Г. И. Просветов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:
ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Учебно-практическое пособие

Москва

Альфа-Пресс

2011

УДК 517.9(075)
ББК 22.161я7
П 82

П 82 **Просветов Г. И.**

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ: Учебно-практическое пособие. — М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2011. — 88 с.

ISBN 978-5-94280-507-4

В учебно-практическом пособии рассмотрены основные методы и приемы решения дифференциальных уравнений. Приведенные в учебном материале примеры и задачи позволяют успешно овладеть знаниями по изучаемой дисциплине.

Пособие содержит программу курса, задачи для самостоятельного решения с ответами и задачи для контрольной работы. Издание рассчитано на преподавателей и студентов высших учебных заведений.

УДК 517.9(075)
ББК 22.161я7

ISBN 978-5-94280-507-4

Предисловие

> Как только вы испробуете все возможные способы решения и не найдете подходящего, тут же найдется решение простое и очевидное для всех других людей.
>
> Уравнение Смэйфу

В настоящее время существует ряд обстоятельных руководств по дифференциальным уравнениям, предназначенных для студентов высших учебных заведений. Но ощущается потребность в пособии, которое на простых и конкретных примерах способно показать читателю со скромной математической подготовкой весь арсенал современных методов дифференциальных уравнений. Одна из попыток решить эту задачу — перед вами, уважаемый читатель.

Предлагаемое пособие знакомит читателя с важнейшими разделами дифференциальных уравнений и призвано помочь тем, кто осваивает этот курс, особенно в системе заочного и вечернего образования. Как правило, это студенты с довольно скромной математической подготовкой.

Цель этой книги — просто и доходчиво на конкретных примерах изложить людям, которые, возможно, совершенно незнакомы с математической литературой, основные методы и приемы решения дифференциальных уравнений.

В пособии рассмотрены такие темы, как метод изоклин, составление дифференциального уравнения данного семейства кривых, дифференциальные уравнения первого порядка, существование и единственность решения, метод введения параметра, понижение порядка дифференциального уравнения, дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, свойства решений, системы дифференциальных уравнений, устойчивость, особые точки, уравнения в частных производных первого порядка, дифференцирование решения по параметру, разложение решения по степеням параметра.

Весь материал книги разбит на главы, а главы — на параграфы. Каждый параграф — это отдельная тема. В начале параграфа приводится необходимый минимум теоретических сведений, затем подробно разбираются модельные примеры. После каждого примера приводится задача для самостоятельного решения. Ответы ко всем задачам помещены в конце книги. Пособие содержит также программу курса и задачи для контрольной работы.

За годы учебы на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова пути автора пересекались с множеством выдающихся ученых и замечательных педагогов. Но, пожалуй, только к одному из них были не применимы слова «один из», потому что в этом случае надо говорить просто «самый». Иногда судьба преподносит нам шикарные подарки. Одним из таких подарков было то, что практические занятия по дифференциальным уравнениям в нашей 212-й группе вел профессор кафедры дифференциальных уравнений Алексей Федорович Филиппов. Эрудиция в его области у него была совершенно феноменальная. Умение за небольшой промежуток времени просто и доходчиво объяснить любой вопрос, разбор с помощью студентов огромного количества примеров в аудитории, четко продуманные домашние задания — вот что всегда было характерно для занятий Алексея Федоровича. Но несмотря на всю легкость и простоту чувствовалось, чтое, кроме знания, для преподавания на таком уровне требуется нечто особенное, чем обладал только один человек — профессор Алексей Федорович Филиппов. К сожалению, Алексея Федоровича уже нет с нами, поэтому книга посвящается светлой его памяти.

Хочется надеяться, что знакомство с книгой будет как приятным, так и полезным.

Автор

Глава 1

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции. Если искомая функция $y(x)$ — функция одной переменной, то это *обыкновенное дифференциальное уравнение*. Если уравнение содержит частные производные, то его называют *дифференциальным уравнением с частными производными*. Мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Порядок дифференциального уравнения — это наивысший порядок производных (дифференциалов) неизвестной функции, входящих в уравнение. Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Решение дифференциального уравнения — это функция $y = f(x)$, определенная на некотором промежутке, такая, что $F(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0$ для всех x из этого промежутка.

Пример 1. Дано дифференциальное уравнение $y'' + y = 0$. Проверим, что функция $y = \sin x$ является решением этого дифференциального уравнения для всех действительных x.

$y'' = (y')' = ((\sin x)')' = (\cos x)' = -\sin x$.

Тогда $y'' + y = -\sin x + \sin x = 0$.

Задача 1. Дано дифференциальное уравнение $y'' + y = 0$. Проверить, что функция $y = \cos x$ является решением этого дифференциального уравнения для всех действительных x.

Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка всегда содержит n произвольных постоянных, не зависимых друг от друга. Задав n начальных условий, мы можем найти значения этих постоянных. Начнем изучение дифференциальных уравнений с дифференциальных уравнений 1-го порядка, то есть уравнений вида $F(x, y, y') = 0$.

Глава 2

МЕТОД ИЗОКЛИН

Поле направлений состоит из точек, в каждой из которых определен вектор. *Интегральная кривая* в каждой своей точке касается поля направлений. *Изоклина* — это множество точек, в которых векторы поля направлений одинаковы.

Метод изоклин позволяет построить поле направлений уравнения $y' = f(x, y)$.

Для каждой точки (x, y) из области определения функции f справедливо, что $y' = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной к кривой, проходящей через точку (x, y). Для нескольких значений k из области значений функции f строим изоклины $f(x, y) = k$. Через точки изоклин $f(x, y) = k$ проводим короткие отрезки под углом $\alpha = \operatorname{arctg} k$ к оси Ox. По этому полю направлений строим интегральные кривые, у которых в точках пересечения с каждой изоклиной касательные параллельны отрезкам, построенным на этой изоклине.

Хотя точность метода изоклин небольшая, он дает представление о поведении решений уравнения $y' = f(x, y)$.

Пример 2. С помощью метода изоклин начертим приближенно решения уравнения $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2} - 1$.

Здесь $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2} - 1$.

$$f(x, y) = k \to \frac{x^2 + y^2}{2} - 1 = k \to \frac{x^2 + y^2}{2} = k + 1 \to x^2 + y^2 = 2(k + 1).$$

Если $k = 0$, то $x^2 + y^2 = 2(0 + 1) \to x^2 + y^2 = 2$.

Если $k = 1$, то $x^2 + y^2 = 2(1 + 1) \to x^2 + y^2 = 4$.

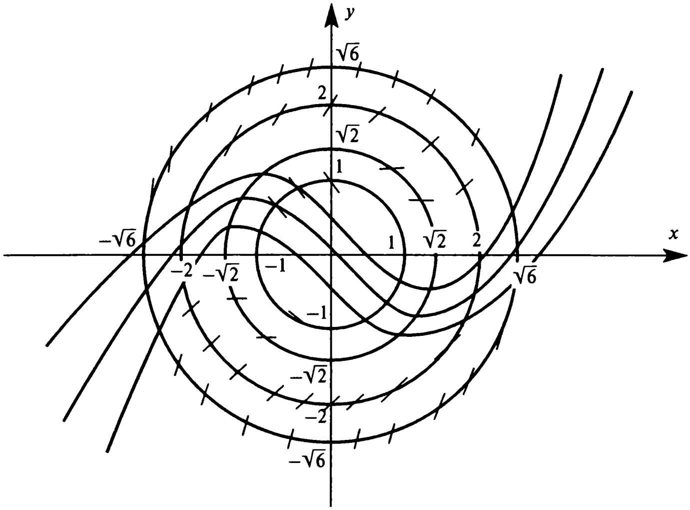
Если $k = 2$, то $x^2 + y^2 = 2(2 + 1) \to x^2 + y^2 = 6$.

Если $k = -1$, то $x^2 + y^2 = 2(-1 + 1) \to x^2 + y^2 = 0 \to x = y = 0$.

Если $k = -0{,}5$, то $x^2 + y^2 = 2(-0{,}5 + 1) \to x^2 + y^2 = 1$.

При $x \to +\infty$ решения уравнения тоже стремятся к $+\infty$.

При $x \to -\infty$ решения уравнения также стремятся к $-\infty$.



Задача 2. С помощью метода изоклин начертить приближенно решения уравнения $xy' = 2y$.

Глава 3

СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДАННОГО СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ

Иногда для семейства кривых $\varphi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ требуется найти дифференциальное уравнение, решением которого является это семейство кривых. В этом случае дифференцируем n раз уравнение $\varphi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, исключаем постоянные $C_1, C_2, ..., C_n$ и получаем уравнение $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$.

Пример 3. Составим дифференциальное уравнение семейства кривых $y = ax^2 + be^x$.

$y' = (ax^2 + be^x)' = 2ax + be^x$.

$y'' = (y')' = (2ax + be^x)' = 2a + be^x$.

Тогда $y' - y'' = 2ax + be^x - (2a + be^x) = 2ax - 2a = 2a(x - 1)$, то есть $a = \dfrac{y' - y''}{2(x-1)}$.

Отсюда $y - y' = ax^2 + be^x - (2ax + be^x) = ax^2 - 2ax = a(x^2 - 2x) = \dfrac{y' - y''}{2(x-1)}(x^2 - 2x)$, то есть $y - y' = \dfrac{y' - y''}{2(x-1)}(x^2 - 2x)$.

Задача 3. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $y = e^{Cx}$.

Глава 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде $y' = f(x)g(y)$ или $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$.

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только x, а в другую — только y, а затем проинтегрировать обе части. При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

Пример 4. Решим дифференциальное уравнение $xy' + y = y^2$ и найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0{,}5$.

$xy' + y = y^2 \to xy' = y^2 - y.$

Пусть $x \neq 0$. Тогда $y' = \dfrac{y^2 - y}{x}$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Напомним, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Отсюда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - y}{x}$.

Пусть $y^2 - y \neq 0$, то есть $y \neq 0$ и $y \neq 1$. Тогда $\dfrac{dy}{y^2 - y} = \dfrac{dx}{x}$.

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \frac{dx}{x} + C_1 \to \int \frac{dy}{y(y-1)} = \ln|x| + C_1 \to \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right)dy + C_1 \to$$

$$\to \int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y} = \ln|x| + C_1 \to \int \frac{d(y-1)}{y-1} - \ln|y| = \ln|x| + C_1 \to$$

$$\to \ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x| + C_1 \to \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + C_1 \to$$

$$\rightarrow e^{\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|} = e^{\ln|x|+C_1} \rightarrow \left|\frac{y-1}{y}\right| = e^{C_1}|x| \rightarrow \frac{y-1}{y} = \pm e^{C_1}x.$$

Обозначим $C = \pm e^{C_1}$.

Тогда $\frac{y-1}{y} = Cx \rightarrow 1 - \frac{1}{y} = Cx \rightarrow 1 - Cx = \frac{1}{y} \rightarrow y(1 - Cx) = 1$, где C – произвольная постоянная. Это ответ.

По ходу решения мы накладывали ограничения $x \neq 0$, $y \neq 0$ и $y \neq 1$.

$x = 0$ не является решением, так как это не есть функция вида $y(x)$.

Случай $y = 0$ удовлетворяет исходному уравнению ($x \times 0' + 0 = 0 \rightarrow \rightarrow 0 = 0$).

Случай $y = 1$ удовлетворяет исходному уравнению ($x \times 1' + 1 = 1 \rightarrow \rightarrow 1 = 1$), но $y = 1$ уже содержится в формуле $y(1 - Cx) = 1$ при $C = 0$.

Общее решение: $y(1 - Cx) = 1$; $y = 0$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0{,}5$.

$y(1)(1 - C \times 1) = 1 \rightarrow 0{,}5(1 - C) = 1 \rightarrow 1 - C = 2 \rightarrow C = -1 \rightarrow \rightarrow y(1 - (-1)x) = 1 \rightarrow y(1 + x) = 1$.

Пример 5. Решим дифференциальное уравнение

$$(1 + y^2)dx + xydy = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Пусть $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Тогда $(1 + y^2)dx = -xydy \rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{ydy}{1 + y^2} \rightarrow \int\frac{dx}{x} = -\int\frac{ydy}{1 + y^2} + C_1 \rightarrow$

$$\rightarrow \ln|x| = -0{,}5\int\frac{d(1 + y^2)}{1 + y^2} + C_1 \rightarrow 2\ln|x| = -\ln|1 + y^2| + 2C_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln(|x|^2) + \ln(1 + y^2) = 2C_1 \rightarrow \ln(x^2) + \ln(1 + y^2) = 2C_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln(x^2(1 + y^2)) = 2C_1 \rightarrow e^{\ln(x^2(1+y^2))} = e^{2C_1} \rightarrow x^2(1 + y^2) = e^{2C_1}.$$

Обозначим $C = e^{2C_1}$. Тогда $x^2(1 + y^2) = C$, где C – произвольная постоянная.

По ходу решения мы накладывали ограничения $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

$x = 0$ удовлетворяет исходному уравнению ($(1 + y^2)d0 + 0ydy = 0 \rightarrow \rightarrow 0 = 0$), но оно содержится в формуле $x^2(1 + y^2) = C$ при $C = 0$.

$y = 0$ не удовлетворяет исходному уравнению ($((1 + 0^2)dx + x0d0 = = 0 \rightarrow dx = 0$, но это не тождество).

Задача 4. Решить дифференциальное уравнение $\sqrt{1 + y^2}dx = = xydy$.

Задача 5. Решить дифференциальное уравнение $e^{-y}(1 + y') = 1$.

Глава 5

УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К УРАВНЕНИЯМ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнение $y' = f(ax + by + c)$ заменой $z = ax + by + c$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 6. Решим дифференциальное уравнение $y' = \cos(y - x)$.

Сделаем замену $z = y - x$. Тогда $z' = (y - x)' = y' - 1$. Отсюда $y' = z' + 1$. Поэтому $y' = \cos(y - x) \to z' + 1 = \cos z \to z' = \cos z - 1 \to \dfrac{dz}{dx} = \cos z - 1$.

Пусть $\cos z - 1 \neq 0$. Тогда $\dfrac{dz}{dx} = \cos z - 1 \to \dfrac{dz}{\cos z - 1} = dx \to$

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx + C \to -\int \frac{dz}{1 - \cos z} = x + C \to -\int \frac{dz}{2\sin^2(z/2)} = x + C \to$$

$$-\int \frac{d(z/2)}{\sin^2(z/2)} = x + C \to \operatorname{ctg}\frac{z}{2} = x + C \to \operatorname{ctg}\frac{y - x}{2} = x + C.$$

Если $\cos z - 1 = 0$, то $\cos z = 1 \to z = 2\pi k$, k — целое число $\to y - x = 2\pi k \to y = x + 2\pi k$, k — целое число.

Ответ: $\operatorname{ctg}\dfrac{y - x}{2} = x + C$; $y = x + 2\pi k$, k — целое число.

Задача 6. Решить дифференциальное уравнение $y' - y = 2x - 3$.

Глава 6

ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Функция $F(x, y)$ называется *однородной степени* p, если для всех $k > 0$ выполнено $F(kx, ky) = k^p F(x, y)$.

Однородные уравнения могут быть записаны в виде $y' = f(y/x)$ или $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени.

Сделав замену $y = t(x)x$, получим уравнение с разделяющимися переменными. $y' = (tx)' = t'x + tx' = t'x + t$.

Пример 7. Решим дифференциальное уравнение

$$(x - y)dx + (x + y)dy = 0.$$

Здесь $M(x, y) = x - y$, $N(x, y) = x + y$.
Это однородные функции первой степени:
$M(kx, ky) = kx - ky = k(x - y) = kM(x, y)$;
$N(kx, ky) = kx + ky = k(x + y) = kN(x, y)$.

Сделаем замену $y = t(x)x$ (то есть $t = \dfrac{y}{x}$). Тогда $dy = d(tx) = xdt + tdx$.

Отсюда

$$(x - y)dx + (x + y)dy = 0 \to (x - tx)dx + (x + tx)(xdt + tdx) = 0 \to$$
$$\to x((1 - t)dx + (1 + t)(xdt + tdx)) = 0 \to x = 0$$
$$\text{или } (1 - t)dx + (1 + t)(xdt + tdx) = 0 \to x = 0$$
$$\text{или } (1 + t^2)dx + x(1 + t)dt = 0.$$

$x = 0$ не удовлетворяет исходному уравнению ($(0 - y)d0 + (0 + y)dy = 0$ $\to ydy = 0$, но это не тождество).

Рассмотрим уравнение $(1 + t^2)dx + x(1 + t)dt = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$(1 + t^2)dx + x(1 + t)dt = 0 \to (1 + t^2)dx = -x(1 + t)dt \to$$
$$\to -\frac{dx}{x} = \frac{(1 + t)dt}{t^2 + 1} \to C_1 - \int \frac{dx}{x} = \int \frac{(1 + t)dt}{t^2 + 1} \to C_1 - \ln|x| =$$

$$= \int (\frac{1}{t^2+1} + \int \frac{t^2}{t^2+1}) dt \to C_1 - \ln|x| = \int \frac{dt}{t^2+1} + \int \frac{tdt}{t^2+1} \to$$

$$\to C_1 - \ln|x| = \operatorname{arctg} t + 0{,}5 \int \frac{dt(t^2+1)}{t^2+1} \to$$

$$\to 2C_1 - 2\ln|x| = 2\operatorname{arctg} t + \ln|1+t^2| \to$$

$$\to 2C_1 = \ln(x^2) + \ln(1+t^2) + 2\operatorname{arctg} t \to 2C_1 = \ln(x^2(1+t^2)) + 2\operatorname{arctg} t \to$$

$$\to 2C_1 = \ln(x^2 + x^2 t^2) + 2\operatorname{arctg} t.$$

Обозначим $C = 2C_1$.

Тогда $C = \ln(x^2 + x^2 t^2) + 2\operatorname{arctg} t \to C = \ln(x^2 + y^2) + 2\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, где C – произвольная постоянная.

Задача 7. Решить дифференциальное уравнение

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y, x > 0.$$

Пример 8. Определим тип дифференциального уравнения

$$y^2 + x^2 y' = xyy'.$$

Выразим y' из исходного уравнения:

$$y^2 + x^2 y' = xyy' \to y^2 = xyy' - x^2 y' \to y^2 = x(y-x)y' \to y' = \frac{y^2}{x(y-x)}.$$

Обозначим $F(x, y) = \frac{y^2}{x(y-x)}$.

Тогда $F(kx, ky) = \frac{(ky)^2}{kx(ky-kx)} = \frac{k^2 y^2}{k^2 x(y-x)} = \frac{y^2}{x(y-x)} = F(x, y)$.

Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Задача 8. Определить тип дифференциального уравнения $y' = e^{y/x} + y/x$.

Глава 7

УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К ОДНОРОДНЫМ

Уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$ приводится к однородному уравнению с помощью переноса начала координат в точку, которая является решением системы линейных уравнений $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$.

Если система линейных уравнений $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$ не имеет решений, то заменой $z = ax + by + c$ исходное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 9. Приведем дифференциальное уравнение

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$$

к однородному уравнению.

Решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x - 2y = -3 \\ x + y = 3 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Сделаем замену переменных: $\begin{cases} x_1 = x - 1 \\ y_1 = y - 2 \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} x = x_1 + 1 \\ y = y_1 + 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} dx = dx_1 \\ dy = dy_1 \end{cases}$.

Отсюда $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0 \to (2(x_1 + 1) - 4(y_1 + 2) + 6)dx_1 + (x_1 + 1 + y_1 + 2 - 3)dy_1 = 0 \to (2x_1 - 4y_1)dx_1 + (x_1 + y_1)dy_1 = 0$.

Получено однородное уравнение.

Задача 9. Привести дифференциальное уравнение

$$(x + 4y)y' = = 2x + 3y - 5$$

к однородному уравнению.

Пример 10. Определим, какая замена потребуется при решении уравнения $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$.

Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 4x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ не имеет решений. Поэтому заменой $z = 2x + y + 1$ исходное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Задача 10. Определить, какая замена потребуется при решении уравнения $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$.

Иногда дифференциальное уравнение сводится к однородному уравнению с помощью замены $y = z^m$.

Пример 11. Приведем дифференциальное уравнение

$$2x^2y' = y^3 + xy$$

к однородному уравнению.

Сделаем замену $y = z^m$. Тогда $2x^2y' = y^3 + xy \to 2x^2(z^m)' = (z^m)^3 + xz^m$ $\to 2mx^2z^{m-1}z' = z^{3m} + xz^m$.

Приравняем степени всех слагаемых: $2 + m - 1 = 3m = 1 + m \to$ $\to m + 1 = 3m = 1 + m \to m + 1 = 3m \to m = 0{,}5$.

Тогда

$y = z^{0,5}$ и $2 \times 0{,}5x^2z^{0,5-1}z' = z^{3\times 0,5} + xz^{0,5} \to$

$$\to \frac{x^2}{\sqrt{z}}z' = \sqrt{z^3} + x\sqrt{z} \to x^2z' = z^2 + xz.$$

Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Задача 11. Привести дифференциальное уравнение

$$2y + (x^2y + 1)xy' = 0$$

к однородному уравнению.

Глава 8

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнение $y' + a(x)y = b(x)$ называется *линейным*. Каков план решения линейного уравнения? Сначала решаем уравнение с разделяющимися переменными $y' + a(x)y = 0$, в его общем решении заменяем произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$ и, подставив полученное выражение в исходное уравнение, найдем $C(x)$. Это метод называется *методом вариации постоянной*.

Пример 12. Решим дифференциальное уравнение

$$(2x + 1)y' = 4x + 2y.$$

Для определения типа уравнения выразим y'.

Получим $y' = \dfrac{2}{2x+1}y + \dfrac{4x}{2x+1}$. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Сначала решаем уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = \frac{2y}{2x+1} \to \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2x+1} \to \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{2x+1} \to \frac{dy}{y} = \frac{d(2x+1)}{2x+1} \to$$

$$\to \int\frac{dy}{y} = \int\frac{d(2x+1)}{2x+1} + C_1 \to \ln|y| = \ln|2x+1| + C_1 \to e^{\ln|y|} = e^{\ln|2x+1|+C_1} \to$$

$$\to |y| = e^{C_1}e^{\ln|2x+1|} \to |y| = e^{C_1}|2x+1| \to y = \pm e^{C_1}(2x+1).$$

Обозначим $C = \pm e^{C_1}$. Тогда $y = C(2x + 1)$.

Применим метод вариации постоянной.

Считаем, что $y = C(x)(2x + 1)$.

Подставим эту функцию в исходное уравнение:

$(2x + 1)(C(x)(2x + 1))' = 4x + 2C(x)(2x + 1) \to$

$\to (2x + 1)(C'(x)(2x + 1) + 2C(x)) = 4x + 2C(x)(2x + 1) \to$

$\to (2x + 1)^2C'(x) = 4x$ (если слагаемые, содержащие $C(x)$, не уничтожились, то решаем неверно) $\to C'(x) = \dfrac{4x}{(2x+1)^2}$.

Отсюда

$$C(x) = \int \frac{4xdx}{(2x+1)^2} = \int \frac{(4x+2-2)dx}{(2x+1)^2} = \int (\frac{2}{2x+1} - \int \frac{2}{(2x+1)^2})dx =$$

$$= \int \frac{2dx}{2x+1} - \int \frac{2dx}{(2x+1)^2} = \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} - \int \frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2} =$$

$$= \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C_1.$$

Тогда $y = C(x)(2x+1) = (\ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C_1)(2x+1)$, где C_1 – произвольная постоянная.

Задача 12. Решить дифференциальное уравнение $y' + y\operatorname{tg} x = = \frac{1}{\cos x}$. $\left(\textit{Указание}: \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x}.\right)$

Пример 13. Решим дифференциальное уравнение

$$(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1.$$

$$(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1 \to (\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)\frac{dy}{dx} = 1 \to \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y}.$$

Если $dy = 0$, то $y = \text{const}$ и $y' = 0$, но по условию $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1$. Поэтому $dy \neq 0$.

Тогда $\frac{dx}{dy} = \sin^2 y + x\operatorname{ctg} y$. Это *линейное относительно x уравнение.* Решим его методом вариации постоянной.

$$\frac{dx}{dy} = x\operatorname{ctg} y \to \frac{dx}{x} = (\operatorname{ctg} y)dy \to \int \frac{dx}{x} = \int \operatorname{ctg} y\, dy + C_1 \to$$

$$\ln|x| = \int \frac{\cos y}{\sin y} dy + C_1 \to \ln|x| = \int \frac{d\sin y}{\sin y} + C_1 \to \ln|x| = \ln|\sin y| + C_1 \to$$

$$\to e^{\ln|x|} = e^{\ln|\sin y| + C_1} \to |x| = e^{C_1}|\sin y| \to x = \pm e^{C_1}\sin y.$$

Обозначим $C = \pm e^{C_1}$. Тогда $x = C\sin y$.

Пусть $x(y) = C(y)\sin y$.

Отсюда $x'_y = (C(y)\sin y)'_y = C'(y)\sin y + C(y)\cos y$.

Поэтому $x'_y = \sin^2 y + x\operatorname{ctg} y \to C'(y)\sin y + C(y)\cos y =$

$$= \sin^2 y + C(y) \times \sin y \times \operatorname{ctg} y \to C'(y)\sin y = \sin^2 y \to C'(y) = \sin y \to$$

$$\to C(y) = -\cos y + C_1.$$

Тогда $x(y) = C(y)\sin y \to x = (C_1 - \cos y)\sin y$.

Задача 13. Решить дифференциальное уравнение $(2e^y - x)y' = 1$.

Глава 9

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Дифференциальное уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)y^n$ называется *уравнением Бернулли*. Заменой $z = 1/y^{n-1}$ оно сводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка.

Пример 14. Сведем дифференциальное уравнение

$$y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$$

к линейному дифференциальному уравнению первого порядка.

Это уравнение Бернулли. $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x \to \frac{y'}{y^4} = \cos x + \frac{\operatorname{tg} x}{y^3}$.

Сделаем замену $z = \frac{1}{y^3} = y^{-3}$. Тогда $z' = (y^{-3})' = -3y^{-4}y' = -3\frac{y'}{y^4}$, то есть $\frac{y'}{y^4} = -\frac{z'}{3}$.

Отсюда $\frac{y'}{y^4} = \cos x + \frac{\operatorname{tg} x}{y^3} \to -\frac{z'}{3} = \cos x + z \operatorname{tg} x$. Получено линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Задача 14. Свести дифференциальное уравнение $y^2 y' = 1 + \frac{y^3}{x^2}$ к линейному дифференциальному уравнению первого порядка.

Глава 10

УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ называется *уравнением в полных дифференциалах*, если $M(x, y)dx + N(x, y)dy = dF(x, y)$, то есть $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$ и $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$.

Тогда $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Отсюда $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Функция $F(x, y)$ находится из условий $F(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y)$ и $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$.

Пример 15. Решим дифференциальное уравнение

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

Положим $M(x, y) = 2xy$, $N(x, y) = x^2 - y^2$. Тогда $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} = (x^2 - y^2) = 2x$.

Так как $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, то это уравнение в полных дифференциалах.

Тогда $F(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y) = \int 2xydx + \varphi(y) = y\int 2xdx + \varphi(y) =$ $= x^2y + \varphi(y)$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) \to \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + \varphi(y)) = x^2 - y^2 \to x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2 \to$$
$$\to \varphi'(y) = -y^2 \to \varphi(y) = -y^3/3 \to F(x, y) = x^2y - y^3/3.$$

Общее решение уравнения $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$ задается формулой $F(x, y) = x^2y - y^3/3 = C$, где C — произвольная постоянная.

Задача 15. Решить дифференциальное уравнение

$$3x^2(1 + \ln y)dx = (2y - x^3/y)dy.$$

Глава 11

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕГРИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ

После умножения обеих частей дифференциального уравнения на *интегрирующий множитель* получается уравнение в полных дифференциалах. Никаких специальных рецептов нахождения интегрирующего множителя не существует. Все зависит от мастерства исследователя.

Напомним формулы для вычисления дифференциалов: $d(uv) = v\,du + u\,dv$, $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, $d(u^m) = mu^{m-1}\,du$, $d(\ln u) = \frac{du}{u}$.

Пример 16. Решим дифференциальное уравнение

$$(x^2 + y^2 + y)dx - x\,dy = 0.$$

$(x^2 + y^2 + y)dx - x\,dy = 0 \to (x^2 + y^2)dx + y\,dx - x\,dy = 0.$

Так как $y = 0$ не удовлетворяет исходному уравнению, то разделим обе части полученного уравнения на y^2. Получим

$$\frac{x^2 + y^2}{y^2}dx + \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}dy = 0 \to \left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right)dx + d\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Сделаем замену $z = \frac{x}{y}$.

Тогда $(z^2 + 1)dx + dz = 0 \to \frac{dz}{z^2 + 1} + dx = 0 \to d(\operatorname{arctg} z + x) = 0 \to$ $\operatorname{arctg} z + x = C \to \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + x = C.$

Задача 16. Решить дифференциальное уравнение

$$(x^2 + y^2 + x)dx + y\,dy = 0.$$

Глава 12

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Теорема 1. Рассмотрим уравнение $y' = f(x, y)$. Пусть в замкнутой области $D = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны.

Тогда на некотором отрезке $x_0 - d \leqslant x \leqslant x_0 + d$ существует единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Пример 17. Выделим область на плоскости (x, y), в которой через каждую точку проходит единственное решение уравнения

$$(x-2)y' = \sqrt{y} - x.$$

Воспользуемся теоремой 1. $y' = \dfrac{\sqrt{y} - x}{x - 2}$.

Здесь $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y} - x}{x - 2}$.

При $x \neq 2$ и $y \geqslant 0$ функция $f(x, y)$ непрерывна.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{y} - x}{x - 2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{y}}{x - 2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}(x-2)}.$$

При $x \neq 2$ и $y > 0$ частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна.

Начальное условие $y(x_0) = y_0$, $x_0 \neq 2$, $y_0 > 0$. Тогда по теореме 1 существует единственное решение уравнения $(x-2)y' = \sqrt{y} - x$ с таким начальным условием.

Задача 17. Выделить область на плоскости (x, y), в которой через каждую точку проходит единственное решение уравнения $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

Теорема 2. Рассмотрим уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Пусть в области D функция $f(x, y)$ и ее частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ непрерывны, а точка $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ лежит внутри области D. Тогда существует единственное решение уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', .., y^{(n-1)})$ с начальным условием $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Пример 18. Определим, при каких начальных условиях существует единственное решение уравнения $(x - y)y'y''' = \ln(xy)$.

Воспользуемся теоремой 2. $y''' = \dfrac{\ln(xy)}{(x-y)y'}$.

Здесь $f(x, y, y', y'') = \dfrac{\ln(xy)}{(x-y)y'}$.

При $xy > 0$, $x \neq y$, $y' \neq 0$ функция $f(x, y, y', y'')$ непрерывна.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\ln(xy)}{(x-y)y'}\right) = \frac{((x-y)y'x)/(xy)) + y'\ln(xy)}{((x-y)y')^2}.$$

При $xy > 0$, $x \neq y$, $y' \neq 0$ частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна.

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\ln(xy)}{(x-y)y'}\right) = -\frac{\ln(xy)}{(x-y)(y')^2}.$$

При $xy > 0$, $x \neq y$, $y' \neq 0$ частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ непрерывна.

$\dfrac{\partial f}{\partial y''} = \dfrac{\partial}{\partial y''}\left(\dfrac{\ln(xy)}{(x-y)y'}\right) = 0$. Здесь нет никаких ограничений.

Зададим начальные условия: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $y''(x_0) = y_0''$, $x_0y_0 > 0$, $x_0 \neq y_0$, $y_0' \neq 0$, y_0'' любое. Тогда по теореме 2 существует единственное решение уравнения $(x - y)y'y''' = \ln(xy)$ с таким начальным условием.

Задача 18. Определить, при каких начальных условиях существует единственное решение уравнения $(x + 1)y'' = y + \sqrt{y}$.

Глава 13

МЕТОД ВВЕДЕНИЯ ПАРАМЕТРА

Метод введения параметра применяется к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной, а разрешенным относительно независимой переменной или искомой функции. В этом случае делается замена $y' = p$, то есть $dy = p\,dx$. После решения дифференциального уравнения получается параметрическое уравнение кривой.

Пример 19. Решим дифференциальное уравнение $(y')^3 + y' = x$ методом введения параметра.

Пусть $y' = p$, то есть $dy = p\,dx$. Отсюда $x = (y')^3 + y' = p^3 + p$.

Тогда $dy = p\,dx \to p\,dx = p\,d(p^3 + p) \to p\,dx = p(3p^2 + 1)dp \to p\,dx =$ $= (3p^3 + p)dp \to \int dy = \int (3p^3 + p)dp + C \to y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + C$, где C — произвольная постоянная.

Ответ: $\begin{cases} x = p^3 + p \\ y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + C \end{cases}$.

Задача 19. Решить дифференциальное уравнение $y = (y')^2 - 2(y')^3$ методом введения параметра.

§ 13.1. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО

Дифференциальное уравнение вида $y = xy' + \psi(y')$ называется *уравнением Клеро*. *Уравнение Лагранжа* — это дифференциальное уравнение вида $y = \varphi(y')x + \psi(y')$, где функция $\varphi(y')$ отлична от y'.

Уравнения Лагранжа и Клеро могут быть решены методом введения параметра.

Пример 20. Решим дифференциальное уравнение $y = xy' - (y')^2$.

Это уравнение Клеро. Воспользуемся методом введения параметра.

Пусть $y' = p$, то есть $dy = p\,dx$.

Тогда $y = xy' - (y')^2 \to y = xp - p^2 \to dy = d(xp - p^2) \to p\,dx = p\,dx + x\,dp - 2p\,dp \to (x - 2p)dp = 0$.

Если $x - 2p = 0$, то $p = \frac{x}{2}$. Отсюда $y = xp - p^2 = x \times \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$.

Если $dp = 0$, то $p = C$, где C — произвольная постоянная. Тогда $y = xp - p^2 = Cx - C^2$.

Ответ: $y = Cx - C^2$; $y = \frac{x^2}{4}$.

Задача 20. Решить дифференциальное уравнение $y = xy' - y' - 2$.

Пример 21. Решим дифференциальное уравнение $y = 2xy' - 4(y')^3$.

Это уравнение Лагранжа. Воспользуемся методом введения параметра.

Пусть $y' = p$, то есть $dy = p\,dx$.

Тогда $y = 2xy' - 4(y')^3 \to y = 2xp - 4p^3 \to dy = d(2xp - 4p^3) \to p\,dx = 2p\,dx + 2x\,dp - 12p^2\,dp \to p\,dx + 2x\,dp - 12p^2\,dp = 0 \to px'_p + 2x - 12p^2 = 0$.

Это линейное относительно x дифференциальное уравнение. Решим его методом вариации постоянной.

$p\,dx + 2x\,dp = 0 \to p\,dx = -2x\,dp$.

Пусть $p \neq 0$.

Тогда $p\,dx = -2x\,dp \to \frac{dx}{x} = -2\frac{dp}{p} \to \int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{dp}{p} + C_1 \to \ln|x| = -2\ln|p| + C_1 \to e^{\ln|x|} = e^{-2\ln|p| + C_1} \to |x| = e^{C_1}p^{-2} \to x = \pm e^{C_1}p^{-2}$.

Положим $C = \pm e^{C_1}$. Отсюда $x = Cp^{-2}$.

Пусть $x = C(p)p^{-2}$. Тогда $dx = d(C(p)p^{-2}) = p^{-2}\,dC(p) - 2C(p)p^{-3}dp$.

Поэтому $pdx + 2x\,dp - 12p^2\,dp = 0 \to p(p^{-2}\,dC(p) - 2C(p)p^{-3}dp) + 2C(p)p^{-2}\,dp - 12p^2\,dp = 0 \to p^{-1}\,dC(p) - 12p^2\,dp = 0 \to dC(p) = 12p^3\,dp \to \int dC(p) = \int 12p^3\,dp \to C(p) = 3p^4 + C_1$.

Тогда $x = C(p)p^{-2} = (3p^4 + C_1)p^{-2} = 3p^2 + C_1p^{-2}$.

Отсюда $y = 2xp - 4p^3 = 2(3p^2 + C_1p^{-2})p - 4p^3 = 2p^3 + 2C_1p^{-1}$.

Если $p = 0$, то $y = 2xp - 4p^3 = 2x \times 0 - 4 \times 0^3 = 0$.

Ответ: $y = 0$; $\begin{cases} x = 3p^2 + C_1p^{-2} \\ y = 2p^3 + 2C_1p^{-1} \end{cases}$.

Задача 21. Решить дифференциальное уравнение $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.

Глава 14

ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

§ 14.1. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, КОТОРОЕ НЕ СОДЕРЖИТ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ

Если в дифференциальное уравнение не входит искомая функция y, то есть оно имеет вид $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$, то заменой $z = y^{(k)}$ порядок понижается на k единиц.

Пример 22. Решим дифференциальное уравнение $x^2y'' = y'^2$.

В уравнение не входит искомая функция y. Замена $z = y'$. Тогда $z' = y''$ и $x^2z' = z^2$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{x^2dz}{dx} = z^2$. При $z \neq 0$ получаем $\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}$.

Проинтегрируем обе части: $\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2} - C_1$; $-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - C_1$.

Отсюда $z = \frac{x}{1 + C_1x}$. Но $z = y'$, то есть $y' = \frac{x}{1 + C_1x}$.

Поэтому $y = \int \frac{xdx}{1 + C_1x} = \frac{1}{C_1}\int \frac{C_1xdx}{1 + C_1x} = \frac{1}{C_1}\int \frac{(C_1x + 1 - 1)dx}{1 + C_1x} =$

$$= \frac{1}{C_1}\left(\int \frac{(C_1x + 1)dx}{1 + C_1x} - \int \frac{dx}{1 + C_1x}\right) = \frac{1}{C_1}\left(\int dx - \frac{1}{C_1}\int \frac{C_1dx}{1 + C_1x}\right) =$$

$$= \frac{1}{C_1}\left(x - \frac{1}{C_1}\int \frac{d(C_1x + 1)}{1 + C_1x}\right) = \frac{1}{C_1}\left(x - \frac{1}{C_1}\ln|1 + C_1x| + C_2\right) = y.$$

Если $z = 0$, то $y' = 0$ и $y = C = \text{const}$ (удовлетворяет исходному уравнению).

Ответ: $y = \frac{1}{C_1}(x - \frac{1}{C_1}\ln|1 + C_1x|) + C_2)$; $y = C = \text{const}$.

Задача 22. Понизить порядок дифференциального уравнения $y''^2 + xy'' = 2y'$.

§ 14.2. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, КОТОРОЕ НЕ СОДЕРЖИТ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Если в дифференциальное уравнение не входит переменная x, то есть оно имеет вид $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, порядок уравнения можно понизить, взяв за новую независимую переменную y и сделав замену $y' = p(y)$.

Пример 23. Решим дифференциальное уравнение $y'' = y$.

Так как в дифференциальное уравнение не входит переменная x, то делаем замену $y' = p(y)$. Тогда $y'' = (y')' = (p(y))' = p'_y y' = p'_y p$.

Тогда уравнение $y'' = y$ запишется в виде $p'_y p = y$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $p\dfrac{dp}{dy} = y$, $pdp = ydy$.

Проинтегрируем обе части: $\int pdp = \int ydy + C$, $\dfrac{p^2}{2} = \dfrac{y^2}{2} + C$, $p^2 = y^2 + 2C$.

Обозначим $C_1 = 2C$. Тогда $p^2 = y^2 + C_1$. Но $p = y'$.

Поэтому $y'^2 = y^2 + C_1$, $y' = \sqrt{y^2 + C_1}$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 + C_1}$. $\dfrac{dy}{\sqrt{y^2 + C_1}} = dx$.

Проинтегрируем обе части: $\int \dfrac{dy}{\sqrt{y^2 + C_1}} = \int dx + C_2$. Оба интеграла табличные: $\ln|y + \sqrt{y^2 + C_1}| = x + C_2$.

Задача 23. Понизить порядок дифференциального уравнения $y'' - 2yy'\ln y = y'^2$.

§ 14.3. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОДНОРОДНОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Если искомую функцию и ее производные умножить на число k, а дифференциальное уравнение при этом не изменится (то есть множитель k сократится), то такое дифференциальное уравнение является *однородным относительно искомой функции и ее производных*. В этом случае для понижения порядка дифференциального уравнения делается замена $y' = yz$, $z = z(x)$.

Пример 24. Решим дифференциальное уравнение $xyy'' - x(y')^2 = yy'$.

Умножим y, y' и y'' на число k. Тогда дифференциальное уравнение примет вид $x(ky)(ky'') - x(ky')^2 = (ky)(ky') \to xyy'' - x(y')^2 = yy'$, то есть исходное дифференциальное уравнение однородно относительно y, y' и y''.

Сделаем замену $y' = yz$, $z = z(x)$. Тогда $y'' = (y')' = (yz)' = y'z + yz' = yz \times z + yz' = yz^2 + yz'$.

Отсюда $xyy'' - x(y')^2 = yy' \to xy(yz^2 + yz') - x(yz)^2 = y \times yz \to xy^2z' = y^2z \to y^2(xz' - z) = 0$.

Если $xz' - z = 0$, то $x\dfrac{dz}{dx} - z = 0 \to \dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x} \to \displaystyle\int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x} + C_1 \to$ $\ln|z| = \ln|x| + C_1 \to e^{\ln|z|} = e^{\ln|x|+C_1} \to |z| = e^{C_1}|x| \to z = \pm e^{C_1}x$.

Положим $C = \pm e^{C_1}$. Тогда $z = Cx$.

Отсюда $y' = yz \to y' = y \times Cx \to y' = Cxy \to \dfrac{dy}{dx} = Cxy \to \dfrac{dy}{y} = Cx\,dx \to$ $\displaystyle\int\frac{dy}{y} = \int Cxdx + C_2 \to \ln|y| = \frac{Cx^2}{2} + C_2 \to e^{\ln|y|} = e^{Cx^2/2+C_2} \to |y| = e^{C_2}e^{Cx^2/2}$ $\to y = \pm e^{C_2}e^{Cx^2/2}$.

Положим $C_1 = \pm e^{C_2}$. Тогда $y = C_1e^{Cx^2/2}$.

Если $y^2 = 0$, то $y = 0$. Но этот результат уже содержится в формуле $y = C_1e^{Cx^2/2}$ при $C_1 = 0$.

Задача 24. Понизить порядок дифференциального уравнения $xyy'' + yy' = x(y')^2(1 - x)$. К какому типу относится полученное дифференциальное уравнение первого порядка?

§ 14.4. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОДНОРОДНОГО ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ СТЕПЕНЕЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ

Если в дифференциальном уравнении умножить независимую переменную x на число k, искомую функцию y — на k^m, производную y' — на k^{m-1}, вторую производную y'' — на k^{m-2} и т. д., а дифференциальное уравнение при этом не изменится, то такое дифференциальное уравнение является *однородным относительно некоторых степеней независимой переменной и искомой функции*. Число m заранее неизвестно.

После нахождения числа m делается замена $x = e^t$, $y = z(t)e^{mt}$. Полученное дифференциальное уравнение будет содержать лишь функцию z и ее производные. После этого делается замена $z' = p(z)$ (см. § 14.2).

Пример 25. Решим дифференциальное уравнение $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$.

Умножим независимую переменную x на число k, искомую функцию y — на k^m, производную y' — на k^{m-1}, вторую производную y'' — на k^{m-2}. Тогда $4(kx)^2(k^my)^3k^{m-2}y'' = (kx)^2 - (k^my)^4 \to 4x^2y^3y''k^{2+3m+m-2} = k^2x^2 - k^{4m}y^4$.

Приравняем показатели множителя k: $2 + 3m + m - 2 = 2 = 4m \to m = 1/2$.

Если бы полученная система оказалась несовместной, то этот способ понижения порядка дифференциального уравнения неприменим.

Сделаем замену $x = e^t$, $y = z(t)e^{mt} = z(t)e^{t/2}$.

Тогда $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{(ze^{t/2})'_t}{(e^t)'_t} = \left(z'e^{t/2} + \dfrac{1}{2}ze^{t/2}\right)/e^t = \left(z' + \dfrac{z}{2}\right)e^{-t/2}$.

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{((z' + z/2)e^{-t/2})'_t}{e^t} = \left(\left(z'' + \frac{z'}{2}\right)e^{-t/2} + \left(z' + \frac{z}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-t/2}\right)/e^t = \left(z'' - \frac{z}{4}\right)e^{-3t/2}.$$

Отсюда

$$4x^2y^3y'' = x^2 - y^4 \to 4(e^t)^2(ze^{t/2})^3\left(z'' - \frac{z}{4}\right)e^{-3t/2} = (e^t)^2 - (ze^{t/2})^4 \to 4z^3z'' = 1.$$

Полученное уравнение не содержит независимой переменной t. Сделаем замену $z' = p(z)$. Тогда $z'' = (z')' = (p(z))' = p'z' = p'p$.

Отсюда $4z^3z'' = 1 \to 4z^3p'p = 1 \to 4z^3p\dfrac{dp}{dz} = 1 \to 4p\,dp = \dfrac{dz}{z^3} \to$

$$\int 4p\,dp = \int\frac{dz}{z^3} + C \to 2p^2 = -\frac{1}{2z^2} + C \to p^2 = -\frac{1}{4z^2} + \frac{C}{2} \to$$

$$\to p = \pm\sqrt{\frac{C}{2} - \frac{1}{4z^2}} \to z' = \pm\sqrt{\frac{C}{2} - \frac{1}{4z^2}} \to \frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{\frac{C}{2} - \frac{1}{4z^2}} \to$$

$$\to \pm\frac{dz}{\sqrt{\dfrac{C}{2} - \dfrac{1}{4z^2}}} = dt \to \pm\frac{2z\,dz}{\sqrt{2Cz^2 - 1}} = dt.$$

Положим $C_1^2 = 2C$. Тогда $\pm\dfrac{2z\,dz}{\sqrt{2Cz^2-1}} = dt \to \pm\dfrac{2z\,dz}{\sqrt{C_1^2z^2-1}} = dt \to$

$$\to \pm\frac{1}{C_1}\int\frac{d(z^2-1/C_1^2)}{\sqrt{z^2-1/C_1^2}} = \int dt + C_2 \to \pm\frac{2}{C_1}\sqrt{z^2-\frac{1}{C_1^2}} = t + C_2.$$

Так как $x = \mathrm{e}^t$, то $t = \ln x$.

Из равенства $y = z(t)\mathrm{e}^{t/2}$ получаем, что $z(t) = \dfrac{y}{\mathrm{e}^{t/2}} = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

Отсюда $\pm\dfrac{2}{C_1}\sqrt{z^2-\dfrac{1}{C_1^2}} = t + C_2 \to \pm\dfrac{2}{C_1}\sqrt{\dfrac{y^2}{x}-\dfrac{1}{C_1^2}} = \ln x + C_2.$

Задача 25. Понизить порядок дифференциального уравнения $x^2y'' - 3xy' = \dfrac{6y^2}{x^2} - 4y$.

§ 14.5. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРИВЕДЕНИЕМ ОБЕИХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЯ К ПОЛНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Порядок дифференциального уравнения легко понижается, если удается преобразовать уравнение к виду, в котором обе части уравнения являются полными производными.

Пример 26. Понизим порядок дифференциального уравнения $y'y''' = 2(y'')^2$.

$$y'y''' = 2(y'')^2 \to \frac{y'''}{y''} = \frac{2y''}{y'} \to (\ln y'')' = 2(\ln y')' \to \ln y'' = 2\ln y' + \ln C \to$$

$$y'' = C(y')^2 \to \frac{y''}{y'} = Cy' \to (\ln y')' = (Cy)' \to \ln y' = Cy + \ln C_1 \to y' = C_1e^{Cy}.$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными.

Мы видим, что иногда при интегрировании удобнее вместо постоянной C использовать постоянную $\ln C$.

Задача 26. Понизить порядок дифференциального уравнения $yy'' = y'(y' + 1)$.

Глава 15

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Это уравнения вида $ay'' + by' + cy = 0$, где a, b, c — коэффициенты. Составляем *характеристическое уравнение* $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ и решаем его.

Если это квадратное уравнение имеет два различных действительных корня $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение дифференциального уравнения $y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 27. Решим дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ и решаем его. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Тогда общее решение дифференциального уравнения $y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Задача 27. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

Если характеристическое уравнение $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ имеет только один действительный корень λ, то общее решение дифференциального уравнения $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x}$.

Пример 28. Решим дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ и решаем его. Получаем кратный корень $\lambda = 2$. Тогда общее решение дифференциального уравнения $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x} = (C_1 + C_2x)e^{2x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Задача 28. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Если характеристическое уравнение $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ не имеет действительных корней (то есть $D = b^2 - 4ac < 0$), то положим $\alpha = \frac{-b}{2a}$, $\beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2a}$. Читатель, знакомый с комплексными числами, конечно же, понял, что речь идет о комплексных решениях $\alpha \pm \beta i$ квадратного уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ ($D = b^2 - 4ac < 0$).

Тогда общее решение дифференциального уравнения $y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 29. Решим дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$. Здесь $a = 1$, $b = 4$, $c = 13$.

$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 13 = -36 < 0.$

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times 1} = -2$, $\beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2a} = \frac{\sqrt{|-36|}}{2 \times 1} = 3.$

Тогда общее решение дифференциального уравнения $y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = C_1 e^{-2x} \cos 3x + C_2 e^{-2x} \sin 3x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Задача 29. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 4y = 0$.

Глава 16

ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами — это уравнения вида $ay'' + by' + cy = f(x)$, где a, b, c — коэффициенты. Общее решение такого дифференциального уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения (см. главу 15) и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение также можно найти *методом вариации постоянной*. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения. Вместо постоянных C_i пишем функции $C_i(x)$. Вычисляем y' и сумму с $C_i'(x)$ приравниваем нулю. Подставим $y(x)$ в исходное уравнение. Мы получили систему из двух уравнений относительно функций $C_i'(x)$. Находим сами функции $C_i(x)$.

Пример 30. Решим дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$$

Общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$ есть $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные (см. пример 27).

Считаем, что $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$, то есть $y(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{3x}$. Это общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$. Найдем функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

$$y' = (C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{3x})' = -C_1(x)e^{-x} + 3C_2(x)e^{3x} + (C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{3x}).$$

Сумму с $C_i'(x)$ приравниваем нулю: $C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{3x} = 0$.

Тогда $y' = -C_1(x)e^{-x} + 3C_2(x)e^{3x}$.

Отсюда $y'' = (-C_1(x)e^{-x} + 3C_2(x)e^{3x})' = C_1(x)e^{-x} + 9C_2(x)e^{3x} - C_1'(x)e^{-x} + 3C_2'(x)e^{3x}$.

Подставим все в исходное уравнение $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$, то есть $C_1(x)e^{-x} + 9C_2(x)e^{3x} - C_1'(x)e^{-x} + 3C_2'(x)e^{3x} - 2(-C_1(x)e^{-x} + 3C_2(x)e^{3x}) - 3(C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{3x}) = e^{4x}$. Отсюда $-C_1'(x)e^{-x} + 3C_2'(x)e^{3x} = e^{4x}$ (все слагаемые с $C_i(x)$ должны сократиться).

Получили систему линейных относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ уравнений $\begin{cases} e^{-x}C_1' + e^{3x}C_2' = 0 \\ -e^{-x}C_1' + 3e^{3x}C_2' = e^{4x} \end{cases}$. Решив эту систему относительно C_1' и C_2', получаем $C_1'(x) = -\dfrac{1}{4}e^{5x}$, $C_2'(x) = \dfrac{1}{4}e^{x}$.

Отсюда $C_1(x) = -\dfrac{1}{20}e^{5x} + C_3$, $C_2(x) = \dfrac{1}{4}e^{x} + C_4$.

Тогда $y(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{3x} = (-\dfrac{1}{20}e^{5x} + C_3)e^{-x} + (\dfrac{1}{4}e^{x} + C_4)e^{3x} = C_4e^{3x} + C_3e^{-x} + \dfrac{1}{5}e^{4x}$, где C_3 и C_4 — произвольные постоянные.

Задача 30. Решить дифференциальное уравнение $y'' - y = e^x$.

Метод вариации постоянной часто приводит к сложным вычислениям. Иногда для дифференциальных уравнений с правой частью специального вида частное решение можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Если правая часть дифференциального уравнения имеет вид $P_m(x)e^{\gamma x}$ ($P_m(x)$ — многочлен степени m), то частное решение ищется в виде $y_1 = x^sQ_m(x)e^{\gamma x}$, где s — кратность корня γ характеристического уравнения ($s = 0$, если γ не является корнем характеристического уравнения), $Q_m(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + ... + D$.

Для нахождения коэффициентов многочлена $Q_m(x)$ нужно подставить y_1 в исходное уравнение и решить систему линейных уравнений относительно $A, B, ..., D$.

Пример 31. Решим дифференциальное уравнение

$$y'' + y' - 2y = 3xe^x.$$

Здесь $m = 1$, $P_m(x) = 3x$, $\gamma = 1$. Тогда $Q_m(x) = Ax + B$.

Однородное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Его корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Тогда общее решение однородного уравнения равно $y_0 = C_1e^{-2x} + C_2e^x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

$\gamma = 1$ является корнем кратности $s = 1$ характеристического уравнения. Поэтому частное решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде $y_1 = x^sQ_m(x)e^{\gamma x} = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$.

Тогда
$y_1' = ((Ax^2 + Bx)e^x)' = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x$
и $y_1'' = (y_1')' = ((Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x)' = (2Ax + 2A + B)e^x + (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x = (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x$.

Отсюда $y_1'' + y_1' - 2 = 3xe^x \to (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x + (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x - 2(Ax^2 + Bx)e^x = 3xe^x \to 6Ax + 2A + 3B = 3x$.

Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6A = 3 \\ 2A + 3B = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/3 \end{cases}.$$

Тогда $y_1 = (Ax^2 + Bx)e^x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)e^x$.

Поэтому общее решение исходного дифференциального уравнения равно $y = y_1 + y_0 = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)e^x + C_1e^{-2x} + C_2e^x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Задача 31. Определить, в каком виде нужно искать частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.

Если правая часть дифференциального уравнения имеет вид $P_{m_1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + P_{m_2}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ ($P_{m_1}(x)$ и $P_{m_2}(x)$ — многочлены степеней m_1 и m_2 соответственно), то частное решение ищется в виде $y_1 = x^s e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x)$, где $m = \max(m_1, m_2)$, $Q_m(x)$ и $R_m(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами степени m, s — кратность корня $\alpha + \beta i$ характеристического уравнения ($s = 0$, если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения).

Для нахождения коэффициентов многочленов $Q_m(x)$ и $R_m(x)$ нужно подставить y_1 в исходное уравнение.

Пример 32. Решим дифференциальное уравнение

$$y'' - 9y = e^{3x}\cos x.$$

Здесь $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $m_1 = m_2 = 0$. Тогда $m = \max(m_1, m_2) = \max(0, 0) = 0$. Поэтому $Q_m(x) = A$, $R_m(x) = B$. Однородное уравнение $y'' - 9y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 9 = 0$. Его корни $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$. Тогда общее решение однородного уравнения равно $y_0 = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Число $\alpha + \beta i = 3 + i$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому $s = 0$.

Частное решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде $y_1 = x^s e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x) = Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x = (A\cos x + B\sin x)e^{3x}$.

Отсюда

$y_1' = ((A\cos x + B\sin x)e^{3x})' = (-A\sin x + B\cos x)e^{3x} + 3(A\cos x + B\sin x)e^{3x} =$
$= ((3A + B)\cos x + (3B - A)\sin x)e^{3x}.$

$y_1'' = (y_1')' = (((3A + B)\cos x + (3B - A)\sin x)e^{3x})' = (-(3A + B)\sin x +$
$+ (3B - A)\cos x)e^{3x} + 3((3A + B)\cos x + (3B - A)\sin x)e^{3x} =$
$= ((8A + 6B)\cos x + (8B - 6A)\sin x)e^{3x}.$

Тогда $y_1'' - 9y_1' = e^{3x}\cos x \to ((8A + 6B)\cos x + (8B - 6A)\sin x)e^{3x} -$
$- 9(A\cos x + B\sin x)e^{3x} = e^{3x}\cos x \to ((-A + 6B)\cos x + (-B - 6A)\sin x)e^{3x} =$
$= e^{3x}\cos x.$

Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -A + 6B = 1 \\ -6A - B = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A = -1/37 \\ B = 6/37 \end{cases}.$$

Тогда $y_1 = (A\cos x + B\sin x)e^{3x} = \left(-\dfrac{1}{37}\cos x + \dfrac{6}{37}\sin x\right)e^{3x}.$

Поэтому общее решение исходного дифференциального уравнения равно $y = y_1 + y_0 = \left(\dfrac{6}{37}\sin x - \dfrac{1}{37}\cos x\right)e^{3x} + C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Задача 32. Определить, в каком виде нужно искать частное решение дифференциального уравнения $y'' + y = x\sin x$.

Частное решение дифференциального уравнения $ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$ есть сумма частных решений дифференциальных уравнений $ay'' + by' + cy = f_1(x)$ и $ay'' + by' + cy = f_2(x)$.

Глава 17

УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Дифференциальное уравнение вида $a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 xy' + a_0 y = f(x)$, где a_i — коэффициенты, называется *уравнением Эйлера*.

Заменой $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$) уравнение Эйлера сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. При этом характеристическое уравнение можно получить, подставив в уравнение Эйлера вместо $x^k y^{(k)}$ слагаемое $\lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - k + 1)$.

Пример 33. Решим дифференциальное уравнение

$$x^3 y''' + xy' - y = 0.$$

Это уравнение Эйлера. Сделаем замену $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$). Получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение этого линейного уравнения будет $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+\lambda-1=0 \to (\lambda-1)(\lambda(\lambda-2)+1)=0 \to (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1)=0 \to \lambda_{1,2,3} = 1$.

Тогда $y(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)e^t$. Но $t = \ln|x|$.

Отсюда $y(t) = (C_1 + C_2\ln|x| + C_3\ln^2|x|)x$.

Задача 33. Решить дифференциальное уравнение

$$x^2 y'' - 4xy' + + 6y = 0.$$

Глава 18

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ПОМОЩЬЮ ПОДБОРА ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ

Мы ограничимся рассмотрением дифференциальных уравнений вида $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$.

Как правило, такие уравнения не решаются. Но если удастся подобрать частное решение y_1, то можно воспользоваться *формулой Лиувилля* $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int\frac{a_1(x)dx}{a_0(x)}}$.

Частное решение ищется в виде многочлена или в виде экспоненты.

Пример 34. Решим дифференциальное уравнение

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0.$$

Здесь $a_0(x) = x$, $a_1(x) = -(2x+1)$.

Будем искать частное решение y_1 в виде экспоненты: $y_1 = e^{ax}$.

Тогда $y_1' = ae^{ax}$ и $y_1'' = a^2e^{ax}$.

Отсюда

$xy_1'' - (2x+1)y_1' + (x+1)y_1 = 0 \to xa^2e^{ax} - (2x+1)ae^{ax} + (x+1)e^{ax} = 0 \to (a^2 - 2a + 1)x - a + 1 = 0.$

Получаем систему уравнений $\begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ 1 - a = 0 \end{cases} \to a = 1.$

Если бы полученная система уравнений оказалась несовместной, то частного решения в виде экспоненты не существует.

Мы нашли частное решение $y_1 = e^x$. Тогда $y_1' = e^x$.

Воспользуемся формулой Лиувилля.

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int\frac{a_1(x)dx}{a_0(x)}} \to y_2'y_1 - y_2y_1' = Ce^{-\int\frac{-(2x+1)dx}{x}} \to$$

$$\frac{y_2'y_1 - y_2y_1'}{y_1^2} = Ce^{\int\left(2+\frac{1}{x}\right)dx}/y_1^2 \to \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{Ce^{2x+\ln|x|}}{y_1^2} \to \left(\frac{y_2}{e^x}\right)' = \frac{Cxe^{2x}}{(e^x)^2} \to$$

$$\to \left(\frac{y_2}{e^x}\right)' = Cx \to \frac{y_2}{e^x} = \int Cx\,dx \to \frac{y_2}{e^x} = \frac{Cx^2}{2} + C_1.$$

Получаем, что $y = \left(\frac{Cx^2}{2} + C_1\right)e^x$.

Задача 34. Решить дифференциальное уравнение

$$xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0.$$

Пример 35. Решим дифференциальное уравнение

$$(x^2 + 1)y'' - 2y = 0.$$

Здесь $a_0(x) = x^2 + 1$, $a_1(x) = 0$.

Будем искать частное решение y_1 в виде экспоненты: $y_1 = e^{ax}$.

Тогда $y_1' = ae^{ax}$ и $y_1'' = a^2e^{ax}$.

Отсюда

$(x^2 + 1)y_1'' - 2y_1 = 0 \to (x^2 + 1)a^2e^{ax} - 2e^{ax} = 0 \to a^2x^2 + a^2 - 2 = 0.$

Получаем систему уравнений $\begin{cases} a^2 = 0 \\ a^2 - 2 = 0 \end{cases}$. Мы видим, что система уравнений не имеет решений. Поэтому частного решения в виде экспоненты не существует.

Будем искать частное решение y_1 в виде многочлена. Сначала определим степень n многочлена.

Пусть $y_1 = x^n + \ldots$

Тогда $y_1' = nx^{n-1} + \ldots$ и $y_1'' = n(n-1)x^{n-2} + \ldots$

Отсюда

$(x^2 + 1)y_1'' - 2y_1 = 0 \to (x^2 + 1)(n(n-1)x^{n-2} + \ldots) - 2(x^n + \ldots) = 0 \to (n(n-1) - 2)x^n + \ldots = 0.$

Тогда $n(n-1) - 2 = 0 \to n = 2$.

Поэтому $y_1 = x^2 + Ax + B$, $y_1' = 2x + A$, $y_1'' = 2$.

Отсюда $(x^2 + 1)y_1'' - 2y_1 = 0 \to 2(x^2 + 1) - 2(x^2 + Ax + B) = 0 \to -2Ax + 2 - 2B = 0$, то есть $A = 0$, $B = 1$.

Поэтому $y_1 = x^2 + Ax + B = x^2 + 1$ и $y_1' = 2x$.

Воспользуемся формулой Лиувилля.

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int\frac{a_1(x)dx}{a_0(x)}} \to y_2'y_1 - y_2y_1' = Ce^{-\int\frac{0dx}{x^2+1}} \to \frac{y_2'y_1 - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{C}{y_1^2}$$

$$\to \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C}{(x^2+1)^2} \to \left(\frac{y_2}{x^2+1}\right)' = \frac{C}{(x^2+1)^2} \to \frac{y_2}{x^2+1} = \int \frac{C}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

В интеграле $\int \frac{C}{(x^2+1)^2}\,dx$ сделаем замену $x = \operatorname{tg} t$. Тогда $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$ и $t = \operatorname{arctg} x$.

Отсюда

$$\int \frac{C}{(x^2+1)^2}\,dx = C\int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{(\operatorname{tg}^2 t+1)^2} = C\int \frac{dt}{\cos^2 t\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2} = C\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{C}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{C}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C_1 = \frac{C}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\,\frac{2\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}\right) +$$

$$+ C_1 = \frac{C}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C_1 = C_2\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C_1.$$

Мы обозначили $\dfrac{C}{2}$ через C_2.

Получаем, что $y = (x^2+1)\left(C_2\left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2}\right) + C_1\right) =$

$= C_1(x^2+1) + C_2(x + (x^2+1)\operatorname{arctg} x)$.

Задача 35. Решить дифференциальное уравнение

$$(x^2-1)y'' + (x-3)y' - y = 0.$$

Глава 19

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Общий вид *линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами* $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Это уравнение с помощью замены $y = ze^{-0,5\int^{x} p(t)dt}$ (здесь нижний предел интегрирования не важен) можно привести к уравнению $z'' + Q(x)z = 0$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать уравнения вида $y'' + Q(x)y = 0$.

Теорема 1. Пусть $y(x)$ — отличное от тождественного нуля решение уравнения $y'' + Q(x)y = 0$. Тогда $y(x)$ может обращаться в нуль в конечном числе точек.

Теорема о чередовании нулей. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые решения уравнения $y'' + Q(x)y = 0$. Тогда нули этих решений чередуются.

Теорема Штурма (теорема сравнения). Даны уравнения $y'' + Q(x)y = 0$ и $z'' + P(x)z = 0$, где $Q(x) \geqslant P(x)$. Пусть $z(x)$ — решение уравнения $z'' + P(x)z = 0$. Если $z(x_1) = z(x_2) = 0$, то любое решение уравнения $y'' + Q(x)y = 0$ имеет нуль на отрезке $[x_1, x_2]$.

Теорема 2. Если $P(x) \leqslant 0$, то любое отличное от тождественного нуля решение уравнения $z'' + P(x)z = 0$ обращается в нуль не более одного раза.

Теорема 3. Дано уравнение $y'' + Q(x)y = 0$, где $x \geqslant x_0$. Пусть $Q(x) \geqslant m^2 = \text{const} > 0$. Тогда любое решение уравнения $y'' + Q(x)y = 0$ имеет бесконечно много нулей.

Теорема Кнезера. Дано уравнение $z'' + P(x)z = 0$, где $x > 0$. Пусть $P(x) \leqslant \dfrac{1}{4x^2}$. Тогда любое отличное от тождественного нуля решение уравнения $z'' + P(x)z = 0$ не может иметь двух нулей.

Теорема 4. Дано уравнение $y'' + Q(x)y = 0$, где $x > 0$. Пусть $Q(x) \geqslant \geqslant \frac{1 + \varepsilon}{4x^2}$, $\varepsilon > 0$. Тогда любое решение уравнения $y'' + Q(x)y = 0$ имеет бесконечно много нулей.

Теорема об асимптотике. Дано уравнение $y'' + (1 + q(x))y = 0$, где $x \geqslant 1$. Пусть $q(x) \leqslant \frac{C}{x^{1+\gamma}}$, $\gamma = \text{const} > 0$. Тогда $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \varphi(x)$, где $\varphi(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$.

Глава 20

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ПРИВЕДЕННЫЕ К НОРМАЛЬНОМУ ВИДУ

Мы ограничимся рассмотрением дифференциальных уравнений первого порядка. В этом случае *нормальный вид* системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами — это система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$.

Здесь a_{ij} — коэффициенты, $x_i = x_i(t), \dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{dt}$. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица из коэффициентов системы.

§ 20.1. МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ

Путем исключения неизвестных систему можно свести к дифференциальному уравнению более высокого порядка с одной неизвестной функцией.

Пример 36. Решим систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$.

$\ddot{x}_1 = (\dot{x}_1)' = (2x_1 + x_2)' = 2\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2\dot{x}_1 + (3x_1 + 4x_2)$ (подставили из 2-го уравнения) $= 2\dot{x}_1 + 3x_1 + 4x_2$.

Из 1-го уравнения $x_2 = \dot{x}_1 - 2x_1$.

Тогда $\ddot{x}_1 = 2\dot{x}_1 + 3x_1 + 4x_2 = 2\dot{x}_1 + 3x_1 + 4(\dot{x}_1 - 2x_1) = 6\dot{x}_1 - 5x_1$, то есть $\ddot{x}_1 - 6\dot{x}_1 + 5x_1 = 0$.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (см. главу 15). Его решение $x_1 = C_1e^t + C_2e^{5t}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Отсюда $\dot{x}_1 = C_1e^t + 5C_2e^{5t}$.

Тогда $x_2 = \dot{x}_1 - 2x_1 = C_1e^t + 5C_2e^{5t} - 2(C_1e^t + C_2e^{5t}) = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$.

Ответ: $x_1 = C_1e^t + C_2e^{5t}$, $x_2 = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$.

В матричной форме $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Задача 36. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2 \end{cases}$.

§ 20.2. МЕТОД СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Найдем собственные значения $\lambda_1, ..., \lambda_n$ матрицы A. Для каждого собственного значения λ_i определим собственный вектор v_i.

Если для каждого собственного значения число собственных векторов равно кратности этого собственного значения, то общее решение системы дифференциальных уравнений задается формулой $C_1e^{\lambda_1 t}v_1 + ... + C_ne^{\lambda_n t}v_n$, где $C_1, ..., C_n$ — произвольные постоянные.

Пример 37. Решим методом собственных векторов систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y \\ \dot{y} = 5x + 2y \end{cases}$.

Найдем собственные векторы и собственные значения матрицы системы $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 4 \times 5 = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0.$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 7$. Найдем собственные векторы.

$\lambda_1 = -2$.

Тогда $\begin{pmatrix} 3-(-2) & 4 \\ 5 & 2-(-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$

$\to 5x + 4y = 0 \to \begin{cases} x = -0{,}8y \\ y \text{ — любое} \end{cases}$.

У нас одна свободная переменная y. Приравняем ее единице и найдем соответствующее значение главной переменной x: $\begin{cases} x = -0{,}8 \\ y = 1 \end{cases}$.

$v_1 = (-0{,}8;\ 1)$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$.

Пусть теперь $\lambda_2 = 7$.

Тогда $\begin{pmatrix} 3-7 & 4 \\ 5 & 2-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$

$\to x - y = 0 \to \begin{cases} x = y \\ y \text{ — любое} \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

$v_2 = (1;\ 1)$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 7$.

Общее решение системы дифференциальных уравнений задается формулой $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{7t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, то есть $\begin{cases} x = -0{,}8 C_1 e^{-2t} + C_2 e^{7t} \\ y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{7t} \end{cases}$

Задача 37. Решить методом собственных векторов систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$.

Если собственное значение $\lambda_j = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$ матрицы системы дифференциальных уравнений является комплексным числом, то в $e^{\lambda_j t} v_j$ нужно взять действительную и комплексную части.

Пример 38. Решим методом собственных векторов систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$.

Найдем собственные значения матрицы системы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Собственные значения: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Это комплексно сопряженные собственные значения: $\overline{2+i} = 2 - i$. Найдем собственный сектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 2 + i$.

$$\begin{pmatrix} 1-2-i & 1 \\ -2 & 3-2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$\rightarrow \begin{cases} (-1-i)x+y=0 \\ -2x+(1-i)y=0 \end{cases} \rightarrow (-1-i)x+y=0$ (второе уравнение получается из первого уравнения умножением обеих частей на $1-i$) $\rightarrow$ $\rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1+i \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

Тогда $e^{(2+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{2t}e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} =$

$= e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ (\cos t + i\sin t)(1+i) \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ \cos t - \sin t + i(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} =$

$= e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + ie^{2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}$ (мы воспользовались *формулой Эйлера* $e^{it} = \cos t + i\sin t$).

Отсюда $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Задача 38. Решить методом собственных векторов систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

Пусть для собственного значения λ кратности k число собственных векторов меньше k, а ранг матрицы $A - \lambda E$ (то есть число ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы) равен r.

Тогда степень многочлена равна $s = k + r - n$. Ищем решения в виде $x_1 = (at^s + \ldots)e^{\lambda t}, \ldots, x_k = (bt^s + \ldots)e^{\lambda t}$.

Пример 39. Решим методом собственных векторов систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases}$.

Найдем собственные значения матрицы системы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Здесь $n = 2$.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

то есть $\lambda_{1,2} = 3$. Кратность корня $\lambda_{1,2}$ равна $k = 2$.

Ранг матрицы $A - \lambda_{1,2}E$ равен

$$rk\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ -1 & 4-3 \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Тогда степень многочлена равна $s = k + r - n = 2 + 1 - 2 = 1$. Отсюда $x = (at + b)e^{3t}$, $y = (ct + d)e^{3t}$, $\dot{x} = (3at + 3b + a)e^{3t}$, $\dot{y} = (3ct + 3d + c)e^{3t}$.

Поэтому

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases} \to \begin{cases} (3at + 3b + a)e^{3t} = 2(at + b)e^{3t} + (ct + d)e^{3t} \\ (3ct + 3d + c)e^{3t} = -(at + b)e^{3t} + 4(ct + d)e^{3t} \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} 3at + 3b + a = (2a + c)t + 2b + d \\ 3ct + 3d + c = (4c - a)t + 4d - b \end{cases} \to \begin{cases} 3a = 2a + c \\ 3b + a = 2b + d \\ 3c = 4c - a \\ 3d + c = 4d - b \end{cases} \to \begin{cases} c = a \\ d = a + b \end{cases}.$$

Так как кратность $k = 2$, то в ответ входят две произвольные постоянные C_1 и C_2. Положим $a = C_1$, $b = C_2$.

Тогда $c = a = C_1$, $d = a + b = C_1 + C_2$.

Отсюда $x = (at + b)e^{3t} = (C_1 t + C_2)e^{3t}$, $y = (ct + d)e^{3t} = (C_1 t + C_1 + C_2)e^{3t}$.

Задача 39. Решить методом собственных векторов систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$.

Глава 21

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ ПРИВЕДЕННЫЕ К НОРМАЛЬНОМУ ВИДУ

Системы дифференциальных уравнений, не приведенные к нормальному виду, — это системы, не разрешенные относительно старших производных. Мы ограничимся рассмотрением систем вида

$$\begin{cases} a\ddot{x} + b\dot{x} + cx + d\ddot{y} + e\dot{y} + fy = 0 \\ g\ddot{x} + h\dot{x} + lx + p\ddot{y} + q\dot{y} + my = 0 \end{cases}.$$

Находим корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a\lambda^2 + b\lambda + c & d\lambda^2 + e\lambda + f \\ g\lambda^2 + h\lambda + l & p\lambda^2 + q\lambda + m \end{vmatrix} = 0.$$

После этого решение отыскивается тем же способом, что и для нормальной системы.

Пример 40. Решим систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \ddot{x} - x + 2\ddot{y} - 2y = 0 \\ \dot{x} - x + \dot{y} + y = 0 \end{cases}$.

Находим корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & 2\lambda^2 - 2 \\ \lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \to \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & 2(\lambda^2 - 1) \\ \lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \to$$

$$\to (\lambda^2 - 1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \to (\lambda^2 - 1)(\lambda + 1 - 2\lambda + 2) = 0 \to$$

$\to$ собственные значения $\lambda = 3$, $\lambda = -1$, $\lambda = 1$.

При $\lambda = 3$ получаем $\begin{pmatrix} 3^2 - 1 & 2 \times 3^2 - 2 \\ 3 - 1 & 3 + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$

$$\to \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} x = -2y \\ y \text{ — любое} \end{cases} \to \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \to \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = -1$ получаем $\begin{pmatrix} (-1)^2-1 & 2\times(-1)^2-2 \\ -1-1 & -1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \text{ — любое} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = 1$ получаем $\begin{pmatrix} 1^2-1 & 2\times 1^2-2 \\ 1-1 & 1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x \text{ — любое} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Задача 40. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \ddot{x} + x - 2\ddot{y} + \dot{y} - 3y = 0 \\ -2\ddot{x} - \dot{x} - 2x + 4\ddot{y} + 5y = 0 \end{cases}$.

Глава 22

ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дана линейная неоднородная система

$$\dot{X} = AX + F(t),$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$, A — матрица системы.

Сначала решаем линейную однородную систему $\dot{X} = AX$ (см. главу 20). Пусть $C_1X_1 + \dots + C_nX_n$ — общее решение линейной однородной системы.

Из $X_1, \dots, X_n$ составляем *матрицу Вронского* W, находим обратную матрицу W^{-1} и решаем систему $\dot{U} = W^{-1}F(t)$.

Тогда общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений равно $X = WU$.

Пример 41. Решим систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = -3x + 4y + e^{3t}/(e^{2t} + 1) \end{cases}$.

Здесь $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t}/(e^{2t} + 1) \end{pmatrix}$.

Однородная система $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = -3x + 4y \end{cases}$.

Используя материал главы 20, находим общее решение этой системы: $C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}$.

Тогда матрица Вронского равна $W = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & 3e^{2t} \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу W^{-1}.

Напомним, что обратная матрица для матрицы $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ вычисляется по формуле $B^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Тогда $W^{-1} = \dfrac{1}{e^t \times 3e^{2t} - 2e^{2t} \times e^t}\begin{pmatrix} 3e^{2t} & -2e^{2t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -2e^{-t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$.

Поэтому

$$\dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = W^{-1}F(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -2e^{-t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t}/(e^{2t}+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2e^{2t}}{e^{2t}+1} \\ \dfrac{e^t}{e^{2t}+1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\dot{u}_1 = \frac{-2e^{2t}}{e^{2t}+1} \to \frac{du_1}{dt} = \frac{-2e^{2t}}{e^{2t}+1} \to du_1 = \frac{-2e^{2t}}{e^{2t}+1}dt \to u_1 = \int\frac{-2e^{2t}}{e^{2t}+1}dt \to$$

$$\to u_1 = -\int\frac{d(e^{2t}+1)}{e^{2t}+1} \to u_1 = -\ln|e^{2t}+1| + C_1 \to u_1 = -\ln(e^{2t}+1) + C_1.$$

$$\dot{u}_2 = \frac{e^t}{e^{2t}+1} \to \frac{du_2}{dt} = \frac{e^t}{e^{2t}+1} \to du_2 = \frac{e^t}{e^{2t}+1}dt \to u_2 = \int\frac{e^t}{e^{2t}+1}dt \to$$

$$\to u_2 = \int\frac{de^t}{e^{2t}+1} \to u_2 = \operatorname{arctg} e^t + C_2.$$

Получаем, что $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 - \ln(e^{2t}+1) \\ \operatorname{arctg} e^t + C_2 \end{pmatrix}$.

Тогда $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = WU = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & 3e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 - \ln(e^{2t}+1) \\ \operatorname{arctg} e^t + C_2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} e^t(C_1 - \ln(e^{2t}+1)) + 2e^{2t}(\operatorname{arctg} e^t + C_2) \\ e^t(C_1 - \ln(e^{2t}+1)) + 3e^{2t}(\operatorname{arctg} e^t + C_2) \end{pmatrix}.$$

Задача 41. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t \end{cases}$.

Глава 23

УСТОЙЧИВОСТЬ

Дана система уравнений $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, ..., x_n)$, $i = 1, ..., n$. Пусть все функции f_i и частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ непрерывны при $t \geqslant t_0$.

Введем следующие обозначения: $x = (x_1, ..., x_n)$, $f(t, x) = (f_1(t, x), ..., f_n(t, x))$. Тогда исходную систему можно записать так: $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$.

Решение $x = \varphi(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ системы из условия $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ следует $|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$. Если же для некоторого $\varepsilon > 0$ такого $\delta > 0$ не существует, то решение $\varphi(t)$ называется *неустойчивым*.

Устойчивое по Ляпунову решение $\varphi(t)$ называется *асимптотически устойчивым*, если для любого решения $x(t)$ из условия $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ следует $x(t) - \varphi(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$, то есть все решения с достаточно близкими начальными условиями неограниченно приближаются к $\varphi(t)$ при $t \to +\infty$.

Наличие или отсутствие устойчивости не зависит от выбора t_0.

Вопрос об устойчивости решения $x = \varphi(t)$ сводится с помощью замены $y = x(t) - \varphi(t)$ к вопросу об устойчивости решения $y(t) \equiv 0$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать вопрос об устойчивости решения $x \equiv 0$.

§ 23.1. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Для исследования на устойчивость решения $x \equiv 0$ системы $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, ..., x_n)$ надо выделить в каждой функции f_i линейную часть (например, с помощью формулы Тейлора). Получим для нашей системы *первое приближение* $\frac{dx}{dt} = Ax$.

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

1) Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части (то есть все $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$), то решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

2) Если хоть одно собственное значение матрицы A имеет положительную действительную часть (есть $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$), то решение $x \equiv 0$ неустойчиво.

В случае $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$ теорема Ляпунова неприменима. Нужны дальнейшие исследования.

Пример 42. Дана система $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y \end{cases}$.

Исследуем на устойчивость нулевое решение этой системы с помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Выделим с помощью формулы Тейлора в функциях $e^{x+2y} - \cos 3x$ и $\sqrt{4+8x} - 2e^y$ линейную часть.

$e^{x+2y} - \cos 3x = 1 + x + 2y + O(x^2+y^2) - (1 + O(x^2)) = x + 2y + O(x^2+y^2)$.

$\sqrt{4+8x} - 2e^y = \sqrt{4(1+2x)} - 2(1 + y + O(y^2)) = 2\sqrt{1+2x} - 2(1 + y + O(y^2)) = 2(1 + \frac{1}{2} \times 2x + O(x^2)) - 2(1 + y + O(y^2)) = 2x - 2y + O(x^2+y^2)$.

Тогда $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y \end{cases} \to \begin{cases} \dot{x} = x + 2y + O(x^2+y^2) \\ \dot{y} = 2x - 2y + O(x^2+y^2) \end{cases}$.

В полученной системе матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные значения. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda + 6 = 0$.

Отсюда $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = 2$.

Так как $\lambda_2 = 2 > 0$, то решение $x = y = 0$ неустойчиво.

Задача 42. Дана система $\begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x) \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8+12y} \end{cases}$.

Исследовать на устойчивость нулевое решение этой системы с помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Пример 43. Дана система $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}) \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x} \end{cases}$.

Исследуем на устойчивость нулевое решение этой системы с помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Пусть $f_1(x, y) = \ln(4y + e^{-3x})$ и $f_2(x, y) = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}$. Найдем частные производные первого порядка функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ в точке $x = y = 0$.

$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\ln(4y + e^{-3x}) = \frac{-3e^{-3x}}{4y + e^{-3x}}$. Тогда $\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = \frac{-3e^{-3\times 0}}{4\times 0 + e^{-3\times 0}} = -3.$

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\ln(4y + e^{-3x}) = \frac{4}{4y + e^{-3x}}$. Тогда $\frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) = \frac{4}{4\times 0 + e^{-3\times 0}} = 4.$

$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}\right) = \frac{-2}{(1-6x)^{2/3}}$. Тогда $\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = \frac{-2}{(1-6\times 0)^{2/3}} =$ $= -2.$

$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}\right) = 2$, то есть $\frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0) = 2.$

Матрица $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные значения. $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 8 = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0.$

Отсюда $\lambda_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ и $\lambda_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$.

Так как действительные части собственных значений отрицательны ($\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = -1/2 < 0$), то решение $x = y = 0$ устойчиво.

Задача 43. Дана система $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x) \\ \dot{y} = 2^y - 2\cos(\pi/3 - x) \end{cases}$.

Исследовать на устойчивость нулевое решение этой системы с помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Пример 44. Для системы $\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y \end{cases}$ определим положения равновесия и исследуем их на устойчивость.

Приравняем правые части исходной системы нулю и решим полученную систему.

$$\begin{cases} y - x^2 - x = 0 \\ 3x - x^2 - y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y - x^2 - x = 0 \\ 2x - 2x^2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = x^2 + x \\ x(1-x) = 0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

У нас два положения равновесия: (0, 0) и (1, 2). Исследуем их на устойчивость.

Для положения равновесия (0, 0) первое приближение системы $\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y \end{cases}$ равно $\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = 3x - y \end{cases}$

Матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные значения.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 - 3 = \lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -1 - \sqrt{3}$ и $\lambda_2 = -1 + \sqrt{3}$.

Так как $\lambda_2 = -1 + \sqrt{3} > 0$, то положение равновесия $x = y = 0$ неустойчиво.

Теперь займемся положением равновесия (1, 2).

Пусть $f_1(x, y) = -x + y - x^2$ и $f_2(x, y) = 3x - y - x^2$. Найдем частные производные первого порядка функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ в точке (1, 2).

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x + y - x^2\right) = -1 - 2x. \text{ Тогда } \frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 2) = -1 - 2 \times 1 = -3.$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-x + y - x^2\right) = 1, \text{ то есть } \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, 2) = 1.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x - y - x^2\right) = 3 - 2x. \text{ Тогда } \frac{\partial f_2}{\partial x}(1, 2) = 3 - 2 \times 1 = 1.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x - y - x^2\right) = -1, \text{ то есть } \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 2) = -1.$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(1, 2)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(1, 2)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(1, 2)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(1, 2)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные значения.

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -2 - \sqrt{2} < 0$ и $\lambda_1 = -2 + \sqrt{2} < 0$.

Так как найденные собственные значения отрицательны, то положение равновесия (1, 2) устойчиво.

Задача 44. Для системы $\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$ определить положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

Глава 24

ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Особой точкой системы $\begin{cases} dx/dt = P(x, y) \\ dy/dt = Q(x, y) \end{cases}$ или уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Q(x, y)}{P(x, y)}$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — непрерывно дифференцируемые функции, называется точка, в которой $P(x, y) = Q(x, y) = 0$.

Для исследования особой точки системы $\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$ или уравнения $y' = \dfrac{cx + dy}{ax + by}$ находят собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

§ 24.1. УЗЕЛ

Если собственные значения матрицы A действительные и одного знака, то особая точка — *узел*.

Пример 45. Исследуем особую точку $x = y = 0$ системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases}$.

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные значения. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$

Отсюда $\lambda_1 = 1 > 0$ и $\lambda_2 = 5 > 0$.

Так как собственные значения матрицы A действительные и одного знака, то особая точка $(0, 0)$ является узлом. Посмотрим, как расположены интегральные кривые вблизи точки $(0, 0)$.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 5$.

Если $\lambda = 1$, то $\begin{pmatrix} 2-1 & 3 \\ 1 & 4-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\to x + 3y = 0 \to \begin{cases} x = -3y \\ y \text{ — любое} \end{cases} \to \begin{cases} x = -3 \times 1 = -3 \\ y = 1 \end{cases}.$

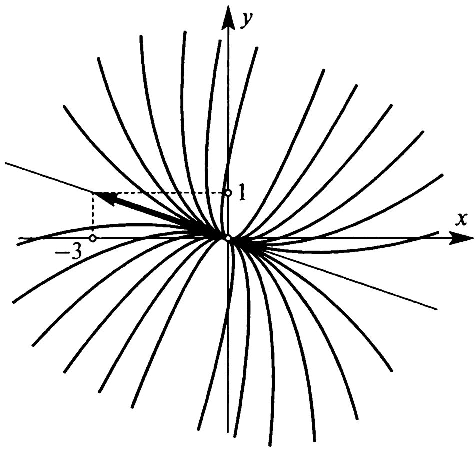
Собственный вектор $(-3,\ 1)$ соответствует собственному значению $\lambda_1 = 1$.

Если $\lambda = 5$, то $\begin{pmatrix} 2-5 & 3 \\ 1 & 4-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\to x - y = 0 \to \begin{cases} x = y \\ y \text{ — любое} \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$

Собственный вектор $(1,\ 1)$ соответствует собственному значению $\lambda_2 = 5$.

Интегральные кривые будут касаться прямой с направляющим вектором $(-3,\ 1)$, который соответствует меньшему по модулю собственному значению $\lambda_1 = 1$.



Задача 45. Исследовать особую точку $x = y = 0$ системы $\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}.$

§ 24.2. СЕДЛО

Если собственные значения матрицы A действительные и разных знаков, то особая точка — *седло*.

Пример 46. Исследуем особую точку $x = y = 0$ системы $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$.

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные значения. $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0.$

Отсюда $\lambda_1 = -1 < 0$ и $\lambda_2 = 5 > 0$.

Так как собственные значения матрицы A действительные и разных знаков, то особая точка (0, 0) является седлом. Посмотрим, как расположены интегральные кривые вблизи точки (0, 0).

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 5$.

Если $\lambda_1 = -1$, то $\begin{pmatrix} 3-(-1) & 4 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x + y = 0 \to \begin{cases} x = -y \\ y \text{ — любое} \end{cases} \to \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$.

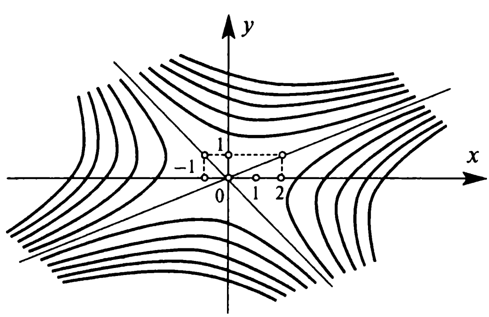
Собственный вектор (–1, 1) соответствует собственному значению $\lambda_1 = -1$.

Если $\lambda_2 = 5$, то $\begin{pmatrix} 3-5 & 4 \\ 2 & 1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\to x - 2y = 0 \to \begin{cases} x = 2y \\ y \text{ — любое} \end{cases} \to \begin{cases} x = 2 \times 1 = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Собственный вектор (2, 1) соответствует собственному значению $\lambda_2 = 5$.

Изобразим прямые с направляющими векторами (–1, 1) и (2, 1). Расположение интегральных кривых вблизи седла (0, 0) будет следующим.



Задача 46. Исследовать особую точку $x = y = 0$ системы $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$.

§ 24.3. ФОКУС

Если собственные значения матрицы A комплексные с отличной от нуля действительной частью, то особая точка — *фокус*.

Пример 47. Исследуем особую точку $x = y = 0$ системы $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$.

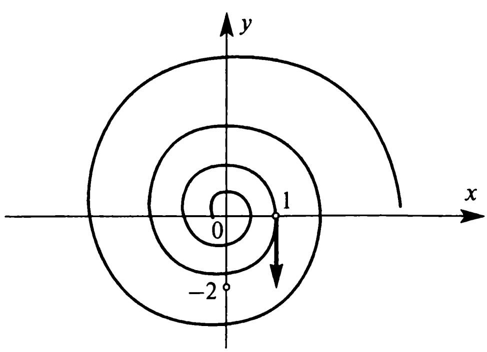
Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные значения. $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$

Отсюда $\lambda_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{7}}{2}$ и $\lambda_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2}$. Действительные части собственных значений отличны от нуля: $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2 = 1/2 \neq 0$.

Так как собственные значения матрицы A комплексные с отличной от нуля действительной частью, то особая точка (0, 0) является фокусом. Посмотрим, как расположены интегральные кривые вблизи точки (0, 0).

Так как $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2 = 1/2 > 0$, то фокус (0, 0) будет неустойчивым. Поэтому при возрастании t решения неограниченно удаляются от особой точки (0, 0).

При $x = 1$, $y = 0$ получаем, что $\begin{cases} \dot{x} = y = 0 \\ \dot{y} = y - 2x = 0 - 2 \times 1 = -2 \end{cases}$.



Вектор скорости (0, –2) в точке (1, 0) говорит о том, что возрастанию t соответствует движение по часовой стрелке.

Задача 47. Исследовать особую точку $x = y = 0$ системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -6x - 5y \end{cases}$.

§ 24.4. ЦЕНТР

Если собственные значения матрицы A чисто мнимые, то особая точка — *центр*.

Пример 48. Исследуем особую точку $x = y = 0$ системы $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$.

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные значения. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1 = 0.$

Отсюда $\lambda = \pm i$.

Так как собственные значения матрицы A чисто мнимые, то особая точка (0, 0) является центром.

Посмотрим, как расположены интегральные кривые вблизи точки (0, 0).

Интегральными кривыми будут эллипсы. Так как в вершинах эллипса векторы (x, y) (из начала координат в вершину (x, y) эллипса) и $(\dot{x}, \dot{y})$ (вектор скорости в вершине (x, y)) ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю.

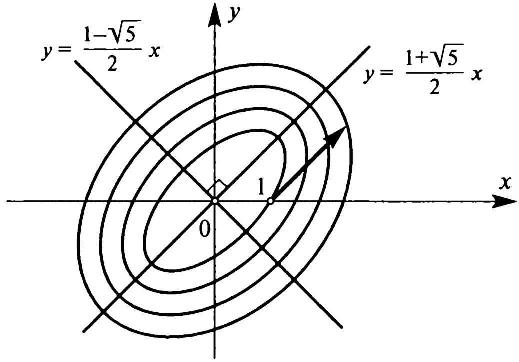
Тогда $x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \to x(x - y) + y(2x - y) = 0 \to x^2 + xy - y^2 = 0 \to$ $y^2 - xy - x^2 = 0$. Это квадратное относительно у уравнение.

Дискриминант $D = (-x)^2 + 4x^2 = 5x^2$. Тогда $y = \dfrac{x \pm x\sqrt{5}}{2}$. Оси эллипса расположены на прямых $y = \dfrac{x(1-\sqrt{5})}{2}$ и $y = \dfrac{x(1+\sqrt{5})}{2}$.

При $x = 1, y = 0$ получаем, что $\begin{cases} \dot{x} = x - y = 1 - 0 = 1 \\ \dot{y} = 2x - y = 2 \times 1 - 0 = 2 \end{cases}$.

В точке (1, 0) вектор скорости равен (1, 2).

Мы видим, что решение $x = y = 0$ устойчиво, но не асимптотически устойчиво, так как при $t \to 0$ решения не стремятся к 0.



Задача 48. Исследовать особую точку $x = y = 0$ системы $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$.

§ 24.5. ВЫРОЖДЕННЫЙ И ДИКРИТИЧЕСКИЙ УЗЛЫ

Если собственные значения матрицы A равны и отличны от нуля, то особая точка может быть вырожденным узлом либо дикритическим узлом.

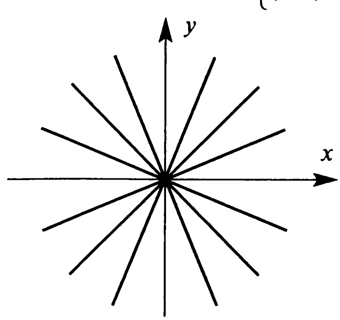
Дикритический узел имеет место только в случае системы вида $\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = ay \end{cases}$. Во всех других случаях при $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ особая точка будет *вырожденным узлом.*

Пример 49. Исследуем особую точку $x = y = 0$ системы $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$.

Это система вида $\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = ay \end{cases}$ при $a = 1$.

Поэтому особая точка (0, 0) является дикритическим узлом.

В этом случае каждый вектор является собственным для матрицы системы. Поэтому по любому направлению в начало координат входит прямая.



Задача 49. Исследовать особую точку $x = y = 0$ системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}.$$

Пример 50. Исследуем особую точку $x = y = 0$ системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}.$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные значения. $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(1-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$

Отсюда $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \neq 0.$

Так как собственные значения матрицы A равны и отличны от нуля, а исходная система отлична от системы вида $\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = ay \end{cases}$, то особая точка (0, 0) является вырожденным узлом. Посмотрим, как расположены интегральные кривые вблизи точки (0, 0).

Найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = -1$.

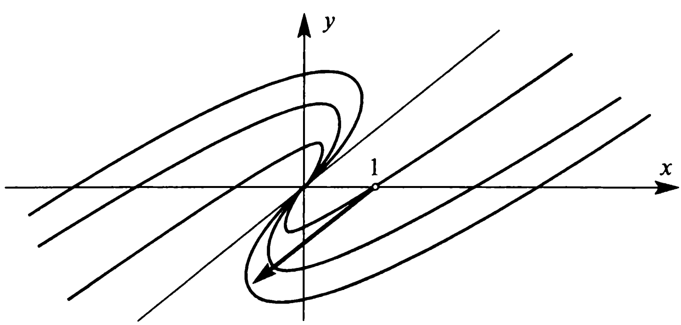
$$\begin{pmatrix} -3-(-1) & 2 \\ -2 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to x - y = 0 \to \begin{cases} x = y \\ y \text{ — любое} \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Собственный вектор (1, 1) соответствует собственному значению $\lambda = -1$. Изобразим прямую с направляющим вектором (1, 1).

При $x = 1$, $y = 0$ получаем, что $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x = 2 \times 0 - 3 \times 1 = -3 \\ \dot{y} = y - 2x = 0 - 2 \times 1 = -2 \end{cases}.$

В точке (1, 0) вектор скорости равен (–3, –2).



Задача 50. Исследовать особую точку $x=y=0$ системы $\begin{cases} \dot{x}=2x-y \\ \dot{y}=x \end{cases}$.

Если хотя бы одно собственное значение равно нулю, то получаем параллельные прямые.

§ 24.6. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

При исследовании особой точки системы $\begin{cases} dx/dt=P(x,y) \\ dy/dt=Q(x,y) \end{cases}$ надо перенести начало координат в исследуемую точку и разложить функции P и Q в окрестности этой точки в ряд Тейлора, ограничившись членами первого порядка.

Если $\begin{cases} \dot{x}=ax+by+\varphi(x,y) \\ \dot{y}=cx+dy+\psi(x,y) \end{cases}$, где функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируемы и $\varphi(x,y)=O(x^2+y^2)$, $\psi(x,y)=O(x^2+y^2)$, то в случае, когда действительная часть собственных значений матрицы $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ отлична от нуля, функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ можно отбросить при исследовании особой точки.

В случае чисто мнимых собственных значений особая точка будет центром при наличии оси симметрии у интегральных кривых (то есть уравнение $y'=\dfrac{cx+dy+\psi(x,y)}{ax+by+\varphi(x,y)}$ не меняется при замене x на $-x$ или y на $-y$) и фокусом при отсутствии оси симметрии у интегральных кривых.

Пример 51. Определим особые точки уравнения $\ddot{x}+\dot{x}^2-x^2+1=0$. Сделаем замену $y=\dot{x}$. Тогда $\dot{y}=\ddot{x}=-\dot{x}^2+x^2-1=-y^2+x^2-1$.

Получаем систему $\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-y^2+x^2-1 \end{cases}$. Приравняем нулю правые части системы: $\begin{cases} y=0 \\ -y^2+x^2-1=0 \end{cases} \to \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$.

У нас две особые точки: $(1, 0)$ и $(-1, 0)$.

Исследуем точку $(1, 0)$.

Сделаем замену $\begin{cases} x = x_1 + 1 \\ y = y_1 \end{cases}$. Тогда система $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y^2 + x^2 - 1 \end{cases}$ примет вид $\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -y_1^2 + (x_1 + 1)^2 - 1 \end{cases} \to \begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = 2x_1 - y_1^2 + x_1^2 \end{cases}$.

Перейдем к системе $\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = 2x_1 \end{cases}$.

Матрица этой системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные значения. $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0$. Отсюда $\lambda = \pm\sqrt{2}$.

Так как собственные значения матрицы A действительные и разных знаков, то особая точка $(1, 0)$ является седлом.

Исследуем точку $(-1, 0)$.

Сделаем замену $\begin{cases} x = x_1 - 1 \\ y = y_1 \end{cases}$. Тогда система $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y^2 + x^2 - 1 \end{cases}$ примет вид $\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -y_1^2 + (x_1 - 1)^2 - 1 \end{cases} \to \begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -2x_1 - y_1^2 + x_1^2 \end{cases}$.

Перейдем к системе $\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -2x_1 \end{cases}$.

Матрица этой системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные значения. $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2 = 0$. Отсюда $\lambda = \pm i\sqrt{2}$.

Так как собственные значения матрицы A чисто мнимые, то особая точка $(-1, 0)$ будет либо центром, либо фокусом.

Из первоначальной системы $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y^2 + x^2 - 1 \end{cases}$ получим уравнение $y' = \dfrac{-y^2 + x^2 + 1}{y}$. Мы видим, что это уравнение не меняется при замене y на $-y$.

Действительно, $(-y)' = \dfrac{-(-y)^2 + x^2 + 1}{-y} \to -y' = \dfrac{-(-y^2 + x^2 + 1)}{y} \to$ $y' = \dfrac{-y^2 + x^2 + 1}{y}$. Это говорит о том, что интегральные кривые симметричны относительно оси Ox. Поэтому особая точка $(-1, 0)$ является центром.

Пример 51. Определить особые точки уравнения $\ddot{x} - 2x + 2x^3 = 0$.

Глава 25

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Получить точное решение нелинейной системы дифференциальных уравнений удается крайне редко. Можно попытаться с помощью исключения неизвестных свести нелинейную систему к дифференциальному уравнению более высокого порядка и постараться понизить порядок полученного дифференциального уравнения. А можно исхитриться и найти интегрируемые комбинации.

§ 25.1. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Первым интегралом системы $\dot{x}_i = f_i(t, x_1, ..., x_n)$, $i = 1, ..., n$, называется непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(t, x_1, ..., x_n)$, полная производная которой в силу системы равна нулю:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\dot{x}_1 + ... + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\dot{x}_n = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}f_1 + ... + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}f_n \equiv 0.$$

Очень часто первым интегралом называют не функцию $\varphi(t, x_1, ..., x_n)$, а соотношение $\varphi(t, x_1, ..., x_n) = C$, где C — произвольная постоянная.

Пример 52. Выясним, являются ли функции $\varphi_1 = t^2 + 2xy$ и $\varphi_2 = x^2 - ty$ первыми интегралами системы $\begin{cases} \dot{x} = (x^2 - t)/y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$.

Полная производная функции φ_1 в силу системы равна $\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} +$ $+ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial}{\partial t}(t^2 + 2xy) + \frac{x^2 - t}{y}\frac{\partial}{\partial x}(t^2 + 2xy) + (-x)\frac{\partial}{\partial y}(t^2 + 2xy) =$ $= 2t + \frac{2y(x^2 - t)}{y} + 2x(-x) \equiv 0$. Поэтому функция $\varphi_1 = t^2 + 2xy$ является первым интегралом системы $\begin{cases} \dot{x} = (x^2 - t)/y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$.

Полная производная функции φ_2 в силу системы равна $\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} +$
$+ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial}{\partial t}(x^2 - ty) + \frac{x^2 - t}{y}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - ty) + (-x)\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - ty) =$
$= -y + 2x(x^2 - ty)/y + (-x)(-t)$. Полученное выражение не равно тождественно нулю. Поэтому функция $\varphi_2 = x^2 - ty$ не является первым интегралом системы $\begin{cases} \dot{x} = (x^2 - t)/y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$.

Задача 52. Выяснить, являются ли функции $\varphi_1 = x\ln y - x^2y$ и $\varphi_2 = y^2/x^2 - 2\ln x$ первыми интегралами системы $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = x^2 + y^2 \end{cases}$.

§ 25.2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КОМБИНАЦИИ

Для нахождения интегрируемых комбинаций надо записать систему в *симметричной форме*

$$\frac{dx}{a_1(x, y, z)} = \frac{dy}{a_2(x, y, z)} = \frac{dz}{a_3(x, y, z)}.$$

Взяв любую из переменных x, y, z в качестве независимой переменной (например, x при отличной от нуля функции a_1), получим обычную систему $\begin{cases} dy/dx = a_2/a_1 \\ dz/dx = a_3/a_1 \end{cases}$.

Интегрируемая комбинация — это равенство, в обеих частях которого находятся полные дифференциалы. Для решения системы нужно найти столько независимых интегрируемых комбинаций, сколько уравнений в системе.

При нахождении интегрируемых комбинаций весьма полезно следующее свойство.

Если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1a_1 + \ldots + k_na_n}{k_1b_1 + \ldots + k_nb_n}$.

Пример 53. Решим систему $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$.

$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \to xdx = ydy \to d(x^2) = d(y^2) \to x^2 = y^2 + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная.

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z} \to \frac{dx + dy}{y + x} = \frac{dz}{z} \to \frac{d(x + y)}{y + x} = \frac{dz}{z} \to$$

$$\to \ln|x + y| = \ln|z| + \ln C_2 \to x + y = C_2 z,$$

где C_2 — произвольная постоянная.

В выражение $x^2 = y^2 + C_1$ не входит переменная z.
Выражение $x + y = C_2 z$ содержит переменную z.
Поэтому $x^2 = y^2 + C_1$ и $x + y = C_2 z$ независимы.

Задача 53. Решить систему $\dfrac{dx}{y + z} = \dfrac{dy}{x + z} = \dfrac{dz}{x + y}$.

Глава 26

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для решения уравнений в частных производных вида

$$a_1(x_1, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + ... + a_n(x_1, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = b(x_1, ..., x_n, z)$$

нужно найти n независимых первых интегралов $\varphi_1, ..., \varphi_n$ системы

$$\frac{dx_1}{a_1} = ... = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b}.$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$F(\varphi_1, ..., \varphi_n) = 0,$$

где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

В частности, если z входит только в один из первых интегралов (например, только в φ_n), то общее решение исходного уравнения можно записать в следующем виде: $\varphi_n = f(\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}) = 0$, где f — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Пример 54. Найдем общее решение уравнения

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

Так как $n = 2$ (две независимых переменных), то для решения уравнения $xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz$ нужно найти два независимых первых интеграла системы $\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2} = \frac{dz}{yz}$.

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2} \to xdx = -ydy \to xdx + ydy = 0 \to d(x^2 + y^2) = 0 \to$$

$\to x^2 + y^2 = C_1$. Один первый интеграл найден.

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dz}{yz} \to \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \to d\ln|x| = d\ln|z| \to \ln|x| + \ln C_2 = \ln|z| \to$$

$\to z = C_2 x \to z/x = C_2$. Найден еще один первый интеграл.

Полученные первые интегралы независимы, так как один из них не содержит переменной y, а в другой первый интеграл переменная y входит.

Тогда общее решение исходного уравнения задается равенством $F(x^2 + y^2, z/x)$, где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Задача 54. Найти общее решение уравнения

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$$

Чтобы найти поверхность $z = z(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $a_1(x, y, z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z)$ и проходящую через данную линию $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, нужно найти два независимых первых интеграла $\varphi_1(x, y, z) = C_1$ и $\varphi_2(x, y, z) = C_2$ системы $\dfrac{dx}{a_1} = \dfrac{dy}{a_2} = \dfrac{dz}{b}$.

Подставив в первые интегралы выражения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, получим систему $\begin{cases} \Phi_1(t) = C_1 \\ \Phi_2(t) = C_2 \end{cases}$. Исключив в этой системе параметр t, придем к соотношению $F(C_1, C_2) = 0$. Но $\varphi_1(x, y, z) = C_1$ и $\varphi_2(x, y, z) = C_2$. Поэтому $F(\varphi_1, \varphi_2) = 0$.

Пример 55. Найдем поверхность $z = z(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$ и проходящую через линию $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$.

Нужно найти два независимых первых интеграла системы $\dfrac{dx}{y^2} = \dfrac{dy}{xy} = \dfrac{dz}{x}$.

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} \to \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \to x\,dx = y\,dy \to x^2 = y^2 + C_1 \to x^2 - y^2 = C_1.$$

Один первый интеграл найден.

$$\frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x} \to \frac{dy}{y} = dz \to d\ln|y| = dz \to \ln|y| = z + C_2 \to \ln|y| - z = C_2.$$

Найден еще один первый интеграл.

Полученные первые интегралы независимы, так как один из них не содержит переменной x, а в другой первый интеграл переменная x входит.

Получена система $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ \ln|y| - z = C_2 \end{cases}$. Но поверхность проходит через линию $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ \ln|y| - z = C_2 \end{cases} \to \begin{cases} 0^2 - y^2 = C_1 \\ \ln|y| - y^2 = C_2 \end{cases} \to \begin{cases} |y| = \sqrt{-C_1} \\ \ln\sqrt{-C_1} + C_1 = C_2 \end{cases} \to$

$\ln\sqrt{-C_1} + C_1 = C_2 \to \ln\sqrt{-(x^2 - y^2)} + x^2 - y^2 = \ln|y| - z \to \ln\sqrt{y^2 - x^2} +$
$+ x^2 - y^2 = \ln|y| - z.$

Задача 55. Найти поверхность $z = z(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$ и проходящую через линию $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - yz = 1 \end{cases}$.

Глава 27

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Дана система дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x, \mu)$, $x(t_0) = a(\mu)$.

Если существуют непрерывные производные функции f по x и μ, то существует производная $\dfrac{\partial x}{\partial \mu} = u$ и $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}u + \dfrac{\partial f}{\partial \mu}$, $u(t_0) = a'(\mu)$.

При дифференцировании по начальным данным начальные условия берем за параметр.

Пример 56. Пусть $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} + \mu t e^{-x}$, $x(1) = 1$. Найдем $\dfrac{\partial x}{\partial \mu}$ при $\mu = 0$.

Здесь $f(t, x, \mu) = \dfrac{x}{t} + \mu t e^{-x}$, $t_0 = 1$, $a(\mu) = 1$.

Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{x}{t} + \mu t e^{-x}) = \dfrac{1}{t} - \mu t e^{-x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \mu} = \dfrac{\partial}{\partial \mu}(\dfrac{x}{t} + \mu t e^{-x}) = t e^{-x}$, $a'(\mu) = 1' = 0$.

Положим $u = \dfrac{\partial x}{\partial \mu}$. Тогда $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}u + \dfrac{\partial f}{\partial \mu}$, $u(t_0) = a'(\mu) \to$

$$\to \frac{du}{dt} = (\frac{1}{t} - \mu t e^{-x})u + t e^{-x},\ u(1) = 0.$$

Если $\mu = 0$, то $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} + \mu t e^{-x}$, $x(1) = 1 \to \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} + 0 t e^{-x}$,

$x(1) = 1 \to \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t}$, $x(1) = 1$ и $\dfrac{du}{dt} = (\dfrac{1}{t} - \mu t e^{-x})u + t e^{-x}$,

$u(1) = 0 \to \dfrac{du}{dt} = (\dfrac{1}{t} - 0 t e^{-x})u + t e^{-x}$, $u(1) = 0 \to \dfrac{du}{dt} = \dfrac{u}{t} + t e^{-x}$, $u(1) = 0$.

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} \to \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dt}{t} \to d\ln|x| = d\ln|t| \to \ln|x| = \ln|t| + \ln C \to$ $x = Ct$.

$$x(1) = 1 \to C \times 1 = 1 \to C = 1 \to x = t \to \frac{du}{dt} = \frac{u}{t} + te^{-t},\ u(1) = 0.$$

Это линейное уравнение первого порядка. Применим метод вариации постоянной.

$$\frac{du}{dt} = \frac{u}{t} \to u = Ct \to u = C(t)t.$$

Отсюда $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{u}{t} + te^{-t} \to C'(t)t + C(t) = C(t) + te^{-t} \to C'(t) = e^{-t} \to$
$\to C(t) = C_1 - e^{-t} \to u = (C_1 - te^{-t})t.$

Но $u(1) = 0 \to (C_1 - e^{-1}) \times 1 = 0 \to C_1 = e^{-1} \to u = (e^{-1} - e^{-t})t = \dfrac{\partial x}{\partial \mu}.$

Задача 56. Пусть $\dfrac{dx}{dt} = x + \mu(t + x^2)$, $x(0) = 1$. Найти $\dfrac{\partial x}{\partial \mu}$ при $\mu = 0$.

Глава 28

РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПО СТЕПЕНЯМ ПАРАМЕТРА

Дана система дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt}=f(t, x, \mu), x(t_0) = a(\mu)$.

Если функции f, a и их частные производные по искомой функции x и параметру μ до порядка p включительно непрерывны, то решение x также имеет непрерывные производные до порядка p включительно и разлагается в ряд по степеням параметра μ:

$$x = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots + \mu^p x_p(t) + o(\mu^p).$$

Для нахождения этого разложения подставим в исходные уравнения и начальные данные это выражение. Разложим все функции по степеням параметра μ. Получим систему уравнений, из которых последовательно находим $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Пример 57. Разложим решение уравнения $y' = 4\mu x - y^2$, $y(1) = 1$ до второй степени параметра μ.

$y = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \ldots$, $y' = y_0' + \mu y_1' + \mu^2 y_2' + \ldots$

Тогда $y' = 4\mu x - y^2 \to y_0' + \mu y_1' + \mu^2 y_2' + \ldots = 4\mu x - (y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \ldots)^2 \to y_0' + \mu y_1' + \mu^2 y_2' + \ldots = 4\mu x - y_0^2 - y_1^2\mu^2 - 2y_0 y_1 \mu - 2y_0 y_2 \mu^2 - \ldots$

Приравняем слагаемые при соответствующих степенях μ.

Тогда $y_0' = -y_0^2$, $y_1' = 4x - 2y_0 y_1$, $y_2' = -y_1^2 - 2y_0 y_2$ при начальных условиях $y_0(1) = 1$, $y_1(1) = 0$, $y_2(1) = 0$.

$$y_0' = -y_0^2 \to \frac{dy_0}{dx} = -y_0^2 \to \frac{-dy_0}{y_0^2} = dx \to d\left(\frac{1}{y_0}\right) = dx \to \frac{1}{y_0} = x + C.$$

$$y_0(1) = 1 \to 1/1 = 1 + C \to C = 0 \to \frac{1}{y_0} = x \to y_0 = \frac{1}{x}.$$

Отсюда $y_1' = 4x - 2y_0 y_1 \to y_1' = 4x - \frac{2y_1}{x}$. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Применим метод вариации постоянной.

Тогда $y_1' = -\dfrac{2y_1}{x} \to \dfrac{dy_1}{dx} = -\dfrac{2y_1}{x} \to \dfrac{dy_1}{y_1} = -\dfrac{2dx}{x} \to \dfrac{dy_1}{y_1} + \dfrac{2dx}{x} = 0 \to$

$$\to d\ln|y_1| + 2d\ln|x| = 0 \to \ln|y_1| + 2\ln|x| = \ln C_1 \to y_1x^2 = \pm C_1.$$

Положим $C = \pm C_1$. Отсюда $y_1x^2 = C \to y_1 = \dfrac{C}{x^2} \to y_1 = \dfrac{C(x)}{x^2}$.

Тогда $y_1' = 4x - \dfrac{2y_1}{x} \to \dfrac{C'(x)x^2 - 2xC(x)}{x^4} = 4x - \dfrac{2C(x)}{x^3} \to C'(x) = 4x^3$

$\to C(x) = x^4 + C_2 \to y_1 = \dfrac{x^4 + C_2}{x^2}$.

Но $y_1(1) = 0 \to \dfrac{1^4 + C_2}{1^2} = 0 \to C_2 = -1 \to y_1 = \dfrac{x^4 - 1}{x^2} = x^2 - x^{-2}$.

Отсюда $y_2' = -y_1^2 - 2y_0y_2 \to y_2' = -(x^2 - x^{-2})^2 - \dfrac{2y_2}{x}$. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Применим метод вариации постоянной.

Тогда $y_2' = -\dfrac{2y_2}{x} \to y_2 = \dfrac{C(x)}{x^2}$.

Отсюда $y_2' = -(x^2 - x^{-2})^2 - \dfrac{2y_2}{x} \to \dfrac{C'(x)x^2 - 2xC(x)}{x^4} = -(x^2 - x^{-2})^2 -$

$- \dfrac{2C(x)}{x^3} \to C'(x) = -x^6 + 2x^2 - x^{-2} \to C(x) = -x^7/7 + 2x^3/3 + 1/x + C_2 \to$

$\to y_2 = (-x^7/7 + 2x^3/3 + 1/x + C_2)/x^2 \to y_2 = -x^5/7 + 2x/3 + 1/x^3 + C_2/x^2$.

Но $y_2(1) = 0 \to -1^5/7 + 2 \times 1/3 + 1/1^3 + C_2/1^2 = 0 \to C_2 = -32/21 \to$

$\to y_2 = -x^5/7 + 2x/3 + 1/x^3 - \dfrac{32}{12x^2}$.

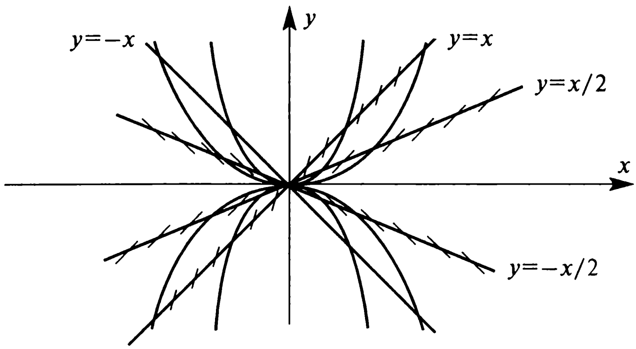
Тогда $y = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + o(\mu^2) =$

$$= 1/x + (x^2 - x^{-2})\mu + (-x^5/7 + 2x/3 + 1/x^3 - \frac{32}{12x^2})\mu^2 + o(\mu^2).$$

Задача 57. Разложить решение уравнения $y' = 6\mu/x - y^2$, $y(1) = 1 + 3\mu$ до второй степени параметра μ.

Ответы

2.



3. $y' = \dfrac{y\ln y}{x}$.

4. $\sqrt{y^2+1} + C = \ln|x|$; $x = 0$.

5. $e^{-y} = 1 + Ce^x$.

6. $2x + y - 1 = Ce^x$.

7. $y = \pm x$; $\arcsin\dfrac{y}{x} = \ln x + C$.

8. Однородное первого порядка.

9. Замена $x_1 = x - 4$, $y_1 = y + 1$.

10. $z = x - y - 1$.

11. $y = 1/z^2$ и $2z^3 + (x^3 + xz^2)z' = 0$.

12. $\sin x + C\cos x$.

13. $x = e^y + Ce^{-y}$.

14. Замена $z = y^3$.

15. $x^3(1 + \ln y) - y^2 = C$.

16. $2x + \ln(x^2 + y^2) = C$.

17. $y(x_0) = y_0$, $x_0 \neq 0$, $|y_0| > |x_0|$.

18. $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $x_0 \neq -1$, $y_0 > 0$, y_0' любое.

19. $y = 0$; $\begin{cases} x = 2p - 3p^2 + C_1 \\ y = p^2 - 2p^3 \end{cases}$.

20. $y = Cx - C - 2$.

21. $y = 0$; $\begin{cases} x\sqrt{p} = \ln p + C \\ y = \sqrt{p}\,(4 - \ln p - C) \end{cases}$.

22. $(z')^2 + xz' = 2z$, $z = y'$.

23. $yp' - 2y\ln y = p$ (линейное относительно p), $p = y'$.

24. $xz' + z = -x^2z^2$ (уравнение Бернулли), $y' = yz$; $y = 0$.

25. $z'' = 6z^2$, $x = e^t$, $y = ze^{2t}$.

26. $y' + 1 = Cy$.

27. $C_1e^x + C_2e^{-3x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

28. $(C_1 + C_2x)e^{3x}$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

29. $C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

30. $C_4e^x + C_3e^{-x} + (x - 1/2)e^x$, где C_3 и C_4 — произвольные постоянные.

31. $x^2(Ax + B)e^x$.

32. $(Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x$.

33. $C_1x^2 + C_2x^3$.

34. $C_1e^x + C(3x + 1)e^{-x}$.

35. $C_1(x-3)+C_2/(x+1)$.

36. $x_1 = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$, $x_2 = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

37. $C_1e^t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + C_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

38. $C_1\begin{pmatrix}-\cos 2t - 2\sin 2t\\ \cos 2t\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}2\cos 2t - \sin 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix}$.

39. $x = (C_1 + C_2t)e^t$, $y = (2C_1 - C_2 + 2C_2t)e^t$.

40. $Ce^{-t}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

41. $\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\sin t + C_1\\ 1/\cos t + \cos t + C_2\end{pmatrix}$.

42. Неустойчиво.

43. Устойчиво.

44. (1, 2) и (2, 1) неустойчивы.

45. Узел.

46. Седло.

47. Фокус.

48. Центр.

49. Дикритический узел.

50. Вырожденный узел.

51. Седло (0, 0), центры (1,0) и (–1,0).

52. Да; нет.

53. $x - y = C_1(y - z)$, $(x + y + z)(x - y)^2 = C_2$.

54. $F(x^2 - y^2, x - y + z) = 0$.

55. $(1 + yz)^3 = 3yz(1 + yz - x) + y^3$.

56. $e^t - t - 1$.

57. $\frac{1}{x} + 3\mu + (\frac{3}{x^2} - 3x)\mu^2 + o(\mu^2)$.

Программа учебного курса «Дифференциальные уравнения»

1. Основные сведения о дифференциальных уравнениях. Дифференциальное уравнение. Обыкновенное дифференциальное уравнение. Дифференциальное уравнение с частными производными. Порядок дифференциального уравнения. Решение дифференциального уравнения. Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка.

2. Метод изоклин. Поле направлений. Интегральная кривая. Изоклина.

3. Составление дифференциального уравнения данного семейства кривых.

4. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

5. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.

6. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Функция, однородная степени p.

7. Уравнения, приводящиеся к однородным. Уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$. Что делать в случае, когда система линейных уравнений $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ несовместна?

8. Уравнения, приводящиеся к однородным. Замена $y = z^m$. Всегда ли применима такая замена?

9. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод вариации постоянной.

10. Линейные относительно переменной x дифференциальные уравнения первого порядка.

11. Уравнение Бернулли. Сведение уравнения Бернулли к линейному дифференциальному уравнению первого порядка.

12. Уравнение в полных дифференциалах.

13. Решение дифференциальных уравнений с помощью нахождения интегрирующего множителя. Какие специальные рецепты нахождения интегрирующего множителя известны? Правила действия с дифференциалами.

14. Существование и единственность решения для дифференциального уравнения первого порядка.

15. Существование и единственность решения для дифференциального уравнения порядка n.

16. Метод введения параметра. К каким дифференциальным уравнениям применяется метод введения параметра?

17. Уравнение Клеро.

18. Уравнение Лагранжа.

19. Понижение порядка дифференциального уравнения. Понижение порядка дифференциального уравнения, которое не содержит искомой функции.

20. Понижение порядка дифференциального уравнения, которое не содержит независимой переменной.

21. Понижение порядка дифференциального уравнения, однородного относительно искомой функции и ее производных. Как определяется однородность дифференциального уравнения относительно искомой функции и ее производных?

22. Понижение порядка дифференциального уравнения, однородного относительно некоторых степеней независимой переменной и искомой функции. Как определяется однородность дифференциального уравнения относительно некоторых степеней независимой переменной и искомой функции?

23. Понижение порядка дифференциального уравнения приведением обеих частей уравнения к полной производной.

24. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Случай положительного дискриминанта характеристического уравнения.

25. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Случай нулевого дискриминанта характеристического уравнения.

26. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Случай отрицательного дискриминанта характеристического уравнения.

27. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Метод вариации постоянной.

28. Поиск частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Чему равно частное решение в случае, когда правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами содержит сумму функций?

29. Уравнение Эйлера. Сведение уравнения Эйлера к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Как по уравнению Эйлера составить характеристическое уравнение этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами?

30. Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами с помощью подбора частного решения в виде экспоненты. Формула Лиувилля.

31. Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами с помощью подбора частного решения в виде многочлена.

32. Свойства решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Общий вид линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. К какому уравнению и с помощью какой замены сводится такое уравнение? Теоремы о числе нулей линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Теорема о чередовании нулей. Теорема Штурма (теорема сравнения). Теорема Кнезера. Теорема об асимптотике.

33. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, приведенные к нормальному виду. Нормальный вид системы дифференциальных уравнений. Метод исключения неизвестных.

34. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, приведенные к нормальному виду. Метод собственных векторов. Случай равенства числа собственных векторов кратности соответствующего собственного значения.

35. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, приведенные к нормальному виду. Метод собственных векторов. Случай комплексных собственных значений.

36. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, приведенные к нормальному виду. Метод собственных векторов. Случай, когда число собственных векторов меньше кратности соответствующего собственного значения.

37. Системы дифференциальных уравнений, не приведенные к нормальному виду.

38. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений. Матрица Вронского.

39. Устойчивость. Устойчивое по Ляпунову решение. Неустойчивое решение. Асимптотически устойчивое решение. Почему обычно рассматривается вопрос об устойчивости нулевого решения?

40. Устойчивость по первому приближению. Первое приближение. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Примеры. В каком случае теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению не применима?

41. Определение положений равновесия системы и исследование их на устойчивость.

42. Особые точки. Узел.

43. Седло.

44. Фокус.

45. Центр.

46. Вырожденный и дикритический узлы.

47. Особые точки. Общий случай.

48. Первые интегралы. Полная производная в силу системы.

49. Нелинейные системы дифференциальных уравнений. Симметричная форма системы. Как от симметричной формы перейти к обычной запи-

си системы? Интегрируемые комбинации. Сколько и каких интегрируемых комбинаций нужно найти для решения системы?

50. Уравнения в частных производных первого порядка.

51. Нахождение поверхности, удовлетворяющей данному уравнению в частных производных первого порядка и проходящей через данную линию.

52. Дифференцирование решения по параметру.

53. Разложение решения по степеням параметра.

Задачи для контрольной работы по курсу «Дифференциальные уравнения»

1–10. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y'' + ky' + my = 0$;

б) $y'' + ny' + py = 0$;

в) $y'' + qy' + ry = 0$.

г) $y'' + sy' + ty = f(x)$ методом вариации постоянной;

д) $y'' + sy' + ty = f(x)$ с помощью подбора частного решения.

	k	m	n	p	q	r	s	t	$f(x)$
1	−7	12	6	9	0	9	−5	6	$2\cos x$
2	−9	20	8	16	0	16	−2	5	x^2+1
3	−11	30	−10	25	0	25	−4	4	$-x^2+3x$
4	−13	42	−12	36	0	36	2	10	$-\sin 2x$
5	−15	56	−14	49	0	49	−4	3	e^{5x}
6	−17	72	−16	64	0	64	0	4	$\sin 2x$
7	−19	90	−18	81	0	81	1	0	e^{-x}
8	−21	110	20	100	0	100	−6	9	$9x^2-12x+2$
9	7	12	−6	9	0	121	0	9	$36e^{3x}$
10	9	20	−8	16	0	144	2	−8	$3\sin x$

11–20. а) Решить методом исключения неизвестных систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x}_1 = kx_1 + mx_2 \\ \dot{x}_2 = lx_1 + nx_2 \end{cases}$.

б) Решить методом собственных векторов систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x}_1 = kx_1 + mx_2 \\ \dot{x}_2 = lx_1 + nx_2 \end{cases}$.

в) Исследовать (тип, устойчивость) особую точку $x = y = 0$ системы $\begin{cases} \dot{x} = kx + my \\ \dot{y} = lx + ny \end{cases}$.

	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
k	3	1	5	1	4	–5	1	–7	8	–2
l	3	7	1	7	2	2	5	–1	2	4
m	2	–2	3	–3	1	1	–3	3	–3	–3
n	4	–8	3	–9	5	–4	9	–3	3	–9

21–30. Выяснить, является ли функция $f(x, y)$ первым интегралом системы $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = x^2 + y^2 \end{cases}$.

	$f(x, y)$
21	$2xy - 3x^2y^3$
22	$4yx^2 + 5xy$
23	$6x^3 - 7xy^3$
24	$8x^2 - 9x^3y^3$
25	$9y^3x^2 + 2yx^3$

	$f(x, y)$
26	$8x^2y^2 + 5x^3y$
27	$7y^3x^3 + 2x^2y^2$
28	$4x^3y^3 - 5x^2y$
29	$7x^2y^3 + 4x^3y^2$
30	$6xy - 5x^3y^3$

ПЕРВАЯ ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $C' = 0.$
2. $x' = 1.$
3. $(x^2)' = 2x.$
4. $(x^3)' = 3x^2.$
5. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$
6. $(x^p)' = px^{p-1}.$
7. $(\sin x)' = \cos x.$
8. $(\cos x)' = -\sin x.$
9. $(\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x.$
10. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -1/\sin^2 x.$
11. $(\ln x)' = 1/x.$
12. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}.$
13. $(e^x)' = e^x.$
14. $(a^x)' = a^x \ln a.$
15. $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1 - x^2}.$
16. $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1 - x^2}.$
17. $(\mathrm{arctg}\, x)' = 1/(1 + x^2).$
18. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -1/(1 + x^2).$

ВТОРАЯ ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. —.
2. —.
3. $(g^2(x))' = 2g(x)g'(x).$
4. $(g^3(x))' = 3g^2(x)g'(x).$
5. $(\sqrt{g(x)})' = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\, g'(x).$
6. $(g^p(x))' = pg^{p-1}(x)g'(x).$
7. $(\sin g(x))' = g'(x)\cos g(x).$
8. $(\cos g(x))' = -g'(x)\sin g(x).$
9. $(\mathrm{tg}\,(g(x)))' = g'(x)/\cos^2 g(x).$
10. $(\mathrm{ctg}\,(g(x)))' = -g'(x)/\sin^2 g(x).$
11. $(\ln g(x))' = g'(x)/g(x).$
12. $(\log_a g(x))' = \dfrac{g'(x)}{g(x)\ln a}.$
13. $(e^{g(x)})' = g'(x)\, e^{g(x)}.$
14. $(a^{g(x)})' = g'(x)\, a^{g(x)} \ln a.$
15. $(\arcsin g(x))' = g'(x)/\sqrt{1 - g^2(x)}.$
16. $(\arccos g(x))' = -g'(x)/\sqrt{1 - g^2(x)}.$
17. $(\mathrm{arctg}\, g(x))' = g'(x)/(1 + g^2(x)).$
18. $(\mathrm{arcctg}\, g(x))' = -g'(x)/(1 + g^2(x)).$

Литература

Просветов Г. И. Математика в экономике: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство РДЛ, 2005.

Просветов Г. И. Математика для гуманитариев: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Математический анализ: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Теоретическая механика: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2010.

Просветов Г. И. Уравнения в частных производных: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2009.

Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1979.

Содержание

Учебно-практическое пособие

Просветов Георгий Иванович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.ФЦ.15.953.П.000115.06.03 от 16.06.2003 года

Подписано в печать 10.10.10 г.
Бумага офсетная. Формат 60×84/16.
Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная.
Печ. л. 5,5. Тираж 1000 экз.
Зак. № 6040.

ООО Издательство «Альфа-Пресс»

117574, Москва, а/я 117
Тел.: (495) 777-40-60, 926-73-03
www.bestbook.ru
e-mail: book@bestbook.ru

Отпечатано в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ»
Адрес: 140010, Моск. обл., Люберцы, Октябрьский пр-т, 403.
Тел.: (495) 554-21-86.