) получим требуемое равенство (9).

Замечание. Обратная матрица обозначается A^{-1}. Она удовлетворяет равенствам $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Запись решения системы с помощью обратной матрицы. Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными

$$A\bar{x}=\bar{b},\ |A|\neq 0.$$

Умножим обе части системы уравнений на обратную матрицу. Получим

$$A^{-1}(A\bar{x})=A^{-1}\bar{b} \Rightarrow (A^{-1}A)\ \bar{x}=A^{-1}\bar{b} \Rightarrow E\bar{x}=A^{-1}\bar{b}.$$

Следовательно,

$$\bar{x}=A^{-1}\bar{b}.$$

Тема 9

СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР И СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Собственный вектор и собственное значение матрицы. Рассмотрим квадратную матрицу

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Определение. Ненулевой вектор $\bar{x}$ называется собственным вектором матрицы А, если существует число λ такое, что

$$\mathrm{A}\bar{x}=\lambda\bar{x}. \qquad (2)$$

Запишем это равенство в координатной форме

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}. \qquad (3)$$

В матричной форме эта система примет вид

$$(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})\ \bar{x}=\bar{0}. \qquad (4)$$

Для того чтобы система (3) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель ее матрицы равнялся нулю, то есть

$$\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})=0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) называется ***характеристическим уравнением***. Запишем его для матрицы второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Для матрицы третьего порядка характеристическое уравнение будет кубическим.

Как искать собственные векторы? Вначале решаем характеристическое уравнение и находим собственные значения (их не больше n). Для каждого собственного значения λ решается система однородных уравнений (3) и находятся собственные векторы.

Пример. Линейная модель международной бездефицитной торговли.

Рассмотрим n стран, бюджеты $x_{1,} x_2, x_3, ..., x_n$ которых тратятся на закупку товара друг у друга (и у самих себя в том числе).

Пусть a_{ij} – доля бюджета x_j, который тратится j-й страной на закупку товара у i-й страны. Тогда

$$a_{1j} + a_{2j} + ... + a_{nj} = 1. \qquad (6)$$

Имеем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется *структурной матрицей торговли*.

Для i-й страны выручка от торговли равняется $p_i = a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n$.

Бездефицитная торговля означает, что для каждой страны ее выручка не меньше бюджета или

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq x_i, i = 1, ..., n. \qquad (7)$$

Покажем, что, на самом деле, в соотношениях (7) стоят равенства.

Предположим, что хотя бы в одном из этих соотношений стоит строгое неравенство. Просуммируем все эти неравенства. Получим

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + ... + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n >$$
$$> x_1 + ... + x_n.$$

Отсюда, используя соотношение (6), получили противоречие

$$x_1 + ... + x_n > x_1 + ... + x_n.$$

Таким образом, имеем равенства

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n, \end{cases}$$

или $A\bar{x} = \bar{x}$.

Вывод. Чтобы при заданной структурной матрице была возможна бездефицитная торговля, необходимо, чтобы единица была собственным значением этой матрицы, а бюджеты стран образовывали собственный вектор, отвечающий собственному значению, равному единице.

Свойства собственных векторов

Теорема. Множество собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению λ, вместе с нулевым вектором образует линейное пространство в R^n.

Доказательство. Пусть $A\overline{\psi}_i = \lambda\overline{\psi}_i, i = 1{,}2.$ Возьмем любые числа $a, b.$ Тогда

$$A(a\overline{\psi}_1 + b\overline{\psi}_2) = A(a\overline{\psi}_1) + A(b\overline{\psi}_2) = a(A\overline{\psi}_1) + b(A\overline{\psi}_2) = a\lambda\overline{\psi}_1 + b\lambda\overline{\psi}_2 = \lambda(a\overline{\psi}_1 + b\overline{\psi}_2).$$

Теорема. Пусть числа $\lambda_i (i = 1,\ldots,k)$ являются различными собственными значениями матрицы. Тогда собственные векторы $\overline{\psi}_i$, отвечающие этим собственным значениям, являются линейно независимыми.

Доказательство проведем для случая двух различных собственных значений. Допустим, что отвечающие им собственные векторы являются линейно зависимыми. Тогда существует ненулевой набор чисел a, b такой, что

$$a\overline{\psi}_1 + b\overline{\psi}_2 = \overline{0} \Rightarrow A(a\overline{\psi}_1 + b\overline{\psi}_2) = \overline{0} \Rightarrow a(A\overline{\psi}_1) + b(A\overline{\psi}_2) = \overline{0} \Rightarrow a\lambda_1\overline{\psi}_1 + b\lambda_2\overline{\psi}_2 = \overline{0}. \quad (8)$$

Из первого равенства получим, что $\overline{\psi}_1 = -\dfrac{b}{a}\overline{\psi}_2$. Подставим это соотношение в последнее равенство (8). Получим противоречивое равенство $b(\lambda_2 - \lambda_1)\overline{\psi}_2 = \overline{0}.$

Решение линейных систем вида

$$\overline{x}_{k+1} = A\overline{x}_k, \quad k = 1,2,3,\ldots; \quad \overline{x}_k \in R^n; \quad A - \textit{постоянная матрица.} \quad (9)$$

При заданном начальном значении $\overline{x}_o$ решение системы (9) записывается в виде

$$\overline{x}_k = A^k\overline{x}_0, \quad k = 1,2,3,\ldots \quad . \quad (10)$$

Однако вычисление степеней матрицы является трудоемкой работой. Используя понятие собственного вектора, формулы (10) можно записать в другом виде.

Рассмотрим случай, когда матрица имеет n различных собственных значений λ_i, каждому из которых отвечает собственный вектор $\overline{\psi}_i$. Согласно предыдущей теореме эти собственные векторы являются линейно независимыми. Следовательно, они образуют базис в R^n. Значит, для каждого вектора (10) верно разложение

$$\overline{x}_k = c_1^{(k)}\overline{\psi}_1 + c_2^{(k)}\overline{\psi}_2 + \ldots + c_n^{(k)}\overline{\psi}_n; \quad c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \ldots, c_n^{(k)} \in R. \quad (11)$$

Подставим формулу (11) в систему (9) и приравняем коэффициенты при векторах $\overline{\psi}_i$. Получим

$$c_1^{(k+1)} = \lambda_1 c_1^{(k)}, c_2^{(k+1)} = \lambda_2 c_2^{(k)}, \ldots, c_n^{(k+1)} = \lambda_n c_n^{(k)} \Rightarrow c_1^{(k)} = \lambda_1^k c_1^{(0)},\ c_2^{(k)} = \lambda_2^k c_2^{(0)}, \ldots, c_n^{(k)} = \lambda_n^k c_n^{(0)}.$$

Подставим эти числа в формулу (11). Будем иметь

$$\bar{x}_k = (\lambda_1^k\ c_1^{(0)})\bar{\psi}_1 + (\lambda_2^k\ c_2^{(0)})\bar{\psi}_2 + \ \dots\ + (\lambda_n^k\ c_n^{(0)})\bar{\psi}_n. \qquad (12)$$

Числа $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}$ находятся из начальных условий

$$\bar{x}_0 = c_1^{(0)}\bar{\psi}_1 + c_2^{(0)}\ \bar{\psi}_2 + \ \dots\ + c_n^{(0)}\bar{\psi}_n. \qquad (13)$$

Пример. Пусть в момент времени t_k средняя заработанная плата равна x_k, а средняя цена – y_k. Тогда средний жизненный уровень можно характеризовать числом $z_k = \dfrac{x_k}{y_k}$ (среднее количество товаров и услуг, которое можно приобрести на среднюю заработанную плату). Будем считать, что процентный прирост средней заработанной платы обратно пропорционален показателю среднего жизненного уровня, а процентный прирост средней цены прямо пропорционален показателю среднего жизненного уровня. Тогда будем иметь

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} = f + \frac{a}{z_k}, \quad \frac{y_{k+1} - y_k}{y_k} = c + bz_k; \quad f, a, c, b - \textit{неотрицательные числа}.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (1+f)x_k + a\ \ y_k, \\ y_{k+1} &= \ b\ \ x_k + (1+c)y_k. \end{aligned}$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1+f-\lambda & a \\ b & 1+c-\lambda \end{vmatrix} = (1+f-\lambda)(1+c-\lambda) - ab = 0.$$

Отсюда находим собственные значения

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{(f+c) \pm \sqrt{(f-c)^2 + 4ab}}{2}.$$

Получили случай двух различных собственных значений. Из уравнений

$$(1+f-\lambda_i)u_i + av_i = 0, \quad i = 1,2$$

находим собственные векторы

$$\bar{\psi}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\lambda_i - 1 - f}{a} \end{pmatrix}, \quad i = 1,2.$$

Формула (12) примет вид

$$\begin{aligned} x_k &= c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k \\ y_k &= c_1\lambda_1^k \frac{\lambda_1 - 1 - f}{a} + c_2\lambda_2^k \frac{\lambda_2 - 1 - f}{a}, \quad k = 1,2,3,\dots. \end{aligned}$$

Выясним изменение показателя жизненного уровня. Имеем

$$z_k = \frac{x_k}{y_k} = a\frac{c_1 + c_2(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1})^k}{c_1(\lambda_1 - 1 - f) + c_2(\lambda_2 - 1 - f)(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1})^k}.$$

Далее,

$$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|<1 \Rightarrow z_k \to a\frac{1}{\lambda_1-1-f}=a\frac{2}{-f+c+\sqrt{(f-c)^2+4ab}}.$$

Таким образом, предельное значение показателя жизненного уровня не зависит от начальных значений средних заработанной платы и цены.

Замечание. Мы использовали понятие предела числовой последовательности z_k. Строгое определение и правила вычисления пределов будут изложены в следующей теме.

Тема 10
ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пример (паутинообразная модель образования цены на рынке). Между спросом и предложением на рынке на данный вид товара существует зависимость, которая определяется кривыми спроса и предложения. Рассмотрим случай линейных зависимостей

$$p=-aq+b-\textit{кривая спроса};\ a>0,\, b>0-const,$$

$$p=Aq+B-\textit{кривая предложения};\ A>0, B>0-const.$$

Кривая спроса указывает количество товара q, которое готовы закупить потребители по цене p. Кривая предложения определяет количество товара p, которое готовы поставить на рынок производители по заданной цене q.

Введем временную единицу, характерную для данного товара. Пусть производители товара оценивают уровень потребности q_* в товаре на рынке в момент времени t_n по цене p_{n-1}, сложившейся на рынке в момент времени t_{n-1}. Тогда

$$p_{n-1}=Aq_*+B \Rightarrow q_*=\frac{p_{n-1}}{A}-\frac{B}{A}.$$

Это количество товара потребители готовы закупить по цене

$$p_n=-aq_*+b \Rightarrow p_n=\alpha p_{n-1}+\beta; \quad \alpha=-\frac{a}{A}, \beta=\frac{aB+bA}{A}.$$

Вычислим цену p_n в явном виде. Имеем

$$p_1=\alpha p_0+\beta,\ p_2=\alpha(\alpha p_0+\beta)+\beta=\alpha^2 p_0+(\alpha+1)\beta,\dots,p_n=\alpha^n p_0+(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\dots+\alpha+1)\beta$$

При увеличении числа n к бесконечности получаем *числовую последовательность*

$$a_1=\alpha,\ a_2=\alpha^2, a_3=\alpha^3,\dots,a_n=\alpha^n,\dots,$$

а так же бесконечную сумму

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\dots+\alpha^n+\dots,$$

которая называется *числовым рядом.*

Перейдем к изучению числовых последовательностей.

Если каждому значению n=1,2,3… поставлено в соответствие действительное число a_n , то говорят, что задана *числовая последовательность.* Число a_n называется *общим членом числовой последовательности***,** а сама последовательность обозначается $\{a_n\}$ или просто a_n.

Предел числовой последовательности

Определение. Число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что

$$|a_n - A| < \varepsilon \text{ для всех } n > N. \qquad (1)$$

Пример. Рассмотрим числовую последовательность $a_n = \dfrac{1}{n}$ и покажем, что число $A=0$ является ее пределом. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$.

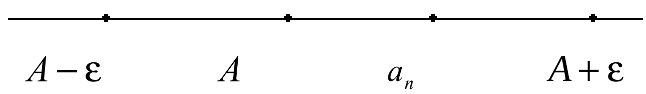
Мы должны указать номер N, зависящий от ε**,** такой, чтобы неравенство $|a_n - A| = \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ выполнялось для всех $n>N$, то есть $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ для всех $n>N$.

Возьмем $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$,где $[a]$ означает целую часть числа a.

Тогда, если $n>N \Rightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Геометрическая интерпретация условия (1).

Неравенство $|a_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ (см. рис.)



Отсюда получим эквивалентное определение предела.

Число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что все члены последовательности $\{a_n\}$, начиная с номера N, содержатся в интервале $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$..

Другими словами, число A называется пределом числовой последовательности, если для любого $\varepsilon>0$ вне интервала $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$ может находиться не более, чем конечное число членов последовательности.

Пример. Рассмотрим следующую последовательность 1,-1, 1,-1, 1,-1…

или $a_n = (-1)^n$. Покажем, что у этой последовательности нет предела.

В самом деле, возьмем число $\varepsilon > 0$ такое, чтобы интервалы $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ и $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ не пересекались. Тогда в каждом из этих интервалов содержится бесконечное число членов последовательности. Следовательно, числа 1 и –1 не могут быть пределами данной числовой последовательности. Аналогично показывается, что и любое другое число не может быть пределом этой числовой последовательности.

***Теорема* (*о единственности предела*)**. Если числовая последовательность имеет предел, то этот предел единственен.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{a_n\}$ имеет два предела $A<B$. Возьмем число $\varepsilon>0$ достаточно малое так, чтобы

$$A\text{-}\varepsilon \qquad A \qquad A+\varepsilon \qquad B\text{-}\varepsilon \qquad B \qquad B+\varepsilon$$

$A+\varepsilon<\ B\text{-}\varepsilon \Leftrightarrow \quad \varepsilon=\dfrac{B-A}{2}$. Тогда, начиная с какого-то номера N_1, все $a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ и, начиная с какого-то номера N_2, все $a_n \in (B-\varepsilon, B+\varepsilon)$. Следовательно, при $n>\max(N_1;N_2)$ каждое из чисел a_n должно принадлежать двум непересекающимся интервалам. Получили противоречие.

Обозначение предела

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \text{или} \quad a_n \to A.$$

Замечание. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Замечание. Если последовательность имеет предел, то она называется ***сходящейся.***

Оценочный признак существования предела

Пусть заданы три числовых последовательности a_n, b_n, c_n такие, что выполнены следующие условия:

1. $a_n \le b_n \le c_n$ при всех n, начиная с какого-то номера.
2. $a_n \to A, \quad c_n \to A$.

Тогда $b_n \to A$.

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Тогда, начиная с какого-то номера, все числа a_n и c_n будут находиться в интервале $(A\text{-}\varepsilon, A+\varepsilon)$. По условию 1, начиная с этого номера, все числа b_n будут находиться в этом интервале. Это означает, что $b_n \to A$.

Замечание. Эта теорема называется «теоремой о двух милиционерах».

Пример. Пусть k = 2,3…. Тогда $0<\dfrac{1}{n^k}<\dfrac{1}{n}$. Так как $\dfrac{1}{n}\to 0$, то, согласно предыдущей теореме, $\dfrac{1}{n^k}\to 0$.

Пример. Покажем, что $\frac{1}{2^n} \to 0$. В самом деле, при $n = 1,2,\ldots$ выполнено неравенство $0 \le \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n}$. Далее применяем предыдущую теорему.

Упражнение **.** Показать, что если $|a_n| \to 0$, то $a_n \to 0$.

Пример. Пусть $|\alpha|<1$. Тогда $\alpha^n \to 0$. В самом деле, $|\alpha|^n \le \frac{1}{n}$ при $n \ge 1 \Rightarrow |\alpha|^n \to 0.$

Замечание. Если числовая последовательность принимает одно и то же значение a, то ее предел и есть само это значение a.

Упражнение. Показать, что изменение конечного числа членов последовательности не влияет на значение ее предела (если он существует).

Теорема о пределе суммы, разности, произведения и частного двух числовых последовательностей. Пусть $a_n \to A, b_n \to B$. Тогда их сумма, разность, произведение имеют пределы и

$$(a_n \pm b_n) \to A \pm B; \quad (a_n b_n) \to AB \ .$$

Если $b_n \ne 0$ и $B \ne 0$, то существует предел частного и

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}.$$

Доказательство проведем для суммы. Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда существуют номера N_1, N_2 такие, что $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ для любых $n \ge N_1$ и $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ для любых $n \ge N_2$. Следовательно, при $n \ge N = \max(N_1; N_2)$ будут выполнены оба этих неравенства. Поэтому

$$|\,(a_n + b_n) - (A + B)\,| = |\,(a_n - A) + (b_n - B)\,| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n \ge N\ .$$

Замечание. Пусть $a_n \to A$, а c – число. Тогда $(ca_n) \to cA$.

Доказательство. Возьмем $b_n = c$ и применим предыдущую теорему.

Определение. Числовая последовательность a_n называется ***ограниченной сверху (снизу),*** если существует число C такое, что для любого номера *n* выполнено неравенство $a_n \le C$ $\left(a_n \ge C\right)$.

Если последовательность ограничена как сверху, так и снизу, то она называется ***ограниченной.***

Пример. $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \le a_n \le 1.$

Теорема. Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.
Доказательство. Пусть $a_n \to A$. Зафиксируем число ε>0 . Тогда, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство $|\, a_n - A \,| < \varepsilon \Rightarrow |a_n| \le |A| + \varepsilon$. Далее, для оставшихся членов последовательности при $n = 1,2,\ldots,N$ выполнено неравенство $|a_n| <$ max $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ = *K*. Следовательно, числовая последовательность ограничена числом

$$C = \max(\,|A| + \varepsilon, K).$$

Замечание. Обратное утверждение не верно, а именно, не всякая ограниченная последовательность имеет предел. В качестве примера можно взять ранее рассмотренную последовательность 1, -1, 1, -1,… .

Определение. Последовательность a_n называется *возрастающей (убывающей),* если для всех *n* выполнено неравенство $a_{n+1} \ge a_n$ ($a_{n+1} \le a_n$). Возрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными.**

Теорема (о пределе монотонной ограниченной последовательности). Всякая возрастающая (убывающая) ограниченная сверху (снизу) числовая последовательность имеет предел.
Доказательство. Рассмотрим случай возрастающей, ограниченной сверху последовательности. Тогда числовое множество, состоящее из значений всех членов последовательности, ограничено сверху. Следовательно, у него существует точная верхняя грань, которую обозначим через A.Из определения точной верхней грани следует, что все $a_n \le A$ и для любого числа ε> 0 существует номер N такой, что $a_n > A - \varepsilon$. Так как последовательность возрастает, то $A \ge a_n \ge a_{n+1} > A - \varepsilon$ при всех $n > N$. Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N$, что $|a_n - A| < \varepsilon$ для $\forall\ n > N$. Это означает, что число A является пределом рассматриваемой последовательности.

Однако из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Теорема. Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность**.**
Доказательство. Из ограниченности следует, что $a_n \in [A, B]$, где $A = -C, B = C$. Разделим отрезок $[A, B]$ пополам. Тогда в одном из отрезков $\left[A, \dfrac{A+B}{2}\right]$ или $\left[\dfrac{A+B}{2}, B\right]$ содержится бесконечное число членов последовательности. Пусть это первый отрезок. Обозначим

$A_1 = A, B_1 = \dfrac{A+B}{2}$ и a_{n_1} первый член последовательности, содержащийся в отрезке $[A_1, B_1]$. Тогда

$$A \le A_1 \le a_{n_1} \le B_1 \le B, \quad B_1 - A_1 = \frac{B-A}{2}.$$

Аналогичную процедуру применим к отрезку $[A_1, B_1]$, и так далее.
В результате получим последовательности

$$A \le A_1 \le \ldots \le A_k \le \ldots \le \ldots \le B_k \le \ldots \le B_1 \le B, \quad B_k - A_k = \frac{B-A}{2^k}, \quad A_k \le a_{n_k} \le B_k.$$

Последовательность A_k (B_k) ограничена сверху (снизу) и возрастает (убывает). Поэтому у них существуют пределы. Так как

$$B_k - A_k = \frac{B-A}{2^k} \to 0,$$

то эти последовательности имеют один и тот же предел. По оценочному признаку сходимости этот же предел имеет подпоследовательность a_{n_k}.

Число е. Рассмотрим задачу о непрерывном начислении процентов по вкладу. Предположим, что один рубль положили под сто процентов годовых в банк. Начисление процентов производится следующим образом. Весь год делится на n равных промежутков времени, по истечении каждого из которых начисляются проценты от имеющейся на счете суммы. Деньги со счета не снимаются. Тогда через первый промежуток времени будем иметь сумму $1+\dfrac{1}{n}$. Через второй промежуток получим сумму

$$1+\frac{1}{n}+(1+\frac{1}{n})\frac{1}{n}=(1+\frac{1}{n})^2.$$

После k-го промежутка времени будет сумма, равная $(1+\dfrac{1}{n})^k$. По истечении года на счете будет сумма, равная $(1+\dfrac{1}{n})^n$. Покажем, что числовая последовательность

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

возрастает и ограничена сверху числом 3. Тогда по предыдущей теореме у нее существует предел, значение которого ***обозначается*** буквой ***е*** , то есть

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{e} \approx 2{,}718. \qquad (2)$$

При доказательстве используется формула бинома Ньютона:

$$(1+y)^n = 1 + ny + \ldots + \frac{n[n-1][n-2]\ldots[n-k+1]}{k!} y^k + \ldots + y^n. \qquad (3)$$

Замечание. Запись $m!$ обозначает произведение $m(m\text{-}1)(m\text{-}2)\ldots2\cdot1$ и читается *m факториалов.* Таким образом, $1!=1$, $2!=2$, $3!=6$. Полагают, что $0!=1$.

Упражнение. Индукцией по числу n доказать формулу (3).

Положим в формуле (3) $y=\frac{1}{n}$. Будем иметь

$$a_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+1+\frac{1}{2!}[1-\frac{1}{n}]+\ldots+\frac{1}{k!}[1-\frac{1}{n}][1-\frac{2}{n}]\ldots[1-\frac{k-1}{n}]+\ldots+\frac{1}{n!}[1-\frac{1}{n}]\ldots[\frac{1}{n}].$$

Распишем эту формулу для $n+1$.Число слагаемых увеличится. При замене числа n на число $n+1$сомножители увеличиваются, поскольку $1-\frac{k}{n+1}\ge1-\frac{k}{n}$. Таким образом, $a_{n+1}\ge a_n$.

Покажем, что последовательность ограничена сверху числом 3. Имеем $a_n\le2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots+\frac{1}{n!}$. Так как $k!=k(k-1)(k-2)\ldots1\ \ \ge2^{k-1}$, то имеем неравенство $a_n\le2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-(0{,}5)^{n+1}}{(0{,}5)}\le3$.

Тема 11
ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Пример. Рассмотрим бесконечные суммы

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots; \tag{1}$$

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots. \tag{2}$$

В общем случае, задана числовая последовательность a_n. ***Числовым рядом*** называется бесконечная сумма

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \quad . \tag{3}$$

Общий член последовательности a_n называется общим членом ряда.

Пример. В ряде (1) общий член задается формулой $a_n=\frac{1}{n}$, в ряде (2) – $a_n=q^{n-1}$.

Другая запись числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Частной суммой ряда (3) называется конечная сумма

$$S_n=a_1+a_n+\ldots+a_n.$$

Пример. Рассмотрим ряд (2) и вычислим его частные суммы:

$S_n=1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n=1+q+q^2+\ldots+q^n+q^{n+1}-q^{n+1}=1-q^{n+1}+q(1+q+q^2+\ldots+q^n)=$
$1-q^{n+1}+qS_n\Rightarrow(1-q)S_n=1-q^n.$

Следовательно, если $q \neq 1$, то $S_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}$. При $q = 1 \Rightarrow S_n = n$. Таким образом,

$$S_n = \begin{cases} n, & при \quad q = 1 \\ \dfrac{1-q^n}{1-q}, & при \quad q \neq 1 \end{cases}. \tag{4}$$

Замечание. Ряд (2) называется рядом геометрической прогрессии.
Таким образом, с числовым рядом (3) связана числовая последовательность его частных сумм.

Ряд (3) называется ***сходящимся***, если существует

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Значение этого предела называется ***суммой ряда*** и обозначается $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Если последовательность частных сумм не имеет предела, то ряд называется ***расходящимся***.

Пример. Рассмотрим ряд геометрической прогрессии и выясним, при каких значениях q он сходится, а при каких – расходится.
Из формулы (4) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & если |q| < 1, \\ не\ существует,\ если\ |q| \geq 1. \end{cases}$$

Таким образом, при $|q| \leq 1$ ряд геометрической прогрессии расходится. При $|q| < 1$ этот ряд сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = S = \frac{1}{1-q}.$$

Пример (установление цены на рынке). Ранее была получена формула

$$p_n = \alpha^n p_0 + \beta \sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1}, \quad \alpha = -\frac{a}{A}, \quad \beta = \frac{aB + bA}{A}.$$

Поэтому, при $|\alpha| = \dfrac{a}{A} < 1$ будем иметь

$$\alpha^n \to 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1} \to \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow p_n \to \beta \frac{1}{1-\alpha} = \frac{aB + bA}{A + a}.$$

Теорема (необходимый признак сходимости числового ряда).
Если ряд (3) сходится, то его общий член стремится к нулю, то есть

$$a_n \to 0. \tag{5}$$

Доказательство. Имеем $a_n = (S_n - S_{n-1}) \to S - S = 0$.

Пример. Сходится ли числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}$?

Ответ. Расходится. В самом деле,

$$a_n=\frac{n+1}{n+2}=\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\to 1\cdot$$

Замечание. Из того, что общий член стремится к нулю, не следует, вообще говоря, сходимость ряда.

Пример. Рассмотрим ряд (1), который называется *гармоническим рядом*. У него общий член $\frac{1}{n}$ стремится к нулю. Покажем, что, однако, ряд расходится**.** Рассмотрим частные суммы с четными номерами

$$S_{2k}=1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\ldots+(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2k}).$$

Имеем

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i+1}+\ldots+\frac{1}{2i}\geq\frac{1}{2i}+\ldots+\frac{1}{2i}=\frac{i+1}{2i}>\frac{1}{2}.$$

Таким образом, частная сумма S_{2k} может быть сделана сколь угодно большой. Значит, ряд расходится.

Рассмотрим два ряда:

$$(A)\qquad a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n+\ldots,$$

$$(A^*)\qquad a_1^*+a_2^*+a_3^*+\ldots+a_k^*+a_{k+1}+\ldots+a_n+\ldots .$$

Эти два ряда отличаются друг от друга только конечным числом членов.

Теорема. Если сходится ряд (A), то сходится и ряд (A*), и наоборот.

Доказательство. При $n>k$

$$S_n^A=S_n^{A^*}+c,\quad c=\sum_{i=1}^{k}\left(a_i-a_i^*\right)=const\Rightarrow\left\{S_n^A\right\}-сходится\Leftrightarrow\left\{S_n^{A^*}\right\}-сходится.$$

Возьмем число $b\neq 0$ и рассмотрим ряд

$$(B)\qquad ba_1+ba_2+ba_3+\ldots+ba_n+\ldots.$$

Теорема. Ряд (B) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (A).

Доказательство. Имеем

$$S_n^B=bS_n^A,\, b\neq 0\Rightarrow\left\{S_n^A\right\}-сходится\Leftrightarrow\left\{S_n^B\right\}-сходится.$$

Другими словами, изменение конечного числа слагаемых в ряде, а также умножение всех членов ряда на число, отличное от нуля, не влечет изменений в сходимости ряда.

Ряд (3) называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из его модулей

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|+\ldots \quad . \qquad (6)$$

Теорема (без доказательства). Всякий абсолютно сходящийся ряд является просто сходящимся.

Пример. Ряд

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2^n}+\ldots$$

сходится, так как ряд

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots,$$

составленный из модулей его слагаемых, сходится.

Ряд (6) является рядом, у которого все слагаемые больше или равны нулю.

Ряды с неотрицательными слагаемыми

Рассмотрим ряд

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots;\quad a_n\ge 0,\ \forall n\ge 1. \tag{7}$$

У таких рядов последовательность частных сумм S_n не убывает, поскольку $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}\ge S_n$.

Теорема (критерий сходимости числовых рядов с неотрицательными слагаемыми). Числовой ряд с неотрицательными слагаемыми сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частных сумм ограничена сверху некоторым числом C.

Доказательство. Пусть все $S_n\le C$. По теореме о пределе неубывающей ограниченной сверху последовательности $S_n\to S$. Значит, ряд сходится.

Пусть последовательность частных сумм $S_n\to S$. Тогда она ограничена сверху.

Оценочный признак сходимости числового ряда. Рассмотрим два ряда

$$(A)\ a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots,$$

$$(B)\ b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n+\ldots,$$

у которых

$$0\le a_n\le b_n,\quad \forall n\ge 1. \tag{8}$$

Теорема. Если ряд (*B*) сходится, то сходится и ряд (*A*). Если ряд (*A*) расходится, то расходится и ряд (*B*).

Доказательство. Пусть ряд (*B*) сходится. По предыдущей теореме все его частные суммы ограничены сверху некоторым числом. Из условий (8) имеем $S_n^A\le S_n^B$. Следовательно, этим же числом ограничены сверху все частные суммы ряда (*A*). По предыдущей теореме ряд (*A*) сходится.

Пусть ряд (*A*) расходится. Если бы ряд (*B*) сходился, то сходился бы и ряд (*A*). Значит, ряд (*B*) расходится.

Замечание. Так как изменение конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость или расходимость, то можно считать, что неравенство (8) выполнено не для все $n\ge 1$, а для всех *n*, начиная с какого-то номера.

Теорема (Признак Даламбера). Пусть в числовом ряде (7)

$$a_n > 0, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1 \quad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge q > 1\right), \quad \forall n \ge 1. \tag{9}$$

Тогда ряд сходится (расходится).

Доказательство проведем для случая $q < 1$. Имеем неравенства

$$a_2 \le qa_1,\ a_3 \le qa_2 \le q^2 a_1, \ldots, a_n \le q^{n-1} a_1, \ldots .$$

Рассмотрим ряд

$$a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots .$$

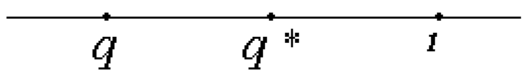
Это ряд геометрической прогрессии, все члены которого умножены на число $a_1 \ne 0$. Он сходится, так как $0 \le q < 1$. По предыдущей теореме сходится и ряд (A).

Замечание. Так как изменение конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость или расходимость, то можно считать что, что условия (9) выполнены не для всех *n*, начиная с первого, а для всех *n*, начиная с какого-то номера.

Предельный признак Даламбера. Пусть, начиная с какого-то номера, все $a_n > 0$ и пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда,

$$\begin{cases} \text{если } q < 1, \text{ ряд сходится,} \\ \text{если } q > 1, \text{ ряд расходится.} \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $q < 1$. Возьмем число $q < q^* < 1$(см. рис.)



Тогда, начиная с какого-то номера, будут выполняться неравенства

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q^* < 1.$$

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ сходится. В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1} n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Теорема (признак сходимости Коши). Пусть

$$a_n \ge 0, \quad \sqrt[n]{a_n} \le q < 1 \quad \left(\sqrt[n]{a_n} \ge q > 1\right), \quad \forall n \ge 1. \tag{11}$$

Тогда ряд сходится (расходится).

Доказательство. Рассмотрим случай $q < 1$. Тогда все $a_n \le q^n$. Так как ряд $q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$ сходится, то по признаку сходимости сходится и ряд (A).

Замечание. Теорема остается справедливой, если условия (11) выполняются не для всех $n \geq 1$, а для всех n, начиная с какого-то номера.

Предельный признак Коши. Пусть, начиная с какого-то номера, все $a_n \geq 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда

$$\begin{cases} \text{если } q < 1, \text{ ряд сходится,} \\ \text{если } q > 1, \text{ ряд расходится.} \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $q < 1$. Возьмем число $q < q^* < 1$. Тогда, начиная с какого-то номера, все $\sqrt[n]{a_n} \leq q^* < 1$. Значит, ряд сходится.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n+1} \right)^n$ сходится. В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Замечание. В предельных признаках Даламбера и Коши случай $q = 1$ требует дальнейшего исследования.

Пример. У расходящегося гармонического ряда (1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$.

У ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n-1)n}{n(n+1)} = \dfrac{n^2-n}{n^2+n} = \dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \to 1$. Покажем, что этот ряд сходится. В самом деле,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

Аналогичные примеры можно привести и для предельного признака Коши.

Знакочередующиеся ряды. Рассмотрим ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots; \quad a_n \geq a_{n+1} \geq 0, \ \forall n \geq 1. \tag{13}$$

Такой ряд называется ***знакочередующимся.***

Пример.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots. \tag{14}$$

Теорема (признак Лейбница). Пусть в знакочередующемся ряде общий член $a_n \to 0$. Тогда ряд сходится.

Доказательство. Рассмотрим последовательность частных сумм с четными номерами $S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \ldots$. Разности, стоящие в скобках,

больше или равны нулю. Поэтому последовательность частных сумм с четными номерами возрастает. Покажем, что она ограничена сверху .
В самом деле, $S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} \le a_1$.

По теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности, последовательность частных сумм с четными номерами имеет предел. Обозначим этот предел S. Покажем, что последовательность частных сумм с нечетными номерами так же стремится к этому числу. В самом деле,

$$S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1} \to S + 0 = S.$$

Пример. Ряд (14) сходится.

Тема 12

ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ

Понятие числовой функции. Мы уже видели, что между величиной спроса на товар и его ценой существует связь (*функция спроса*) $p = f(q)$. Аналогичная связь существует между предложением на товар и его ценой.

Рассмотрим еще один пример.

Пример (*зависимость величины спроса от дохода*). В моделях *потребительского спроса* используются функции Торнквиста, моделирующие связь между величиной дохода x и величиной спроса y:

$$y = \frac{\alpha x(x+\beta)}{x^2+\gamma} \quad (\textit{на малоценные товары});$$

$$y = \frac{\alpha x}{x+\beta} \quad (\textit{на товары первой необходимости});$$

$$y = \frac{\alpha(x-\gamma)}{x+\beta} \quad (\textit{на товары относительной роскоши});$$

$$y = \frac{\alpha x(x-\gamma)}{x+\beta} \quad (\textit{на предметы роскоши}).$$

Пример (*производственная функция*). Рассмотрим производство, в котором используются ресурсы и выпускается продукция. Считаем, что используемые ресурсы можно характеризовать одним числом x (например, затраченное рабочее время), а выпуск характеризуется числом y (например, суммарный объем выпускаемых товаров). Тогда каждому значению параметра x соответствует максимально возможный объем выпуска продукции, произведенной при использовании этих затрат. Эта связь $y = F(x)$ называется *производственной функцией*. Для нее часто используется степенная зависимость $y = bx^a$, где b и a являются заданными положительными числами. Такая зависимость возникает из предположения, что производственная функция является однородной степени a, то есть

$$F(tx) = t^a F(x), \quad \forall t \ge 0.$$

Это равенство означает, что с ростом затрат в t раз суммарный объем выпуска продукции изменяется в t^a раз. Положим x=1. Будем иметь $F(t) = bt^a$, $b = F(1)$. Таким образом, получили степенную зависимость.

Определение. Говорят, что задана числовая функция $y = f(x)$, если задано подмножество $X \subset R$ и правило f, которое каждому числу $x \in X$ ставит в соответствие число $y = f(x)$.

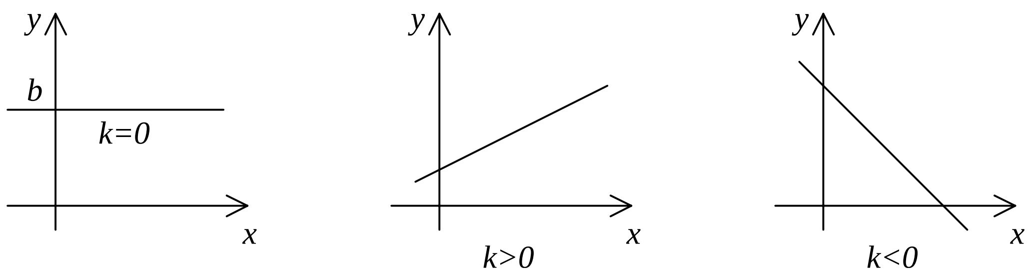
Множество X называется *областью определения* или *областью допустимых значений* (ОДЗ) функции $y = f(x)$.

Замечание. Дальше будем говорить о функциях, опуская, иногда, название числовая.

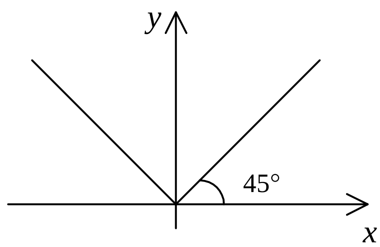
График функции. Введем на плоскости прямоугольную систему координат xoy и нарисуем множество точек, у которых координаты (x, y) связаны соотношением $y = f(x)$. Получим кривую, которая называется графиком этой функции.

Примеры числовых функций.

1. *Линейная функция* $y = kx + b$. Ее графиком является прямая линия

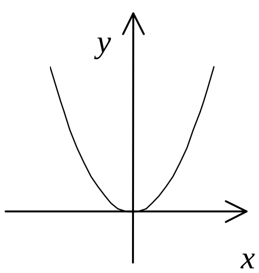


2. *Модуль числа* $y = |x|$. Эта функция определена при всех $x \in R$ и ее графиком является «прямой угол» с вершиной в начале координат (см. рис.)

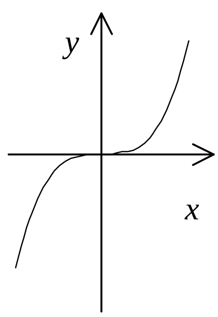


3. *Степенная функция* $y = x^n$ ($n = 2,3,4,...$) определена при всех $x \in R$ и в зависимости от степени n ее график имеет следующий вид:

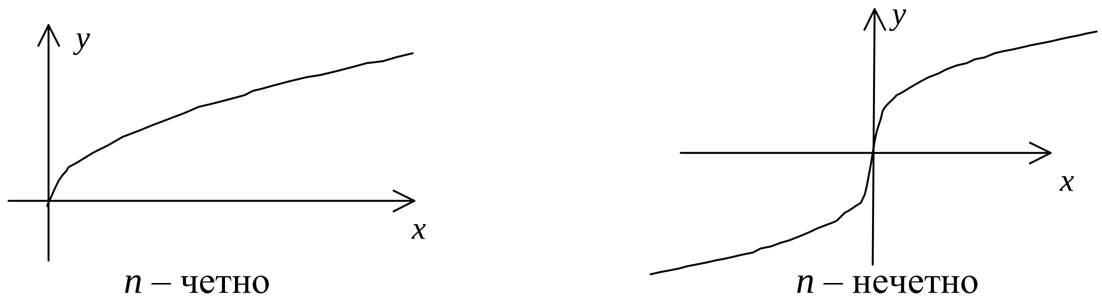
n – четно



n – нечетно

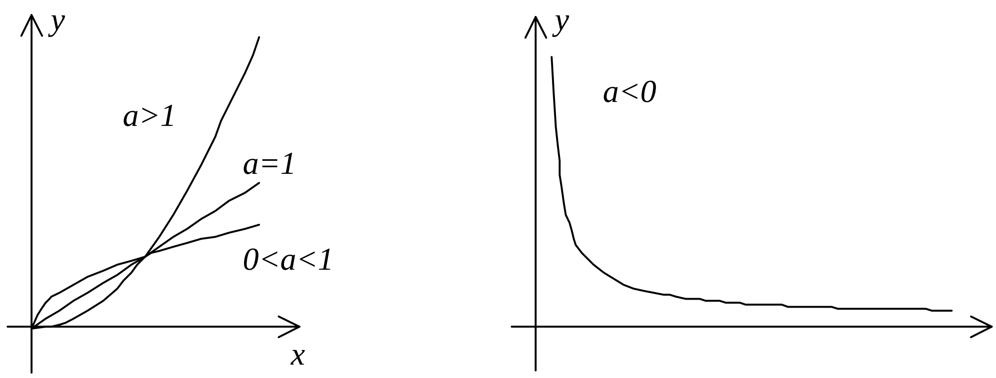


Степенная функция $y = x^{\frac{1}{n}}$ $(n = 2,3,4...)$, которая является корнем n-й степени из числа x и обозначается $y = \sqrt[n]{x}$, в случае четного числа n определена при $x > 0$. Если число n является нечетным, то эта функция определена при всех $x \in R$. В зависимости от числа n график корня имеет следующий вид:

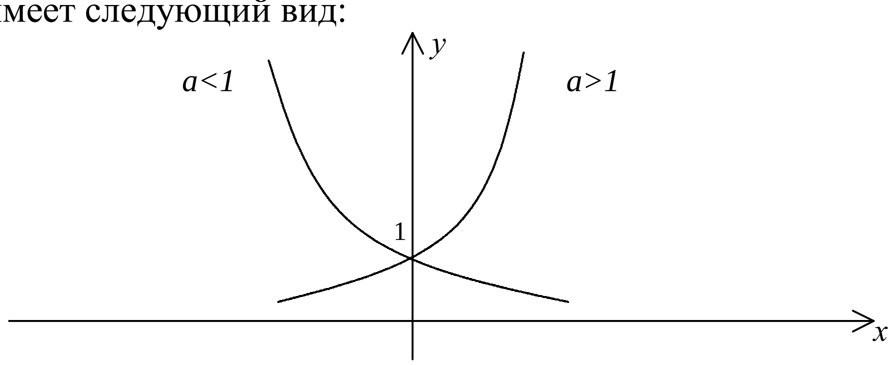


n – четно $\qquad$ n – нечетно

Степенная функция $y = x^a$, где a – фиксированное действительное число, определена при $x > 0$ и ее график изображен на следующем рисунке:



4. *Показательная функция* $y = a^x$, где число $a \neq 1$, $a > 0$. График этой функции имеет следующий вид:

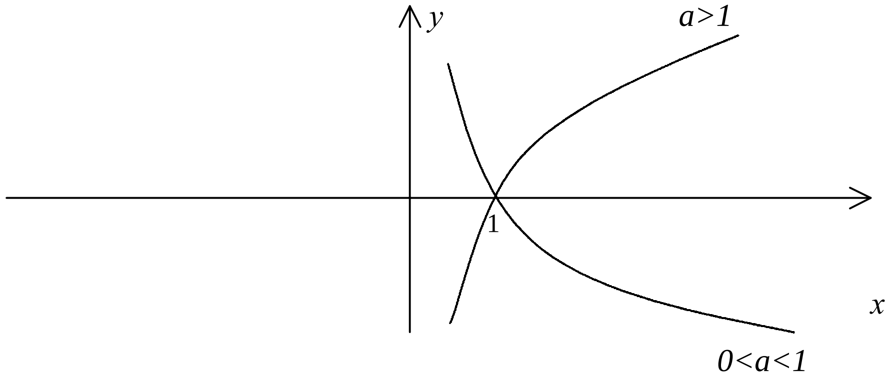


Показательная функция $y = e^x$ называется *экспонентой.*

5. *Логарифм* $y = log_a x$ при фиксированном основании $a \neq 1$, $a > 0$ определен при всех $x > 0$. Если взять в качестве основания число $e \approx 2{,}718...$, то полу-

чим логарифм, который называется *натуральным* и обозначается $log_e x = ln x$.

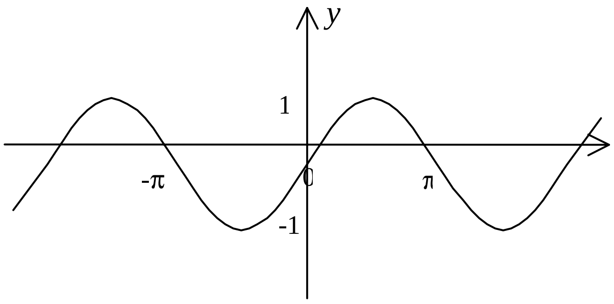
График функции $y = log_a x$ имеет следующий вид:

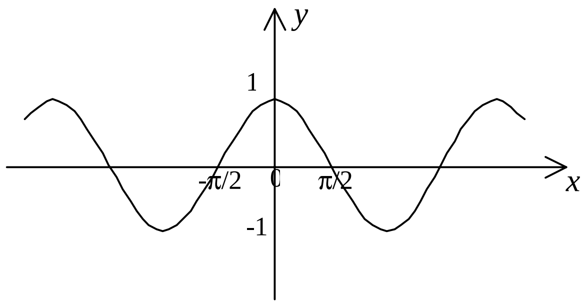


6. В школьном курсе подробно изучались тригонометрические функции

$$y = \sin x,\ y = \cos x,$$

которые определены при всех $x \in R$ и имеют следующие графики:



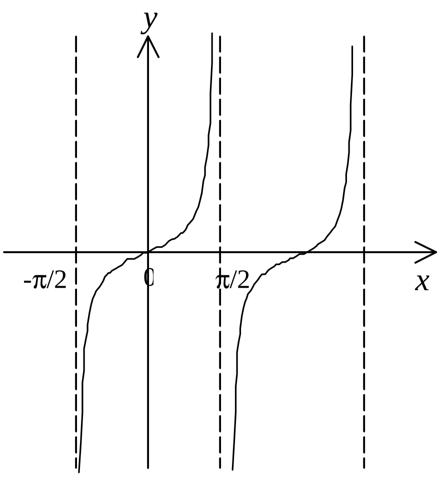


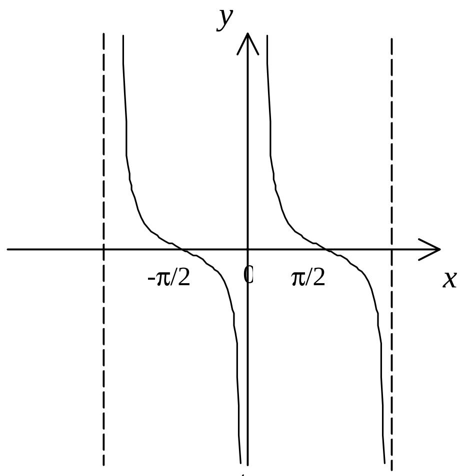
y = sin x *y = cos x*

С помощью этих функций определяются

$$tg\,x = \frac{sin x}{cos x},\quad x \neq k\pi\ (k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots);\quad ctg\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots).$$

Графики функций $y = tgx,\ y = ctgx$ имеют следующий вид:





y = tg x *y = ctg x*

Арифметические действия с функциями. С помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления

$$f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

можно, исходя из простейших функций, расширить класс функций. Именно с помощью этих операций из степенных функций конструируются функции Торнквиста.

Сложная функция. Функции вида $\cos x^2$, $e^{\sin x}$ нельзя получить с помощью арифметических действий из простейших. Для этого используется операция суперпозиции функций.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве $X\subset R$ и принимает значения из множества $Y\subset R$, а функция $z=F(y)$ определена на множестве Y. Тогда на множестве X определена функция

$$z=F(f(x)),$$

которая называется *сложной функцией*.

Пример. Функция $z=\cos x^2$ является суперпозицией двух функций $y=x^2$ и $z=\cos y$.

Обратная функция. Еще одна операция, с помощью которой строятся новые числовые функции, это вычисление обратной функции.

Теорема. Пусть на интервале (a,b) определена числовая функция $y=f(x)$, которая принимает *все* значения из интервала (A,B), то есть

$$\forall y\in(A,B)\Rightarrow \exists x\in(a,b) \text{ такой, что } y=f(x). \qquad (1)$$

Пусть для двух разных значений $x_i\,(i=1{,}2)$ из этого интервала функция принимает разные значения, то есть

$$x_1\in(a,b), x_2\in(a,b), x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2) \qquad (2)$$

Тогда на интервале (A,B) определена функция $x=F(y)$ такая, что

$$F(f(x))=x,\quad \forall x\in(a,b). \qquad (3)$$

Доказательство. Для каждого числа $y\in(A,B)$ существует единственное число $x\in(a,b)$ такое, что $y=f(x)$. Это число обозначим $x=F(y)$. Таким образом, получили функцию $x=F(y)$, которая определена на интервале (A,B) и удовлетворят тождеству (3).

Монотонные функции. Условие (2) выполнено для *монотонных* функций. Функция $f(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *возрастающей* (*убывающей*), если

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \quad (\ f(x_1)>f(x_2)).$$

Окрестность и проколотая окрестность точки. Для вычисления пределов функции достаточно знать значения этой функции вблизи рассматриваемой точки. С этой целью вводится понятие *окрестности* точки.

Определение. Окрестностью точки $x_0 \in R$ будем называть любой интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \forall \varepsilon > 0$. Чтобы подчеркнуть размеры окрестности, иногда говорят «ε-окрестность».

Упражнение. Показать, что пересечение и объединение двух окрестностей одной и той же точки являются ее окрестностями.

Пример. Рассмотрим производственную функцию $y = F(x)$ и построим отношение

$$f(x) = \frac{F(x)}{x} . \tag{4}$$

Оно характеризует количество выпускаемой продукции, приходящей на единицу затрачиваемого ресурса. Это отношение не определено при $x = 0$. Например, функция

$$y = \frac{\sin x}{x} \tag{5}$$

определена всюду, кроме точки $x = 0$. Чтобы изучать такие ситуации, нам потребуются понятия *проколотой окрестности* точки.

Определение. Проколотой окрестностью точки x_0 называется ее окрестность с выброшенной самой точкой x_0, то есть объединение двух интервалов

$$(x_0 - \varepsilon, x_0) \bigcup (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

Пример. Функция (5) определена в любой проколотой окрестности точки $x_0 = 0$.

Тема 13
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Допустим, что мы хотим вычислить значение отношения

$$y = \frac{\sin x}{x} \tag{1}$$

при $x \approx 0$. Это значит, что мы хотим определить (*если это возможно*) такое число A, чтобы при малых числах x приблизительно выполнялось равенство

$$\frac{\sin x}{x} \approx A.$$

Приблизительное равенство расшифровывается следующим образом:

$$\frac{\sin x}{x} = A + l(x),$$

где функция $l(x)$, определенная в проколотой окрестности точки 0, может быть сделана сколь угодно малой при стремлении переменной x к нулю.

Бесконечно малые в точке функции

Определение. Функция $l(x)$, определенная в проколотой окрестности точки x_0, называется *бесконечно малой* в этой точке, если для любого (*сколь угодно малого*) числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|l(x)| < \varepsilon$ при всех $x \neq x_0, |x - x_0| < \delta$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |l(x)| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Пример. Функции $l_1(x) = x - x_0, l_2(x) = |x - x_0|$ являются бесконечно малыми в точке x_0. В самом деле, возьмем $\delta = \varepsilon$. Тогда, если $0 < |x - x_0| < \delta$, то $|l_i(x)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Свойства бесконечно малых функций

Свойство 1. Функция $l(x)$ является бесконечно малой в точке x_0 тогда и только тогда, когда такой является функция $|l(x)|$.

Упражнение. Доказать это свойство.

Свойство 2. Сумма, разность, произведение двух бесконечно малых в точке x_0 функций $l_i(x), i = 1,2$, является бесконечно малой в этой точке функцией.

Доказательство проведем его для произведения. Существует число $\delta_1 > 0$ такое, что $|l_1(x)| < 1$ при всех $0 < |x - x_0| < \delta_1$. Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда существует число $\delta_2 > 0$ такое, что $|l_2(x)| < \varepsilon$ при всех $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Следовательно,

$$0 < |x - x_0| < \delta = min(\delta_1 ; \delta_2) \Rightarrow |l_1(x) l_2(x)| = |l_1(x)||l_2(x)| < 1\varepsilon = \varepsilon.$$

Упражнение. Доказать это утверждение для суммы и разности.

Следствие. При любом $k = 1,2,3,...$ функции $(x - x_0)^k$, $|x - x_0|^k$ являются бесконечно малыми в точке x_0. Это вытекает из разобранного выше случая $k = 1$ и из свойства 2.

Свойство 3. Пусть функция $l(x)$ является бесконечно малой в точке x_0, а функция $\varphi(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки. Тогда их произведение является бесконечно малой функцией в точке x_0.

Доказательство. *Ограниченность функции* $\varphi(x)$ *в проколотой окрестности* означает, что существует число $M > 0$ такое, что $|\varphi(x)| \leq M$ для всех x из проколотой окрестности точки x_0. Далее, согласно (2),

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |l(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Следовательно,

$$|l(x) \varphi(x)| = |l(x)||\varphi(x)| \leq |l(x)| \, M = \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon \quad \textit{для всех} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Это означает, что функция $l(x)\varphi(x)$ является бесконечно малой в точке x_0.
Следствие. Произведение бесконечно малой в точке x_0 функции $l(x)$ на число a является бесконечно малой в этой точке функцией.
Свойство 4. Пусть функции $l_i(x), i=1,2,3$ определены в проколотой окрестности точки x_0 и удовлетворяют неравенствам

$$l_1(x)\le l_2(x)\le l_3(x), \tag{3}$$

причем функции $l_1(x)$ и $l_3(x)$ являются бесконечно малыми в точке x_0. Тогда бесконечно малой в этой точке является и функция $l_2(x)$.
Доказательство. Возьмем любое число $\varepsilon>0$. Тогда существуют числа $\delta_1>0, \delta_2>0$ такие, что

$$0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |l_1(x)|<\varepsilon; \quad 0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |l_3(x)|<\varepsilon.$$

Следовательно,

$$0<|x-x_0|<\delta=min(\delta_1\ ;\delta_2)\Rightarrow -\varepsilon<l_1(x)<\varepsilon,\ -\varepsilon<l_3(x)<\varepsilon.$$

Отсюда и из неравенств (3) получим, что

$$0<|x-x_0|<\delta=min(\delta_1\ ;\delta_2)\Rightarrow -\varepsilon<l_2(x)<\varepsilon\ (\Leftrightarrow |l_2(x)|<\varepsilon).$$

Обозначение. Если функция $l(x)$ является бесконечно малой в точке x_0, то будем писать

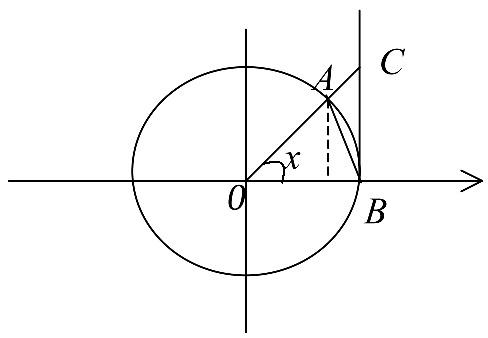
$$l(x)\xrightarrow{x_0}0 \text{ или } l(x)\to 0 \text{ при } x\to x_0. \tag{4}$$

Покажем, что функция $sin\,x\xrightarrow{0}0$. Для этого в начале докажем неравенство

$$|sin\,x|<|x|<|tg\,x|, \quad \forall x\ne 0, \tag{5}$$

из которого, применяя свойство 3, получим, что $sin\,x\xrightarrow{0}0$.

Рассмотрим окружность единичного радиуса и на ней возьмем точку А. Будем считать, что угол x>0 (см. рис.).



Тогда площадь треугольника *OAB* меньше площади сектора *OAB*, которая в свою очередь меньше площади треугольника *OCB*, то есть

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}tgx\Rightarrow \sin x<x<tgx.$$

Если x<0, то предыдущее равенство примет вид $|sin\,x|<|x|<|tgx|$.

Отсюда получаем требуемое неравенство (5).
Теперь можем перейти к определению предела функции в точке.

Предел функции в точке

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, которая определена в проколотой окрестности точки x_0.

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если

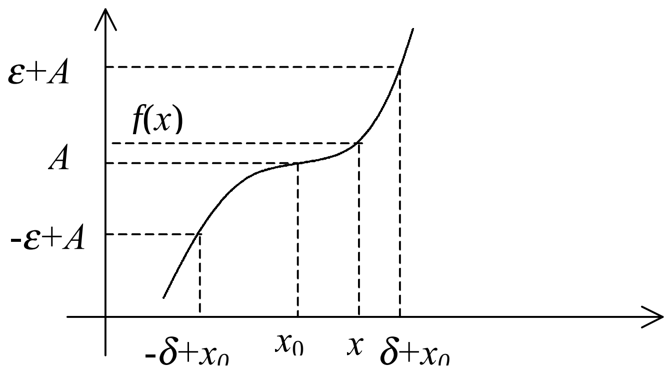
$$f(x)=A+l(x), \qquad (6)$$

причем функция $l(x)$ является бесконечно малой в точке x_0.

Определение (*эквивалентное*). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если функция $f(x)-A$ $(\Leftrightarrow |f(x)-A|)$ является бесконечно малой в точке x_0.

Определение (*эквивалентное*). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $|f(x)-A|<\varepsilon$ для всех чисел x таких, что $0<|x-x_0|<\delta$.

Геометрический смысл определения предела



Теорема *(о единственности предела).* Если существует предел функции в точке, то он единственен.

Доказательство. Допустим, что имеются два предела. Тогда

$$f(x)=A_i+l_i(x), \quad l_i(x)\xrightarrow{x_0}0,\ i=1,2; \quad \Rightarrow l_1(x)-l_2(x)=A_2-A_1\neq 0 .$$

Однако по свойству 2 разность $l_1(x)-l_2(x)$ двух бесконечно малых в точке x_0 функций должна быть бесконечно малой в этой точке. Полученное противоречие и доказывает единственность предела.

Предел функции в точке обозначается

$$(\lim_{x\to x_0} f(x)=A)\ или\ (f(x)\to A\ при\ x\to x_0)\ или\ (f(x)\xrightarrow{x\to x_0}A)\ или\ (f(x)\xrightarrow{x_0}A).$$

Пример (*первый замечательный предел*).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (7)$$

Доказательство. Пусть $x>0$. Тогда из неравенства (5) будем иметь

$$\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1\Leftrightarrow 0\le 1-\frac{\sin x}{x}\le 1-\cos x . \qquad (8)$$

Далее,

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \le 2\left|\sin\frac{x}{2}\right| \le 2\left|\frac{x}{2}\right| = |x|.$$

Отсюда и из (8) получим

$$0 < \left|1-\frac{\sin x}{x}\right| \le |x|. \qquad (9)$$

Неравенство (9) выполняется и для всех $x<0$. Применим к неравенству (9) свойство 4 для бесконечно малых. Получим, что функция $\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|$ является бесконечно малой в точке $x_0 = 0$. Отсюда следует требуемое равенство (7).

Свойства пределов функций в точке

Свойство 1. Если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \Rightarrow \lim_{x\to x_0}|f(x)| = |A|.$$

Доказательство. Имеем $0 \le \big|\, |f(x)| - |A| \,\big| \le |f(x) - A|$. Отсюда, применяя свойство 4 для бесконечно малых функций, получим, что

$$\big|\, |f(x)| - |A| \,\big| \xrightarrow{x_0} 0.$$

Свойство 2. Если $f(x) = c = const \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$.

Свойство 3 (*теорема о пределе суммы, разности, произведения и частного*).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности точки x_0 и существуют пределы

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \lim_{x\to x_0} g(x) = B.$$

Тогда существуют пределы суммы, разности, произведения этих функций и выполнены равенства

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big) = A \pm B, \quad \lim_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big) = AB. \qquad (10)$$

Если $B \ne 0$, то существует предел частного $\frac{f(x)}{g(x)}$ и выполнено равенство

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}. \qquad (11)$$

Доказательство проведем для случая частного. Имеем

$$f(x) = A + l_1(x), \quad g(x) = B + l_2(x); \quad l_i(x) \xrightarrow{x_0} 0, i = 1,2.$$

Так как число $B \ne 0$, то существует число $\delta > 0$ такое, что

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |l_2(x)| < \frac{|B|}{2}$. Отсюда, учитывая неравенство

$|B| - |g(x)| \le |g(x) - B| < \frac{|B|}{2}$, получим, что

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow 0<\frac{|B|}{2}<|g(x)| \quad \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|}<\frac{2}{|B|}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{A+l_1(x)}{B+l_2(x)}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{Bl_1(x)-Al_2(x)}{g(x)B}\right|\leq\frac{|l_1(x)|}{|g(x)|}+\left|\frac{A}{B}\right|\left|\frac{l_2(x)}{g(x)}\right|<\frac{2}{|B|}|l_1(x)|+\frac{2}{|B|^2}|A||l_2(x)|=l(x).$$

Как сумма двух бесконечно малых функций функция $l(x)$ является бесконечно малой в точке x_0. Поэтому, согласно свойству 4 для бесконечно малых, функция $\left|\frac{l(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|$ является бесконечно малой в этой точке. Это означает, что выполнено равенство (11).

Упражнение. Провести доказательство для суммы, разности и для произведения.

Следствие. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Тогда для $\forall c\in R \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0}(cf(x))=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Доказательство. Нужно применить теорему о пределе произведения для функций $f(x), g(x)=c$.

Свойство 4 (*оценочный признак существования предела*). Пусть в некоторой проколотой окрестности точки x_0 определены функции $f(x), g(x), p(x)$ такие, что

$$f(x)\leq g(x)\leq p(x) \quad и \quad \exists \lim_{x\to x_0} f(x)=A, \exists \lim_{x\to x_0} p(x)=A. \tag{12}$$

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

Доказательство. Из (12) получим неравенства $f(x)-A\leq g(x)-A\leq p(x)-A$. Поэтому, согласно свойству 4 для бесконечно малых, функция $g(x)-A$ является бесконечно малой в точке x_0. Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

Вычисление предела сложной функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0, а функция $z=F(y)$ определена в *окрестности* точки y_0. Допустим, что существует

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0.$$

Тогда, как следует из определения предела (7), существует такая проколотая окрестность точки x_0, что, для каждой точки x из которой, значения функции $y=f(x)$ находятся в той окрестности точки y_0, где определена функция $z=F(y)$. Следовательно, в некоторой проколотой окрестности точки x_0 определена *сложная функция* $z=F(f(x))$.

Свойство 5 (*теорема о пределе сложной функции*). Пусть функция $y = f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0, а функция $z = F(y)$ определена в *окрестности* точки y_0. Допустим, что существуют

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y\to y_0} F(y) = F(y_0). \tag{13}$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0} F(f(x)) = F\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = F(y_0). \tag{14}$$

Доказательство. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Тогда найдется число $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon \text{ для всех } |y - y_0| < \sigma. \tag{15}$$

Для найденного числа $\sigma > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - y_0| < \sigma$ для всех $0 < |x - x_0| < \delta$. Отсюда и из (15) получим, что

$$|F(f(x)) - F(y_0)| < \varepsilon \quad \text{для всех } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Это означает выполнение равенства (14).

Пример. Покажем, что для любого числа $\varpi \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\sin \varpi x}{x} = \varpi$.

В самом деле,

$$\frac{\sin \varpi x}{x} = \varpi \frac{\sin \varpi x}{\varpi x} = F(f(x)), где\ f(x) = \varpi x, \quad F(y) = \begin{cases} \varpi \frac{\sin y}{y}, & при\ y \neq 0, \\ \varpi, & при\ y = 0. \end{cases}$$

Для этих функций в точках $x_0 = 0, y_0 = 0$ выполнены равенства (13). Поэтому из формулы (14) получим требуемое значение предела.

Пример. Покажем, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

В самом деле,

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2 = F(f(x)), где\ F(y) = 2y^2,\ f(x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}.$$

Далее, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{y\to \frac{1}{2}} F(y) = \frac{1}{2}$. Применяя равенство (14), получим требуемое значение предела.

Теорема (*о пределах простейших функций*). Выполнены равенства

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0;\ \lim_{x\to x_0} |x| = |x_0|;\ \lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n,\ n = 2,3,...; \quad \forall x_0 \in R. \tag{16}$$

$$\lim_{x\to x_0} x^a = x_o^a, \forall a \in R, \quad \forall x_0 > 0. \tag{17}$$

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}, a \neq 1, a > 0, \forall x_0 \in R. \tag{18}$$

$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0, a \neq 1, a > 0, \forall x_0 > 0. \tag{19}$$

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0; \quad \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \quad для \forall x_0 \in R. \tag{20}$$

$$\lim_{x\to x_0} tgx = tgx_0 \left(x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right), \quad \lim_{x\to x_0} ctgx = ctgx_0 \ (x_0 \neq k\pi). \tag{21}$$

Доказательство. Первое равенство (16) следует из того, что

$$x = x_0 + (x - x_0), \ (x - x_0) \xrightarrow{x_0} 0.$$

Второе равенство (16) следует из свойства 1 для пределов.

Покажем, что при каждом целом $n \geq 1$ выполнено равенство

$$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n.$$

В самом деле, $x^2 = xx$ и $\lim_{x\to x_0} x = x_0$. Поэтому, $\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$. Пусть при некотором $n > 1$ выполнено $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$. Тогда из равенства $x^{n+1} = x^n x$ получим, что предыдущий предел верен и для $n+1$.

Равенства (17), (18) и (19) примем без доказательства.

Проведем доказательство равенств (20). Из неравенства (5) имеем, что

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2\sin\frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos\frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2\left| \sin\frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2\left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|.$$

Аналогично, $|\cos x - \cos x_0| = 2\left| \sin\frac{x - x_0}{2} \right| \left| \sin\frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2\left| \sin\frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$.

Далее,

$$x \to x_0 \Rightarrow |x - x_0| \xrightarrow{x_0} 0 \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| \xrightarrow{x_0} 0, |\cos x - \cos x_0| \xrightarrow{x_0} 0 \Rightarrow (20).$$

Применим к формулам $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}, ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ теорему о пределе частного двух функций. Тогда, согласно (20), будем иметь формулы (21).

Односторонние пределы функций в точке

Пример. Функция $y = \sqrt{x}$ определена при $x \geq 0$. Поэтому для нее в точке $x_0 = 0$ нельзя применять определение предела. Однако если устремить переменную x к нулю, оставляя ее все время больше нуля, то значение функции будет стремиться к нулю.

Таким образом, приходим к необходимости введения понятия одностороннего предела.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена при $x \in (x_0, x_0 + a) \ (x \in (x_0 - a, x_0)), a > 0$. Число A называется *правым* (*левым*) *пределом* этой функции в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $0 < \delta < a$ такое, что

$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad (x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Для односторонних пределов остаются справедливыми свойство единственности предела, теорема о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций.

Правый (*левый*) предел обозначается

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) \qquad \left(\lim_{x \to x_0 -} f(x) \right).$$

Пример. Покажем, что $\lim\limits_{x \to o+} \sqrt{x} = 0$. Возьмем $\delta = \varepsilon^2$. Тогда

$$0 < x < \delta = \varepsilon^2 \Rightarrow |f(x) - A| = \left|\sqrt{x} - 0\right| = \sqrt{x} < \varepsilon .$$

Упражнение. Доказать, что функция имеет в точке предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют ее правый и левый пределы, причем они равны.

Бесконечно большие функции в точке. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{1}{x}$. При стремлении переменной x к нулю значение функции можно сделать сколь угодно большим.

Определение. Функция $f(x)$, определенная в проколотой окрестности точки x_0, называется *бесконечно большой* (*положительной бесконечно большой* или *отрицательной бесконечно большой*), если для любого сколь угодно большого числа $E > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E \quad (f(x) > E \quad \text{или} \quad f(x) < -E).$$

В этом случае пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \text{ или } f(x) \xrightarrow{x_0} \infty;$$

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ или } f(x) \xrightarrow{x_0} +\infty; \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \text{ или } f(x) \xrightarrow{x_0} -\infty \right).$$

По аналогии с односторонними пределами определяют и односторонние бесконечные пределы

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = \begin{cases} \infty \\ +\infty; \\ -\infty \end{cases} \quad \lim_{x \to x_0 -} f(x) = \begin{cases} \infty \\ +\infty . \\ -\infty \end{cases}$$

Исследование поведения функции на бесконечности

Пусть функция $f(x)$ определена при всех $x > a$ (всех $x < a$).

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ B = B(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{для } \forall x > B(\varepsilon) \quad (\text{для } \forall x < -B(\varepsilon)). \tag{22}$$

Точно так же, как и для предела функции в точке, доказывается, что если эти пределы существуют, то они единственны. Эти пределы обозначаются

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A, \text{или } f(x)\to A \text{ при } x\to+\infty, \quad \text{или } f(x)\xrightarrow{x\to+\infty} A;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A, \text{или } f(x)\to A \text{ при } x\to-\infty, \quad \text{или } f(x)\xrightarrow{x\to-\infty} A.$$

Пусть функция $f(x)$ определена при всех $|x|>a$. Если у нее существуют пределы при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ и они равны, то общее значение этих пределов называется пределом функции при $x\to\infty$ и обозначается

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A, \quad \text{или } f(x)\to A \text{ при } x\to\infty, \quad \text{или } f(x)\xrightarrow{x\to\infty} A.$$

Упражнение. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \text{для } \forall\varepsilon>0\ \exists B=B(\varepsilon)>0$ такое, что $|\, f(x)-A\,|<\varepsilon$ для всех $|x|>B$.

Пример. Покажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-a}=0$. В самом деле, для $\forall\varepsilon>0$ возьмем $B=B(\varepsilon)=\dfrac{1}{\varepsilon}+|a|$. Тогда, если $|x|>B=\dfrac{1}{\varepsilon}+|a|$, то $|x-a|>|x|-|a|>\dfrac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\left|\dfrac{1}{x-a}\right|<\varepsilon$.

Для введенных пределов остаются справедливыми все свойства предела функции в точке.

Применим оценочный признак существования предела к вычислению ***второго замечательного предела***

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{23}$$

Докажем в начале, что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{24}$$

Пусть $x>1$. Обозначим через $n=[x]$ целую часть этого числа. Тогда

$$n\le x\le n+1\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Таким образом,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Далее,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\xrightarrow{n\to\infty}e1=e;\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}e1=e.$$

По оценочному признаку получаем равенство (24).

Пусть теперь $x \to -\infty$. Тогда $y = -x \to +\infty$ и

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y-1}\left(\frac{y}{y-1}\right) = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) \xrightarrow{y\to+\infty} e1 = e.$$

Применим теорему о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций к вычислению предела рациональной дроби. Пусть $n > m$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+\ldots+a_m}{b_0x^n+\ldots+b_n} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)\left(\frac{a_0+\ldots+a_m\dfrac{1}{x^m}}{b_0+\ldots+b_n\dfrac{1}{x^n}}\right)\right) = \left(\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{n-m}}\right)\left(\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_0+\ldots+a_m\dfrac{1}{x^m}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(b_0+\ldots+b_n\dfrac{1}{x^n}\right)}\right)\right) = 0.$$

Упражнение. Показать, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+\ldots+a_n}{b_0x^n+\ldots+b_n} = \frac{a_0}{b_0}.$$

Таблица пределов некоторых выражений

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad \text{(I)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \qquad \text{(II)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e. \qquad \text{(III)}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \qquad \text{(IV)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \qquad \text{(V)}$$

Формула (IV) следует из второго замечательного предела (III) при замене $x \to \dfrac{1}{x}$.

Докажем формулу (V). Используя теорему о пределе сложной функции и формулу (IV), получим

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1.$$

Бесконечно большие функции на бесконечности. Функция $f(x)$, определенная при всех $|x| > a$ $\quad(x > a;\ x < a)$, называется *бесконечно большой* (*бесконечно положительно большой, бесконечно отрицательно большой*) при $x \to \infty$ $(x \to +\infty;\ x \to -\infty)$, если для любого числа $E > 0$ можно указать число $B = B(E) > 0$ такое, что

$$|x| > B \Rightarrow |f(x)| > E \quad (f(x) > E; \quad f(x) < -E)$$

$$\begin{pmatrix} x > B \Rightarrow |f(x)| > E \quad (f(x) > E; \quad f(x) < -E) \\ x < -B \Rightarrow |f(x)| > E \quad (f(x) > E; \quad f(x) < -E) \end{pmatrix}.$$

Используются следующие обозначения:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \left(\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\right),$$

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\right), \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\right) \end{pmatrix},$$

Упражнение. Показать, что при $m > n$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^m + \ldots + a_m}{b_0 x^n + \ldots + b_n} = \infty .$$

Асимптоты к графику функции. Пусть функция $f(x)$ определена при $x > a$ $(x < a)$.

Определение. Прямая

$$y = kx + b \tag{25}$$

называется *наклонной асимптотой* к графику функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если верно равенство

$$f(x) = kx + b + \beta(x), \tag{26}$$

где

$$\beta(x) = 0 \ (\lim_{x\to-\infty} \beta(x) = 0). \tag{27}$$

Теорема. Для того чтобы функция $f(x)$ имела наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \tag{28}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b. \tag{29}$$

(Аналогично для $x \to -\infty$).

Доказательство. Пусть прямая является наклонной асимптотой при $x \to +\infty$. Тогда выполняются соотношения (26) и (27). Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\beta(x)}{x}\right) = k .$$

Далее,

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \beta(x)) = b .$$

Пусть теперь существуют пределы (28) и (29). Тогда из (29) следует, что

$$f(x) - kx - b = \beta(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 0.$$

Отсюда следуют равенства (26) и (27).

Экономический смысл коэффициента k. Если $f(x)$ – производственная функция, то число k является предельным значением количества выпускаемой продукции, приходящегося на единицу затраченных ресурсов, когда количество затраченных ресурсов стремится к бесконечности.

Тема 14

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

При вычислении предела сложной функции мы использовали следующее свойство:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Определение. Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, называется *непрерывной в этой точке*, если существует ее предел в этой точке и выполнено равенство (1).

Пример. Ранее отмечалось, что простейшие функции $y = kx + b$, $y = |x|$, $y = x^a$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ в каждой точке области определения удовлетворяют этому условию.

Упражнение. Можно ли доопределить при $x = 0$ функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ так, чтобы она была непрерывна в этой точке?

Решение. Имеем $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Поэтому полагаем $f(0) = 1$.

Свойства функций, непрерывных в точке.

Теорема (*о знаке непрерывной функции*). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в этой точке. Пусть $f(x_0) < 0$ $(f(x_0) > 0)$.Тогда в некоторой окрестности этой точки $f(x) < 0$ $\quad (f(x) > 0)$.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = -\dfrac{f(x)}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ такое, что

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < -\frac{f(x_0)}{2} \Leftrightarrow f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} < 0.$$

Теорема (*о непрерывности суммы, разности, произведения и частного функций).* Пусть функции $f(x), g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывны в этой точке. Тогда в этой точке непрерывна их сумма, разность, произведение. Если $g(x_0) \neq 0$, то непрерывным в точке x_0 будет частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Доказательство. Непрерывность суммы, разности и произведения следует из теоремы о пределе суммы, разности, произведения двух функций.

Рассмотрим случай частного. Пусть, например, $f(x_0) > 0$. Тогда, согласно предыдущей теореме, $f(x) > 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Непрерывность частного следует из теоремы о пределе частного двух функций.

Теорема (*о предельном значении непрерывной функции на сходящейся последовательности*). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в этой точке. Тогда для любой числовой последовательности $x_n \to x_0$ выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0). \tag{2}$$

Доказательство. Возьмем $\forall\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Из сходимости последовательности следует, что для числа $\delta > 0$ существует номер N такой, что $\forall n > N \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta$. Отсюда и из (3) следует, что $\forall n > N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Теорема (*о непрерывности сложной функции*). Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и непрерывна в этой точке. Пусть функция $z = F(y)$ определена в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и непрерывна в этой точке. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $\varphi(x) = F(f(x))$, которая является непрерывной в точке x_0.

Доказательство следует из теоремы о пределе сложной функции.

Разрывные в точке функции. Функция, определенная в окрестности точки x_0 и не являющаяся непрерывной в ней, называется *разрывной* в этой точке. Это означает, что, либо не существует предела функции в рассматриваемой точке, либо значение предела не совпадает со значением функции в этой точке.

В случае, когда $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, можно переопределить значение функции в рассматриваемой точке, положив его равным значению предела. После этого получившаяся функция будет непрерывной в точке x_0. Такие точки разрыва функции называются *устранимыми*.

Может оказаться, что существуют односторонние пределы функции в рассматриваемой точке и они не равны. Такие точки разрыва функции называются разрывами *первого рода*.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение. Говорят, что функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, когда она непрерывна в каждой точке $x_0 \in (a,b)$, а в концах этого отрезка выполнены равенства $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a), \lim\limits_{x\to b-} f(x)=f(b)$.

Теорема (*о нуле непрерывной на отрезке функции*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и в концах этого отрезка она принимает значения разного знака. Тогда она обращается в нуль в некоторой точке этого отрезка.

Доказательство. Для определенности считаем, что $f(a)<0,\ f(b)>0$.

Разобьем этот отрезок пополам. Если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$, то все доказано.

Считаем, что $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>0$. Обозначим $a_1=a, b_1=\dfrac{a+b}{2}$. Тогда

$$a\le a_1\le b_1\le b,\quad b_1-a_1=\frac{b-a}{2},\quad f(a_1)<0,\ f(b_1)>0.$$

Разобьем отрезок $[a_1,b_1]$ пополам и применим предыдущие рассуждения и так далее. Таким образом, либо на конечном шаге найдем точку, где функция обращается в нуль, либо построим последовательности $a\le a_1\le\ldots\le a_n\le\ldots\le b_n\le\ldots\le b_1\le b$ такие, что

$$f(a_n)<0,\ f(b_n)>0;\ b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}.$$

Последовательность $a_n\ (b_n)$ возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу) числом $b\ (a)$. Поэтому по теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n=B$. Покажем, что значения этих пределов равны.

$$B-A=\lim_{n\to\infty} b_n-\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0\Rightarrow A=B=C\Rightarrow a_n\to C, b_n\to C.$$

Рассматриваемая функция непрерывна на отрезке. По теореме о предельном значении непрерывной функции на сходящейся последовательности имеем, что $f(a_n)\to f(C), f(b_n)\to f(C)$. Далее,

$$f(a_n)<0\Rightarrow f(C)\le 0;\ f(b_n)>0\Rightarrow f(C)\ge 0 \quad\Rightarrow\quad f(C)=0.$$

Замечание. Эта теорема используется при доказательстве того, что какое-то уравнение имеет корень. В школьном курсе математики именно на ней базируется метод интервалов для решения неравенств.

Теорема (*об ограниченности непрерывной на отрезке функции*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, то есть

$$\exists M>0:\quad \forall x\in[a,b]\Rightarrow|f(x)|\le M.$$

Доказательство. Предположим, что функция не является ограниченной. Тогда для каждого числа $n=1,2,3,\ldots$. найдется точка $x_n\in[a,b]\Rightarrow|f(x_n)|>n$.

Из этой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k}\to c\in[a,b]$. Из теоремы о предельном значении непрерывной функции на сходящейся последовательности следует, что $f\left(x_{n_k}\right)\to f(c)$. С другой стороны, $f(x_{n_k})\geq n_k\to+\infty \Rightarrow f(x_{n_k})\to+\infty$. Получили противоречие.

Теорема (*Вейерштрасса*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует точка $\exists c\in[a,b]$, в которой функция принимает наибольшее (наименьшее) значение, то есть

$$x\in[a,b]\Rightarrow f(c)\geq f(x) \quad (f(c)\leq f(x)).$$

Доказательство. Так как функция непрерывна на отрезке, то она на нем ограничена. Поэтому ее множество значений является ограниченным числовым множеством. Следовательно, у него существуют как верхняя $M=\sup f(x)$, так и нижняя $m=\inf f(x)$ грани. Рассмотрим верхнюю грань. Из ее определения следует, что $x\in[a,b]\Rightarrow M\geq f(x)$. Поэтому нужно показать, что $\exists c\in[a,b]$, где $f(c)=M$. Из определения верхней грани следует, что для любого числа $n=1,2,3,\ldots$ найдется точка $x_n\in[a,b]$ такая, что

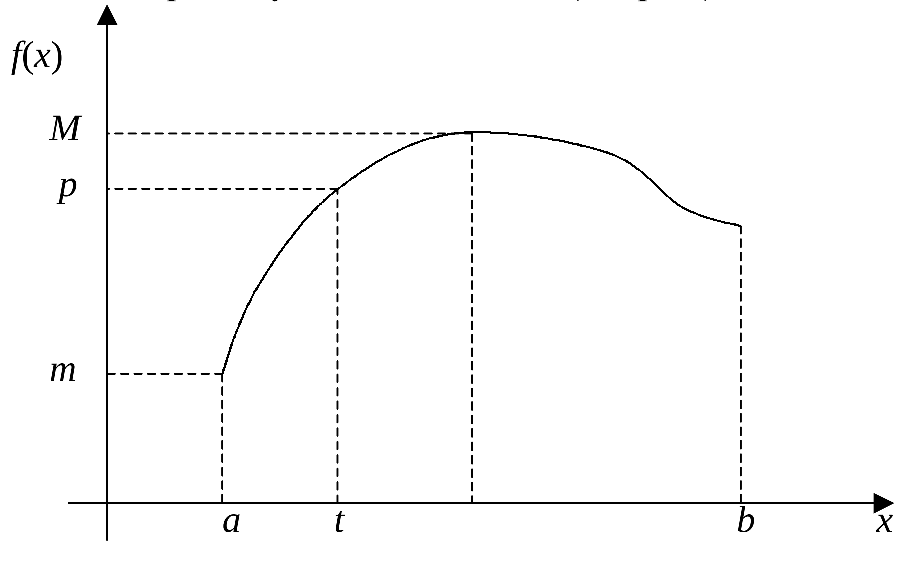
$$M-\frac{1}{n}\leq f(x_n)\leq M. \qquad (4)$$

Из этой числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k}\to c\in[a,b]$. Из непрерывности рассматриваемой функции получим, что $f(x_{n_k})\to f(c)$. Отсюда и из неравенства (4) следует, что $f(c)=M$.

Замечание. При нахождении максимальных и минимальных значений важно знать, что они существуют. Ответ на этот вопрос часто можно получить применив теорему Вейерштрасса.

Теорема (*о промежуточных значениях непрерывной функции*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Обозначим через M (m) ее максимальное (минимальное) значение на этом отрезке. Тогда для любого числа $p\in[m,M]$ найдется точка $t\in[a,b]$ такая, что $f(t)=p$.

Замечание. Эта теорема говорит, что непрерывная на отрезке функция принимает все свои промежуточные значения (см. рис.).



Доказательство. Согласно предыдущей теореме существуют точки

$$x_M\ (x_m)\in[a,b]\Rightarrow f(x_M)=M \quad (f(x_m)=m).$$

Рассмотрим непрерывную функцию $F(x)=f(x)-p$. Тогда $F(x_m)=m-p<0, F(x_M)=M-p>0$. По теореме о нуле непрерывной на отрезке функции требуемая точка t находится между точками x_m, x_M.

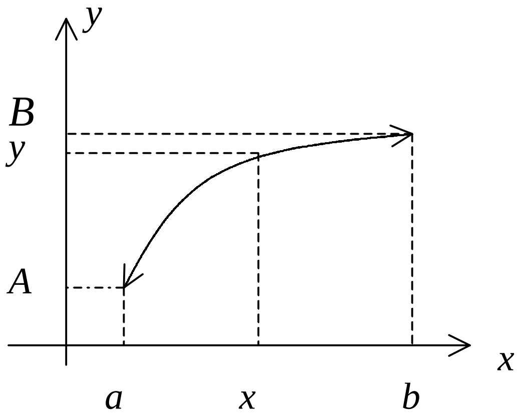
Непрерывность обратной функции. В теореме об обратной функции требовалось, чтобы исходная функция принимала все свои промежуточные значения. Этим свойством, как мы видели, обладает непрерывная функция.

Теорема (*о существовании и непрерывности обратной функции*). Пусть на интервале (a,b) определена *непрерывная возрастающая* (*убывающая*) функция $y=f(x)$. Обозначим

$$A=inf\{y: y=f(x), a<x<b\}, \quad B=sup\{y: y=f(x), a<x<b\}. \qquad (5)$$

Тогда на интервале (A,B) определена *обратная* функция $x=F(y)$, которая возрастает (убывает) на этом интервале и является непрерывной в каждой точке этого интервала.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда функция возрастает. Покажем, что для любого $y\in(A,B)$ существует число $x\in(a,b)$ такое, что $y=f(x)$ (см. рис.) .



В самом деле, из (5) следует, что найдутся числа $a<a_1<b_1<b$ такие, что $A<f(a_1)<y<f(b_1)<B$. Далее нужно применить теорему о промежуточном значении для непрерывной функции на отрезке $[a_1,b_1]$. По теореме об обратной функции на интервале (A,B) определена *возрастающая* функция $F(y)$ такая, что

$$F(y)\in(a,b), \forall y\in(A,B); \quad x=F(f(x)), \forall x\in(a,b); \qquad y=f(F(y)), \forall y\in(A,B). \quad (6)$$

Покажем, что она непрерывна. Допустим, что в некоторой точке $y_0\in(A,B)$ она является разрывной. Это значит, что *существует* число $\varepsilon_0>0$ такое, что для *каждого* числа $\delta_n=\dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,3,...)$ *найдется* точка $y_n\in(A,B)$ такая, что

$$|y_n - y_0| < \frac{1}{n}, \quad |F(y_n) - F(y_0)| \geq \varepsilon_0. \qquad (7)$$

Считаем, для определенности, что все $y_n > y_0$. Тогда неравенства (7) примут следующий вид:

$$y_0 < y_n < y_0 + \frac{1}{n}, \quad F(y_n) \geq F(y_0) + \varepsilon_0. \qquad (8)$$

В силу первого неравенства (8) можем считать, что числовая последовательность $\{y_n\}$ убывает. Будем рассматривать номера n достаточно большими, чтобы $y_0 + \frac{1}{n} < B$. Тогда числовая последовательность $x_n = F(y_n)$ также убывает и, согласно первому неравенству (8),

$$b > F\left(y_0 + \frac{1}{n}\right) > x_n = F(y_n) > F(y_0) > a. \qquad (9)$$

По теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности $x_n \to x_0 \in (a,b)$. По условию теоремы функция $f(x)$ является непрерывной. Поэтому, применяя теорему о предельном значении непрерывной функции на сходящейся последовательности, получим, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0). \qquad (10)$$

Далее, согласно (6), $f(x_n) = y_n$. Отсюда и из первого неравенства (8) следует, что $f(x_n) \to y_0$. Учитывая равенство (10), будем иметь $f(x_0) = y_0$ или

$$x_0 = F(y_0). \qquad (11)$$

С другой стороны, ссогласно второму неравенству (8),

$$x_n \geq F(y_0) + \varepsilon_0 \Rightarrow x_0 \geq F(y_0) + \varepsilon_0 > F(y_0).$$

Получили противоречие с равенством (11).

Определение степенной, показательной функций и логарифма

Используя теорему о непрерывности обратной функции, дадим сейчас определение этих функций.

Корень n-й степени. При любом числе $n = 1,2,3,...$ степенная функция при любом $x > 0$ строго возрастает, непрерывна и принимает значение из $(0;+\infty)$. По теореме о существовании и непрерывности обратной функции на этом промежутке определена обратная функция $x = y^{\frac{1}{n}}$. Она непрерывна в каждой его точке и строго возрастает. Переобозначая переменные, получим функцию *корень n-й степени*

$$y = x^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow y = \sqrt[n]{x}.$$

Отметим (и это дальше будем использовать), что $x^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \left(0 < x^{\frac{1}{n}} < 1\right)$ при $x > 1 \quad (0 < x < 1)$.

Случай рационального показателя. При целых $n = 1,2,3,\ldots \quad m = 1,2,3,\ldots$ рассмотрим функцию

$$y = x^{\frac{m}{n}} = \underbrace{x^{1/n} x^{1/n} \ldots x^{1/n}}_{m}.$$

Эта функция определена при всех $x > 0$ и по теореме о непрерывности произведения непрерывных функций она непрерывна.
Для отрицательных целых чисел m эту функцию определяем формулой

$$y = x^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{-\frac{m}{n}}}, \quad x > 0.$$

По теореме о непрерывности частного эта функция будет непрерывной в каждой точке области определения.

Показательная функция. Возьмем число $0 < a \neq 1$. Тогда при каждом рациональном числе $x = \dfrac{m}{n}$ определено число

$$a^x = a^{\frac{m}{n}}.$$

Лемма. Если $x_1 = \dfrac{m_1}{n_1}, x_2 = \dfrac{m_2}{n_2}$, то $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$.

Доказательство. Рассмотрим случай положительных чисел. Тогда

$$x_1 = \frac{m_1 n_2}{n_1 n_2}, x_2 = \frac{m_2 n_1}{n_1 n_2} \Rightarrow a^{x_1} a^{x_2} = (a^{\frac{1}{n_1 n_2}} \ldots a^{\frac{1}{n_1 n_2}})(a^{\frac{1}{n_1 n_2}} \ldots a^{\frac{1}{n_1 n_2}}) = a^{\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}} = a^{x_1 + x_2}.$$

Лемма. Для любого положительного рационального числа x выполнено неравенство $a^x > 1 \quad \left(a^x < 1\right)$, если $a > 1 \, (0 < a < 1)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $a > 1$. Тогда

$$x = \frac{m}{n}, a^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \Rightarrow \quad a^x = a^{\frac{1}{n}} \ldots a^{\frac{1}{n}} > 1.$$

Лемма. Если $a > 1 \quad (0 < a < 1), \quad x_1 < x_2$ – два рациональных числа, то

$$a^{x_1} < a^{x_2} \quad \left(a^{x_1} > a^{x_2}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим случай $a > 1$. Тогда

$$a^{x_2} = a^{(x_2 - x_1) + x_1} = a^{x_2 - x_1} a^{x_1} > 1.a^{x_1} = a^{x_1}.$$

Пусть число x является иррациональным. Возьмем возрастающую последовательность рациональных чисел $x_n \to x$. Тогда числовая последовательность a^{x_n} в случае $a>1$ $(0<a<1)$ возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу). По теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности у нее существует предел. Доказывается, что значение этого предела не зависит от выбранной последовательности. Его значение и принимается за число a^x. Эта функция определена при всех $x \in R$ и является непрерывной.

Логарифм. При $a>1$ $(0<a<1)$ степенная функция $y=a^x$ возрастает (убывает) и принимает значения из интервала $(0,+\infty)$. По теореме об обратной функции на этом интервале определена обратная функция, которая обозначается $x=log_a y, y>0$.

Переобозначая переменные, получим функцию $y=log_a x$, которая определена при всех $x>0$ и является непрерывной.

Если взять в качестве основания взять число $e \approx 2{,}718$, то получим логарифм $\log_e x$, который называется *натуральным* логарифмом и обозначается $ln x$.

Тема 15

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Пример. Рассмотрим производство, в котором используемые ресурсы характеризуются одним числом x, а максимально возможное количество выпускаемой продукции при использовании этого количества ресурсов задается *производственной функцией* $y=f(x)$. Привлечение нового $\Delta x>0$ количества ресурсов (либо сокращение, если $\Delta x<0$) приведет к тому, что максимально возможный выпуск будет равен $f(x+\Delta x)$, а его прирост составит

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Уровень организации производства характеризует доля прироста, приходящегося на одну единицу вновь привлекаемого количества ресурсов, а именно

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Для производственной функции $y=x^a$ формула (1) примет следующий вид:

$$\frac{(x+\Delta x)^a-x^a}{\Delta x}.$$

При $a=2$ имеем

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

При $a=3$ формула (1) примет вид

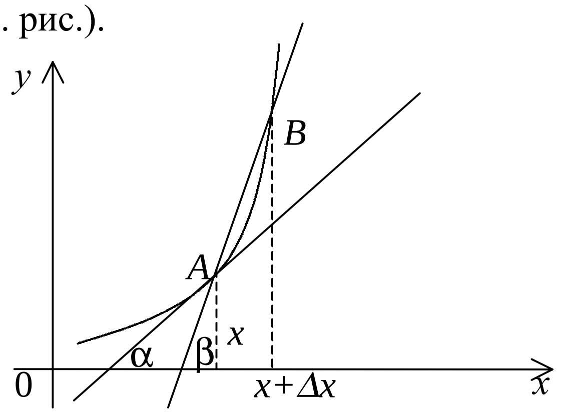
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 3x^2+3x\,\Delta x+(\Delta x)^2 .$$

Для более сложных зависимостей доля прироста (1) вычисляется гораздо сложнее. Оказывается, что достаточно просто вычисляется предельное значение

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \qquad (2)$$

которое называется *предельным продуктом*. При незначительном приросте Δx предельное значение (2) будет мало отличаться от величины (1).

Пример. Рассмотрим график функции $y=f(x)$. Хотим определить угол α, который образует с осью Ox касательная, проведенная к графику функции в точке $A(x, f(x))$ (см. рис.).



Для этого возьмем на графике точку $B(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. Угол, который образует секущая BA с осью Ox, обозначим β. Тогда

$$tg\beta=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Устремим $\Delta x\to 0 \Rightarrow B\to A;\ \beta\to\alpha \Rightarrow tg\beta\to tg\alpha$ (здесь используется непрерывность функции tg). Таким образом,

$$tg\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Имеется еще ряд задач, которые приводят к вычислению пределов вида (2). Отвлекаясь от этих конкретных задач, дадим следующее определение.

Определение. Пусть функция f определена в окрестности точки x. Если существует предел (2) , то его значение называется производной функции f в точке f и обозначается $f'(x)$. Таким образом,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (4)$$

Пример. Имеем $(x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1,$

$$(x^2)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x .$$

Пример. Пусть $f(x)=|x|$ и точка $x=0$. Тогда

$$\frac{f(0+\Delta x)\ -f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0\\ -1, & \Delta x<0\end{cases}.$$

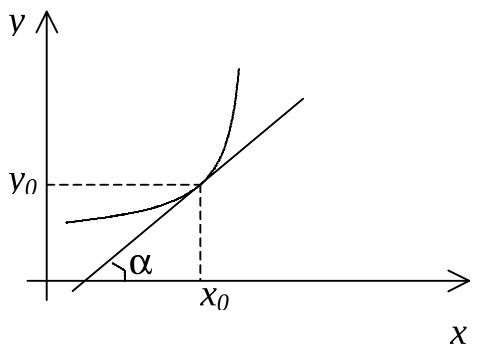
Отсюда видно, что при $\Delta x\to 0$ предел отношения не существует (существуют только односторонние пределы и они не равны). Следовательно, функция $|x|$ не имеет производной в точке $x=0$. Значит, *не все функции имеют производные.*

С привлечением понятия касательной к графику функции, дадим геометрическое объяснение предыдущему примеру.

Уравнение касательной. Из формулы (3) следует, что

$$tg\alpha = f'(x). \tag{5}$$

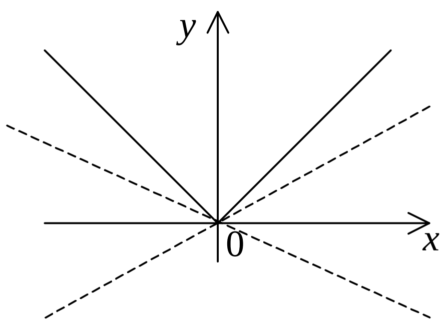
Поэтому уравнение касательной, проведенной к графику функции в точке с координатами $x_0, y_0 = f(x_0)$ (см. рис.)



имеет вид
$$y=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0). \tag{6}$$

Замечание. Если в точке x_0 существует производная функции, то в соответствующей точке на ее графике можно провести касательную и только одну.

График функции $y=|x|$ в точке $x=0$ имеет «угол». В этой точке можно провести сколь угодно много прямых линий, имеющих с графиком функции только одну общую точку (см. рис.).



Замечание. Для определения производной используется и такая запись:

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}. \tag{7}$$

Приведем еще одно применение понятия производной в экономических исследованиях.

Пример (*эластичность спроса по цене*). Пусть связь между количеством p покупаемой продукции при данной цене q задается функцией спроса $p=f(q)$. При изменении цены на величину Δq спрос изменится на некоторую величину Δp. В качестве показателей, которые характеризуют уровень изменения цены и спроса, используются их процентные изменения $\frac{\Delta q}{q};\frac{\Delta p}{p}$.

Отношение процента прироста спроса к проценту прироста цены называется *эластичностью спроса по цене* и ее величина равняется

$$\frac{\frac{\Delta p}{p}}{\frac{\Delta q}{q}}=\frac{\Delta p}{\Delta q}\cdot\frac{q}{p}.$$

Предел этого отношения при $\Delta q\to 0$ равен

$$E=f'(q)\cdot\frac{q}{p}\Rightarrow E\frac{\Delta q}{q}\approx\frac{\Delta p}{p}.$$

Следовательно, если значение E мало, то процентное изменение спроса будет малым при достаточно больших процентных изменениях цен, и наоборот.

Вычисление производных простейших функций. Покажем, что

$$\left(a^x\right)'=a^x\ln a,\quad 0<a\neq 1. \tag{8}$$

В самом деле,

$$\left(a^x\right)'=\left(e^{x\ln a}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{(x+\Delta x)\ln a}-e^{x\ln a}}{\Delta x}=e^{x\ln a}\ln a\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x\ln a}-1}{\Delta x\ln a}=a^x\ln a\lim_{t\to o}\frac{e^t-1}{t}=a^x\ln a$$

В частности,

$$\left(e^x\right)'=e^x. \tag{9}$$

Далее,

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\log_a e,\quad 0<a\neq 1. \tag{10}$$

Действительно, используя формулу перехода к новому основанию, получим

$$(\log_a x)'=\left((\log_a e)\ln x\right)'=\log_a e\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a e\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\log_a e\cdot$$

В частности,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad . \tag{11}$$

Для тригонометрических функций имеем

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x. \tag{12}$$

Действительно,

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Аналогично,

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x.$$

Тема 16
ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Непрерывная в точке x функция f принимает значения $f(t) \approx f(x)$ для всех t достаточно близких к этой точке. Часто возникает потребность в более точной оценке разности значений функции.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ *дифференцируема* в точке x, если она определена в некоторой окрестности этой точки и существуют число F и бесконечно малая в этой точке функция $\alpha(t)$ такие, что

$$f(t) = f(x) + (t-x)F + (t-x)\alpha(t), \quad \left(F \in R; \alpha(t) \xrightarrow{x} 0\right) \tag{1}$$

для всех точек t из этой окрестности.

Замечание. Из формулы (1) следует, что в окрестности точки x дифференцируемую функцию приблизительно можно заменить линейной функцией, а именно

$$f(t) \approx f(x) + (t-x)F .$$

Пример. Пусть $f(x) = x + x^2$. Тогда

$$f(t) = t + t^2 = x + x^2 + (t-x)(1+2x) + (t-x)^2 \Rightarrow F = 1 + 2x, \alpha(t) = t - x \xrightarrow{x} 0.$$

Теорема (*критерий дифференцируемости функции*). Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x, дифференцируема в этой точке тогда и только тогда, когда существует производная $f'(x)$. При этом $F = f'(x)$.

Доказательство. Пусть существует производная $f'(x)$. Обозначим

$$\alpha(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x).$$

Тогда

$$f(t) = f(x) + (t - x)f'(x) + (t - x)\alpha(t), \quad \left(\alpha(t) \xrightarrow{x} 0\right). \tag{2}$$

Пусть теперь выполнено равенство (1) . Тогда

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = F + \alpha(t), \qquad \lim_{t \to x} \alpha(t) = 0.$$

Следовательно, существует производная $f'(x) = F$.

Свойства дифференцируемых функций

Свойство 1. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Правая часть равенства (1) стремится к нулю при $t \to x$. Следовательно, $\lim\limits_{t \to x} f(t) = f(x)$.

Свойство 2 . Пусть функция $f(x) = c = const$ в окрестности точки x. Тогда она дифференцируема в этой точке и ее производная равна нулю.

Доказательство. Из определения производной

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \tag{3}$$

и из равенства $f(t) - f(x) = 0$ для постоянной функции получим, что $f'(x) = 0$.

Свойство 3 (*теорема о производной суммы, разности, произведения и частного двух функций*). Пусть функции $u(x), v(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда в этой точке дифференцируемы их сумма, разность, произведение и выполнены равенства

$$\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Если функция $v(x)$ отлична от нуля в точке x, то в этой точке дифференцируемой функцией является частное и выполнено равенство

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Доказательство проведем для случая произведения. Из формулы (2) имеем

$$u(t) = u(x) + (t - x)u'(x) + (t - x)\alpha(t), \quad \alpha(t) \xrightarrow{x} 0\,;$$

$$v(t) = v(x) + (t - x)v'(x) + (t - x)\beta(t), \quad \beta(t) \xrightarrow{x} 0\,.$$

Следовательно,

$$u(t)v(t)=u(x)v(x)+(t-x)(u'(x)v(x)+u(x)v'(x))+(t-x)\chi(t),$$

$$\chi(t)=u(x)\beta(t)+v(x)\alpha(t)+(t-x)(u'(x)v'(x)+u'(x)\beta(t)+v'(x)\alpha(t)+\alpha(t)\beta(t))\xrightarrow{x}0.$$

Отсюда и из критерия дифференцируемости получаем требуемое равенство.

Упражнение. Провести доказательство оставшихся случаев.

Следствие. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда при любом числе c функция $cf(x)$ является дифференцируемой в этой точке и выполнено равенство

$$(cf(x))'=cf'(x).$$

Доказательство. Нужно применить формулу вычисления производной произведения двух функций $u(x)=f(x), v(x)=c$.

Пример. Покажем, что

$$(tgx)'=\frac{1}{cos^2 x},\qquad (ctgx)'=-\frac{1}{sin^2 x}. \tag{4}$$

В самом деле,

$$(tgx)'=\left(\frac{sin\,x}{cos\,x}\right)'=\frac{(sin\,x)'\,cos\,x-sin\,x(cos\,x)'}{cos^2 x}=\frac{cos^2 x+sin^2 x}{cos^2 x}=\frac{1}{cos^2 x}.$$

Упражнение. Вывести вторую формулу (4).

Пример. Вычислить производную функции $f(x)=x|x|$ в точке $x=0$. Производная функции модуля в этой точке не существует. Поэтому формулой для производной произведения не можем воспользоваться. Будем вычислять производную исходя из определения

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x|\Delta x|}{\Delta x}=0.$$

В этом примере одна функция не дифференцируема, другая функция дифференцируема, но их произведение дифференцируемо.

Теорема (*о производной сложной функции*). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $U(y)$ дифференцируема в точке $y=f(x)$. Тогда сложная функция $u(x)=U(f(x))$ дифференцируема в точке x и выполняется равенство

$$u'(x)=U'(f(x))\cdot f'(x). \tag{5}$$

Доказательство. Из формулы (2) имеем равенство

$$U(z)=U(y)+(z-y)U'(y)+(z-y)\beta(z),\quad \beta(z)\xrightarrow{y}0.$$

Подставим сюда $z=f(t), y=f(x)$. Тогда

$$u(t)=U(f(t))=U(f(x))+(f(t)-f(x))U'(f(x))+(f(t)-f(x))\beta(f(t)),\quad \beta(f(t))\xrightarrow{x}0.$$

Следовательно,

$$u'(x)=\lim_{t\to x}\frac{u(t)-u(x)}{t-x}=\lim_{t\to x}\left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\big(U'(f(x))+\beta(f(t))\big)\right)=f'(x)U'(f(x)).$$

Таким образом, формула (5) доказана.

Пример. Применим формулу (5) к вычислению производной степенной функции. Покажем, что

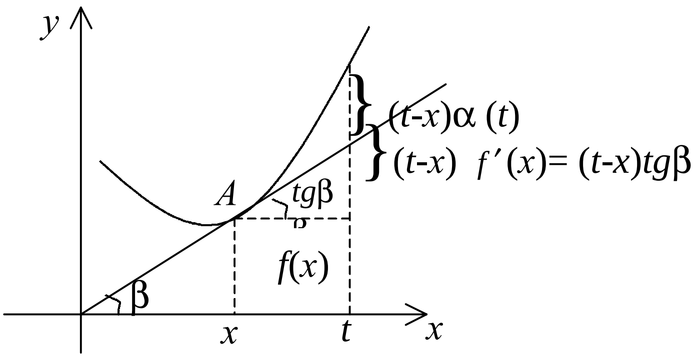
$$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}. \tag{6}$$

В самом деле,

$$\left(x^{\alpha}\right)'=\left(e^{\alpha \ln x}\right)'=\left(e^{\alpha \ln x}\right)(\alpha \ln x)'=\frac{\alpha}{x}e^{\alpha \ln x}=\frac{\alpha}{x}x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Дифференциал функции. Дадим формуле (2) геометрическую интерпретацию. Слагаемое $(t-x)f'(x)$ в формуле (2) называется *главной частью* приращения функции. При $t\approx x$ имеем (см. рис.)

$$f(t)\approx f(x)+(t-x)f'(x). \tag{7}$$



Определение. Главная часть приращения функции в точке x называется ее *дифференциалом* в этой точке и обозначается

$$df(x)=f'(x)(t-x).$$

Приращение независимой переменной обозначают $dx=t-x$. Тогда

$$df(x)=f'(x)dx. \tag{8}$$

В соответствии с этой формулой используется другое обозначение производной

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}. \tag{9}$$

Замечание. Полное приращение функции

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$$

во многих случаях бывает трудно вычислить. Поэтому приближенное равенство $\Delta f(x)\approx df(x)$ позволяет более просто вычислить приращение функции.

Пример. Пусть зависимость количества y единиц выпускаемого продукта от использованного в производстве количества единиц x сырья задается степенной функцией $y=0{,}3\sqrt{x}$. Пусть к количеству сырья x =100 единиц прибавили еще $\Delta x=0{,}05$ единиц. Тогда прирост выпуска продукции составит $\Delta y=0{,}3\sqrt{100{,}05}-0{,}3\sqrt{100}$. Приближенная формула для приращения функции в рассматриваемом случае принимает вид $\Delta y \approx 0{,}3\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{100}}0{,}05 = 0{,}00075$.

Здесь была использована формула $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Теорема. Если функции $v(x), u(x)$ дифференцируемы в точке x, то дифференциалы их суммы, разности и произведения равны

$$d(u(x) \pm v(x)) = du(x) \pm dv(x),$$

$$d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x).$$

Если $v(x) \neq 0$, то

$$d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)}.$$

Эти формулы следуют из соответствующих формул для производных.

Инвариантная форма дифференциала. Рассмотрим дифференцируемые функции $z = U(y), y = f(x)$. Тогда, применяя формулу (5) для вычисления производной сложной функции $u(x) = U(f(x))$, получим

$$du(x) = u'(x)dx = U'(f(x))f'(x)dx = U'(f(x))df(x) = U'(y)dy.$$

Другими словами, формула дифференциала остается той же самой, если аргумент, в свою очередь, является зависимой переменной.

Теорема (*о производной обратной функции*). Пусть функция $y = f(x)$ является непрерывной в некоторой окрестности точки x и возрастает (убывает) ней и имеет производную $f'(x) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = F(y)$ также имеет в соответствующей точке $y = f(x)$ производную, причем

$$F'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{10}$$

Доказательство. Из определения обратной функции следует, что $t = F(f(t))$ для всех точек t из окрестности точки x. Поэтому,

$$\frac{F(z) - F(y)}{z - y} = \frac{F(f(t)) - F(f(x))}{f(t) - f(x)} = \frac{t - x}{f(t) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(t) - f(x)}{t - x}}. \tag{11}$$

Обратная функция является непрерывной функцией. Поэтому,

$$z \to y \Rightarrow t = f(z) \to f(y) = x.$$

Переходя в формуле (11) к пределу, получим требуемую формулу (10).

Производные обратных тригонометрических функций

Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и принимает все значения из отрезка $[-1,1]$. Поэтому на этом отрезке определена обратная функция $x = arcsin\, y$. Согласно формуле (10),

$$(arcsin\, y)' = \frac{1}{(sin\, x)'} = \frac{1}{cos\, x},\ x = arcsin\, y.$$

Поскольку $cos(arcsin\, y) = \sqrt{1-y^2}$, то, переобозначая переменные, получим

$$(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Упражнение. Доказать, что

$$(arccos\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2},\quad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Тема 17
ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

Функция спроса $p=f\,(q)$, которая устанавливает связь между ценой q на конкретный товар и спросом p на него при данной цене, должна убывать при увеличении цены. Поэтому возникает потребность в математическом аппарате, с помощью которого можно выяснять возрастание или убывание конкретной функции. Оказывается это можно делать с помощью производной функции.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a,b), дифференцируема в каждой точке этого интервала. Тогда, если она *убывает* (*возрастает*) на этом интервале, то ее производная $f'(x) \le 0$ $(f'(x) \ge 0)$ для всех точек x из этого интервала.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда функция убывает. Зафиксируем любую точку x из этого интервала. Тогда $f(t) \ge f(x)$ при $t<x$ и $f(t) \le f(x)$ при $t>x$. Следовательно,

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \le 0 \Rightarrow \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(x) \le 0.$$

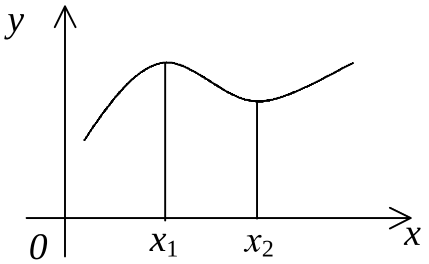
При заданной цене q величина $F(q) = q\, f(q)$ определяет выручку от реализации товара. Предположим, что хотим определить цену, при которой выручка будет наибольшей. Каким условиям должна удовлетворять эта цена?
Рассмотрим эту задачу в общем виде.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $\hat{x}$. Эта точка называется точкой *локального минимума (локального максимума)*, если

$$f(\hat{x}) \le f(x)\ (f(\hat{x}) \ge f(x))$$

для всех x из этой окрестности точки $\hat{x}$.

Замечание. На следующем рисунке точка x_1 является точкой локального максимума, а точка x_2 – точкой локального минимума.



Теорема Ферма. Пусть

1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $\hat{x}$.

2) эта точка $\hat{x}$ является ее точкой *локального минимума (локального максимума).*

3) в точке $\hat{x}$ существует производная $f'(\hat{x})$.

Тогда эта производная $f'(\hat{x})$=0.

Доказательство. Рассмотрим случай локального минимума. Тогда

$$\frac{f(x)-f(\hat{x})}{x-\hat{x}}=\begin{cases}\le 0, & x<\hat{x}\\ \ge 0, & x>\hat{x}\end{cases}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\hat{x}+}\frac{f(x)-f(\hat{x})}{x-\hat{x}}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad f'(\hat{x})\ge 0;\ \lim_{x\to\hat{x}-}\frac{f(x)-f(\hat{x})}{x-\hat{x}}\le 0\Rightarrow f'(\hat{x})\le 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(\hat{x})=0.$$

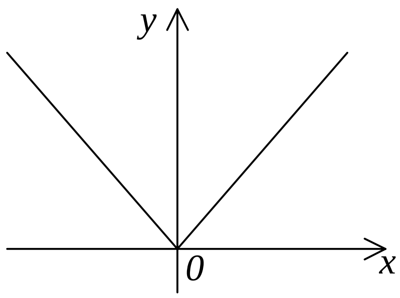
Пример. Допустим, что при цене $\hat{q}$ выручка от реализации товара будет наибольшей. Поскольку производная $(qf(q))' = f(q)+qf'(q)$, то, приравнивая ее к нулю, получим

$$f'(\hat{q})=-\frac{f(\hat{q})}{\hat{q}}\Rightarrow E = f'(\hat{q})\frac{\hat{q}}{f(\hat{q})}=-1.$$

Таким образом, при оптимальной цене эластичность спроса по цене равна –1.

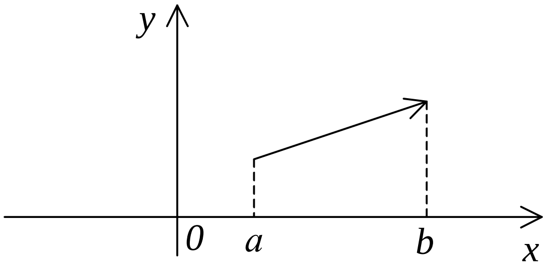
Это означает**,** что при оптимальной цене увеличение ее на один процент приводит к уменьшению спроса на один процент.

Пример. Пусть $f(x)=|x|$.



Точка $x=0$ является точкой минимума этой функции, но производная у рассматриваемой функции в этой точке не существует.

Пример. Рассмотрим функцию, график которой изображен на рисунке. Точка $x=a$ является ее точкой минимума.



Функция не определена в окрестности точки a и производная в точке a не равна нулю.

Пример. Пусть x характеризует затраты живого труда в производстве, а $f(x)$ задает количество выпускаемого продукта. Тогда величина $\frac{f(x)}{x}$ является производительностью труда. Допустим, что при $\hat{x}$ производительность труда достигает наибольшее значение. Тогда по теореме Ферма ее производная в этой точке равна нулю. Поскольку

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},$$

то в оптимальной точке будем иметь равенство $f'(\hat{x})=\frac{f(\hat{x})}{\hat{x}}$.

Другими словами, в оптимальной точке предельный продукт равняется максимальному значению производительности труда. Далее, при малых приращениях Δx имеем

$$\frac{f(\hat{x}+\Delta x)-f(\hat{x})}{\Delta x} \approx f'(\hat{x})=\frac{f(\hat{x})}{\hat{x}} \Rightarrow \frac{f(\hat{x}+\Delta x)-f(\hat{x})}{f(\hat{x})} \approx \frac{\Delta x}{\hat{x}}.$$

Таким образом, в оптимальной точке увеличение используемого живого труда на один процент приводит к приросту на один процент выпускаемой продукции.

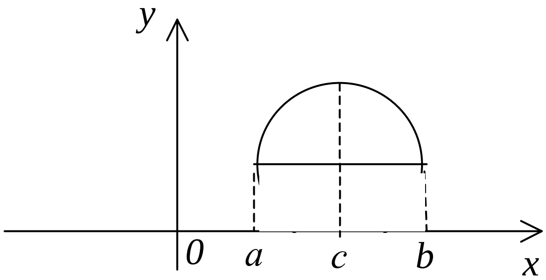
Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема в каждой точке интервала (a,b) и $f(a)=f(b)$. Тогда существует точка $c\in(a,b)$, где производная равна 0.

Доказательство. Непрерывная на отрезке функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Пусть m – наименьшее значение функции $f(x)$, а M – ее наибольшее значение на этом отрезке.

Пусть $m=M$. В этом случае функция является постоянной . Следовательно, ее производная тождественно равна нулю. В качестве точки c можно взять любую точку.

Пусть $m < M$. Так как на концах отрезка функция принимает одинаковые значения, то, либо наименьшее, либо наибольшее значение (см. рис.), достигается внутри отрезка.

Пусть внутри отрезка функция достигает наибольшее значение (см. рис.).



Тогда по теореме Ферма в этой точке производная функции равна 0.

Теорема Коши. Пусть функции $f(x), g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы в каждой точке интервала (a,b), причем $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a,b)$. Тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (1)$$

Доказательство. Покажем в начале, что $g(b) \neq g(a)$. В самом деле, если бы $g(b)=g(a)$, то по теореме Ролля $g'(x)=0$ в некоторой точке $x \in (a,b)$. Однако это запрещено условием теоремы.

Рассмотрим функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-(g(x)-g(a))\cdot\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Для нее выполнены равенства $F(a)=F(b)$. По теореме Ролля существует точка $c \in (a,b)$, где $F'(c)=0$ или

$$f'(c)-g'(c)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=0.$$

Отсюда получим требуемое равенство (1).

Применение производных при вычислении пределов

Теорема (правило Лопиталя). Пусть функции $f(x), g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки x_0, причем $g(x) \neq 0,\ g'(x) \neq 0$ в этой проколотой окрестности.

Пусть существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)=0$. Тогда, если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A, \text{ то существует}$$

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

Доказательство. Доопределим по непрерывности в точке x_0 эти функции, положив $f(x_0)=0, g(x_0)=0$. Тогда эти функции будут непрерывны в некоторой окрестности точки x_0. Пусть, например, $x > x_0$. Тогда по теореме Коши

$$\exists c \in (x_0, x) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Поскольку $c \xrightarrow{x\to x_0} x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A.$$

Замечание. Правило Лопиталя остается справедливым, когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, а также для случая $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$.

Пример. Для функции

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & при\ x\neq 0, \\ 1 \quad, & при\ x=0 \end{cases}$$

вычислить производную в точке x=0.

Решение. Имеем

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2}=\left|\begin{array}{l} неопределенность \\ вида\ \dfrac{0}{0}.\ Применим \\ правило\ Лопиталя \end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x}=\left|\begin{array}{l} неопределенность \\ вида\ \dfrac{0}{0}.\ Применим \\ правило\ Лопиталя \end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0.$$

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует точка $c\in(a,b)$ из этого интервала такая, что

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c). \tag{2}$$

Доказательство. Возьмём $g(x)=x$ и применим теорему Коши

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Отсюда получим формулу (2).

Исследование поведения дифференцируемой функции

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Тогда

$$f(x)=const \Leftrightarrow f'(x)=0, \quad \forall x\in(a,b).$$

Доказательство. Если $f(x)=const$, то $f'(x)=0$.
Пусть $f'(x)=0,\quad \forall x\in(a,b)$. Возьмём две точки $a<x_1<x_2<b$. Тогда из теоремы Лагранжа следует, что

$$\exists\, c\in(x_1,x_2)\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1). \qquad (3)$$

Отсюда и из равенства $f'(c)=0$ получим, что $f(x_1)=f(x_2)$.

Теорема.

1. Если $f'(x)\ge 0\ (f'(x)>0)\quad \forall x\in(a,b)$, то для любых $a<x_1<x_2<b$ выполнено неравенство

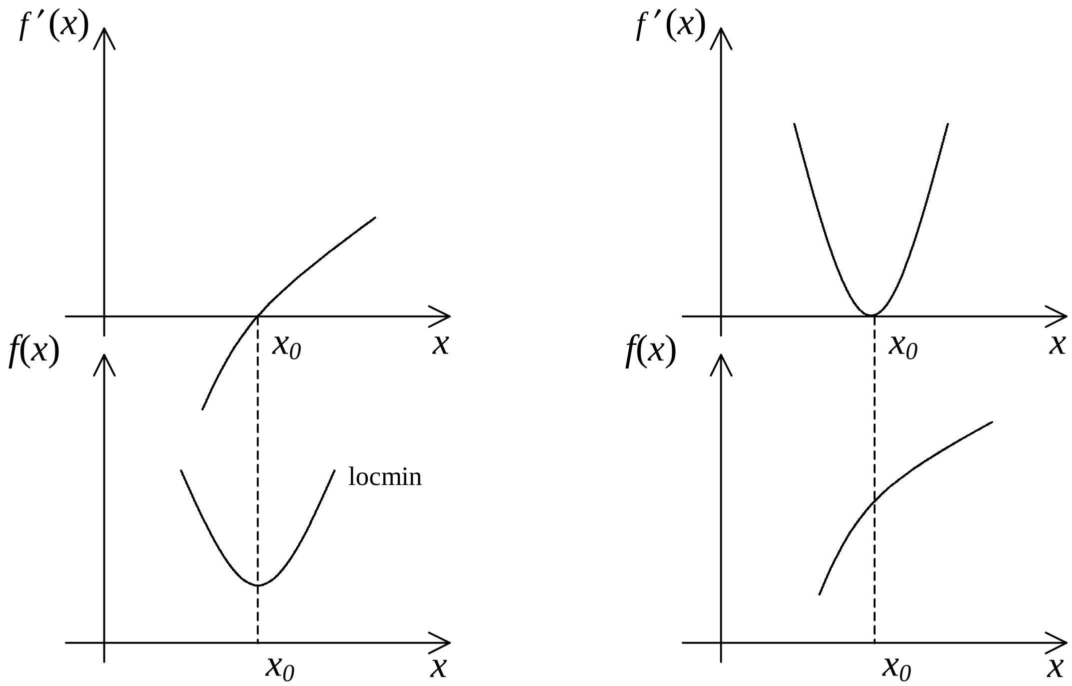
$$f(x_1)\le f(x_2)\quad (f(x_1)<f(x_2)).$$

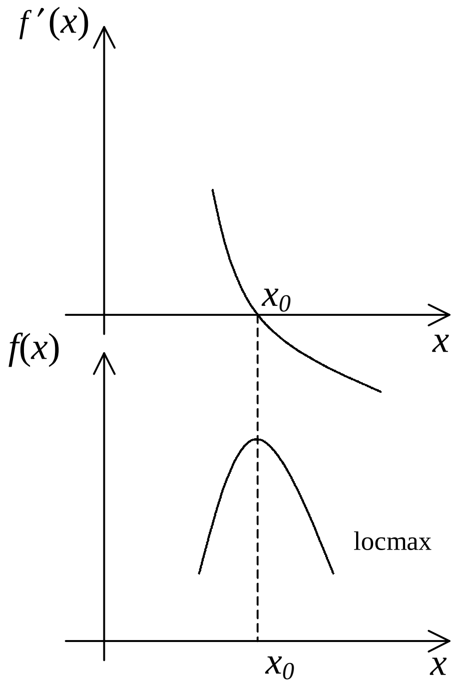
2. Если $f'(x)\le 0\ (f'(x)<0)\quad \forall x\in(a,b)$, то для любых $a<x_1<x_2<b$ выполнено неравенство

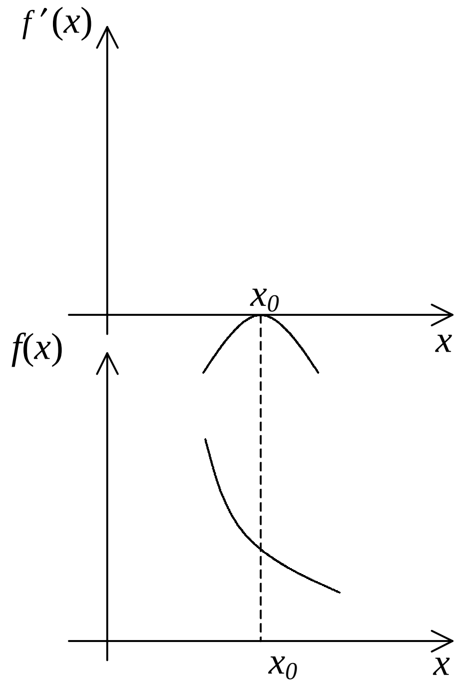
$$f(x_1)\ge f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)).$$

Доказательство следует из равенства (3).

Исследование поведения графика функции вблизи точек локального минимума и максимума. Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в окрестности точки x_0, в которой $f'(x_0)=0$. Обозначим точку локального минимума посредством записи *locmin f*, точку локального максимума – *locmax f* . Возможные случаи изображены на следующих рисунках.







Замечание. Точки локального минимума и локального максимума функции f называются точками *локального экстремума* и обозначаются *locext f*.

Производные высшего порядка. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервал (a,b). Тогда в каждой точке этого интервала определена ее производная $f'(x)$. Пусть она в свою очередь дифференцируема в каждой точке этого интервала. Тогда ее производная $(f'(x))'$ называется второй производной функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Производная от второй производной называется третьей производной и так далее. Производная от $(n-1)$-й производной называется n-й производной и обозначается $f^{(n)}(x)$ или $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Пример. $(e^x)^{(n)} = e^x$.

Тема 18
ВЫПУКЛЫЕ И ВОГНУТЫЕ ФУНКЦИИ

Экономический закон убывающей отдачи гласит, что с увеличением количества используемого в производстве ресурса предельный продукт с некоторого момента начинает убывать. Пусть $F(x)$ – количество выпускаемой продукции при затрате ресурсов x. Возьмем $x_1<x<x_2$. Тогда из закона убывающей отдачи следует неравенство

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} \Rightarrow F(x) \ge \left(1-\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)F(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}F(x_2).$$

Введем новую переменную

$$\lambda=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}\Rightarrow x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \lambda\in[0,1].$$

Тогда функция $F(x)$ удовлетворяет неравенству

$$F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2).$$

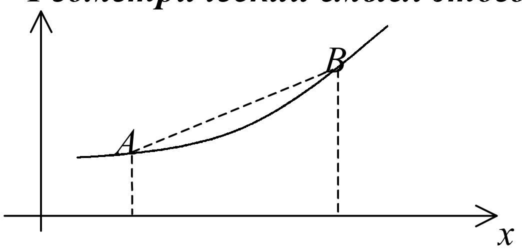
Функция $f(x)=-F(x)$ удовлетворяет неравенству

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\qquad (1)$$

которое называется неравенством Иенсена.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *выпуклой* на этом интервале, если для любых точек x_1,x_2 из этого интервала и для любого числа $\lambda\in[0,1]$ выполнено неравенство Иенсена (1).

Геометрический смысл этого определения (см. рис.) заключается в том, что кусок графика функции, соединяющий две любые точки A и B на этом графике, лежит ниже хорды, соединяющей эти точки.



Теорема. Если функция $f(x)$ является выпуклой на интервале (a,b), то для любых точек $a<x_0<x_1<x_2<b$ выполнено неравенство

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\le\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.\qquad (2)$$

Доказательство. Имеем

$$\lambda=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}\in[0,1]\Rightarrow x_1=\lambda x_0+(1-\lambda)x_2\Rightarrow f(x_1)\le\lambda f(x_0)+(1-\lambda)f(x_2)\Rightarrow$$

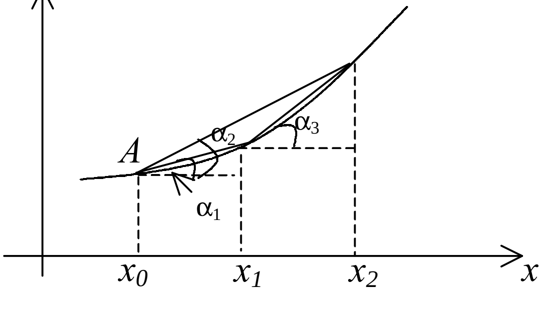
$$\Rightarrow f(x_1)-f(x_0)\le(1-\lambda)(f(x_2)-f(x_0))\Rightarrow\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\le\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_1}.$$

Далее,

$$f(x_1)\le\lambda f(x_0)+(1-\lambda)f(x_2)\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)\ge\lambda(f(x_2)-f(x_1))=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}(f(x_1)-f(x_0))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ge\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}.$$

Замечание. Поясним геометрический смысл неравенства (2) (см. рис.).



Тогда для углов

$$\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3 \quad \Rightarrow tg\alpha_1 \le tg\alpha_2 \le tg\alpha_3.$$

С другой стороны,

$$tg\alpha_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad tg\alpha_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}, \quad tg\alpha_3 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Пример. Функция $y = |x|$ является выпуклой на всей числовой оси. В самом деле, из свойства модуля следует, что при $0 < \lambda < 1$

$$|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2| \le |\lambda x_1| + |(1-\lambda)x_2| = \lambda|x_1| + (1-\lambda)|x_2|.$$

Теорема (*критерий выпуклости дифференцируемой функции*). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Тогда она является выпуклой на нем в том и только том случае, если ее производная не убывает.

Доказательство. Зафиксируем две точки $x_1 < x_2$ из этого интервала. Возьмем достаточно малые положительные числа h_1, h_2 такие, чтобы $x_1 + h_1 < x_2 - h_2$. Тогда из неравенства (2) будем иметь

$$\frac{f(x_1 + h_1) - f(x_1)}{h_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_2 - h_2)}{h_2}.$$

Отсюда, устремляя числа h_1, h_2 к нулю, получим $f'(x_1) \le f'(x_2)$.

Пусть теперь производная не убывает. Возьмем две точки $x_1 < x_2$ из этого интервала и рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda f(x_1) - (1-\lambda)f(x_2), \lambda \in [0,1]. \qquad (3)$$

Если покажем, что $\varphi(\lambda) \le 0, \forall \lambda \in [0,1]$, то получим неравенство (1). Применяя теорему о дифференцируемости сложной функции, будем иметь

$$\varphi'(\lambda) = -f'(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)(x_2 - x_1) - f(x_1) + f(x_2) =$$

$$= (x_2 - x_1)\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - f'(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\right).$$

Применив теорему Лагранжа, найдем точку $c \in (x_1, x_2)$ такую, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

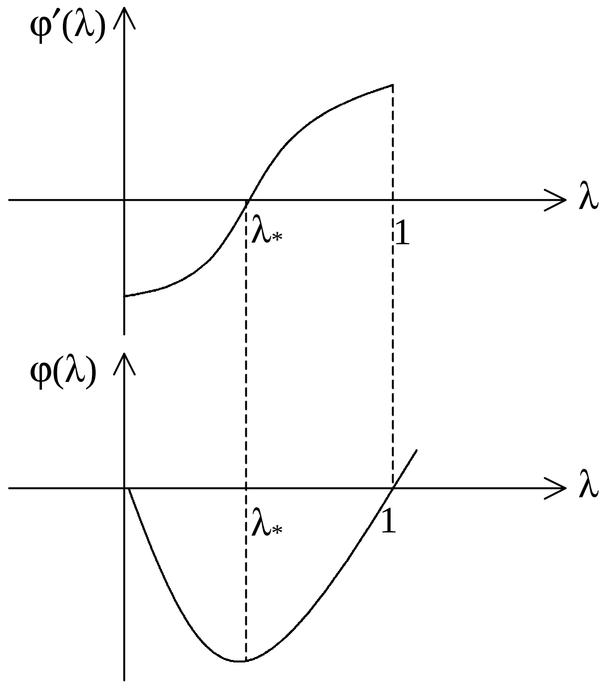
Следовательно,

$$\varphi'(\lambda) = (x_2 - x_1)(f'(c) - f'(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)).$$

Так как производная не убывает, то $\varphi'(\lambda) \ge 0$ при $c \ge \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ и $\varphi'(\lambda) \le 0$ в противном случае. Обозначим

$$\lambda_* = \frac{x_2 - c}{x_2 - x_1}.$$

Тогда функция $\varphi(\lambda)$ убывает при $0 \le \lambda \le \lambda_*$ и при $\lambda_* \le \lambda \le 1$ она возрастает. Далее, из формулы (3) получим равенства $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Следовательно, $\varphi(\lambda) \le 0, \forall \lambda \in [0,1]$ (см. рис.).



Теорема (*критерий выпуклости два раза дифференцируемой функции*). Пусть функция $f(x)$ два раза дифференцируемая на интервале (a,b). Тогда она является выпуклой на нем в том и только том случае, когда ее вторая производная $f''(x)\geq 0, \forall x\in(a,b)$.

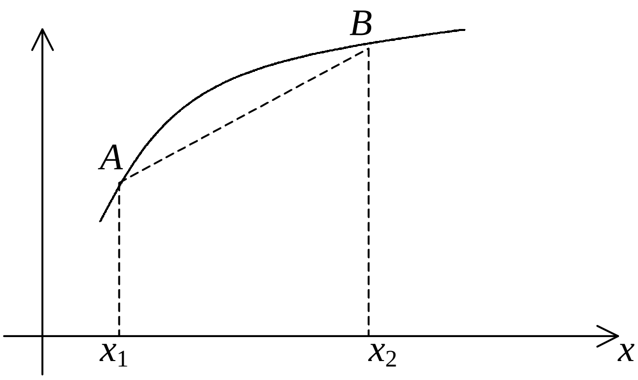
Доказательство. Имеем $f(x)$ выпукла $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ не убывает $\Leftrightarrow$ $(f'(x))' = f''(x)\geq 0$.

Пример. Функция $f(x)=x^2$ является выпуклой на всей числовой оси .

Определение. Функция $f(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *вогнутой* на этом интервале, если для любых точек x_1, x_2 из этого интервала и для любого числа $\lambda\in[0,1]$ выполнено неравенство

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2). \qquad (4)$$

Геометрический смысл этого определения (см. рис.) заключается в том, что кусок графика функции, соединяющий две любые точки *A* и *B* на этом графике, лежит выше хорды, соединяющей эти точки.



Упражнение. Доказать, что функция $f(x)$является вогнутой тогда и только тогда, когда функция $\varphi(x)=-f(x)$ является выпуклой.

Теорема (*критерий вогнутости дифференцируемой функции).*

1. Дифференцируемая на интервале функция является вогнутой на нем тогда и только тогда, когда ее производная не возрастает на этом интервале.

2. Два раза дифференцируемая на интервале функция $f(x)$ является вогнутой на нем тогда и только тогда, когда ее вторая производная $f''(x) \le 0$ для всех точек x из этого интервала.

Доказательство следует из предыдущего упражнения и из критериев выпуклости дифференцируемой и дважды дифференцируемой функций.

Определение. Точка x_0 называется ***точкой перегиба*** функции $f(x)$, если слева от этой точки функция является *выпуклой (вогнутой*), а справа – *вогнутой (выпуклой)*.

Упражнение. Показать, что если функция два раза дифференцируема, то в точке перегиба ее вторая производная равна нулю.

Упражнение. Показать, что линейная функция является и выпуклой, и вогнутой.

Пример. Пусть x – количество ресурса, используемого в производстве, а $f(x)$ – производственная функция. Тогда производная $f'(x)$ является предельным продуктом. Экономический закон гласит, что ***предельный продукт, начиная с какого-то количества*** x_****, используемого в производстве ресурса, начинает убывать.*** Значит производственная функция *f(x)* на интервале $(x_*, +\infty)$ будет вогнутой.

Пример . Из условия однородности производственной функции ранее был выведен ее общий вид $f(x) = bx^a$, где b и a положительные постоянные.

Далее, потребовав, чтобы вторая производная $f''(x) = a(a-1)bx^{a-2}$ была отрицательной при положительных числах x, получим условие $0 < a < 1$.

Теорема. Пусть на интервале (a,b) функция $f(x)$ является дифференцируемой и выпуклой (вогнутой) и пусть в точке $c \in (a,b)$ производная $f'(c) = 0$. Тогда

$$f(x) \ge f(a) \qquad (f(x) \le f(a)) \text{ для всех } x \in (a,b). \qquad (4)$$

Доказательство . Рассмотрим случай выпуклой функции. Тогда ее производная не убывает. Это значит, что

$$f'(x) \le f'(c) = 0, \forall x \in (a,c);\ f'(x) \ge f'(c) = 0, \forall x \in (c,b).$$

Стало быть, слева от точки *c* функция убывает, а справа от этой точки она возрастает. Отсюда получаем неравенство (4).

Замечание . Для выпуклых (вогнутых) функций точка локального минимума (максимума) является и точкой *абсолютного минимума*
(*максимума*).

Арифметические действия с выпуклыми (вогнутыми) функциями

1. Пусть функция является выпуклой (вогнутой) на интервале . Тогда при умножении ее на неотрицательное число получается выпуклая (вогнутая) функция. В самом деле, при умножении неравенств (1) и (4) на неотрицательное число их знак сохраняется.

2. Сумма двух выпуклых (вогнутых) на одном и том же интервале функций является выпуклой (вогнутой) функцией. В самом деле, при сложении двух неравенств вида (1) вида (4) получается неравенство того же вида.

Теорема (*о выпуклости (вогнутости) сложной функции*). Пусть функция $F(y)$ возрастает (убывает) на интервале (A,B), выпукла (вогнута) на этом интервале, а функция $f(x)$ является выпуклой (вогнутой) на интервале (a,b) и принимает значения из интервала (A,B). Тогда сложная функция

$$w(x) = F(f(x))$$

является выпуклой (вогнутой) на интервале (a,b).

Доказательство. Проведем для случая выпуклой функции. Возьмем любые числа $a<x_1<x_2<b, 0<\lambda<1$. Тогда выполнено неравенство (1). Отсюда имеем

$$w(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=F(f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2))\le\left|\begin{matrix}\text{\textit{по условию возрастания}}\\ \text{\textit{функции} } F(y)\end{matrix}\right|\le F(\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2))\le$$

$$\le\left|\begin{matrix}\text{\textit{по условию выпуклости}}\\ \text{\textit{функции} } F(y)\end{matrix}\right|\le\lambda F(f(x_1))+(1-\lambda)F(f(x_2))=\lambda w(x_1)+(1-\lambda)w(x_2).$$

Пример(*максимизация прибыли фирмы*). Пусть связь между количеством x используемого сырья и количеством y выпускаемой продукции задается производственной функцией $y=f(x)$. Цена единицы сырья равна p, а цена единицы готовой продукции равна q. На приобретение x единиц сырья фирма тратит px денежных единиц. При реализации $f(x)$ единиц готовой продукции фирма получает $qf(x)$ денежных единиц. Следовательно, прибыль фирмы равна $R(x) = qf(x) - px$. Производственная функция является выпуклой. Поэтому функция $R(x)$ как сумма двух вогнутых функций является вогнутой функцией. Цель производства заключается в получении максимальной прибыли. В оптимальной точке производная $q\,f'(x) - p = 0$. Отсюда получим, что в оптимальной точке

$$q(f(x+\Delta x)-f(x))\approx p\Delta x.$$

Другими словами, в оптимальной точке ничего нельзя дополнительно получить от вновь привлекаемого сырья, поскольку выручка , полученная от дополнительного прироста продукции, равна затратам на это дополнительное сырье.

Тема 19
ФОРМУЛА ТЭЙЛОРА

Дифференцируемую в точке a функцию можем приблизить линейной функцией. Если же функция имеет производные более высоких порядков, то ее можно приблизить многочленом более высокой степени.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема в окрестности точки a. Тогда для каждой точки x из этой окрестности существует число c, лежащее между точками a и x такое, что

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+$$
$$+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n. \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\ldots-\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-$$
$$-\frac{(x-t)^n}{(x-a)^n}\left[f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\ldots-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\right].$$

Имеем, $\varphi(a)=\varphi(x)=0$. По теореме Ролля существует точка c, лежащая между точками a и x, такая, что $\varphi'(c)=0$. Следовательно, дифференцируя по t функцию φ, получим

$$0=-f'(c)-\frac{f''(c)}{1!}(x-c)+\frac{f'(c)}{1!}-\ldots-\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}+$$
$$+\frac{n(x-c)^{n-1}}{(x-a)^n}\left[f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\ldots-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\right]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}+\frac{n(x=c)^{n-1}}{(x-a)^n}\left[f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\ldots-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\right].$$

Отсюда получим требуемую формулу (1).

Замечание. Слагаемое

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

в формуле (1) называется *остаточным членом в форме Лагранжа,* а сама формула (1) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Определение. Функцию $y(x)$, определенную в проколотой окрестности точки a, назовем «о – маленькой от $(x\text{-}a)^k$ при $x\to a$» ,если

$$\lim_{x\to a}\frac{y(x)}{(x-a)^k}=0.$$

Пример. $(sin(x\text{-}a))^2=o(x\text{-}a)$.

Таким образом, через $o((x\text{-}a)^k)$ обозначаем любое выражение такое, что отношение

$$\frac{o((x-a)^k)}{(x-a)^k}\to 0 \text{ при } x\to a,$$

то есть является бесконечно малой в точке a.

Из свойств для бесконечно малых следует, что, если функции

$$y_i(x)=o((x\text{-}a)^k)\ (i=1,2),$$

то их сумма также является $o((x\text{-}a)^k)$. Далее, произведение функции, ограниченной в проколотой окрестности точки a, на $o((x\text{-}a)^k)$ в свою очередь является $o((x\text{-}a)^k)$.

Вернемся к формуле Тейлора. Предположим, что n-я производная функции $f(x)$ непрерывна в точке a. Тогда $f^{(n)}(c)\to f^{(n)}(a)$ при $(x\text{-}a)\to 0$.Следовательно, $f^{(n)}(c)=f^{(n)}(a)+l(x\text{-}a)$, где $l(x)\to 0$ при $x\to a$.
Подставим это равенство в формулу Тейлора (1). Будем иметь формулу

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)(x-a)}{1!}+\frac{f^{(2)}(a)(x-a)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+o((x\text{-}x_0)^n),$$

которая называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*.

Разложение некоторых функций по формуле Тейлора. Возьмем a=0. Тогда

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

$$\sin x= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^k\left(\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)+o(x^{2k+1}).$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2k}).$$

Пример (*применение формулы Тейлора для вычисления пределов*).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=-\frac{1}{6}.$$

Пример. Обозначим через $f(x)$ количество выпускаемой продукции при количестве x используемого ресурса. Согласно закону убывающей отдачи производная $f'(x)$ убывает с ростом x. Следовательно, $f''(x)<0$.

Предположим, что в течение каждого i-го из n дней используется свое $x+y_i$ количество ресурсов так, что $\sum_{i=1}^{n} y_i=0$. Используя формулу Тейлора, получим

$$f(x+y_i)=\left(f(x)+f'(x)y_i+\frac{f''(c_i)}{2!}y_i^{\,2}\right)\le f(x)+f'(x)y_i.$$

Просуммируем все эти неравенства. Получим

$$\sum_{i=1}^{n} f(x+y_i)\le n f(x).$$

Таким образом, если в течение всех дней используется одно и тоже количество ресурсов, то суммарный выпуск продукции будет больше, ежели в процессе производства количества используемых ресурсов колеблются около x.

Тема 20
СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенным рядом называется выражение

$$a_0+ a_1x+ a_2x^2+ a_3 x^3+...+ a_n x^n+..., \qquad (1)$$

где a_i – заданные числа.

Степенные ряды возникают из формулы Тейлора, если ее расписывать до бесконечности. Например,

$$e^x \sim 1+ \frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Берем конкретное значение x, тогда ряд (1) превращается в числовой ряд. Он может сходиться, а может и не сходиться. При x=0 любой степенной ряд сходится.

Теорема. Если степенной ряд (1) сходится в точке $x_0\neq 0$, то он сходится абсолютно при любом x, у которого $|x| < | x_0|$.

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится в точке x_0. Тогда, по необходимому признаку сходимости числового ряда, его общий член $|a_nx_0^n|\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, существует число $M>0$ такое, что все $|a_nx_0^n|< M$. Возьмем любое число x, у которого $|x|<|x_0|$. Тогда

$$|a_nx^n|=|a_nx_0^n\frac{x^n}{x_0^n}|=|a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n< M g^n,\ g=\left|\frac{x}{x_0}\right|<1.$$

Числовой ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} Mg^n$ является рядом геометрической прогрессии, каждый член которой умножен на одно и тоже число $M > 0$. Значит, он сходится. Из оценочного признака сходимости рядов с неотрицательными членами следует, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left|a^nx^n\right|$ сходится.

Радиус сходимости степенного ряда. Определим число

$$R = sup\left\{x_0>0: \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n - сходится\right\}.$$

Тогда из предыдущей теоремы следует, что

1) если R=0, то ряд сходится только при $x = 0$;

2) если $R=+\infty$, то ряд сходится при всех x;

3) если $0<R<+\infty \Rightarrow$ при $|x|<R$ ряд сходится, а при $|x|>R$ ряд расходится.

Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а интервал $(-R,R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда.

Упражнение. Показать, что радиусы сходимости ряда (1) и ряда, составленного из модулей

$$|a_0| + |a_1x| +|a_2x^2| + |a_3x^3| +...+|a_nx^n| +\ldots \qquad (2)$$

одинаковы.

Вычисление радиусов сходимости

Теорема. Пусть существует конечный или бесконечный

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=q.$$

Тогда

$$R=\begin{cases}0, & при \quad q=+\infty\\ \dfrac{1}{q}, & при \quad 0<q<+\infty\\ +\infty, & при \quad q=0\end{cases}. \qquad (3)$$

Доказательство. Зафиксируем число x и рассмотрим ряд (2). Это ряд с положительными коэффициентами. Применим к нему предельный признак Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_nx^n\right|}=q|x|.$$

Отсюда следует, что

1) если q=0, то $q|x|=0$ для любого x. Следовательно, ряд (2) сходится при любом x. Значит радиус сходимости $R=+\infty$;

2) если $0<q<+\infty$, то $q|x|<1$ при $|x|<\frac{1}{q}$ (ряд сходится) и $q|x|>1$ при $|x|>\frac{1}{q}$ (ряд расходится) . Значит радиус сходимости $R=\frac{1}{q}$;

3) если $q=+\infty$, то при любом $|x|\neq 0$ ряд расходится.

Теорема. Пусть существует конечный или бесконечный

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=q.$$

Тогда радиус сходимости ряда определяется формулой (3). Доказательство проводится с помощью применения предельного признака Коши для ряда (2).

Дифференцирование степенных рядов. Рассмотрим степенной ряд (1) с интервалом сходимости ($-R,R$).

Теорема (без доказательства). На интервале сходимости сумма степенного ряда

$$S(x)=a_0+a_1x+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

является дифференцируемой функцией и ее производная является суммой степенного ряда:

$$S'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\ldots \qquad (4)$$

Причем ряд (4) имеет тот же интервал сходимости, что и ряд (1).

Следствие. Применим предыдущую теорему к степенному ряду (4), получим

$$S''(x)= 2a_2+6a_3\, x+\ldots+n\cdot(n-1)a_n\, x^{n-2}+(n+1)\, na_{n+1}\, x^{n-1}+\ldots \qquad (5)$$

и так далее. Следовательно, если какая-то функция задается в виде суммы степенного ряда, то она бесконечно раз дифференцируема. Обратное, вообще говоря, не верно. Имеются примеры бесконечно дифференцируемых функций, которые нельзя представить в виде суммы степенного ряда.

Вычисление коэффициентов степенного ряда. Положим в формулах для производных суммы степенного ряда $x = 0$, получим

$$a_0=S(0),\ a_1=\frac{S'(0)}{1!};\ a_2=\frac{S''(0)}{2!};\ldots;\ a_n=\frac{S^{(n)}(0)}{n!};\ldots$$

Разложение некоторых функций в степенные ряды

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots;$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots; \qquad (5)$$

$$\cos x= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots .$$

Упражнение. Доказать, что радиусы сходимости этих степенных рядов равны $+\infty$.

Замечание. Подставим в формулу для e^x число $x=1$. Получим представление числа e в виде суммы числового ряда:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

Формула Эйлера. Подставим в ряд для e^x вместо $x=i\varphi$, где $\varphi\in R$, $i^2=-1$. Тогда

$$e^{i\varphi}=1+i\frac{\varphi}{1!}-\frac{\varphi^2}{2!}-\frac{\varphi^3}{3!}i+\frac{\varphi^4}{4!}-\ldots=(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}+\ldots)+i(\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}+\ldots).$$

Отсюда и из формул (5) получим формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi+i\sin\varphi\,. \qquad (6)$$

В общем случае, для любого комплексного числа $z=\alpha+i\omega$ формула Эйлера имеет вид

$$e^z=e^{\alpha}(\cos\omega+i\sin\omega).$$

Замечание. Формула Эйлера «завязывает» возникающие в разных разделах математики числа -1, π, e, i одной формулой $e^{i\pi} = -1$.

Тема 21
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ПЕРВООБРАЗНАЯ

Бернулли стал решать задачу об определении вида функции $F(x)$, равной количеству удовольствия , которое приносит человеку обладание суммой денег равной x денежных единиц. Он предположил, что прирост удовольствия пропорционален процентному приросту денег, то есть

$$F(x+\Delta x)-F(x)\approx k\frac{\Delta x}{x}, k>0-const.$$

Разделив это соотношение на Δx и устремив затем $\Delta x \to 0$, получим, что производная искомой функции должна равняться

$$F'(x)=\frac{k}{x} .$$

Таким образом, пришли к задаче восстановления функции по известной ее производной. Одной из таких функций является

$$F(x)=k\,ln\frac{x}{a}, a>0-const.$$

Рассмотрим такую задачу в общем виде. Пусть на интервале $(a;b)$ определена функция $f(x)$.

Определение. Функция $F(x)$, дифференцируемая на интервале $(a;b)$, называется ее первообразной на этом интервале, если ее производная $F'(x)=f(x)$ для любого $x\in(a;b)$.

Пример. Пусть $f(x)=-sin\,x$, тогда $F(x)=cos\,x$.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две первообразные одной и той же функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то они отличаются на этом интервале на постоянную.

Доказательство. Имеем $F_1'(\mathrm{x})-F_2'(\mathrm{x})=0$. Поэтому $F_1(\mathrm{x})-F_2(\mathrm{x})=\mathrm{const}$.

Определение. Множество всех первообразных функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ называется ее *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx .$$

Из предыдущей теоремы следует, что если $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ на интервале (a,b), то неопределенный интеграл есть

$$\int f(x)dx=F(x)+C,\ \ C-\mathrm{const}.$$

Свойства неопределенного интеграла. Из определения неопределенного интеграла и из свойств производной функции получим следующие свойства для неопределенного интеграла:

1. $d\int f(x)dx=f(x)\,dx.$
2. $\int dF(x)=F(x)+C.$
3. $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx .$
4. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$, $a=\mathrm{const}.$

Упражнение. Проверить эти свойства.

Таблица неопределенных интегралов. Из таблицы для производных функций получим следующую таблицу для неопределенных интегралов:

1. $\int 0dx = c$ (здесь и в последующих формулах c – произвольная постоянная).
2. $\int 1dx = x + c.$
3. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \neq -1.$
4. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c.$
5. $\int e^{x} dx = e^{x} + c.$
6. $\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c,\ a > 0,\ a \neq 1.$
7. $\int sin\, xdx = -cos\, x + c.$
8. $\int cos\, xdx = sin\, x + c.$
9. $\int \frac{dx}{cos^{2} x} = tg\, x + c.$
10. $\int \frac{dx}{sin^{2} x} = -\, ctg\, x + c.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = arcsin\, x + c = -\, arccos\, x,\ -1 < x < 1.$
12. $\int \frac{dx}{1+x^{2}} = arctg\, x + c.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2} \pm 1}} = ln\left| x + \sqrt{x^{2} \pm 1} \right| + c$ (длинный логарифм).
14. $\int \frac{dx}{1-x^{2}} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$ (высокий логарифм).
15. $\int \sqrt{1+x^{2}}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^{2}} + ln\left| x + \sqrt{1+x^{2}} \right| \right) + c.$
16. $\int \frac{dx}{x^{2}+1} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c,\ a \neq 0.$

Эти формулы доказываются путем дифференцирования выражений, стоящих в правых частях соответствующих формул.

Упражнение. Проверить эти свойства.

Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Из формулы дифференцирования сложной функции

$$(G(\varphi(x))' = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

получим, что если $G(y) = \int g(y)dy$,

то

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C\,. \qquad (1)$$

Учитывая, что $\varphi'(x)dx=d\varphi(x)$, это равенство можно записать

$$\int g(\varphi(x))d\varphi(x) = G(\varphi(x)) + C\,.$$

При вычислении интегралов это оформляют в виде замены переменной:

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \begin{vmatrix} y = \varphi(x), \\ dy = \varphi'(x)dx \end{vmatrix} = \int g(y)dy = G(\varphi(x)) + C\,.$$

Пример. Вычислим

$$\int xe^{x^2}dx = \begin{vmatrix} y = x^2 \\ dy = 2xdx \end{vmatrix} = \int \frac{1}{2}e^y dy = \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{1}{2}e^{x^2} + C\,.$$

Формула интегрирования по частям

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\,. \qquad (2)$$

В самом деле, из формулы для производной произведения двух функций имеем, что

$$(u(x)v(x))'=v'(x)u(x)+u'(x)v(x).$$

Интегрируя это равенство, получим $u(x)v(x)= \int v'(x)u(x)dx + \int u'(x)v(x)dx$.

Отсюда следует формула (2).

Эту формулу записывают и в следующем виде:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Пример. $\int x\cos xdx = \int xd\sin x = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + c.$

Теорема об интегрировании суммы степенного ряда (*без доказательства*). Пусть степенной ряд

$$S(x)= a_0+ a_1x+ a_2x^2+...+ a_n x^n+... \qquad (3)$$

имеет интервал сходимости $(-R;R)$. Тогда на этом интервале

$$\int S(x)dx = c+ a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{3}a_2x^3+...+\frac{1}{n+1}a_n x^{n+1}+... \qquad (4)$$

и ряд (4) имеет один и тот же интервал сходимости, что и ряд (3).

Пример. Используя эту теорему, представим число π в виде суммы числового ряда. При $|q|<1$ имеем

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots=\frac{1}{1-q}.$$

Подставим в эту формулу $q = -x$ при $|x|<1$. Получим

$$\frac{1}{1+x}=1 - x+x^{2-}x^3+\ldots\,. \qquad (5)$$

Вычислим радиус R сходимости этого степенного ряда. Имеем $a_0=1,\ a_1=-1,$

a_2=1,…, a_n=(-1)^n. Следовательно, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$=1 $\Rightarrow$ R=1. Далее

$$(arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots \qquad (6)$$

Здесь использовали формулу (5) с заменой в ней x на x^2.

Проинтегрируем ряд (6). Получим $arctg\ x = C + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots$

Положим в этой формуле x=0. Получим $arctg\ 0 = 0 \Rightarrow C = 0$. Таким образом,

$$arctg\ x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots \qquad (7)$$

Возьмем $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3(\sqrt{3})^3} + \frac{1}{5(\sqrt{3})^5} - \frac{1}{7(\sqrt{3})^7} + \ldots$.

Следовательно, $\pi = 2\sqrt{3}\ (1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2 5} - \frac{1}{3^3 7} + \ldots)$.

Интегрирование дробно-рациональных функций. Рассмотрим правильную дробь

$$R_m^n(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m},\ m > n. \qquad (8)$$

Представим знаменатель в следующем виде:

$$b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = b_0(x - x_1)^{l_1} \ldots (x - x_k)^{l_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{r_1} \ldots (x^2 + p_sx + q_s)^{r_s}.$$

Здесь x_i – действительные корни многочлена, а l_i – их кратности. Дискриминанты квадратных многочленов $x^2 + p_jx + q_j$ являются отрицательными числами, то есть

$$D_j = p_j^{\ 2} - 4q_j < 0,\ j = 1,\ldots,s.$$

Сумма кратностей $l_1 + \ldots + l_k + 2(r_1 + \ldots + r_s) = m.$

Теорема о разложении правильной дроби на сумму простейших дробей *(без доказательства).* Верно разложение

$$b_0R_m^n(x) =$$

$$\left(\frac{c_1^1}{x - x_1} + \frac{c_2^1}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{c_{l_1}^1}{(x - x_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{M_1^1x + N_1^1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_2^1x + N_2^1}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \ldots + \frac{M_{r_1}^1x + N_{r_1}^1}{(x^2 + p_1x + q_1)^{r_1}} + \ldots\right)$$

Здесь c_i^j, M_i^j, N_i^j – некоторые вполне определенные числа.

С учетом этой теоремы задача интегрирования правильной рациональной дроби сводится к интегрированию выражений следующего вида:

I. $\int \frac{dx}{x-a} = ln|x-a| + c.$

II. $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + c, k > 1.$

Пусть квадратный многочлен $x^2 + px + q$ имеет отрицательный дискриминант, то есть $\Delta = q - \frac{p^2}{4} > 0.$

$$\text{III. } \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2} ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{N-\frac{M}{2}}{\sqrt{\Delta}} arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\Delta}} + c.$$

Далее,

$$\text{IV. } \int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \left| \begin{matrix} t = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+\Delta\right)}{\left(t^2+\Delta\right)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+\Delta\right)^k}.$$

Первый интеграл, стоящий в правой части этого выражения, имеет вид интеграла из пункта II.

Обозначим $\Delta = a^2$ и рассмотрим второй интеграл

$$L(k) = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{2a^2}\int t\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^k}.$$

Второй интеграл в этом выражении интегрируем по частям

$$\int t\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^k} = -\frac{t}{(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{k-1}L(k-1).$$

Следовательно, будем иметь

$$L(k) = -\frac{t}{(k-1)\left(t^2+a^2\right)} + \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2(k-1)}\right)L(k-1),$$

$$L(1) = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + c.$$

Из этого рекуррентного соотношения можем вычислить любой интеграл $L(k)$.

Пусть теперь в (8) $n \geq m$. Тогда, разделив числитель на знаменатель, представим (8) в виде $f_0x^d + f_1x^{d-1} + ... + f_d +$ правильная дробь.

Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная подстановка. Рассмотрим выражение, зависящее от двух переменных, следующего вида:

$$R(u,v) = \frac{a_{00} + a_{10}u + a_{01}v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + ... + a_{0n}u^n}{b_{00} + b_{10}u + b_{01}v + b_{20}u^2 + b_{11}uv + b_{02}v^2 + ... + b_{0m}u^m}.$$

Пример.

$$R(u,v)=\frac{u^2+2v^2}{uv}.$$

Рассмотрим интеграл

$$J=\int R(\sin x,\cos x)dx.$$

Пример. Рассмотрим предыдущий пример

$$J=\int\frac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{\sin x\cos x}dx.$$

Рассмотрим *универсальную подстановку*

$$t=tg\frac{x}{2}\Rightarrow x=2arctg t,\, dx=2\frac{dt}{1+t^2}.$$

Тогда

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Следовательно,

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\left|t=tg\frac{x}{2}\right|=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Пришли к задаче интегрирования рациональной дроби.

Тема 22
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем этот отрезок точками

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b.$$

Назовем *диаметром* этого разбиения число

$$d=\max(x_{i+1}-x_i),\ i=1,\ldots n\text{-}1.$$

Возьмем $\forall t_i\in[x_i,x_{i+1}]$ и составим сумму

$$\sum_{i:=0}^{n-1}f(t_i)(x_{i+1}-x_i),\qquad(1)$$

которая называется *интегральной суммой.*

Определение. Число I называется пределом интегральных сумм (1) при диаметре разбиения $d\to 0$, если для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех разбиений с диаметром $d<\delta$ и для любого набора точек $t_i\in[x_i, x_{i+1}]$ выполняется неравенство

$$\left|I-\sum_{i:=0}^{n-1}f(t_i)(x_{i+1}-x_i)\right|<\varepsilon.\qquad(2)$$

Теорема. Если предел интегральных сумм существует, то он единственен.

Доказательство. Предположим, что существуют два предела $I_1<I_2$.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда для всех разбиений с достаточно малым диаметром неравенство (2) выполняется и для I_1, и для I_2. Следовательно,

$$I_2 - I_1 \le | I_2 - \sum_{i:=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)| + | I_1 - \sum_{i:=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)| \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon .$$

Устремим $\varepsilon \to 0$, получим противоречие $I_2 – I_1 \le 0$.

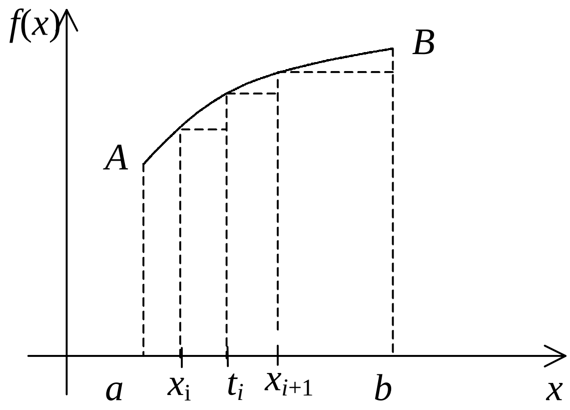
Определение. Предел интегральных сумм (1) называется *определенным интегралом* и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx .$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой на отрезке* $[a, b]$.

Геометрический смысл определенного интеграла

Рассмотрим задачу об определение площади криволинейной трапеции $aABb$ (см. рис.).



Заменим криволинейную трапецию системой прямоугольников. Суммарная площадь этих прямоугольников определяется формулой (1). Предел интегральных сумм (1) при диаметре $d \to 0$ и назовем площадью криволинейной трапеции.

Итак, *геометрический смысл определенного интеграла – это площадь криволинейной трапеции* $aABb$.

Экономическое приложение определенного интеграла (*задача о собираемой сумме налогов*). Пусть $T(x)$ – сумма годового налога, выплачиваемого государству налогоплательщиком с годового дохода равного x денежных единиц. Считаем, что максимально возможный годовой доход в стране не превосходит числа b.

Обозначим через $F(x)$ количество налогоплательщиков, имеющих годовой доход строго меньше числа x. Пусть всего налогоплательщиков в стране равно N. Тогда функция

$$P(x) = \frac{F(x)}{N}$$

принимает значения из отрезка [0,1] и ее значение в точке x равно доле налогоплательщиков с годовым доходом строго меньше x. Предположим, что функция $P(x)$ является дифференцируемой. Зафиксируем два числа $0 < y < z$. Тогда разность

$$F(z) – F(y) = (P(z) –P(y))N$$

равна количеству налогоплательщиков, годовые доходы x которых удовлетворяют неравенствам $y \le x < z$.

Возьмем разбиение $0<x_1<\ldots< x_n< b$. Тогда, по теореме Лагранжа, количество налогоплательщиков с годовым доходом $x\in[x_i, x_{i+1})$ равно

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) =(P(x_{i+1}) - P(x_i))N=P'(t_i)\,(x_{i+1}-x_i)\,N,\ \ t_i\in[x_i,x_{i+1}).$$

При малом диаметре этого разбиения можно считать, что все налогоплательщики с годовым доходом $x\in[x_i, x_{i+1})$ платят одну и туже сумму равную $T(t_i)$. Поэтому приблизительное значение собираемой государством суммы равно

$$N\sum_{i:=0}^{n-1}T(t_i)P'(t_i)(x_{i+1}-x_i).$$

Предел этой суммы при диаметре разбиения $d\to 0$ равен

$$N\int_0^b T(x)P'(x)dx.$$

Эта формула задает величину собираемой государством суммы.

Линейные свойства определенного интеграла

1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда для $\forall c=const$ интегрируемой является функция $cf(x)$ и выполнено равенство

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $I=\int_a^b f(x)dx$.

Тогда для $\forall\varepsilon >0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) >0$ такое, что для всех разбиений с диаметром $d <\delta$ и для любого набора точек $t_i\in[x_i, x_{i+1}]$ выполняется неравенство (2). Следовательно,

$$|cI-\sum_{i:=0}^{n-1}cf(t_i)(x_{i+1}-x_i)| <\varepsilon|c| \Rightarrow c\sum_{i:=0}^{n-1}f(t_i)(x_{i+1}-x_i)\to c\int_a^b f(x)dx \text{ при } d\to 0.$$

2. Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда на этом отрезке интегрируемы их сумма и разность и выполняется равенство

$$\int_a^b (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

Доказательство. Обозначим $I_s=\int_a^b f_s(x)dx, s=1{,}2.$ Тогда $\forall\varepsilon >0\ \exists\delta = =\delta(\varepsilon)$ >0 такое, что для всех разбиений с диаметром $d <\delta$ и для любого набора точек $t_i\in[x_i, x_{i+1}]$ выполняются неравенства

$$|I_s-\sum_{i:=0}^{n-1}f_s(t_i)(x_{i+1}-x_i)| <\varepsilon,\ s=1,2.$$

Следовательно,

$$\left|(I_1+I_2)-\sum_{i=1}^{n-1}(f_1(t_i)+f_2(t_i))(x_{i+1}-x_i)\right| \le \sum_{s=1}^{2}\left|I_s-\sum_{i=1}^{n-1}f_s(t_i)(x_{i+1}-x_i)\right| < 2\varepsilon.$$

Это означает, что

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_1(t_i)+f_2(t_i)\right)(x_{i+1}-x_i)\to\int_a^b\left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx \text{ при } d\to 0.$$

Теорема об оценке определенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяет неравенству $m\le f(x)\le M$. Тогда

$$(b-a)m\le\int_a^b f(x)dx\le(b-a)M. \qquad (3)$$

Доказательство. Каждая интегральная сумма (1) удовлетворяет этому неравенству. Следовательно, ему удовлетворяет и их предел, то есть интеграл.

Теорема об интегрируемости непрерывной функции (*без доказательства)*. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема о среднем значении определенного интеграла от непрерывной функции. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда найдется число $t\in[a,b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)dx=f(t)(b-a). \qquad (4)$$

Доказательство. Обозначим через m (M) минимальное (максимальное) значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда $m\le f(x)\le M$. Из (3) следует, что $m\le p\le M$, где

$$p=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx.$$

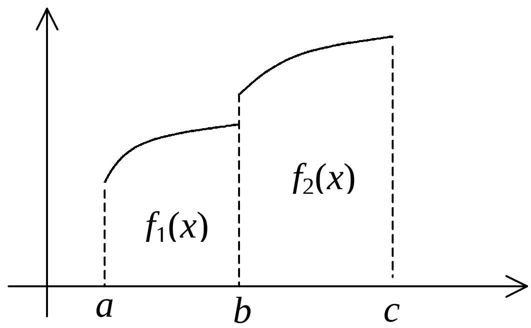
Непрерывная функция принимает на отрезке все промежуточные значения между минимальным и максимальным своими значениями. Следовательно, $\exists t\in[a,b]$ где $f(t)=p$. Отсюда следует требуемое равенство (4).

Теорема (*без доказательства).* Пусть функция $f_1(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, а функция $f_2(x)$ интегрируема на $[b,c]$, тогда функция (см. рис.)

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & a\le x\le b\\ f_2(x), & b<x\le c\end{cases}$$

является интегрируемой на отрезке $[a,c]$ и выполняется равенство

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_b^c f_2(x)dx.$$



Интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда для любого $a < x \le b$ существует интеграл

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

Он *называется интегралом с переменным верхним пределом*. Полагаем

$$\int_a^a f(t)dt=0.$$

Теорема о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда интеграл с переменным верхним пределом является дифференцируемой функцией и выполнено равенство

$$F'(x)=f(x). \tag{5}$$

Доказательство. Имеем

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Согласно формуле (4) $\exists\tau\in[x,x+\Delta x]$ такая, что

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\tau)\Delta x.$$

Поэтому

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(\tau).$$

Далее, при $\Delta x\to 0$ точка $\tau\to x \Rightarrow f(\tau)\to f(x) \Rightarrow F'(x)=f(x)$.

Интеграл с переменным нижним пределом. Таким называется

$$\Phi(x)=\int_x^b f(t)dt.$$

Имеем равенство

$$\Phi(x)+F(x)=\int_a^b f(t)dt.$$

Отсюда получаем

$$(\Phi(x)+F(x))'=0 \Rightarrow \Phi'(x)+f(x)=0 \Rightarrow \Phi'(x)=-f(x).$$

Теорема (*формула Ньютона – Лейбница*)**.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $\psi(x)$ ее первообразная. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx=\psi(b)-\psi(a). \tag{6}$$

Доказательство. Интеграл с переменным верхним пределом, является первообразной. Поэтому $F(x)=\psi(x)+c$, где $c=const$. Следовательно, $\psi(a)+c=F(a)=0$. Стало быть, $F(x)=\psi(x)-\psi(a)$. Положим, $x=b$. Получим равенство $F(b)=\psi(b)-\psi(a)$. Отсюда следует формула (6).

По определению полагают $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$. Другими словами, *при замене местами пределов интегрирования интеграл меняет знак.*

Тема 23
МНОЖЕСТВА В R^n

Если в производстве используется один вид сырья, то количество y выпускаемой продукции является функцией одного переменного от количества x используемого сырья. Если же в производстве используется n видов сырья, то количество y выпускаемой продукции зависит от того, какое количество x_i каждого i-го ($i = 1,\ldots, n$) вида сырья было использовано в производстве. Другими словами, y зависит от набора

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i \in R. \tag{0}$$

Каждый такой набор рассматриваем как точку линейного арифметического пространства R^n.

Однако не каждая точка (0) может задавать возможный набор ресурсов, используемый в производстве. Например, условия $x_i \geq 0$ ($i=1,\ldots, n$) выделяют множество точек с неотрицательными координатами. Далее, если каждый i-й вид сырья закупается по цене p_i, а предприниматель обладает суммой денег Q, то возможные наборы (0) с неотрицательными коэффициентами должны еще удовлетворять неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq Q \ .$$

Поэтому рассмотрим множества в R^n, действия с ними и их свойства.

Итак, каждый вектор $\bar{x} \in R^n$ записываем в виде строки (0). Для двух векторов $\bar{p} \in R^n, \bar{x} \in R^n$ определено *скалярное произведение*

$$\langle \bar{p}, \bar{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \ .$$

Норма вектора задается формулой

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \ .$$

Расстояние между двумя точками $\bar{x}, \bar{y}$ в R^n задается формулой

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \quad .$$

Примеры множеств. Зафиксируем ненулевой вектор $\overline{p} \in R^n$ и действительное число b. Тогда множество

$$M = \left\{ x \in R^n : \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle = b \right\} \qquad (1)$$

в случае двух переменных является прямой на плоскости. В случае трех переменных оно является плоскостью в трехмерном пространстве. В общем случае это множество называется *гиперплоскостью.*

Множество N, задаваемое линейным неравенством

$$N = \left\{ x \in R^n : \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle \leq b \right\}, \qquad (2)$$

называется *полупространством.*

Множество

$$P = \left\{ x \in R^n : \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle < b \right\} \qquad (3)$$

называется *открытым полупространством.*

Множество

$$G = \left\{ x \in R^n : \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle > b \right\} \qquad (3^*)$$

можно записать в виде формулы (3):

$$G = \left\{ x \in R^n : \langle (-\overline{p}), \overline{x} \rangle < (-b) \right\},$$

и значит, оно также является открытым полупространством.

Зафиксируем точку $\overline{a} \in R^n$ и число $b > 0$. Множество

$$X = \left\{ \overline{x} \in R^n : \| \overline{x} - \overline{a} \| = b \right\} \qquad (4)$$

называется *сферой радиуса* b *с центром в точке* $\overline{a}$.

Множество

$$Y = \left\{ \overline{x} \in R^n : \| \overline{x} - \overline{a} \| \leq b \right\} \qquad (5)$$

называется *шаром радиуса* b *с центром в точке* $\overline{a}$.

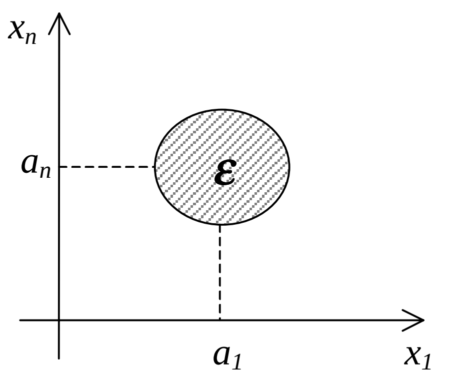
Множество

$$Z = \left\{ \overline{x} \in R^n : \| \overline{x} - \overline{a} \| < b \right\} \qquad (6)$$

называется *открытым шаром радиуса* b *с центром в точке* $\overline{a}$.

При изучении предела функции одного переменного использовались понятия окрестности и проколотой окрестности. Аналогичные понятия потребуются и при изучении функции многих переменных.

Назовем *ε-окрестностью* (или *окрестностью*) точки $\overline{a}$ из R^n открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в этой точке. Другими словами, это множество точек $\overline{x} \in R^n$ таких, что $\| \overline{x} - \overline{a} \| < \varepsilon$ (см. рис.).



Аналогично, *ε-проколотой окрестностью* точки $\overline{a}$ называется ее ε-окрестность без самой этой точки. Другими словами, это множество точек $\overline{x} \in R^n$, удовлетворяющих условию $0 < \|\overline{x} - \overline{a}\| < \varepsilon$.

Пример. Покажем, что каждая точка $\overline{x}$ открытого полупространства (3) принадлежит ему вместе с некоторой окрестностью. В самом деле, пусть $\langle \overline{p}, \overline{x} \rangle < b$. Возьмем число $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $\langle \overline{p}, \overline{x} \rangle + \varepsilon \|\overline{p}\| < b$. Тогда, если

$$\overline{y} \in R^n, \quad \|\overline{y} - \overline{x}\| < \varepsilon, \tag{7}$$

то

$$\langle \overline{p}, \overline{y} \rangle = \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle + \langle \overline{p}, \overline{y} - \overline{x} \rangle \le \left| \begin{matrix} \textit{по неравенству} \\ \textit{Коши} - \textit{Буняковского} \end{matrix} \right| \le \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle + \|\overline{p}\| \, \|\overline{y} - \overline{x}\| < \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle + \varepsilon \|\overline{p}\| < b \cdot$$

Пример. Покажем, что каждая точка $\overline{x}$ открытого шара (6) принадлежит ему вместе с некоторой окрестностью. В самом деле, пусть $\|\overline{x} - \overline{a}\| < b$. Возьмем число $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $\|\overline{x} - \overline{a}\| + \varepsilon < b$. Тогда для любой точки (7) выполнено

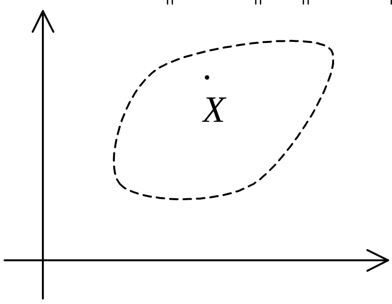
$$\|\overline{y} - \overline{a}\| \le \left| \begin{matrix} \textit{по неравенству} \\ \textit{треугольника} \end{matrix} \right| \le \|\overline{x} - \overline{a}\| + \|\overline{y} - \overline{x}\| < \|\overline{x} - \overline{a}\| + \varepsilon < b.$$

Пример. Покажем, что каждая точка $\overline{x}$ множества

$$A = \left\{ \overline{x} \in R^n : \|\overline{x} - \overline{a}\| > b \right\}, \quad (b > 0) \tag{8}$$

принадлежит ему вместе с некоторой окрестностью. В самом деле, пусть $\|\overline{x} - \overline{a}\| > b$. Возьмем число $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $\|\overline{x} - \overline{a}\| - \varepsilon > b$. Тогда для любой точки (7) выполнено

$$\|\overline{x} - \overline{a}\| \le \|\overline{x} - \overline{y}\| + \|\overline{y} - \overline{a}\| < \varepsilon + \|\overline{y} - \overline{a}\| \Rightarrow \|\overline{y} - \overline{a}\| > \|\overline{x} - \overline{a}\| - \varepsilon > b.$$



В общем случае множество X в R^n называется *открытым*, если каждая его точка принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью (см. рис.).

Замечание. Само пространство R^n является открытым множеством.

Теорема. Если пересечение

$$X = \bigcap_{i=1}^{k} X_i$$

конечного числа открытых множеств не является пустым множеством, то оно является открытым множеством.

Доказательство. Пусть точка $\overline{x} \in X$. Тогда она принадлежит каждому открытому множеству X_i. Следовательно, она принадлежит ему вместе с некоторой ε_i-окрестностью. Рассмотрим положительное число $\varepsilon = \min\limits_{1 \le i \le n} \varepsilon_i$.

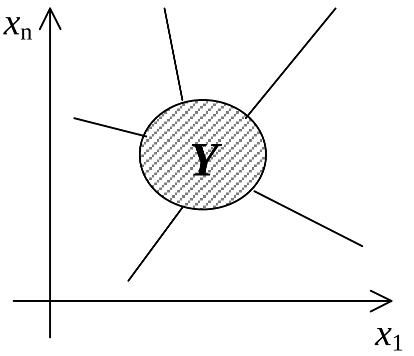
Тогда ε-окрестность точки $\bar{x}$ содержится в каждой ε_i-окрестности этой точки и, следовательно, содержится в каждом множестве X_i. Стало быть, точка $\bar{x}$ принадлежит пересечению этих множеств вместе с этой ε-окрестностью.

Замечание. По определению полагают, что пустое множество является открытым и в формулировке теоремы требование непустоты пересечения опускают.

Замечание. Пересечение бесконечного числа открытых множеств может и не являться открытым. В самом деле, рассмотрим открытые шары радиуса $b_i = \frac{1}{i}, i = 1,2,3,...$ с центром в начале координат. Тогда их пересечение состоит из одной точки (*какой?)* и не является открытым множеством.

Теорема. Объединение любого числа открытых множеств является открытым множеством.

Доказательство. Пусть точка принадлежит объединению открытых множеств. Тогда она принадлежит одному из этих открытых множеств и , следовательно, принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью. Значит, с этой окрестностью она принадлежит объединению.



Напомним, что множество точек, не принадлежащих множеству Y из R^n называется его *дополнением* (см. рис.) и обозначается $\bar{Y}$.

Множество Y называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Пример. Полупространство (2) является замкнутым множеством, поскольку его дополнением является открытое полупространство (3*). Замкнутым является шар (5), так как его дополнением является открытое множество (7).

Замечание. Так как дополнением всего пространства R^n является пустое множество, которое по определению является открытым множеством, то само пространство является замкнутым множеством. Далее, дополнением пустого множества является все пространство. Следовательно, пустое множество является замкнутым множеством.

Теорема. Объединение

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i \qquad (9)$$

конечного числа замкнутых множеств $X_i \subset R^n$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Допустим, что для множества (9) верно равенство

$$\bar{X} = \bigcap_{i=1}^{k} \bar{X}_i \ . \qquad (10)$$

Так как каждое из множеств X_i является открытым, то их пересечение (10) также является открытым множеством.

Докажем равенство (10). Имеем

$$\bar{x} \in \overline{X} \Leftrightarrow \bar{x} \notin X \Leftrightarrow \bar{x} \notin X_i \ (\forall i = 1,2,...,k) \Leftrightarrow \bar{x} \in \overline{X}_i \ (\forall i = 1,2,...,k) \Leftrightarrow \bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{k} \overline{X}_i \ .$$

Теорема. Пересечение X любого числа замкнутых множеств X_i является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть точка не принадлежит пересечению *X*. Тогда она не принадлежит какому-то из пересекаемых множеств X_i. Другим словами, она принадлежит его дополнению, которое является открытым множеством. Стало быть, она принадлежит этому дополнению вместе с некоторой окрестностью. Таким образом, все точки этой окрестности не принадлежат множеству X_i и, следовательно, не принадлежат пересечению *X*. Поэтому, эта окрестность принадлежит дополнению множества *X*.

Расположение точек относительно множества. Для фиксированных множества X и точки $\bar{a}$ из пространства R^n всегда выполняется одна из трех возможностей.

1. Существует окрестность точки $\bar{a}$, содержащаяся во множестве *X*.
2. Существует окрестность точки $\bar{a}$, содержащаяся в дополнении $\overline{X}$.
3. Всякая окрестность точки $\bar{a}$ содержит как точки из множества *X*, так и точки из его дополнения.

Точка $\bar{a}$, обладающая свойством 1, называется *внутренней точкой* множества *X*. Множество внутренних точек множества *X* называется его *внутренностью* и обозначается *int X*.

Точка $\bar{a}$, обладающая свойством 2, называется *внешней точкой* множества *X*. Множество внешних точек множества *X* называется его *внешностью.*

Точка $\bar{a}$, обладающая свойством 3, называется *граничной точкой* множества *X*. Множество граничных точек множества *X* называется его *границей* и обозначается ∂X.

Теорема. Внутренность *int X* является открытым множеством.

Доказательство. Пусть точки $\bar{a} \in int\ X$. Тогда существует 2ε-окрестность этой точки, содержащаяся во множестве *X*. Это значит, что если $\|\bar{y} - \bar{a}\| < 2\varepsilon$, то $\bar{y} \in X$. Возьмем любую точку $\bar{x} \in R^n$, удовлетворяющую неравенству $\|\bar{x} - \bar{a}\| < \varepsilon$. Тогда, если $\|\bar{z} - \bar{x}\| < \varepsilon$, то $\|\bar{z} - \bar{a}\| \le \|\bar{z} - \bar{x}\| + \|\bar{x} - \bar{a}\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Следовательно, каждая точка $\bar{z}$ из ε-окрестности точки $\bar{x}$ принадлежит множеству *X*. Поэтому каждая точка $\bar{x}$ из ε-окрестности точки $\bar{a}$ является внутренней точкой множества *X*.

Замечание. Внешность множества *X* является открытым множеством, так как она есть не что иное, как внутренность дополнения $\overline{X}$ (доказать это). Таким образом, объединение внутренности и внешности множества *X* является открытым множеством. Стало быть, дополнение их объединения является замкнутым множеством. Это дополнение является границей множества X (доказать это). Таким образом, граница ∂X является замкнутым множеством.

Определение. Множество X называется *ограниченным*, если существует число $L > 0$ такое, что $\|\overline{x}\| \le L, \forall \overline{x} \in X$. Другими словами, множество X из R^n называется *ограниченным*, если оно содержится в шаре радиуса L с центром в начале координат.

Выпуклые множества. Важным классом множеств, встречающихся в математических моделях экономики, являются выпуклые множества.
Определение. Множество $X \subset R^n$ называется *выпуклым,* если вместе с двумя любыми точками, ему принадлежащими, оно содержит весь отрезок, соединяющий эти точки, то есть

$$\overline{x} \in X, \overline{y} \in X, \lambda \in [0,1] \Rightarrow \overline{x}_\lambda = \lambda \overline{x} + (1-\lambda)\overline{y} \in X .$$

Пример. Полупространство (2) является выпуклым множеством. В самом деле, пусть точки $\overline{x}$ и $\overline{y}$ удовлетворяют неравенству (2). Тогда

$$\langle \overline{p}, \overline{x}_\lambda \rangle = \lambda \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle + (1-\lambda)\langle \overline{p}, \overline{y} \rangle \le \lambda b + (1-\lambda) b = b .$$

Значит отрезок, соединяющий эти точки, принадлежит полупространству (2). Аналогично показывается выпуклость открытого полупространства (3).

Теорема. Непустое пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.
Доказательство. Пусть две точки принадлежат этому пересечению. Тогда они принадлежат каждому из пересекаемых множеств. Следовательно, отрезок, их соединяющий, принадлежит каждому из пересекаемых множеств. Поэтому этот отрезок принадлежит пересечению.
Замечание. Множество, которое задается системой линейных неравенств, можно представить в виде пересечения полупространств. Следовательно, это множество является выпуклым. Существует теорема, которая утверждает, что всякое замкнутое выпуклое множество является пересечением замкнутых полупространств вида (2). Стало быть, каждое выпуклое замкнутое множество можно задать системой (вообще говоря, бесконечного числа) линейных неравенств вида (2).

Тема 24
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В R^n

Рассмотрим последовательность точек

$$\overline{x}_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k}) \in R^n, k = 1,2,3,\dots \qquad (1)$$

Таким образом, чтобы задать последовательность (1) нужно задать n числовых координатных последовательностей

$$\{x_{1,k}\}, \{x_{2,k}\}, \dots, \{x_{n,k}\} . \qquad (2)$$

Определение. Точка $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$ называется пределом последовательности (1), если

$$\lim_{k \to \infty} \|\overline{x}_k - \overline{a}\| = 0 \quad . \tag{3}$$

Теорема. Точка $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$ является пределом последовательности (1) тогда и только тогда, когда для каждой координатной последовательности

$$\lim_{k \to \infty} x_{i,k} = a_i \ , \ i=1,2,3,\ldots,n \quad . \tag{4}$$

Доказательство. Пусть выполнено (3). Тогда, применяя к неравенствам

$$0 \le |x_{i,k} - a_i| \le \|\overline{x}_k - \overline{a}\|$$

оценочный признак существования предела числовой последовательности, получим равенства (4).

Пусть теперь выполнены равенства (4). Тогда $|x_{i,k} - a_i| \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_{i,k} - a_i|^2 = \|\overline{x}_k - \overline{a}\|^2 \to 0$$

при $k \to \infty$. Стало быть, выполнено равенство (3).

Из этой теоремы, а также из теорем о пределах числовых последовательностей, получим следующие свойства для пределов последовательностей (1).

Свойство 1. Если предел у последовательности (1) существует, то он единственен. Предел обозначается

$$\lim_{k \to \infty} \overline{x}_k = \overline{a} \ .$$

Сама последовательность называется *сходящейся.*

Свойство 2. Пусть существуют пределы двух последовательностей

$$\lim_{k \to \infty} \overline{x}_k = \overline{x}, \lim_{k \to \infty} \overline{y}_k = \overline{y} \quad . \tag{5}$$

Тогда существуют пределы их суммы, разности, скалярного произведения и выполнены равенства

$$\lim_{k \to \infty} (\overline{x}_k \pm \overline{y}_k) = \overline{x} \pm \overline{y}; \quad \lim_{k \to \infty} \langle \overline{x}_k, \overline{y}_k \rangle = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle .$$

Если числовая последовательность $c_k \to c$ при $k \to \infty$, то

$$\lim_{k \to \infty} (c_k \overline{x}_k) = c\overline{x} .$$

Упражнение. Проверить справедливость этих свойств.

Теорема. Пусть все значения сходящейся последовательности (1) содержатся в замкнутом множестве *X*. Тогда ее предел также принадлежит этому множеству *X*.

Доказательство. Предположим, что предел $\overline{a}$ не принадлежит множеству *X*. Следовательно, он принадлежит его дополнению $\overline{X}$, которое является открытым множеством. Стало быть, точка $\overline{a}$ принадлежит дополнению $\overline{X}$ вместе с некоторой ε-окрестностью. Из определения предела (3) следует, что, начиная с некоторого номера все члены последовательности (1), будут находиться в этой окрестности и , следовательно, не принадлежать множеству X. Получили противоречие.

Определение. Последовательность (1) называется *ограниченной*, если существует число $L>0$ такое, что $\|\overline{x}_k\| \le L$ для всех номеров k.

Упражнение. Показать, что последовательность (1) является ограниченной тогда и только тогда, когда ограниченной является каждая координатная последовательность (2).

Теорема о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности. Из ограниченной последовательности (1) можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Рассмотрим случай двух переменных. Каждая координатная последовательность является ограниченной. Выделим из первой координатной последовательности $x_{1,k}$ сходящуюся подпоследовательность $x_{1,k_i} \to a_1$. Из подпоследовательности x_{2,k_i} второй координатной последовательности выделим сходящуюся подпоследовательность $x_{2,k_{i_j}} \to a_2$. Тогда подпоследовательность $x_{1,k_{i_j}} \to a_1$. Следовательно, подпоследовательность $\left(x_{1,k_{i_j}}, x_{2,k_{i_j}}\right) \to (a_1, a_2)$.

Тема 25

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пример функции многих переменных. Пусть в производстве используются n видов сырья и на выходе получается один товар. Количество i-го вида сырья, используемого в производстве, обозначим через x_i. Максимально возможное количество выпускаемой продукции при использовании заданных количеств сырья будет зависеть от этих величин, то есть является функцией n переменных

$$f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

которая называется *производственной функцией.*

Далее, производственная функция определена только при $x_i \ge 0$. Таким образом, она определена не на всем пространстве R^n, а на множестве

$$R_+^n = \left\{\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0\right\}.$$

Часто в качестве производственной функции берут функцию Кобба – Дугласа (ПФКД)

$$f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = b\, x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n}, \qquad (1)$$

названную так по имени американских экономистов Кобба и Дугласа, предложивших ее использовать в 1929 году в экономических исследования. Пусть, например, K – объем используемого в производстве основного капитала, а L – объем затрат живого труда. Тогда для зависимости суммарного выпускаемого продукта Y используют формулу

$$Y = bK^{a_1} L^{a_2}.$$

Так, например, на основании данных по экономике СССР за 1960 – 1985 годы были рассчитаны параметры ПФКД:

$$Y = 1{,}022\, K^{0{,}5382} L^{0{,}4618}.$$

Предел функции в точке. Схема построения теории предела функции многих переменных в точке та же самая, что и в случае функции одного переменного.

Определение. Функция $l(\bar{x})$, определенная в проколотой окрестности точки $\bar{a}$, называется *бесконечно малой* в этой точке, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|l(\bar{x})| < \varepsilon$ для всех точек $\bar{x}$, удовлетворяющих неравенству $0 < \|\bar{x} - \bar{a}\| < \delta$ (то есть для всех точек из δ-проколотой окрестности точки $\bar{a}$).

Обозначение бесконечно малой функции:

$$l(\bar{x}) \to 0 \text{ при } \bar{x} \to \bar{a}.$$

Пример. Линейная функция

$$f(\bar{x}) = \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle - \langle \bar{p}, \bar{a} \rangle$$

является бесконечно малой в точке $\bar{a}$. В самом деле, используя неравенство Коши – Буняковского, получим

$$|f(\bar{x})| = |\langle \bar{p}, \bar{x} \rangle - \langle \bar{p}, \bar{a} \rangle| = |\langle \bar{p}, \bar{x} - \bar{a} \rangle| \le \|\bar{p}\|\, \|\bar{x} - \bar{a}\|.$$

Следовательно, если взять

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\|\bar{p}\|},$$

то будем иметь

$$0 < \|\bar{x} - \bar{a}\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(\bar{x})| < \varepsilon.$$

Определение. Функция $f(\bar{x})$, определенная в проколотой окрестности точки $\bar{a}$, называется *ограниченной* в этой проколотой окрестности, если существует число $L > 0$ такое, что $|f(\bar{x})| \le L$ для всех точек $\bar{x}$ из этой проколотой окрестности.

Замечание. Точно так же, как и в случае функции одного переменного, доказывается, что если две функции являются бесконечно малыми в одной и той же точке, то их сумма, разность и произведение является бесконечно малыми в этой же точке. Далее, если функция $l(\bar{x})$ является бесконечно малой в точке

$\bar{a}$, а функция $f(\bar{x})$ является ограниченной в некоторой проколотой окрестности этой точки, то их произведение является бесконечно малой в точке $\bar{a}$.

Перейдем к определению предела функции $f(\bar{x})$, определенной в проколотой окрестности точки $\bar{a}$.

Определение. Число A называется пределом функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$, если

$$f(\bar{x})=A+l(\bar{x}), \quad \text{где} \quad l(\bar{x})\to 0 \text{ при } \quad \bar{x}\to\bar{a}.$$

Как и в случае функции одного переменного доказывается, что если предел существует, то он единственен.

Предел обозначается

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=A.$$

Замечание. Точно так же, как и в случае функции одного переменного, доказывается, что если две функции $f(\bar{x})$ и $g(\bar{x})$ определены в проколотой окрестности точки $\bar{a}$ и имеют в этой точке пределы, то в этой точке существуют пределы их суммы, разности, произведения и они равны, соответственно, сумме, разности и произведению пределов этих функций.

Если $g(\bar{x})$ и $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} g(\bar{x})$ не обращаются в нуль, то существует предел частного

$$\frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} \text{ и } \lim_{\bar{x}\to\bar{a}}\frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}=\frac{\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})}{\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} g(\bar{x})}.$$

Функции, непрерывные в точке

Определение. Функция $f(\bar{x})$, определенная в **окрестности** точки $\bar{a}$, называется *непрерывной* в этой точке, если существует ее предел в этой точке и

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a}).$$

Замечание. Точно так же, как и в случае функции одного переменного, доказывается, что если две функции $f(\bar{x})$ и $g(\bar{x})$ непрерывны в точке $\bar{a}$, то в этой точке непрерывны их сумма, разность и произведение.

Если $g(\bar{a})$ не обращается в нуль, то частное $\dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$ является непрерывной функцией в точке $\bar{a}$.

Пример. Функция Кобба – Дугласа является непрерывной в каждой точке области определения. В самом деле, она является произведением конечного числа непрерывных функций $f_i(\bar{x})=x_i^{a_i}$.

Пример. Функция $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1}{x_1-x_2}$ является непрерывной в каждой точке области определения, то есть при $x_1\neq x_2$. В самом деле, выражение, стоящее в знаменателе, является непрерывной функцией как разность двух непрерывных функций. Тогда функция $f(x_1,x_2)$ является частным двух непрерывных функций и, следовательно, будет непрерывной.

Теорема о непрерывности сложной функции. Пусть функция $f(\bar{x})$ является непрерывной в точке $\bar{a}$, а функции $\bar{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ определены в окрестности точки τ, непрерывны в ней и $\bar{x}(\tau) = \bar{a}$. Тогда сложная функция $\varphi(t)=f(\bar{x}(t))$ будет непрерывной в точке τ.

Доказательство. Из непрерывности рассматриваемых функций имеем

$$f(\bar{x})= f(\bar{a}) + l(\bar{x}), \quad \text{где} \quad l(\bar{x}) \to 0 \text{ при } \quad \bar{x}\to \bar{a}; \qquad (2)$$

$$x_i(t) = a_i + \gamma_i(t), \quad \text{где} \quad \gamma_i(t) \to 0 \text{ при } \quad t \to \tau.$$

Следовательно, для сложной функции имеем

$$\varphi(t)=f(\bar{x}(t)) =f(\bar{a}+\bar{\gamma}(t))=f(\bar{a}) + l(\bar{a}+\bar{\gamma}(t))\to f(\bar{a}) = \varphi(\tau) \text{ при } \quad t \to \tau.$$

Теорема о предельном значении непрерывной функции на сходящейся последовательности. Пусть функция $f(\bar{x})$ является непрерывной в точке $\bar{a}$, а последовательность $\bar{x}_k\to \bar{a}$ при $k \to\infty$. Тогда $f(\bar{x}_k) \to f(\bar{a})$ при $k \to\infty$.

Доказательство. Нужно в формуле (2) положить $\bar{x}= \bar{x}_k$.

Свойства функций, непрерывных на замкнутом ограниченном множестве

Определение. Функция, определенная на множестве X, называется *непрерывной* на нем если она является непрерывной в каждой точке этого множества.

Определение. Функция $f(\bar{x})$, определенная на множестве X, называется *ограниченной* на этом множестве, если существует число $L > 0$ такое, что $|f(\bar{x})|\le L$ для всех точек $\bar{x}$ из этого множества.

Первая теорема Вейерштрасса. Если функция непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она на нем ограничена.

Доказательство. Предположим противное. Тогда для каждого числа k =1,2,3,…точка $\bar{x}_k\in X$ такая, что $|f(\bar{x}_k)|\ge k$. Так как множество X является ограниченным, то полученная последовательность будет ограниченной. Следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\bar{x}_{k_i}\to \bar{a}$. Так как множество X является замкнутым, то точка $\bar{a}\in X$. Рассматриваемая функция непрерывна в этой точке. Поэтому, $f(\bar{x}_{k_i})\to f(\bar{a})$ при $k_i \to\infty$. С другой стороны, $|f(\bar{x}_{k_i})|\ge k_i$. Получили противоречие.

Вторая теорема Вейерштрасса. Если функция непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она на нем достигает своего *наибольшего* (*наименьшего*) значения, то есть существует точка $\bar{a}\in X$ такая, что

$$f(\bar{x})\le f(\bar{a}) \ (f(\bar{x})\ge f(\bar{a})) \text{ для всех точек } \quad \bar{x}\in X.$$

Доказательство проведем для наибольшего значения. Так как рассматриваемая функция ограничена на множестве X, то числовое множество

$$Y = \{y= f(\bar{x}) : \bar{x}\in X \}$$

является ограниченным сверху. Поэтому у него существует точная верхняя грань, которую обозначим через *F*. Из ее определения следует, что для каждого числа k =1,2,3,…существует точка $\bar{x}_k \in X$ такая, что

$$F \geq f(\bar{x}_k) \geq F - \frac{1}{k}. \qquad (3)$$

Так как множество *X* является ограниченным, то полученная последовательность $\bar{x}_k$ будет ограниченной. Следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\bar{x}_{k_i} \to \bar{a}$. Так как множество *X* является замкнутым, то точка $\bar{a} \in X$. Рассматриваемая функция непрерывна в этой точке. Поэтому, $f(\bar{x}_{k_i}) \to f(\bar{a})$. Отсюда и из (3) получим, что $f(\bar{a}) = F$. Далее, из определения числа *F* следует, что $f(\bar{x}) \leq F$ для всех точек $\bar{x} \in X$.

Тема 26
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пример. Пусть $f(\bar{x})$ является производственной функцией. Изменим количество x_1 первого вида сырья , используемого в производстве, на величину Δx_1. Тогда прирост выпускаемой продукции, приходящей на единицу вновь привлекаемого в производства сырья, равняется

$$\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\Delta x_1}. \qquad (1)$$

Например, для ПФКД $y = x_1^{0,3} x_2^{0,7}$ выражение (1) имеет вид

$$\frac{(x_1 + \Delta x_1)^{0,3} x_2^{0,7} - x_1^{0,3} x_2^{0,7}}{\Delta x_1}.$$

Более просто вычисляется предельное значение выражения (1), которое при достаточно малых значениях Δx_1 приблизительно равняется величине (1). Предельное значение величины (1) называется в экономике *предельной производительностью* первого вида сырья. В математике это предельное значение называется *частной производной* функции *f* по переменной x_1.

Определение. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)}{\Delta x_i},$$

то он называется *частной производной* функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}$ по переменной x_i.

Частная производная обозначается $\dfrac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$, или $\dfrac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{x})$, или $f'_{x_i}(\bar{x})$.

Вычисление частной производной. В формуле, которой задана функция, все переменные, кроме переменной x_i, считаются постоянными. Сама функция рассматривается как функция этого переменного x_i и от нее вычисляется производная по обычным правилам.

Пример. Используя формулу для производной степенной функции, будем иметь

$$\frac{\partial(x_1^{0,3}x_2^{0,7})}{\partial x_1} = 0,3x_1^{-0,7}x_2^{0,7}.$$

Частная производная $f'_{x_i}(\bar{x})$, в свою очередь, является функцией многих переменных. От нее можно вычислять частную производную по переменной x_j, которая называется *смешанной частной производной* и обозначается $\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_i}$ или $f''_{x_i x_j}(\bar{x})$.

Далее, принято следующее обозначение:

$$\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i^2}.$$

Пример. Для функции ПФКД имеем

$$\frac{\partial^2(x_1^{0,3}x_2^{0,7})}{\partial x_2 \partial x_1} = (0,3)(0,7)x_1^{-0,7}x_2^{-0,3}.$$

$$\frac{\partial^2(x_1^{0,3}x_2^{0,7})}{\partial x_1 \partial x_2} = (0,7)(0,3)x_1^{-0,7}x_2^{-0,3}.$$

Таким образом, в данном примере выполняется равенство смешанных частных производных

$$\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j}. \qquad (2)$$

Теорема (*о равенстве смешанных частных производных)*. Пусть функция *f* имеет в точке $\bar{x}$ непрерывные смешанные частные производные $\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_i}$ (*i,j=1,2,…,n*). Тогда для каждой пары *i≠j* выполнено равенство (2).

Дифференцируемые функции

Определение. Функция *f*, определенная в окрестности точки $\bar{x}$, называется *дифференцируемой* в этой точке, если верна формула

$$f(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\Delta\bar{x})\Delta x_i, \qquad (3)$$

где A_i – числа, а функции $\alpha_i(\Delta\bar{x})$ удовлетворяют условию

$$\alpha_i(\Delta\bar{x}) \to 0 \ (i = 1,2,\ldots, n) \text{ при } \Delta\bar{x} \to 0. \qquad (4)$$

Пример. Пусть $f(x_1,x_2) = x_1 x_2$. Тогда

$$(x_1+\Delta x_1)(x_2+\Delta x_2) - x_1 x_2 = x_2\,\Delta x_1 + x_1\,\Delta x_2 + \Delta x_1\,\Delta x_2.$$

Следовательно, рассматриваемая функция является дифференцируемой и

$$A_1 = x_2 = \frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_1},\quad A_2 = x_1 = \frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_2},\quad \alpha_1(\Delta x_1,\Delta x_2) = \Delta x_2, \alpha_2(\Delta x_1,\Delta x_2) = 0 \ .$$

Теорема. Пусть функция f дифференцируема в точке $\bar{x}$. Тогда в этой точке у нее существуют частные производные и выполнены равенства

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = A_i \ (i=1,2,\ldots, n). \tag{5}$$

Доказательство. Из формулы (3) следует, что

$$\frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)}{\Delta x_i} = A_i + \alpha_i(\Delta x_i).$$

Переходя к пределу при $\Delta x_i \to 0$, получим равенство (5).

Замечание. Имеются примеры функций, у которых частные производные в точке существуют, но функции не дифференцируемы в этой точке.

Теорема (*достаточные условия дифференцируемости функции)*. Если функция f имеет частные производные по всем переменным в некоторой окрестности точки $\bar{x}$, причем все эти частные производные непрерывны в самой точке $\bar{x}$, то указанная функция дифференцируема в этой точке.

Дифференциал функции многих переменных

Определение. *Дифференциалом* дифференцируемой в точке $\bar{x}$ функции f называется главная линейная относительно приращений аргументов часть приращения этой функции, то есть

$$df(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} A_i\,\Delta x_i \ . \tag{6}$$

Используя равенства (5) выражение для дифференциала запишем в следующем виде:

$$df(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}\Delta x_i \ . \tag{7}$$

Под дифференциалом dx_i независимой переменной x_i понимаем любое приращение Δx_i этой переменной x_i. С учетом этой договоренности формула (7) принимает вид

$$df(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} d x_i \ . \tag{8}$$

Теорема о производной сложной функции. Пусть функция $f(\bar{x})$ на некотором открытом множестве X и каждой его точке имеет непрерывные частные производные по всем переменным. Пусть скалярные функции

$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)$ определены и дифференцируемы в каждой точке интервала (α, β) и при всех t из этого интервала точки $\overline{\varphi}(t) = (\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)) \in X$. Тогда сложная функция $u(t) = f(\overline{\varphi}(t))$ дифференцируема в каждой точке интервала (α, β) и ее производная вычисляется по формуле

$$u'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\overline{\varphi}(t))}{\partial x_i}\varphi_i'(t). \tag{9}$$

Доказательство. Из дифференцируемости каждой функции $\varphi_i(t)$ следует, что $\varphi_i(t+\Delta t) = \varphi_i(t) + \varphi_i'(t)\Delta t + \Delta t\,\beta_i(\Delta t)$, где $\beta_i(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$.
Из дифференцируемости функции f следует, что

$$u(t+\Delta t) = f(\varphi_1(t)+\varphi_1'(t)\Delta t + \Delta t\,\beta_1(\Delta t),\ldots,\varphi_n(t)+\varphi_n'(t)\Delta t + \Delta t\,\beta_n(\Delta t)) =$$

$$= f((\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)) + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\overline{\varphi}(t))}{\partial x_i}(\varphi_i'(t)+\beta_i(\Delta t)) +$$

$$+ \Delta t \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i'(t) + \beta_i(\Delta t))\,\alpha_i(\varphi_1'(t)\Delta t + \Delta t\,\beta_1(\Delta t),\ldots,\varphi_n'(t)\Delta t + \Delta t\,\beta_n(\Delta t)).$$

Причем

$$\alpha_i \quad (\varphi_1'(t)\Delta t + \Delta t\,\beta_1(\Delta t),\ldots,\varphi_n'(t)\Delta t + \Delta t\,\beta_n(\Delta t)) \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Следовательно,

$$\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(\overline{\varphi}(t))}{\partial x_i} + \alpha_i(\varphi_1'(t)\Delta t + \Delta t\,\beta_1(\Delta t),\ldots,\varphi_n'(t)\Delta t + \right.$$

$$\left. + \Delta t\,\beta_n(\Delta t))(\varphi_i'(t) + \beta_i(\Delta t)\right).$$

Переходя в этом выражении к пределу при $\Delta t \to 0$, получим формулу (9).

Теорема (*формула для конечных приращений функции многих переменных*). Пусть функция f имеет непрерывные частные производные по всем переменным на выпуклом множестве X. Тогда для любых точек $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из этого множества найдется число $\lambda \in [0,1]$ такое, что

$$f(\overline{x}) - f(\overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\overline{y}+\lambda(\overline{x}-\overline{y}))}{\partial x_i}(x_i - y_i). \tag{10}$$

Доказательство. Из выпуклости множества X следует, что при любом числе $t \in [0,1]$ точка $t\overline{x}+(1-t)\,\overline{y} \in X$. Следовательно, функция $u(t) = f(t\overline{x}+(1-t)\,\overline{y})$ определена при всех $t \in [0,1]$. По теореме о дифференцируемости сложной функции

$$u'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\overline{y}+t(\overline{x}-\overline{y}))}{\partial x_i}(x_i - y_i). \tag{11}$$

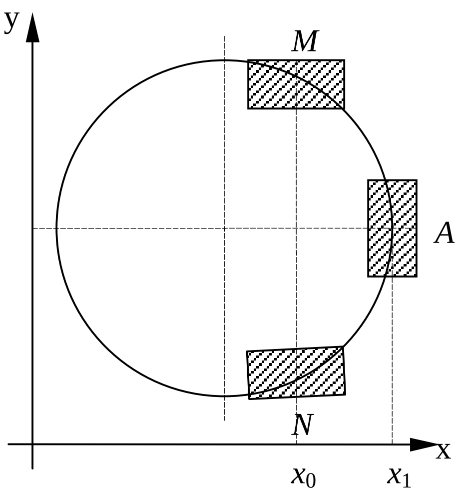
Далее, применяя теорему Лагранжа для функции одного переменного, найдем число $\lambda \in [0,1]$ такое, что

$$f(\overline{x}) - f(\overline{y}) = u(1) - u(0) = (1-0)u'(\lambda) = u'(\lambda).$$

Отсюда и из формулы (11) следует требуемая формула (10).

Неявные функции. Рассмотрим уравнение

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (12)$$



На плоскости xOy это уравнение задает окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Рассмотрим три точки M, N, A на этой окружности (см. рис.) .

Существует прямоугольник, который содержит внутри себя точку M, такой, что пересечение его с окружностью задается в виде графика однозначной функции

$$y = \sqrt{1 - x^2}\ .$$

Аналогичное пересечение для точки N задается в виде графика однозначной функции

$$y = -\sqrt{1 - x^2}\ .$$

Для точки A такого прямоугольника, чтобы пересечение задавалось в виде графика однозначной функции, не существует.

Выясним, почему так получается. Уравнение (12) можно записать в виде

$$f(x,y) = 0 \text{ , где } f(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Частная производная

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$$

в точка M и N не равна нулю. В точке A она обращается в нуль.

Перейдем к рассмотрению задачи в общем виде. Задана функция $f(x,y)$, которая определена на некотором множестве $X \subset R^2$. Задана точка (x_0, y_0), являющаяся внутренней точкой множества X и удовлетворяющая уравнению

$$f(x_0, y_0) = 0. \qquad (13)$$

Рассматривается задача о разрешении уравнения

$$f(x,y) = 0 \qquad (14)$$

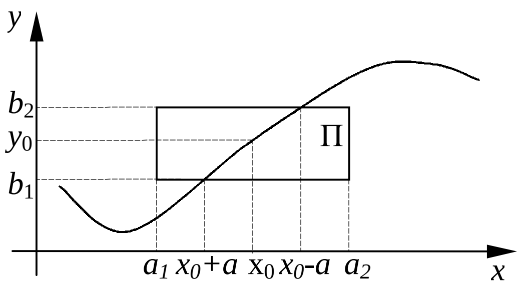
относительно переменной y.

Теорема о неявной функции *(без доказательства)*. Пусть функция $f(x,y)$ и ее частные производные по всем переменным непрерывны в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0\ .$$

Тогда существует прямоугольник (см. рис.)

$$\Pi = \{\ (x,y) \in R^2 : |x - x_0| < a,\ b_1 < y < b_2\ \}$$



такой, что пересечение кривой (14) с этим прямоугольником задается в виде графика *однозначной дифференцируемой* функции $y = y(x)$, определенной при $|x - x_0| < a$ и удовлетворяющей равенству $y(x_0) = y_0$.

Производная неявной функции вычисляется по формуле

$$y'(x) = -\frac{f_x'(x, y(x))}{f_y'(x, y(x))}. \tag{15}$$

Проведем вывод формулы (15). Имеем тождество $f(x, y(x)) = 0$. Применяя теорему о дифференцируемости сложной функции , получим равенство

$$0 = f_x'(x, y(x)) + f_y'(x, y(x))y'(x).$$

Отсюда следует формула (15).

Градиент функции многих переменных. Если функция f дифференцируема в точке $\bar{x}$, то вектор

$$\left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}\right)$$

называется *градиентом* функции f в точке $\bar{x}$ и обозначается $gradf(\bar{x})$. Используя запись скалярного произведения, формулу для приращения функции можно записать в следующем виде:

$$f(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - f(\bar{x}) = \langle \Delta\bar{x}, gradf(\bar{x}) \rangle + \langle \Delta\bar{x}, \bar{\alpha}(\Delta\bar{x}) \rangle.$$

Оптимальное свойство градиента. Будем двигаться из точки $\bar{x}$ по направлению единичного вектора $\bar{p}$, то есть берем $\Delta\bar{x} = t\,\bar{p}$, $t > 0$.

Тогда $f(\bar{x} + t\,\bar{p}) = f(\bar{x}) + t\,\langle \bar{p}, gradf(\bar{x}) \rangle + t\langle \bar{p}, \bar{\alpha}(t\bar{p}) \rangle$, причем $\langle \bar{p}, \bar{\alpha}(t\bar{p}) \rangle \to 0$ при $t \to 0$. Пренебрегая малыми по сравнению с t слагаемыми, при малых t имеем приблизительное равенство

$$f(\bar{x} + t\,\bar{p}) \approx f(\bar{x}) + t\,\langle \bar{p}, gradf(\bar{x}) \rangle\ .$$

*Вопрос***.** По какому направлению нужно двигаться из точки $\bar{x}$, чтобы приращение функции было как можно больше?

Ответ. По направлению единичного вектора

$$\bar{p} = \frac{gradf(\bar{x})}{\|gradf(\bar{x})\|}. \tag{16}$$

В самом деле, из неравенства Коши – Буняковского следует, что для любого единичного вектора $\bar{p}$ выполнено неравенство

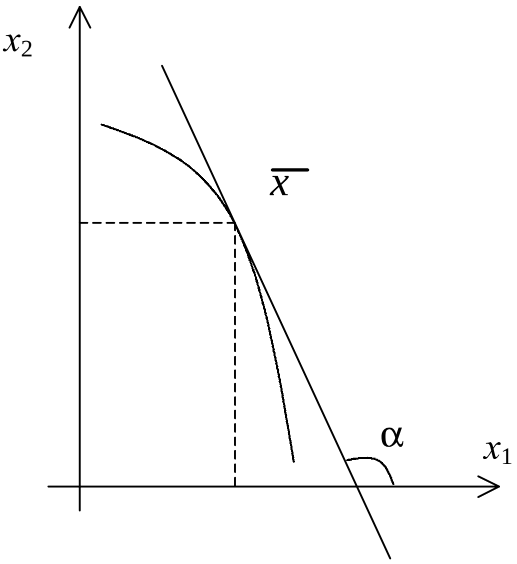
$$\langle \bar{p}, gradf(\bar{x}) \rangle \le \|\bar{p}\| . \|gradf(\bar{x})\| \le \|gradf(\bar{x})\|.$$

Но на векторе (16) выполнено равенство

$$\langle \bar{p}, gradf(\bar{x}) \rangle = \|gradf(\bar{x})\|.$$

Следовательно, градиент функции направлен в сторону ее возрастания.

Геометрический смысл градиента. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x_1, x_2)$. Возьмем число C и на плоскости рассмотрим кривую γ, заданную уравнением $f(x_1, x_2) = C$. Эта кривая называется *линией уровня* функции *f*.



Допустим, что в окрестности точки $\bar{x}$ эта кривая задается в виде графика дифференцируемой функции $x_2 = \varphi(x_1)$. Тогда $f(x_1, \varphi(x_1)) = C$. Применяя теорему о дифференцируемости сложной функции, получим

$$\frac{\partial f(x_1, \varphi(x_1))}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1, \varphi(x_1))}{\partial x_2}\varphi'(x_1) = 0 \Rightarrow \varphi'(x_1) = -\frac{\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}}. \qquad (17)$$

С другой стороны, если через α обозначить угол, который образует касательная, проведенная к кривой в точке $\bar{x}$, с осью x_1, то $\varphi'(x_1) = tg\alpha$.
Отсюда и из равенства (17) следует, что

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} tg\alpha = 0 \cdot$$

Вектор с координатами $(1; tg\alpha) = (1; \varphi'(x_1))$ направлен по касательной к кривой. Следовательно, $grad f(x_1, x_2)$ перпендикулярен касательной, проведенной к кривой в точке $\bar{x}$.

Тема 27
ВЫПУКЛЫЕ И ВОГНУТЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Функция $f(\bar{x})$, определённая на выпуклом множестве $X \subset R^n$, называется *выпуклой,* если для любых точек $\bar{x}, \bar{y} \in X$ и для любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполнено неравенство Иенсена:

$$f(\lambda\bar{x} + (1-x)\bar{y}) \le \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\bar{y}). \qquad (1)$$

Зафиксируем любые $\bar{x} \in X, \bar{p} \in R^n$ и рассмотрим функцию одного переменного

$$\varphi(t) = f(\bar{x} + t\bar{p}),\ t \in I, \text{ где } I = \{t:\ \bar{x} + t\bar{p} \in I\}. \qquad (2)$$

Упражнение. Используя выпуклость множества X, показать, что I является промежутком, то есть если точки $t_1, t_2 \in I$, то при любом числе $\lambda \in [0,1]$ точка $\lambda t_1 +$ (1-λ)$t_2 \in I$.

Замечание. Если функция f определена на всем пространстве R^n, то промежуток I является всей числовой осью.

Упражнение. Показать, что если функция f выпукла, то для любых $\bar{x}_i \in X, \lambda_i \ge 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ выполнено неравенство $f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \bar{x}_i) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\bar{x}_i)$.

Теорема. Функция $f(\bar{x})$ выпукла тогда и только тогда, когда для любых $\bar{x} \in X, \bar{p} \in R^n$ выпуклой является функция (2).

Доказательство. Пусть функция $f(\bar{x})$ выпукла. Возьмём $\lambda \in [0,1]$, точки $t_1, t_2 \in I$,. Тогда

$$\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(\bar{x} + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)\bar{p}) = f(\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{x} + \lambda t_1 \bar{p} + (1-\lambda)t_2 \bar{p}) =$$
$$= f(\lambda(\bar{x} + t\bar{p}) + (1-\lambda)(\bar{x} + t\bar{p})) \le \lambda f(\bar{x} + t_1 \bar{p}) + (1-\lambda) f(\bar{x} + t_2 \bar{p}) =$$
$$= \lambda \varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2).$$

Таким образом,

$$\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \le \lambda \varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2). \tag{3}$$

Пусть для любых $\bar{x} \in X, \bar{p} \in R^n$ функция (2) выпукла. Покажем, что и функция $f(\bar{x})$ является выпуклой. Возьмём любые точки $\bar{x}, \bar{y} \in X$ и число $\lambda \in [0,1]$. Тогда, используя неравенство (3), будем иметь

$$f(\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{y}) = f(\bar{y} + \lambda(\bar{x} - \bar{y})) = \varphi(\lambda 1 + (1-\lambda)0) \le \lambda \varphi(1) + (1-\lambda)\varphi(0) =$$
$$= \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\bar{y}).$$

Определение. Функция $f(\bar{x})$ называется *вогнутой,* если для любых точек $\bar{x}, \bar{y} \in X$ и для любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$f(\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{y}) \ge \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\bar{y}). \tag{4}$$

Упражнение. Показать, что функция $f(\bar{x})$ является вогнутой тогда и только тогда, когда функция (- $f(\bar{x})$) является выпуклой.

Упражнение. Показать, что если функция f вогнута, то для любых $\bar{x}_i \in X, \lambda_i \ge 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ выполнено неравенство $f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \bar{x}_i) \ge \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\bar{x}_i)$.

Упражнение. Показать, что функция $f(\bar{x})$ является вогнутой тогда и только тогда, когда функция $\varphi(t)$ (2) является вогнутой по переменной t для любых $\bar{x} \in X, \bar{p} \in R^n$.

Теорема (*критерий выпуклости (вогнутости) дифференцируемой функции*). Пусть функция $f(\bar{x})$ имеет непрерывные частные производные. Тогда она является выпуклой (вогнутой) тогда и только тогда, когда для любых $\bar{x}\in X, \bar{p}\in R^n$ выражение

$$\sum_{i-1}^{n}\frac{f(\bar{x}+t\bar{p})}{\partial x_i}p_i \qquad (5)$$

возрастает (убывает) по *t*.

Доказательство. Функция *f* выпукла (вогнута) тогда и только тогда, когда функция $\varphi(t)$ (2) выпукла (вогнута). По теореме о дифференцируемости сложной функции, функция (2) дифференцируема и её производная равна

$$\varphi'(t)=\sum_{i-1}^{n}\frac{f(\bar{x}+t\bar{p})}{\partial x_i}p_i .$$

Функция $\varphi(t)$ выпукла (вогнута) тогда и только тогда, когда ее производная $\varphi'(t)$ возрастает (убывает) по *t*.

Теорема. Пусть выпуклая (вогнутая) функция $f(\bar{x})$ имеет непрерывные частные производные. Тогда для любых $\bar{x},\bar{y}\in X$ выполнено равенство

$$f(\bar{y})-f(\bar{x})\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{f(\bar{x})}{\partial x_i}(y_i-x_i) \quad (f(\bar{y})-f(\bar{x})\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{f(\bar{x})}{\partial x_i}(y_i-x_i)). \quad (6)$$

Доказательство проведём для выпуклости. Из неравенства (1) имеем, что

$$\frac{f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))-f(\bar{x})}{\lambda}\leq f(\bar{y})-f(\bar{x}).$$

Устремим $\lambda\to 0$. Тогда в левой части последнего неравенства будет стоять производная $\varphi'(0)$ функции (2) при $\bar{p}=\bar{y}-\bar{x}$. Эта производная определяется формулой (5). Отсюда получим неравенство (6).

Теорема (*критерий выпуклости (вогнутости) два раза дифференцируемой функции*). Пусть функция $f(\bar{x})$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Тогда она является выпуклой (вогнутой) в том и только том случае, когда для любых $\bar{x}\in X, \bar{p}\in R^n$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}p_i p_j\geq 0 \qquad (\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}p_i p_j\leq 0). \qquad (7)$$

Доказательство. Для функции (2) имеем

$$\varphi'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(\bar{x}+t\bar{p})}{\partial x_i}p_i \;\Rightarrow\; \varphi''(t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\bar{x}+t\bar{p})}{\partial x_i\partial x_j}p_i p_j .$$

Функция *f* выпукла (вогнута) тогда и только тогда, когда функция $\varphi(t)$ выпукла (вогнута) $\Leftrightarrow$ $\varphi''(t)\geq 0$ $(\varphi''(t)\leq 0)$ для любых $\bar{x}\in X, \bar{p}\in R^n$, $\forall t\in I$. Полагая $t = 0$, получим условие (7).

Пример. Линейная функция $y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ является как выпуклой, так и вогнутой. Квадрат от линейной функции $f(x_1,...,x_2) = (a_0 + a_1 x_1 + ... + a_n x_n)^2$ является выпуклой функцией. В самом деле,

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} = 2(a_0 + a_1 x_1 + ... + a_n x_n) a_j \Rightarrow \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} = 2 a_i a_j .$$

Следовательно, условие (7) принимает вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j p_i p_j = (a_1 x_1 + ... + a_n x_n)^2 \geq 0 .$$

Замечание. Сумма конечного числа выпуклых (вогнутых) функций является выпуклой (вогнутой) функцией.

Критерий положительной (отрицательной) определенности квадратичной симметрической матрицы.

Обозначим

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} . \tag{8}$$

Тогда из равенства смешанных частных производных получим, что

$$a_{ij} = a_{ji} . \tag{9}$$

Следовательно, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

является *симметричной.* Неравенства (7) примут вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j \geq 0 \ \ (\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j \leq 0).$$

Определение. Симметричная матрица (10) называется *положительно* (*отрицательно*) *определенной*, если для любого ненулевого набора чисел p_i, *i=1,…, n,* выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j > 0 \ \ (\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j < 0). \tag{11}$$

Теорема (*критерий положительной определенности квадратичной матрицы*). Для того чтобы симметричная квадратичная матрица (10) была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительны, то есть

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \qquad (12)$$

Доказательство. Проведем его для случая матрицы второго порядка. Тогда неравенство (11) примет вид

$$au^2 + 2buv + cv^2 > 0. \qquad (13)$$

Здесь обозначено $a = a_{11}, b = a_{12} = a_{21}, c = a_{22}, u = p_1, v = p_2$. Перепишем условия (12) в новых обозначениях:

$$a > 0,\ ac - b^2 > 0. \qquad (14)$$

Пусть выполнены условия (14). Тогда

$$au^2 + 2buv + cv^2 = (\sqrt{a}u + \frac{b}{\sqrt{a}}v)^2 + \frac{ac - b^2}{a}v^2. \qquad (15)$$

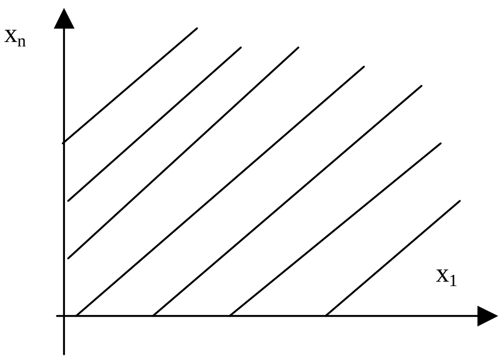
Следовательно, неравенство (13) будет выполнено.
Пусть выполнено неравенство (13). Тогда, полагая в нем $v = 0$ и $u = 1$, получим $a > 0$. Возьмем $v = 1$, $u = -\frac{b}{a}$.
Тогда из (13) и (15) получим второе неравенство (14).

Следствие. Для того чтобы симметричная квадратичная матрица (10) была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки ее главных миноров чередовались, начиная с отрицательного, то есть

$$\Delta_1 = a_{11} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ldots \qquad (16)$$

Доказательство. Матрица (-A) является положительно определенной и ее главные миноры $\hat{\Delta}_i$ связны с главными минорами Δ_i матрицы A следующими соотношениями: $\hat{\Delta}_i = (-1)^i \ \Delta_i$. Отсюда и из критерия положительно определенности получим доказательство утверждения следствия.

Функция полезности и её свойства. Рассмотрим рынок, на котором имеется набор n видов товаров и услуг. Предположим, что приобретённое количество каждого товара и каждой услуги можно охарактеризовать неотрицательным числом. Тогда набор услуг можно задавать вектором $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, где x_1 – количество первого вида услуги, …, x_n – количество n-го вида услуги. *Пространство товаров* – это множество векторов $\bar{x} \in R^n$, у которых все координаты $x_i \geq 0$ (см. рис.). Оно обозначается R^n_+.



Однако не все наборы товаров нужны или доступны потребителю. Считаем, что задано множество доступных для потребителя товаров $X \subset R_+^n$. Обычно считают, что это множество доступности удовлетворяет следующим свойствам.

1. Множество доступности является замкнутым. Это означает, что если для набора $\bar{x}_*$ имеется сколь угодно близкий доступный набор, то и сам набор $\bar{x}_*$ является доступным.

2. Множество доступности является выпуклым. Это означает, что если наборы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ являются доступными, то любая их линейная комбинация $\lambda\bar{x}+(1-\lambda)\bar{y}$ при любом $0 < \lambda < 1$ также является доступным набором.

Когда потребитель идёт на рынок приобрести необходимые ему товары, то один набор товаров для него предпочтительнее другого. Будем считать, что задана функция $u(\bar{x})$, которая задаёт такое предпочтение, а именно: набор $\bar{x}$ *предпочтительнее* набора $\bar{y}$ тогда и только тогда, когда $u(\bar{x}) \geq u(\bar{y})$. Эта функция называется *функцией полезности.*

Свойства функции полезности. Экономисты требуют, чтобы функция полезности была «правильной», то есть чтобы она удовлетворяла ряду условий.
Условие 1. *Ненасыщаемость*. Ненасыщаемость соответствует неспособности индивида быть полностью удовлетворенным. Экономисты это формулируют следующим образом : «не имеет значения , как много товаров и услуг находится в индивидуальных владениях, из новых товаров и услуг человек всегда сумеет извлечь дополнительную пользу».

Математически это означает, что $u(x_1+\Delta x_1, x_2,...,x_n) > u(x_1,x_2,...,x_n)$ при

$\Delta x_1 > 0$. Следовательно,

$$\frac{u(x_1+\Delta x_1,x_2,...,x_n)-u(x_1,x_2,...,x_n)}{\Delta x_1} > 0 \text{ при любом } \Delta x_1.$$

Эта величина равняется доле приращенной полезности, приходящей на каждую новую единицу первого товара. Предельное значение этого отношения при $\Delta x_1 \to 0$ называется *предельной полезностью* первого товаров. Таким образом, предельная полезность первого вида товара является частной производной функции полезности по переменной x_1. Из условия ненасыщаемости следует, что частная производная

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1} \geq 0.$$

Аналогично для других видов товаров. Обычно считают, что все частные производные

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i} > 0 \text{ для всех } i=1,2,\dots,n. \qquad (17)$$

Условие 2. *Убывающая предельная полезность.* Это соответствует тому обстоятельству, что с приобретением все большего количества какого-либо потребительского товара каждая новая единица этого товара обеспечивает все меньший дополнительный вклад в общую полезность.

Это условие называется ***первым законом Госсена*** (немецкий экономист XIX века на практике подметил действие этого закона) или *законом убывающей предельной полезности* – ***предельная полезность i-го товара убывает с увеличением объема этого товара при постоянных количествах других видов товаров.***

Это означает, что

$$\frac{\dfrac{\partial u(x_1+\Delta x_1, x_2,...,x_n)}{\partial x_1}-\dfrac{\partial u(x_1, x_2,...,x_n)}{\partial x_1}}{\Delta x_1}<0 \text{ при любом } \Delta x_1.$$

Предел этого отношения является второй частной производной и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2,...x_n)}{\partial x_1{}^2}\le 0.$$

Аналогично для других переменных. Обычно полагают, что

$$\frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_1{}^2}<0,...,\frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial^2 x_n}<0. \qquad (18)$$

Условие 3. *Убывающая предельная замещаемость.* По мере того, как приобретается дополнительная единица *j*-го товара, она становится менее привлекательной по отношению к другим товарам. Это значит, что предельная полезность первого вида товаров растёт, если растёт количество второго вида товаров.

Запишем в математической форме это условие. Возьмем два набора товаров $(x_1, x_2, x_3,...,x_n)$ и $(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3,...,x_n)$ одинаковой полезности, то есть $u(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3,...,x_n)=u(x_1, x_2, x_3,...,x_n)$.

Отсюда получим, что $\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_1}\Delta x_1+\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_2}\Delta x_2=0.$

Из условия *ненасыщаемости* следует, что Δx_1 и Δx_2 имеют разные знаки.

Отсюда получим $|\Delta x_2/\Delta x_1| = -(\Delta x_2/\Delta x_1)\approx(\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_1}/\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_2})$.

В общем случае,

$$\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta x_j}\right|\approx\frac{\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_k}}. \qquad (19)$$

Предельное значение

$$\lim_{\Delta x_j \to 0} \left| \frac{\Delta x_k}{\Delta x_j} \right| = M_j^k(\bar{x}) \qquad (20)$$

называется *предельной нормой замещения j-го товара k-м товаром.* Она показывает, сколько единиц k-го товара добавочно могут компенсировать уменьшение количества j-го товара на одну единицу.

Из (19) и (20) следует, что предельная норма замещения j-го товара k-м товаром равна отношению предельных полезностей этих товаров

$$M_j^k(\bar{x}) = \frac{\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_k}}. \qquad (21)$$

Условие убывающей предельной замещаемости означает, что функция $M_j^k(x_1,...,x_j,...,x_k,...,x_n)$ убывает с увеличением переменной x_j при условии выполнения равенства $u(x_1,...,x_j,...,x_k,...,x_n) = const.$

Рассмотрим случай двух товаров. Тогда равенство $u(x_1, x_2)=const$ задает на плоскости кривую, которая называется *кривой безразличия.* По теореме о неявной функции в окрестности каждой точки, лежащей на этой кривой, кривая безразличия может быть задана в виде графика однозначной функции $x_2 = x_2(x_1)$, причем

$$\frac{d}{dx_1} x_2(x_1) = -\frac{\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_2}}.$$

Функция $M_1^2(x_1, x_2(x_1))$ убывает с увеличением x_1. Запишем условие отрицательности ее производной:

$$\frac{d}{dx_1} M_1^2(x_1, x_2(x_1)) = \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_2}}\right) =$$

$$=\left(\left(\frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_2 \partial x_1}\left(\frac{\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_2}}\right)\right)\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_2^2}\left(\frac{\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_2}}\right)\right)\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_1}\right) \Big/ \left(\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_2}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_1}\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_1}\right)^2\right) \Big/ \left(\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_2}\right)^3 < 0.$$

Здесь было использовано равенство смешанных производных. Отсюда и из условия ненасыщаемости (17) получим неравенство

$$\frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_2}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_1}\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_1}\right)^2 < 0. \qquad (22)$$

Обозначим

$$p_1 = -\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_2}, \quad p_2 = \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_1}.$$

Тогда неравенство (22) примет вид

$$\frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_1^2} p_1{}^2 + 2\frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_2} p_1 p_2 + \frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_2^2} p_2{}^2 < 0. \qquad (23)$$

Таким образом, если функция полезности является строго вогнутой, то неравенство (23) выполнено. Следовательно, для строго вогнутой функции полезности условие убывающей предельной полезности выполнено.

Замечание. Иногда от функции полезности требуют, чтобы она отражала следующее свойство: *лучше иметь комбинацию товаров пусть даже в меньших количествах, чем один из этих товаров наименьшей полезности.* Чтобы формализовать это условие, обозначим через

$$\bar{e}_i = (0,0,\dots,0,1,0,\dots,0) \quad ,$$

у которого единица стоит на i-м месте. Тогда любой набор представим в виде $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n$. Обозначим через

$$Q = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

общее количество товаров. Тогда сформулированное условие принимает вид

$$u(\bar{x}) \geq \min_{1 \leq i \leq n} u(Q\bar{e}_i).$$

Если функция полезности вогнута, то это неравенство выполнено.
В самом деле, имеем

$$\lambda_1 = \frac{x_i}{Q} \geq 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1, x_i = \lambda_i \cdot Q \Rightarrow \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (Q\bar{e}_i).$$

Поэтому,

$$u(\bar{x}) = u(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (Q\bar{e}_i)) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(Q\bar{e}_i) \geq$$

$$\geq (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \min_{1 \leq i \leq n} u(Q\bar{e}_i) = \min_{1 \leq i \leq n} u(Q\bar{e}_i$$

Тема 28
УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Точка $\bar{x}^0 \in X \subset R^n$ ($\bar{x}_0 \in X \subset R^n$) называется точкой *локального максимума* (*минимума*) функции многих переменных $f(\bar{x})$, определенной на этом множестве X, если $f(\bar{x}^0) \geq f(\bar{x})$ ($f(\bar{x}_0) \leq f(\bar{x})$) для всех $\bar{x} \in X$ и из некоторой окрестности точки $\bar{x}^0$ ($\bar{x}_0$). Точки локального максимума и минимума называют точками *локального экстремума.*

Теорема. Пусть точка локального максимума (минимума) функции $f(\bar{x})$ является внутренней точкой множества *X*, а сама функция имеет в этой точке частные производные. Тогда они все равны нулю.

Доказательство. Зафиксируем все переменные, кроме первой. Будем иметь функцию одного переменного $f(x_1, x^0{}_2, ..., x^0{}_n)$. Полученная функция одной переменной определена в некоторой окрестности точки $x^0{}_1$ (x_{01}) и имеет в этой точке локальный максимум (локальный минимум). Значит(по теореме Ферма) её производная (а это и есть частная производная по переменной x_1) в этой точке равна нулю. Аналогично для других переменных.

Таким образом, для определения точек экстремума дифференцируемой функции *n* переменных имеем *n* уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Определение. Точка $\bar{x}^* \in X \subset R^n$ $(\bar{x}_* \in X \subset R^n)$ называется точкой *абсолютного максимума* (*минимума*) функции многих переменных $f(\bar{x})$, определенной на этом множестве *X*, если $f(\bar{x}^*) \geq f(\bar{x})$ $(f(\bar{x}_*) \leq f(\bar{x}))$ для всех $\bar{x} \in X$.

Точки абсолютного максимума и минимума называют точками *абсолютного экстремума*.

Замечание. Каждая точка абсолютного максимума (минимума) является точкой локального максимума (минимума). Обратное, вообще говоря, не верно.

Теорема. Пусть функция $f(\bar{x})$ определена на выпуклом множестве *X*, имеет на этом множестве непрерывные частные производные и является выпуклой (вогнутой). Тогда, если в точке $\bar{x}$ выполнены равенства (1), эта точка является точкой абсолютного минимума (максимума).

Доказательство проведём для выпуклой функции. Возьмём любую точку $\bar{y} \in X$. Тогда из критерия выпуклости функции имеем

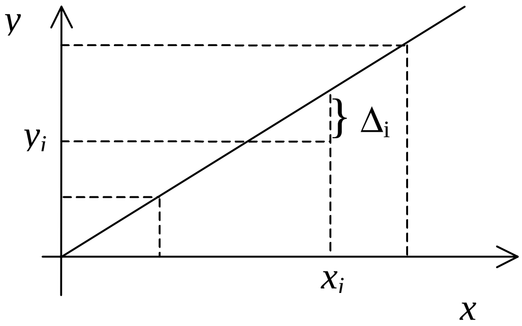
$$f(\bar{y}) - f(\bar{x}) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}(y_i - x_i) = [\text{в силу } (1)] = 0 \Rightarrow f(\bar{y}) \geq f(\bar{x}).$$

Метод наименьших квадратов. Пусть производственная функция имеет вид $Y = AX^a$. Здесь, например, *X – величина затрачиваемого ресурса,* а *Y – объем выпускаемой продукции.* Имеются статистические данные, с помощью которых хотим определить коэффициенты *A* и *a*.

Обозначим $y=lnY$, $x= lnX$, $a_1= a$, $a_2=lnA$. Тогда искомая зависимость примет линейный вид $y=a_1x+a_2$. Статистические данные запишем в виде таблицы

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Составляем сумму для квадратов длин (см. рис.) отклонений Δ_i



$$\varphi(a_1,a_2)=\sum_{i=1}^{n}(a_1x_i+a_2-y_i)^2$$

Как сумма выпуклых функций эта функция выпукла. Значения параметров a_1 и a_2 ищется из условия минимума этой функции. Запишем для неё условие минимума

$$\frac{\partial\varphi(a_1,a_2)}{\partial a_1}=\sum_{i=1}^{n}2(a_1x_i+a_2-y_i)x_i=0,$$

$$\frac{\partial\varphi(a_1,a_2)}{\partial a_2}=\sum_{i=1}^{n}2(a_1x_i+a_2-y_i)=0.$$

Отсюда получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+a_2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\,y_i, \\ a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+a_2n=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

Она служит для определения чисел a_1, a_2.

Условный экстремум. Предыдущий пример рассматривался без каких-либо ограничений на параметры a_1, a_2. Если же потребовать, чтобы выполнялось условие $0\le a_1\le 1$, то получим задачу с ограничениями. Для такой задачи условия экстремума принимают другой вид.

Запишем задачу на условный экстремум в общем виде

$$f_0(\bar{x})\to min, f_1(\bar{x})=0,\dots f_k(\bar{x})=0, f_{k+1}(\bar{x})\le 0,\dots, f_m(\bar{x})\le 0, \quad \bar{x}\in X. \quad (2)$$

Все функции $f_i(x)$ определены на множестве X. Функция $f_0(\bar{x})$ называется целевой функцией. Связи, где стоят знаки равенства, называются связями типа равенств, а где неравенства – связями типа неравенств.

Определение. Точка $\bar{x}^*\in X$ является решением задачи (2), если она удовлетворяет всем связям этой задачи и для любой точки $\bar{x}\in X$, также удовлетворяющей всем связям в задаче (2), выполнено неравенство

$$f(\bar{x}^*)\le f(\bar{x}). \quad (3)$$

Рассмотрим в начале случай одной переменной при наличии одной связи типа неравенства.

Лемма. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на интервале (a, b), а точка $y \in (a, b)$ является решением следующей задачи:

$$f(x) \to min, \;\; g(x) \le 0, \;\; x \in (a, b). \qquad (4)$$

Тогда существует *ненулевой набор* чисел λ, ν такой, что

1) $\lambda \ge 0, \nu \ge 0$;

2) $\nu\, g(y) = 0$;

3) $\lambda\; f'(y) + \nu\; g'(y) = 0$.

Доказательство. Из дифференцируемости рассматриваемых функций следует, что они непрерывны на интервале (a, b).

Пусть $g(y) < 0$. Тогда из непрерывности этой функции следует, что $g(x) < 0$ для всех чисел x, достаточно близких к y. Следовательно, точка y является точкой локального минимума функции $f(x)$. По теореме Ферма производная $f'(y) = 0$. Возьмем $\lambda = 1, \nu = 0$. Пусть $g(y) = 0$ и $g'(y) = 0$. Тогда при $\lambda = 0, \nu = 1$ условия 1) – 3) выполнены.

Пусть $g(y) = 0$ и $g'(y) < 0$. Тогда при всех x, достаточно близких к y, выполнено неравенство

$$\frac{g(x)}{x-y} = \frac{g(x)-g(y)}{x-y} < 0.$$

Следовательно,

$$g(x) < 0 \text{ при } x > y \text{ и } g(x) > 0 \text{ при } x < y.$$

Значит, при достаточно близких $x > y$ выполнено неравенство $f(y) \le f(x)$. Следовательно,

$$f'(y) = \lim_{x \to y+0} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \ge 0.$$

В этом случае числа

$$\lambda = 1, \nu = -\frac{f'(y)}{g'(y)} \qquad (5)$$

удовлетворяют условиям 1) – 3).

Аналогично показывается, что если $g(y) = 0$ и $g'(y) > 0$, то $f'(y) \le 0$. Числа (5) и в этом случае удовлетворяют условиям 1) – 3).

Рассмотрим теперь случаи двух переменных при наличии одной связи типа равенства и одной связи типа неравенства:

$$f_0\,(x_1, x_2) \to min, \;\; f_1\,(x_1, x_2) = 0, \;\; f_2\,(x_1, x_2) \le 0, \; (x_1, x_2) \in X \subset R^2. \qquad (6)$$

Теорема. Пусть внутренняя точка (x_1^*, x_2^*) множества X является решением задачи (6), а все функции $f_i(x_1, x_2)$, $i = 0,1,2$ имеют в окрестности этой точки непрерывные частные производные по переменным x_1 и x_2. Тогда существует *ненулевой набор* чисел λ_I , $i = 0,1,2$ такой, что выполнены следующие условия:

1) $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ (условие согласования знаков);

2) $\lambda_2 f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$ (условие дополняющей нежесткости);

3) $\sum_{j=0}^{2} \lambda_j \dfrac{\partial f_j(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_i} = 0$, $i = 1,2$ (условия стационарности).

Доказательство. Если

$$\frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0 \text{ и } \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0,$$

то числа $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ удовлетворяют условиям 1) – 3).

Пусть, например, $\dfrac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \neq 0$. По теореме о неявной функции существует окрестность точки (x_1^*, x_2^*) такая, что множество точек из этой окрестности, удовлетворяющих уравнению $f_1(x_1, x_2) = 0$, задается в виде графика однозначной функции $x_2 = z(x_1)$. Эта функция определена и дифференцируема на некотором интервале (a,b), причем $x_2^* = z(x_1^*)$ и

$$z'(x_1) = -\frac{\dfrac{\partial f_1(x_1, z(x_1))}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_1(x_1, z(x_1))}{\partial x_2}}. \qquad (7)$$

Точка x_1^* является решением следующей задачи :

$$f(x_1) = f_0(x_1, z(x_1)) \to min,\ g(x_1) = f_2(x_1, z(x_1)) \leq 0,\ x_1 \in (a, b).$$

По предыдущей лемме существует *ненулевой набор* чисел λ, ν такой, что

1) $\lambda \geq 0, \nu \geq 0$;

2) $\nu g(x_1^*) = 0 \Rightarrow \nu f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$;

3) $\lambda f'(x_1^*) + \nu g'(x_1^*) = 0$.

Используя правило дифференцирования сложной функции, последнее равенство запишем в следующем виде:

$$\lambda\left(\frac{\partial f_0(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_0(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} z'(x_1^*)\right) + \nu\left(\frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} z'(x_1^*)\right) = 0.$$

Подставим сюда формулу (7). Будем иметь

$$\lambda\left(\frac{\partial f_0(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}\frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} - \frac{\partial f_0(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}\frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}\right) +$$

$$+\nu\left(\frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}\frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}\frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}\right) = 0.$$

Это равенство можно записать и так:

$$\lambda\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_0(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_0(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^*}\\ \dfrac{\partial f_1(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}\end{vmatrix}+\nu\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_2(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^*}\\ \dfrac{\partial f_1(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}\end{vmatrix}=0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{vmatrix}\lambda\dfrac{\partial f_0(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}+\nu\dfrac{\partial f_2(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}; & \lambda\dfrac{\partial f_0(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^*}+\nu\dfrac{\partial f_2(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}\\ (\lambda+\nu)\dfrac{\partial f_1(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} & (\lambda+\nu)\dfrac{\partial f_1(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}\end{vmatrix}=0.$$

Так как $\lambda+\nu>0$ и $\dfrac{\partial f_1(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}\neq 0$, то последняя строка в этом определителе ненулевая. Следовательно, существует неравное нулю число c такое, что

$$\lambda\frac{\partial f_0(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial f_2(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}=c(\lambda+\nu)\frac{\partial f_1(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1},$$

$$\lambda\frac{\partial f_0(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial f_2(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}=c(\lambda+\nu)\frac{\partial f_1(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}.$$

Возьмем $\lambda_0=\lambda$, $\lambda_1=-c(\lambda+\nu)$, $\lambda_2=\nu$. Тогда этот набор удовлетворяет всем требуемым в теореме условиям.

Замечание. Рассмотрим функцию

$$L(\bar{x})=\lambda_0 f_0(\bar{x})+\lambda_1 f_1(\bar{x})+\lambda_2 f_2(\bar{x}).$$

Тогда условия 3) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial L(\bar{x}^*)}{\partial x_i}=0,\ i=0,1,2.$$

Эта функция называется функцией Лагранжа, множители λ_i называются *множителями Лагранжа*.

Рассмотрим задачу (2) в общем виде. Она решается с помощью *неопределённых множителей Лагранжа* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_к, \ldots, \lambda_m$. Составляется функция Лагранжа:

$$L(\bar{x})=\lambda_0 f_0(\bar{x})+\lambda_1 f_1(\bar{x})+\ldots+\lambda_k f_k(\bar{x})+\lambda_{k+1} f_{k+1}(\bar{x})+\ldots+\lambda_m f_m(\bar{x}). \qquad (8)$$

Теорема. Пусть решение задачи (2) $\bar{x}^*$ является внутренней точкой множества X, а все функции имеют непрерывные частные производные по всем переменным в окрестности этой точки. Тогда существует *ненулевой* набор множителей Лагранжа такой, что

1) $\lambda_0\geq 0$, $\lambda_{k+1}\geq 0, \ldots, \lambda_m\geq 0$ (условие согласования знаков);
2) $\lambda_j f_j(\bar{x}^*)=0$, $j=k+1,\ldots, m$ (условие дополняющей нежесткости);
3) $\dfrac{\partial L(\bar{x}^*)}{\partial x_i}=0$, $i=1,\ldots, n$ (условие стационарности).

Замечание. Если в исходной задаче ставится задача о нахождении максимального значения некоторой функции $f(\bar{x})$, то в качестве целевой функции стоит рассмотреть функцию $f_0(\bar{x}) = -f(\bar{x})$.

Задача потребительского выбора. Рассмотрим задачу о поведении потребителя на рынке. Пусть множество *X* доступных товаров имеет вид

$$X = \{ \bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \geq a_i, i = 1,2,...,n \}.$$

Здесь $a_i \geq 0$ – заданные числа. Например, их набор задает потребительскую корзину. На множестве *X* определена функция полезности $u(\bar{x})$. Считаем, что

$$u(\bar{x}) > 0, \text{ если } x_i > a_i \text{ при всех } i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

и на границе этого множества функция полезности обращается в нуль, то есть

$$u(x_1, ..., a_i, ..., x_n) = 0. \tag{10}$$

Далее, считаем, что функция полезности является непрерывной вогнутой функцией на множестве *X*, имеющей в каждой внутренней точке этого множества непрерывные частные производные по всем переменным.

Упражнение. Показать, что функция Стоуна

$$u(x_1,...x_i,...x_n) = (x_1 - a_1)^{k_1} ... (x_i - a_i)^{k_i} ... (x_n - a_n)^{k_n}, \; k_i > 0 \text{ при всех } i = 1, \ldots, n \tag{11}$$

удовлетворяет этим условиям.

На рынке существует цена $p_i > 0$ на *i*-й вид товара, $i = 1, \ldots, n$.
Потребитель, имея сумму денег

$$Q > a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n, \tag{12}$$

стремится выбрать набор товаров стоимостью, не превосходящей этой суммы и наибольшей полезности. Имеем задачу

$$-u(\bar{x}) \to \min, \; x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n - Q \leq 0, \; -x_1 + a_1 \leq 0, \ldots, -x_n + a_n \leq 0. \tag{13}$$

Множество точек $\{ \bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \geq a_i, i = 1,2,...,n; \; x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n \leq Q \}$ является замкнутым и ограниченным. Функция полезности является непрерывной. По теореме Вейерштрасса решение $\bar{x}^*$ в задаче (13) существует.
Составим функцию Лагранжа:

$$L(\bar{x}) = -\lambda_0 \bar{u}(\bar{x}) + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i - Q \right) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i+1}(-x_i + a_i). \tag{14}$$

И запишем условия оптимальности:

1) $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0$;

2) $\lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i - Q \right) = 0, \; \lambda_{i+1}(-x_i^* + a_i) = 0, \quad i = 1, ..., n.$;

3) $-\lambda_0 \dfrac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_i} + \lambda_1 p_i - \lambda_{i+1} = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Из условий (9) и (10) следует, что все $x_i^* > a_i$. Следовательно, из условий 2) получим, что $\lambda_{I+1} = 0$ при всех $i = 1, \ldots, n$.
С учетом этого замечания перепишем условия 1) – 3). Будем иметь

1) $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$;

2) $\lambda_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i - Q\right) = 0$;

3) $-\lambda_0 \dfrac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_i} + \lambda_1 p_i = 0$, i=1,…, n.

Допустим, что $\lambda_0 = 0$. Тогда из условия 3) получим равенство $\lambda_1 = 0$. Значит, набор множителей Лагранжа нулевой. Однако этого, по условию теоремы, не может быть. Следовательно, число $\lambda_0 > 0$.

Из равенств, стоящих в условия 2) и 3), следует, что множители Лагранжа определяются с точностью до общего положительного множителя. Поэтому можно положить $\lambda_0 = 1$. Будем иметь соотношения:

1) $\lambda_1 \geq 0$;

2) $\lambda_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i - Q\right) = 0$;

3) $\dfrac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_i} = \lambda_1 p_i$, i=1,…, n.

Покажем, что $\lambda_1 > 0$. Допустим, что $\lambda_1 = 0$. Тогда из условия 3) получим равенства

$$\frac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \text{ при всех } i=1,\dots,n.$$

Функция полезности является вогнутой. Поэтому, согласно предыдущим равенствам, точка $\bar{x}^*$ является точкой абсолютного максимума функции полезности на множестве X. Другими словами, $u(\bar{x}^*) \geq u(\bar{x})$ для все точек $\bar{x}$ из множества X. Однако по условию ненасыщаемости для любого набора $\bar{x}$, у которого все $x_i > x_i^*$, выполнено неравенство $u(\bar{x}) > u(\bar{x}^*)$.

Таким образом, окончательно имеем следующие условия:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i = Q, \tag{15}$$

$$\frac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_i} = \lambda p_i, \quad i=1,\dots,n, \tag{16}$$

$$\lambda > 0. \tag{17}$$

Точка $\bar{x}^*$ называется *точкой спроса*. Какие можно сделать выводы?

1. В точке спроса потребитель расходует все свои деньги.

2. Равенства (17) приблизительно можно записать в следующем виде:

$$\frac{u(x_1^*,\dots,x_i^* + \Delta x_i,\dots,x_n^*) - u(x_1^*,\dots,x_i^*,\dots,x_n^*)}{p_i \Delta x_i} \approx \lambda. \tag{18}$$

В числителе дроби, стоящей слева в этом равенстве, стоит приращение полезности, а в знаменателе – цена приращенного количества товара.

Таким образом, доля приращенной полезности, приходящей на единицу денежных затрат, в точке спроса одинакова по всем видам товаров.

3. Рассмотрим набор $\bar{x}^0 \in X$, который имеет ту же полезность, что и точка спроса. Оценим его стоимость. Функция

$$\varphi(\bar{x}) = u(\bar{x}) - \lambda (x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n - Q)$$

как сумма вогнутых функций является вогнутой. Из равенств (16) следует, что

$$\frac{\partial \varphi(\bar{x}^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0.$$

Эти условия являются условиями глобального максимума вогнутой функции $\varphi(\bar{x})$ на множестве X. Следовательно, $\varphi(\bar{x}) \le \varphi(\bar{x}^*)$ при всех $\bar{x} \in X$. Значит,

$$u(\bar{x}^0) - \lambda (x_1^8 p_1 + \ldots + x_n^0 p_n - Q) \le u(\bar{x}^*) - \lambda (x_1^* p_1 + \ldots + x_n^* p_n - Q) \Leftrightarrow$$

$$-\lambda (x_1^8 p_1 + \ldots + x_n^0 p_n - Q) \le -\lambda (x_1^* p_1 + \ldots + x_n^* p_n - Q) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1^8 p_1 + \ldots + x_n^0 p_n \ge Q = x_1^* p_1 + \ldots + x_n^* p_n .$$

Таким образом, стоимость любого набора товаров той же полезности, что и в точке спроса, имеет большую стоимость. Другими словами, индивидууму не выгодно изменять структуру потребления, поскольку всякое такое изменение ухудшает его благосостояние (*второй закон Госсена*).

Найдем точку спроса для функции полезности Стоуна.

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j^* - a_j) p_j = Q - \sum_{j=1}^{n} a_j p_j , \qquad (19)$$

$$k_i (x_1^* - a_1)^{k_1} \ldots (x_i^* - a_i)^{k_i - 1} \ldots (x_n^* - a_n)^{k_n} = \lambda p_i, \ i=1,\ldots, n, \qquad (20)$$

$$\lambda > 0.$$

Умножим каждое равенство (20) на $x_i^* - a_i$ и просуммируем их. Будем иметь

$$u(\bar{x}^*) \sum_{i=1}^{n} k_i = \lambda \Big(Q - \sum_{i=1}^{n} a_i p_i\Big), \ x_i^* - a_i = \frac{k_i}{p_i} \ \frac{u(\bar{x}^*)}{\lambda} .$$

Отсюда получим вид точки спроса

$$x_i^* = a_i + \frac{\gamma_i \Big(Q - \sum_{j=1}^{n} a_j p_j \Big)}{p_i}, \text{ где } \gamma_i = \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{n} k_j} . \qquad (21)$$

Другими словами, потребитель в начале приобретает необходимое количество a_i каждого i-го вида товара. Из оставшейся суммы денег $Q - \sum_{j=1}^{n} a_j p_j$ он выделяет на дополнительное приобретение i-го вида товара сумму, равную $\gamma_i(Q-\sum_{j=1}^{n} a_j p_j)$. На эту сумму по цене p_i он и приобретает дополнительное количество

$$\frac{\gamma_i(\,Q-\sum_{j=1}^{n} a_j p_j\,)}{p_i}$$

i-го вида товара.

Тема 29
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальным уравнением называется уравнение

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))=0, \tag{1}$$

куда входит неизвестная функция $y(x)$ и ее производные.

Решением уравнения (1) называется n раз дифференцируемая функция $y(x)$, при подстановке которой в уравнение (1) получим тождество.

Наивысший порядок производной (число n) неизвестной функции, входящей в уравнение называется порядком уравнения.

Замечание. Обычно в уравнении (1) вместо $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ пишут

$$y, y', \ldots, y^{(n)} .$$

Уравнение

$$F(x, y, y') = 0$$

является уравнением первого порядка. Уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

называется *уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной.*

Пример **(***задача о рекламе***).** Рекламируется товар, имеющий некоторое количество потенциальных покупателей. В начальный момент времени x=0 в средствах массовой информации прошла реклама об этом товаре. Последующая информация о товаре распространяется среди покупателей посредством общения друг с другом и скорость изменения числа информированных о товаре покупателей пропорциональна как числу проинформированных о товаре покупателей, так и числу покупателей, о нем еще не слышавших.

Обозначим через $y(x)$ долю покупателей, проинформированных о товаре в момент времени x. Тогда будем иметь дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y'(x) = ky(x)(1-y(x)),\ k = const > 0. \tag{3}$$

Пример (*спрос и предложение*)**.** Пусть на рынке в момент времени x имеется некоторого товара в количестве Q единиц, а спрос на этот товар составляет P

единиц, причем цена равна $y(x)$.Производная цены по времени $y'(x)$ характеризует тенденцию формирования цены. Предложение Q и спрос P являются функциями цены и тенденции формирования цены. Будем считать, что эти зависимости являются линейными функциями

$$Q = A(x)\ y' + B(x)\, y + F(x); \quad P = D(x)\, y' + E(x)\, y + K(x).$$

Для того чтобы все время спрос равнялся предложению нужно, чтобы цена $y(x)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$y' = a(x)\, y + b(x), \tag{4}$$

где

$$a(x) = \frac{E(x) - B(x)}{A(x) - D(x)}, \quad b(x) = \frac{K(x) - F(x)}{A(x) - D(x)}.$$

Уравнения с разделяющимися переменными. Такими называются уравнения вида

$$y' = g(x)\, f(y). \tag{5}$$

Здесь функция $g(x)$ определена и непрерывна на интервале (a,b), а функция $f(y)$ определена и непрерывна на интервале (A,B).

Замечание. Уравнение (3) в задаче о рекламе имеет вид (5) с $g(x) = k$ и $f(y) = y\,(1\text{-}y)$.

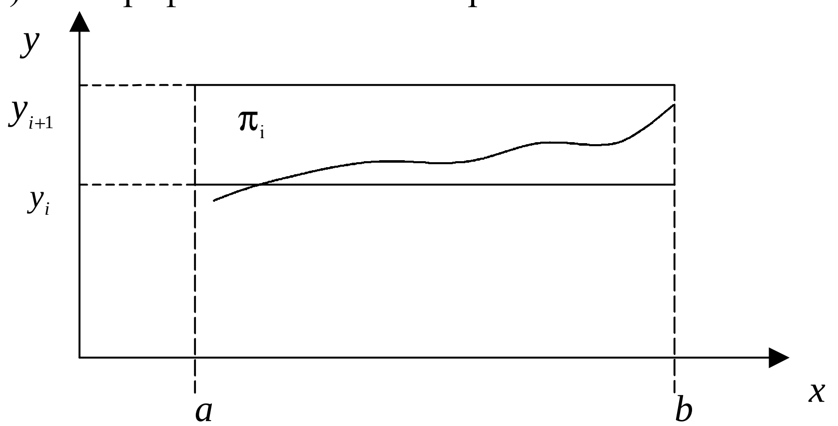
Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$f(y)=0 \tag{6}$$

и найдем его корни

$$A<y_1 < y_2 \ldots <y_n<B\,. \tag{7}$$

Тогда постоянные функции $y_i(x) = y_i$, $i=1,\ldots,n$ являются решениями уравнения (5) и их графиками являются прямые линии.



Найдем теперь решения, которые удовлетворяют условию $y_i < y(x) < y_{i+1}$, то есть их графики лежат в полосе π_i. Для них

$$f(y(x)) \neq 0.$$

Поэтому из уравнения (5) получим, что

$$\frac{y'(x)}{f(y(x))} = g(x)\,.$$

Проинтегрируем это равенство. Будем иметь

$$\int \frac{y'(x)}{f(y(x))}dx = \int g(x)dx \cdot$$

В первом интеграле сделаем замену переменной. Получим

$$F(y(x))=G(x)+ C.$$

Здесь обозначено

$$F(y) = \int \frac{dy}{f(y)}, \qquad G(x) = \int g(x)dx.$$

Алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

1. Найти корни $A<y_1 < y_2 \ldots <y_n<B$ алгебраического уравнения $f(y)=0$ и записать постоянные решения $y_i(x)= y_i$, $i = 1, \ldots, n$.
2. Разделить в уравнении (5) переменные, то есть записать его в виде

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx.$$

3. Вычислить интегралы

$$\int \frac{dy}{f(y)} = F(y), \ \int g(x)dx = G(x).$$

4. Записать уравнение

$$F(y) = G(x) + C$$

и отсюда найти решения $y(x)$. Оно зависит от произвольной постоянной C.

Пример. Решим уравнение (3).

1. Уравнение $y(1\text{-}y)=0$ имеет два решения $y=0$ и $y=1$. Следовательно, имеем два решения дифференциального уравнения $y_1(x) = 0,\ y_2(x) = 1$.
2. Разделим переменные

$$kdx = \frac{dy}{y(1-y)}.$$

3. Вычислим интегралы

$$G(x) = \int kdx = kx,\ \mathrm{F(y)} = \int \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y(1\text{-}y)}} = ln\left|\frac{y}{1-y}\right|.$$

4. Из уравнения

$$ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = kx + C \ \Rightarrow \ \left|\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{1\text{-}y}}\right| = e^C e^{kx}$$

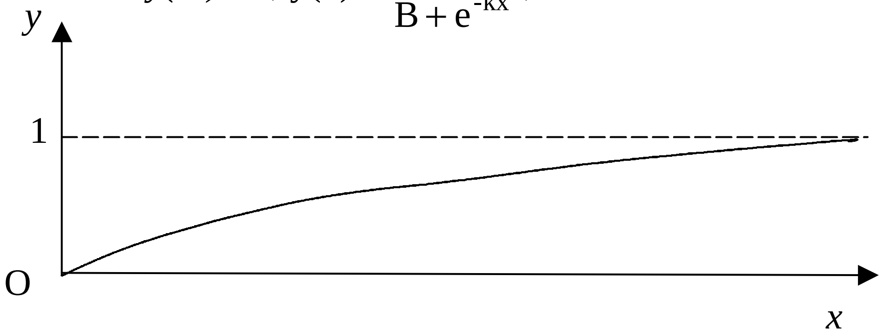
получим, что $\dfrac{y}{1-y} = B\,e^{kx}, \mathrm{B} = \pm \mathrm{e}^{\mathrm{C}}$.

Следовательно,

$$y(x)=\frac{B}{B+e^{-kx}}. \qquad (8)$$

Отметим, что число B принимает все значения, кроме нуля. Однако при B=0 из формулы (8) получаем функцию $y(x)$=0, которая также является решением. Таким образом, решения уравнения (3) имеют вид

$$y(x)=1;\ \mathrm{y(x)}=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{B+e^{-kx}}},\ \forall \mathrm{B}\in \mathrm{R}\ . \qquad (9)$$



В экономической литературе формулу (9) обычно называют *уравнением логистической кривой.* На этом рисунке схематически изображен график логистической кривой.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка с переменными коэффициентоми. Таким называется уравнение

$$y' = a(x)y + b(x)\ . \qquad (10)$$

Функции $a(x)$ и $b(x)$ являются непрерывными на интервале (α, β).

Если $b(x)$=0, то уравнение (10) принимает вид

$$y' = a(x)y \qquad (11)$$

и оно называется *однородным*. Однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и имеет одно из решений $y(x) = 0$. Найдём остальные решения. Имеем

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx \Rightarrow \ln|y| = \int a(x)dx + C_1, \quad C_1 = const \Rightarrow$$

$$y = Ce^{\int a(x)dx}, \quad C = \pm e^{C_1}. \qquad (12)$$

При $C = 0$ формула (12) дает нулевое решение. Таким образом, общий вид решения однородного уравнения задается формулой (12), где C произвольное число.

Метод вариации постоянной. Ищем решение неоднородного уравнения (10) в виде формулы (12), взяв в ней место $C=const$ функцию $C(x)$, то есть

$$y = C(x)e^{\int a(x)dx}. \qquad (13)$$

Продифференцируем эту функцию и результат подставим в уравнение (10). Получим

$$C'(x)e^{\int a(x)dx} + C(x)a(x)e^{\int a(x)dx} = a(x)C(x)e^{\int a(x)dx} + b(x).$$

Следовательно,

$$C'(x) = b(x)e^{-\int a(x)dx}. \qquad (14)$$

Интегрируя это равенство, находим функцию $C(x)$. Подставив ее в формулу (13) , найдём общий вид решения уравнения (10).

Пример. Пусть в задаче о спросе и предложении

$$Q = 2y' - y + 25,\, P = y' + 2y - 23.$$

Тогда уравнение (4) примет вид $y' = 2y - 48.$ Следовательно, формулы (13) и (14) примут вид

$$y(x) = C(x)e^{2x}, C'(x) = -48e^{-2x} \Rightarrow C(x) = 24e^{-2x} + C_1 \Rightarrow y(x) = 24 + C_1e^{2x}.$$

Тема 30
УРАВНЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Существует запись дифференциального уравнения первого порядка в симметричной форме

$$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0 \qquad (1)$$

Здесь $M(x,y)$ и $N(x,y)$ заданные функции двух переменных. В уравнение (1) переменные x и y входят равноправно. Поэтому примем следующее определение решения уравнения (1).

Определение. Решением уравнения (1) называется дифференцируемая функция $y(x)$ (или $x(y)$) такая, что выполняется равенство

$$M(x,y(x)) + N(x,y(x))\; y'(x) = 0\,,$$

$$(\, M(x(y),y)\, x'(y) + N(x(y),y) = 0). \qquad (2)$$

Предположим, что существует дифференцируемая функция $U(x,y)$, такая что

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y). \qquad (3)$$

В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} dy = 0. \qquad (4)$$

Выражение, стоящее в левой части уравнения (4), является дифференциалом функции $U(x,y)$. Уравнение (4) можно записать в следующем виде:

$$d\,U(x,y) = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (1) в этом случае называется *уравнением в полных дифференциалах.*

Нахождение решения уравнения в полных дифференциалах. Запишем равенство

$$U(x,y) = C, \qquad C = const. \tag{6}$$

Пусть дифференцируемая функция $y(x)$ удовлетворяет равенству (6), то есть $U(x,y\,(x)) = C$. Применив теорему о производной сложной функции, получим

$$\frac{\partial U(x,\,y(x))}{\partial x} + \frac{\partial U(x,\,y(x))}{\partial y}\,y'(x) = 0\;. \tag{7}$$

Следовательно, функция $y(x)$ удовлетворяет равенству (2), записанному с учетом равенств (3).

Наоборот, если дифференцируемая функция $y(x)$ удовлетворяет равенству (7), то

$$U'(x,\,y(x)) = \frac{\partial U(x,\,y(x))}{\partial x} + \frac{\partial U(x,\,y(x))}{\partial y}\,y'(x) = 0\;.$$

Следовательно, $U(x,y(x))=C=const.$

Аналогично проверяется для функции $x(y)$. Таким образом, решая уравнение (6), находим решения $y(x)$ или $x(y)$.

Условия полного дифференциала. Возникает вопрос о том, как установить, является ли уравнение (1) уравнением в полных дифференциалах?

Предположим, что функция $U(x,y)$ имеет непрерывные смешанные частные производные. Тогда из их равенства

$$\frac{\partial^2 U(x,\,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U(x,\,y)}{\partial x \partial y}$$

получаем условие

$$\frac{\partial M(x,\,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,\,y)}{\partial x}\;. \tag{8}$$

Можно показать, что равенство (8) является и достаточным для того, чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах.

Нахождение функции U(x,y). Пусть выполнено равенство (8). Проинтегрируем по x первое уравнение в (3). Получим

$$U(x,\,y) = \int M(x,\,y)dx + b(y)\;.$$

Подставим эту функцию во второе уравнение в (3). Условия (8) гарантируют нахождение функции $b(y)$.

Пример. Решить уравнение

$$(x^{\alpha} + y)dx + (x + y^{\alpha})dy = 0.$$

Здесь $\alpha \neq -1$. Тогда

$$M(x,\,y) = x^{\alpha} + y,\, N(x,\,y) = x + y^{\alpha}\;.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=1,\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=1.$$

Значит, равенство (5) выполнено. Запишем уравнения (3)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}=x^{\alpha}+y\\[2ex]\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}=x+y^{\alpha}.\end{cases}$$

Интегрируя первое из этих уравнений, получим

$$U(x,y)=\int(x^{\alpha}+y)dx+b(y)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+yx+b(y).$$

Подставим эту функцию во второе уравнение. Будем иметь

$$x+b'(y)=x+y^{\alpha},\qquad b'(y)=y^{\alpha}\Leftrightarrow b(y)=\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Таким образом,

$$U(x,y)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+yx+\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Запишем равенство

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+yx+\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}=C.$$

Из него находим решения $x(y)$ либо $y(x)$.

Замечание. Иногда исходное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Однако после умножения его на некоторую функцию $v(x)$ получается уравнение в полных дифференциалах. Эта функция $v(x)$ называется *интегрирующим множителем.*

Пример. Рассмотрим задачу о вычислении кривых равной полезности в пространстве двух товаров , количества которых будем , соответственно, обозначать x и y. Считаем, что $x\geq a$, $y\geq b$. Будем считать, что прирост полезности линейно зависит от процентных приростов дополнительных приростов товаров, то есть

$$du(x,y)=k\frac{dx}{x-a}+m\frac{dy}{y-b},\quad k>0,m>0.$$

Тогда кривая, в каждой точке которой полезность одинакова, задается уравнением $\quad k\dfrac{dx}{x-a}+m\dfrac{dy}{y-b}=0.$

Условия полного дифференциала в этом уравнении выполнены. Запишем уравнения (3)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{k}{x-a} \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \dfrac{m}{y-b}. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $u(x,y) = k\ln(x\text{-}a) + b(y)$. Подставим во второе уравнение получившееся выражение. Получим

$$b'(y) = \frac{m}{y-b} \Rightarrow b(y) = m\ln(y-b).$$

Таким образом, кривые равной полезности задаются уравнениями

$$k\ln(x\text{-}a) + m\ln(y\text{-}b) = C = const.$$

Функция полезности является логарифмической:

$$u(x,y) = k\ln(x\text{-}a) + m\ln(y\text{-}b).$$

Функция полезности

$$v(x,y) = e^{u(x,y)} = (x-a)^k (y-b)^m$$

является функцией Стоуна.

Тема 31
ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА И СИСТЕМА ИЗ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пример. Рассмотрим задачу о спросе и предложении. В реальных условиях спрос P и предложение Q в данный момент времени x зависят от текущей цены $y(x)$ на товар, от ценообразования $y'(x)$ и от темпов изменения цены $y''(x)$.

Рассмотрим случай линейной зависимости

$$Q = L\,y'' + A\,y' + B\,y + F, \qquad P = M\,y'' + D\,y' + E\,y + K.$$

Требуется установить зависимость цены от времени в условиях равновесного состояния рынка, которое характеризуется равенством $Q = P$. Отсюда получим, что

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{1}$$

Здесь $a_0 = L - M$, $a_1 = A - D$, $a_2 = B - E$, $f(x) = K - F$.

Будем рассматривать уравнение (1), у которого все коэффициенты a_i являются действительными числами, причем $a_0 \neq 0$, а функция $f(x)$ определена и непрерывна на заданном интервале.

Замечание. Уравнение (1) можно рассматривать и в случае, когда все его коэффициенты являются комплексными числами.

Как и в случае квадратного уравнения перейдем к комплексным числам и будем рассматривать комплекснозначные функции

$$z(x) = u(x) + i\,v(x)\,. \tag{2}$$

При этом считаем, что k-я производная от комплекснозначной функции определяется формулой

$$z^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) + i v^{(k)}(x)\,. \tag{3}$$

При исследовании уравнения (1) существенную роль играет *формула Эйлера*, с помощью которой для комплексного числа $\lambda = \alpha + i\,\omega$ определяется функция

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos\omega x + i\sin\omega x). \tag{4}$$

Дифференцируя действительную и мнимую части этой функции, получаем

$$(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}. \tag{5}$$

В самом деле,

$$(e^{\lambda x})' = (e^{\alpha x}\cos\omega x)' + i(e^{\alpha x}\sin\omega x)' =$$

$$=(\alpha e^{\alpha x}\cos\omega x - \omega e^{\alpha x}\sin\omega x) + i(\alpha e^{\alpha x}\sin\omega x + \omega e^{\alpha x}\cos\omega x)=$$

$$=(\alpha + i\omega)\,e^{\alpha x}\,(\cos\omega x + i\sin\omega x).$$

Вначале рассмотрим уравнение (1), когда в нем в правой части стоит ноль, то есть

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{6}$$

Оно называется *однородным уравнением*. Ищем его решение в виде

$$y = e^{\lambda x}. \tag{7}$$

Число λ подлежит определению. Подставим формулы

$$y = e^{\lambda x}\,, \quad y' = \lambda e^{\lambda x}\,, \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

в уравнение (6). Получим равенство

$$(a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)\,e^{\lambda x} = 0.$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то из этого равенства следует, что функция (7) является решением уравнения (6) тогда и только тогда, когда число λ является корнем уравнения

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{8}$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*.

Случай 1. Пусть характеристическое уравнение (8) имеет два различных действительных корня $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда общий вид решения уравнения (6) следующий:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}\,.$$

Здесь c_1 и c_2 – произвольные действительные числа.

Случай 2. Пусть характеристическое уравнение (8) имеет один действительный корень λ. В этом случае общий вид решения уравнения (6) следующий :

$$y(x) = (c_1 x + c_2)\;e^{\lambda x}\,.$$

Здесь c_1 и c_2 – произвольные действительные числа.

Случай 3. Пусть характеристическое уравнение (8) имеет комплексные корни $\lambda_1 = \alpha + i\omega$, $\lambda_2 = \alpha - i\omega$. Тогда общий вид решения уравнения (6) следующий:

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x). \qquad (9)$$

Здесь c_1, c_2 – произвольные действительные числа.

Замечание. Поясним последний случай. В этом случае уравнение (6) будет иметь комплексное решение

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos\omega x + i\sin\omega x).$$

Представим его в виде (2), где

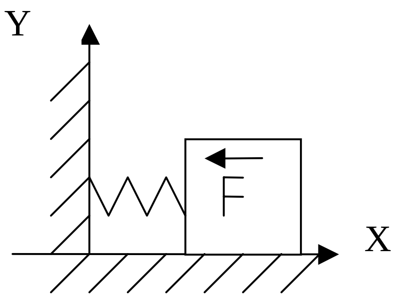
$$u(x) == e^{\alpha x}\cos\omega x,\ \ v(x) = e^{\alpha x}\sin\omega x.$$

Подставив это комплексное решение в уравнение (6), получим

$$(a_0u'' + a_1u' + a_2u) + i(a_0v'' + a_1v' + a_2v) = 0.$$

Приравнивая к нулю действительную и мнимую части данного уравнения, получим, что функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решением уравнения (6). Их линейная комбинация (9) также является решением этого уравнения.

Пример. Пусть тело массой m находится на гладкой плоскости.



Оно прикреплено упругой пружиной к стене. Обозначим через $x(t)$ расстояние в момент времени t от тела до стены. По второму закону Ньютона

$$m x'' = F.$$

По закону Гука упругая сила $F = -kx$. Получим уравнение

$$x'' + \omega^2 x = 0\ ,\quad \omega^2 = k/m.$$

Здесь неизвестной функцией является $x(t)$. Запишем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $\lambda_1 = i\,\omega$, $\lambda_2 = -i\,\omega$. Значит общий вид решения этого уравнения следующий :

$$x(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t\ . \qquad (10)$$

Чтобы найти численные значения постоянных, нужно задать начальное положение тела $x(0)=L$ и начальную скорость $x'(0) = V$. Тогда

$$c_1\cos\omega 0 + c_2\sin\omega 0 = L \ \Rightarrow\ c_1 = L.$$

Продифференцируем функцию (10) и положим t=0. Получим

$$-\omega c_1\sin\omega 0 + c_2\omega\cos\omega 0 = V \Rightarrow$$

$$x(t) = L\cos\omega t + (V/\omega)\sin\omega t.$$

Тело совершает колебательные движения с периодом $T = (2\pi)/\omega$.

Вернёмся к неоднородному уравнению (1). После того как решено однородное уравнение (6), нужно найти какое-нибудь частное решение уравнения (1) и записать общий вид решения

$$y_{неоднор}(x) = y_{однор}(x) + y_{част}(x).$$

Пример. Рассмотрим предыдущий пример, когда на тело ещё действует сила, зависящая линейно от времени. Будем иметь уравнение

$$x'' + \omega^2 x = At + B. \qquad (11)$$

Ищем частное решение в виде многочлена первой степени

$$x_{част}(t) = Dt + P.$$

Числа D и P подлежат определению. Подставим эту функцию в уравнение (11). Получим

$$x'_{част}(t) = D\,,\ x''_{част}(t) = 0 \Rightarrow \omega^2 (Dt + P) = At + B \Rightarrow D = A/\omega^2,\ P = B/\omega^2\ .$$

Получим общий вид решения

$$x(t) = c_1 cos\omega t + c_2 sin\omega t + (A/\omega^2)t + B/\omega^2.$$

Замечание. Если функция $f(x)$ является многочленом, то стоит попытаться искать частное решение в виде многочлена той же самой степени. Если $f(x) = e^{bx}$, то следует искать решение в виде $x_{част}(x) = De^{bx}$, где число D подлежит определению.

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Такой называется

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}. \qquad (12)$$

Здесь $a_{ij} \in R$ являются заданными числами.

Решением называются дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, при подстановке которых в систему (11) получим тождества.

Ищем решение в следующем виде:

$$y_1(x) = e^{\lambda x}\psi_1,\ y_2(x) = e^{\lambda x}\psi_2. \qquad (13)$$

Числа λ, ψ_1, ψ_2 подлежат определению. Продифференцируем эти функции и подставим в систему (12). Будем иметь

$$\lambda e^{\lambda x}\psi_1 = a_{11}e^{\lambda x}\psi_1 + a_{12}e^{\lambda x}\psi_2,$$
$$\lambda e^{\lambda x}\psi_2 = a_{21}e^{\lambda x}\psi_1 + a_{22}e^{\lambda x}\psi_2.$$

Сократим эти уравнения на $e^{\lambda x}$. Получим

$$a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2 = \lambda\psi_1$$
$$a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2 = \lambda\psi_2.$$

Таким образом, число λ является собственным значением матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

а вектор $\overline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ является ее собственным вектором, отвечающим этому собственному значению. Для нахождения собственного значения имеем уравнение

$$\det\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*.

Случай 1. Пусть характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня. Тогда корням λ_1 и λ_2 соответствуют собственные вектора

$$\overline{\psi_1} = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \end{pmatrix},\ \overline{\psi_2} = \begin{pmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{pmatrix}.$$

Общий вид решений системы (13) в этом случае следующий:

$$y_1(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}\psi_{11} + c_2 e^{\lambda_2 x}\psi_{21}$$

$$y_2(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}\psi_{12} + c_2 e^{\lambda_2 x}\psi_{22}.$$

Здесь c_1 и c_2 – произвольные действительные числа.

Случай 2. Пусть характеристическое уравнение имеет один действительный корень λ.

Случай 2.1. Собственному значению соответствуют два линейно независимых собственных вектора

$$\overline{\psi_1} = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \end{pmatrix}, \overline{\psi_2} = \begin{pmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{pmatrix}.$$

Общий вид решений системы (13) в этом случае следующий:

$$y_1(x) = e^{\lambda x}(c_1\psi_{11} + c_2\psi_{21})$$

$$y_2(x) = e^{\lambda x}(c_1\psi_{12} + c_2\psi_{22}),$$

где c_1 и c_2 – произвольные действительные числа.

Случай 2.2. Собственному значению соответствуют один линейно независимый собственный вектор

$$\overline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Ищем решение в виде

$$y_1(x) = (x\psi_1 + \varphi_1)e^{\lambda x}, y_2(x) = (x\psi_2 + \varphi_2)e^{\lambda x}.$$

Подставим в систему (12). Получим

$$(\psi_1 + \lambda x\psi_1 + \lambda\varphi_1)e^{\lambda x} = a_{11}(x\psi_1 + \varphi_1)e^{\lambda x} + a_{12}(x\psi_2 + \varphi_2)e^{\lambda x}$$

$$(\psi_2 + \lambda x\psi_2 + \lambda\varphi_2)e^{\lambda x} = a_{21}(x\psi_1 + \varphi_1)e^{\lambda x} + a_{22}(x\psi_2 + \varphi_2)e^{\lambda x}.$$

Сокращая эти равенства на $e^{\lambda x}$ и приравнивая между собой коэффициенты при соответствующих степенях x, получим

$$a_{11}\varphi_1 + a_{12}\varphi_2 = \psi_1 + \lambda\varphi_1$$

$$a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2 = \psi_2 + \lambda\varphi_2.$$

Решаем эту систему относительно чисел φ_i. Общий вид решения в этом случае следующий:

$$y_1(x) = (xc_2\psi_1 + c_1\psi_1 + c_2\varphi_1)e^{\lambda x}, y_2(x) = (xc_2\psi_2 + c_1\psi_2 + c_2\varphi_2)e^{\lambda x},\quad \forall c_1, c_2 \in R.$$

Случай 3. Пусть характеристическое уравнение имеет комплексные корни $\lambda_1 = \alpha + i\omega$, $\lambda_2 = \alpha - i\omega$. Общий вид решения в этом случае следующий:

$$y_1(x) = Ae^{\alpha x} cos(\varpi x + \gamma), \; y_2(x) = Ae^{\alpha x} sin(\varpi x + \gamma), \quad \forall A \geq 0, \forall \gamma \in R.$$

Пример. Математическая модель гонки вооружения (*модель Ричардсона*) . Имеются две противоборствующие стороны . Пусть $y_1(x)$ – количество единиц вооружения первой стороны в момент времени x, а $y_2(x)$ – количество единиц вооружения второй стороны в этот момент времени x. Скорость прироста количества единиц вооружения у первой стороны пропорциональна накопленному количеству единиц вооружения второй стороной (*чувство страха*) и уменьшается пропорционально накопленному количеству единиц вооружения самой первой стороной (*усталость экономики*). Аналогично для другой стороны. Имеем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'(x) = -a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) \\ y_2'(x) = -a_{21}y_1(x) - a_{22}y_2(x) \end{cases}, \qquad \text{все } a_{ij} > 0.$$

Запишем характеристический многочлен

$$\begin{vmatrix} -a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

и найдем его корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{((a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21})}}{2} =$$

$$= \frac{-(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{((a_{11} - a_{22})^2) + 4a_{12}a_{21}}}{2}.$$

Следовательно, общий вид решения следующий:

$$y_1(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}\psi_{11} + c_2 e^{\lambda_2 x}\psi_{21}$$

$$y_2(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}\psi_{12} + c_2 e^{\lambda_2 x}\psi_{22}.$$

Одно значение λ отрицательно. Найдём, когда второе значение λ тоже отрицательно. Имеем неравенство

$$-(a_{11} + a_{22}) + \sqrt{((a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21})} < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < (a_{11} + a_{22})^2 \;\Leftrightarrow\; a_{12}a_{21} < a_{11}a_{22}.$$

Если выполнено последнее неравенство, то $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$. Поэтому решения будут удовлетворять условию $y_1(x) \to 0$ и $y_2(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Это означает, что в этом случае гонки вооружения не будет, так как число единиц вооружения у обеих сторон стремится к нулю. Таким образом, если произведение коэффициентов страха (a_{12} и a_{21}) сторон меньше произведения коэффициентов усталости (a_{12} и a_{21}) их экономик, то гонки вооружения не будет.

УХОБОТОВ Виктор Иванович

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие

Редактор Н.П.Мирдак

Компьютерная верстка Т.В.Ростуновой

Подписано в печать 30.12.02.
Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,7. Уч.-изд. л. 13,0.
Тираж 500 экз. Заказ 311.
Цена договорная

Челябинский государственный университет
454021 Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

Полиграфический участок Издательского центра ЧелГУ
454021 Челябинск, ул. Молодогвардейцев, 57б