ГИА-9

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

ГИА-9

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ГИА

ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

9 класс

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ГИА»

ЛЕГИОН ™

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ГИА»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

9 класс

Подготовка к ГИА

ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

Учебно-методическое пособие

TM

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2014

ББК 22.1
К 65

Рецензенты:

Ханин Д.И. — аспирант факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета;

Дерезин С.В. — кандидат физико-математических наук.

Коннова Е.Г.

К 65 Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА. Задания с параметром. — Ростов-на-Дону, Легион, 2014. — 64 с. — (Готовимся к ГИА.)

ISBN 978-5-9966-0512-5

Материал, представленный в данном пособии, предназначен для формирования навыков в решении заданий с параметром, которые являются неотъемлемой частью КИМов по математике в 9 и 11 классах.

Книга основана на материале по математике 7 – 9 классов и состоит из 7 параграфов, каждый из которых разделён на пункты, посвящённые определённым типам задач и способам их решения. Также пособие содержит упражнения для самостоятельной работы и ответы к ним.

Предлагаемое издание адресовано учащимся старших классов общеобразовательных учреждений и учителям математики.

Книга является частью **учебно-методического комплекса «Математика. Подготовка к ГИА»**, включающего такие пособия, как «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014», «Математика. 9 класс. Тренажёр по новому плану экзамена: алгебра, геометрия, реальная математика» и т.д.

Продиагностировать уровень математической подготовки и в соответствии с полученными результатами оптимально подобрать необходимые пособия поможет брошюра «Готовимся к ГИА по математике. С чего начать?», содержащая всю информацию об учебно-методическом комплексе «Математика. Подготовка к ГИА» издательства «Легион».

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0512-5

Оглавление

От авторов **4**

§ 1. Решение линейных уравнений с параметром 5

§ 2. Решение линейных неравенств с параметром 9

1. Линейные неравенства 9
2. Системы линейных неравенств 13

§ 3. Графики на плоскости Oxy 17

1. Уравнение прямой 17
2. Взаимное расположение прямых на плоскости. Системы линейных уравнений 19
3. График функции $y = k/x$ 23
4. Окружность 26
5. Парабола 30
6. Кусочные графики 33

§ 4. Квадратные уравнения с параметром 35

§ 5. Разложение квадратного трёхчлена на множители. Формулы Виета 43

1. Разложение квадратного трёхчлена на множители 43
2. Теорема Виета 45

§ 6. Расположение корней квадратного уравнения относительно заданных точек 48

1. Поиск корней и ограничения 48
2. Сравнение корней с нулём 50
3. Расположение корней квадратичной функции 52

§ 7. Использование свойств функций и алгебраических выражений 55

1. Использование симметрии алгебраических выражений 55
2. Использование монотонности функций 57
3. Использование ОДЗ и оценка множества значений 59

Ответы **62**

От авторов

На государственной итоговой аттестации, как в 9, так и в 11 классе, обязательно встречаются задания с параметром. Кроме того, такие задачи — обязательная часть олимпиад различного уровня.

С помощью этих задач проверяются не базовые умения выпускников, а уровень математического и логического мышления и навыки исследовательской деятельности.

В школьных учебниках задачи с параметром относятся к заданиям повышенного уровня сложности и их решению уделяется мало внимания.

Настоящее пособие поможет учащимся подготовиться к решению таких задач на примере математического материала 7–9 классов.

Материал пособия разделён не только на параграфы, но и на пункты, каждый из которых посвящён определённому типу задач. Упражнения для самостоятельной работы приводятся после соответствующего пункта.

Эта книга может стать пособием для учебного курса в школе или для студентов педагогических институтов, будущих учителей математики.

Также она предназначена школьникам, которые хотят самостоятельно или под руководством учителя освоить способы решения задач с параметром.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать по почте или на электронный адрес: legionrus@legionrus.com.

Обсудить пособие, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на официальном форуме издательства http://legion-posobiya.livejournal.com.

§ 1. Решение линейных уравнений с параметром

1. Решите уравнение $ax = p$ при всех значениях параметров a и p.

Решение: Сначала разберём случай, когда $a \neq 0$. Тогда уравнение имеет один корень $x = \frac{p}{a}$.

Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = b$ или $0 = b$.

Это уравнение не имеет корней, если $b \neq 0$, и имеет бесконечно много корней, если $b = 0$ (x — любое число из области допустимых значений, в данном случае x — любое действительное число).

Ответ: Если $a \neq 0$, $x = \frac{p}{a}$.
Если $a = 0$, $b \neq 0$, нет корней.
Если $a = 0$, $b = 0$, x — любое число.

2. Решите уравнение $5(x - a) + 2a^2 = x$ при всех значениях параметра a.

Решение: Выполним преобразования.

$5x - 5a + 2a^2 = x$,
$5x - x = 5a - 2a^2$,
$4x = 5a - 2a^2$.

Поделим обе части уравнения на 4.

$$x = \frac{5a - 2a^2}{4}.$$

Ответ: $x = \frac{5a - 2a^2}{4}$.

3. Решите уравнение $a(x - 2) + 8a = 6(x - a^2)$ при всех значениях параметра a.

Решение: Выполним преобразования.

$ax - 2a + 8a = 6x - 6a^2$,
$ax - 6x = -6a^2 - 6a$,
$(a - 6)x = -6a(a + 1)$.

Разберём два случая:

1) $a - 6 \neq 0$. Тогда $x = \dfrac{-6a(a+1)}{a-6}$.

2) $a - 6 = 0$, то есть $a = 6$. В этом случае уравнение примет вид $0 \cdot x = -6 \cdot 6 \cdot 7,\ 0 \cdot x = -252$. Это равенство неверно, значит корней нет.

Ответ: Если $a = 6$, корней нет.

Если $a \neq 6,\ x = \dfrac{-6a(a+1)}{a-6}$.

4. Решите уравнение $a^2(x-2) = 2(2x-a-6)$ при всех значениях параметра a.

Решение: Преобразуем уравнение.

$a^2x - 2a^2 = 4x - 2a - 12;$

$a^2x - 4x = 2a^2 - 2a - 12;$

$(a^2-4)x = 2(a^2-a-6);$

$(a-2)(a+2)x = 2(a+2)(a-3).$

Рассмотрим возможные случаи:

1) $(a-2)(a+2) \neq 0$, то есть $a \neq 2, a \neq -2$.

В этом случае $x = \dfrac{2(a+2)(a-3)}{(a-2)(a+2)}; x = \dfrac{2(a-3)}{a-2}$.

2) $a = 2$. Подставим $a = 2$ в уравнение. Получим $0 \cdot x = -8$. Это неверное равенство, какое бы значение ни принимало x. Поэтому корней при $a = 2$ уравнение не имеет.

3) $a = -2$. При таком значении a уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, что верно при любом значении переменной x.

Ответ: При $a = 2$ нет корней.

При $a = -2$ x — любое число.

При $a \neq \pm 2$ $x = \dfrac{2(a-3)}{a-2}$.

5. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $2a^2(x-1) = a - 3(ax+1)$ имеет корень, принадлежащий промежутку $[-3; 2)$.

Решение: Выясним, при каких значениях параметра a уравнение имеет корни.

$2a^2x - 2a^2 = a - 3xa - 3;$

$2a^2x + 3ax = 2a^2 + a - 3;$

$ax(2a+3) = 2a^2 + a - 3.$

Если $a(2a+3) \neq 0$, то есть $a \neq 0$ и $a \neq -1{,}5$, то $x = \dfrac{2a^2+a-3}{a(2a+3)}$;

$x = \dfrac{(2a+3)(a-1)}{a(2a+3)}$; $x = \dfrac{a-1}{a}$. Найдём, при каких значениях a корень уравнения принадлежит промежутку $[-3; 2)$.

$-3 \leqslant \dfrac{a-1}{a} < 2$. Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{a-1}{a} \geqslant -3, \\ \dfrac{a-1}{a} < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{4a-1}{a} \geqslant 0, \\ \dfrac{-a-1}{a} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0 \text{ или } a \geqslant 0{,}25, \\ a < -1 \text{ или } a > 0. \end{cases}$$

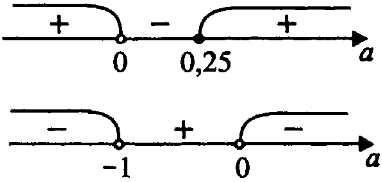


Рис. 1.

$a < -1$ или $a \geqslant 0{,}25$ (см. рис. 1).

Учитывая, что $a \neq -1{,}5$ и $a \neq 0$, получим

$a \in (-\infty; -1{,}5) \cup (-1{,}5; -1) \cup [0{,}25; +\infty)$.

Если $a = 0$, уравнение принимает вид $0 \cdot x = -3$, корней нет.

Если $a = -1{,}5$, уравнение превращается в тождество $0 \cdot x = 0$. Корнем уравнения является любое действительное число, то есть при $a = -1{,}5$ уравнение имеет корни, принадлежащие промежутку $[-3; 2)$.

Значит, искомые $a \in (-\infty; -1) \cup [0{,}25; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup [0{,}25; +\infty)$.

6. Найдите, при каких значениях параметра a корень уравнения $ax^2 + 3x = 2a$ является корнем уравнения $ax^2 - 5a^2x = 2a$.

Решение: Если некоторое число $x = t$ является корнем как первого, так и второго уравнения, то выполняются оба равенства $at^2 + 3t - 2a = 0$ и $at^2 - 5a^2t - 2a = 0$.

Тогда $at^2 + 3t - 2a = at^2 - 5a^2t - 2a$, $3t + 5a^2t = 2a - 2a$, $(3 + 5a^2)t = 0$.

Так как $3 + 5a^2 > 0$ при любом значении a, равенство возможно только при $t = 0$. Мы получили, что если у заданных уравнений есть общий корень, то он равен 0.

Подставим нуль в первое исходное уравнение $a \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 2a, 2a = 0$, $a = 0$.

Второе уравнение при $a = 0$ и $x = 0$ также превратится в равенство, т.е. $ax^2 - 5a^2x - 2a = 0$ при $x = t = 0$.

Ответ: 0.

7. Решите систему уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} ax + y = 7, \\ 5ax - 2y = 2 \end{cases}$ при всех значениях параметра a.

Решение: Выразим y из первого уравнения и подставим полученное выражение во второе уравнение системы.

$y = 7 - ax$, $5ax - 2(7 - ax) = 2$,

$5ax - 14 + 2ax = 2$,

$7ax = 16$,

$ax = \dfrac{16}{7}$.

Если $a \neq 0$, $x = \dfrac{16}{7a}$, $y = 7 - ax = 7 - a \cdot \dfrac{16}{7a} = 4\dfrac{5}{7}$.

Если $a = 0$, $0 \cdot x = \dfrac{16}{7}$, корней нет.

Ответ: Если $a = 0$, нет решений.

Если $a \neq 0$, $x = \dfrac{16}{7a}$, $y = 4\dfrac{5}{7}$.

Упражнения

Решите уравнение при всех значениях параметра.

1.1. $8x = 40a$.

1.2. $18 - 7(x + a) = x - a^3$.

1.3. $(a + 2)x = 7a$.

1.4. $(1-a^2)x = 2a+2$.

1.5. $a^2(x-1) = 3x + a(2x-3)$.

1.6. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $a^2(x-1) = 5(ax-5)$ имеет корень, принадлежащий промежутку $[-4; -3)$.

1.7. Найдите, при каких значениях параметра a хотя бы один корень уравнения $2a^2t - at - 1 = 0$ является корнем уравнения $a^2t - at - t + a^2 = 0$.

1.8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - ay = 3, \\ 3x + 2ay = 4 \end{cases}$ для всех значений параметра a.

§ 2. Решение линейных неравенств с параметром

1. Линейные неравенства

1. При каких значениях параметра a число 8 является решением неравенства $3x > 5a - 7a(x+2)$?

Решение: Решение неравенства — такое значение неизвестного, которое при подстановке в неравенство превращает его в верное числовое неравенство.

$3 \cdot 8 > 5a - 7a \cdot (8+2)$,

$24 > 5a - 70a$,

$24 > -65a$,

$65a > -24$,

$a > -\dfrac{24}{65}$.

Ответ: $a > -\dfrac{24}{65}$.

2. Решите неравенство $ax > b$ при всех значениях параметров a и b.

Решение: При решении линейных неравенств может возникнуть три принципиально разных случая:

1) $a > 0$. Тогда мы имеем право разделить обе части неравенства на a, получим $x > \dfrac{b}{a}$.

2. Зак. № 20

2) $a < 0$. Мы также можем разделить на a, но знак неравенства при этом нужно поменять на противоположный. Получим $x < \frac{b}{a}$.

3) $a = 0$. Неравенство превращается в числовое неравенство $0 > b$.
Если $b < 0$, то неравенство верно и решением неравенства является любое число.
Если $b \geqslant 0$, то неравенство неверно и неравенство не имеет решений.

Ответ: Если $a > 0$, $x > \frac{b}{a}$.
Если $a < 0$, $x < \frac{b}{a}$.
Если $a = 0$, $b < 0$, то x — любое число.
Если $a = 0$, $b \geqslant 0$, то решений нет.

3. Решите неравенство $ax + 3 < 5(a + 2x)$ при каждом значении параметра a.

Решение: Выполним преобразования.
$ax + 3 < 5a + 10x$;
$ax - 10x < 5a - 3$;
$(a - 10)x < 5a - 3$.

Рассмотрим несколько случаев.

1) $a - 10 > 0$, $a > 10$. Тогда $x < \frac{5a - 3}{a - 10}$.

2) $a - 10 < 0$, $a < 10$. Тогда $x > \frac{5a - 3}{a - 10}$.

3) $a = 10$. Неравенство принимает вид $0 \cdot x < 47$, то есть $0 < 47$. Неравенство верно, поэтому любое число будет решением неравенства.

Ответ: Если $a > 10$, $x < \frac{5a - 3}{a - 10}$.
Если $a < 10$, $x > \frac{5a - 3}{a - 10}$.
Если $a = 10$, x — любое число.

4. Решите неравенство $2(ax - 16) \geqslant a - 5x$ при всех значениях параметра a.

Решение: Преобразуем неравенство.

$2(ax-16) \geqslant a-5x;$

$2ax-32 \geqslant a-5x;$

$(2a+5)x \geqslant a+32.$

1) $2a+5>0,\ a>-2{,}5$. Тогда $x \geqslant \dfrac{a+32}{2a+5}$.

2) $2a+5<0,\ a<-2{,}5$. Тогда $x \leqslant \dfrac{a+32}{2a+5}$.

3) $a=-2{,}5$. Неравенство принимает вид $0 \cdot x \geqslant 29{,}5,\ 0 \geqslant 29{,}5$. Данное числовое неравенство неверно, поэтому решений нет.

Ответ: Если $a>-2{,}5$, $x \geqslant \dfrac{a+32}{2a+5}$.

Если $a<-2{,}5$, $x \leqslant \dfrac{a+32}{2a+5}$.

Если $a=-2{,}5$, решений нет.

5. При каких значениях параметра p решением неравенства $9x-p+7 \geqslant 2(p+x)$ будет промежуток $[3;+\infty)$?

Решение: $9x-p+7 \geqslant 2(p+x)$,

$9x-2x \geqslant 2p+p-7,$

$7x \geqslant 3p-7,$

$x \geqslant \frac{3}{7}p-1.$

Решением этого неравенства будет промежуток $[3;+\infty)$, если

$\frac{3}{7}p-1=3,\ \frac{3}{7}p=4,\ p=\frac{28}{3};\ p=9\frac{1}{3}.$

Ответ: $p=9\frac{1}{3}$.

6. Найдите все значения параметра p, при которых хотя бы одно значение переменной x из промежутка $[-3;2)$ является решением неравенства $8(-x+p)>5$.

Решение: Решим неравенство.

$-8x+8p>5;$

$-8x > -8p + 5;$

$x < \dfrac{-8p+5}{-8};$

$x < p - \dfrac{5}{8}.$

Изобразим множество решений неравенства на числовой оси (см. рис. 2).

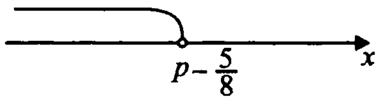


Рис. 2.

Нам нужно, чтобы хотя бы одно значение из промежутка $[-3; 2)$ являлось решением неравенства $x < p - \dfrac{5}{8}$. Чтобы понять, какие p нам подходят, рассмотрим ряд случаев.

1. Все значения $[-3; 2)$ являются решениями неравенства (см. рис. 3). В этом случае $2 \leqslant p - \dfrac{5}{8}$ и такие p нам подходят.

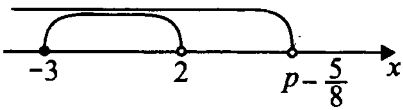


Рис. 3.

2. $-3 < p - \dfrac{5}{8} < 2$. В этом случае часть чисел из промежутка $[-3; 2)$ являются решениями неравенства, а часть не являются (см. рис. 4). Эти p нам тоже подходят.

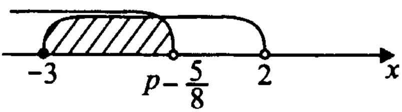


Рис. 4.

3. $p - \dfrac{5}{8} = -3$. Видим, что $x = -3$ не является решением неравенства в этом случае, а $x > -3$ не являются решениями тем более (см. рис. 5). Такое p нам не подходит.

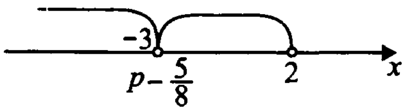


Рис. 5.

4. $p - \frac{5}{8} < -3$. В этом случае ни одно из чисел из промежутка $[-3; 2)$ не является решением неравенства (см. рис. 6), значит при $p - \frac{5}{8} < -3$ условие не выполняется.

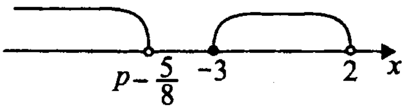


Рис. 6.

Мы получили, что при $p - \frac{5}{8} > -3$, т.е. $p > -2\frac{3}{8}$, условие выполнено.

Ответ: $p > -2\frac{3}{8}$.

2. Системы линейных неравенств

Напомним, решением системы неравенств является пересечение решений всех неравенств системы, другими словами, все значения переменной, при которых выполняются все неравенства.

1. Найдите все значения параметра a, при которых число 4 является решением системы неравенств $\begin{cases} 5ax - 7a > 3; \\ 8x + 2a \leqslant ax. \end{cases}$

Решение: $x = 4$ — решение системы. Подставим его в оба неравенства системы и найдём те значения a, при которых неравенства верны.

$$\begin{cases} 5a \cdot 4 - 7a > 3, \\ 8 \cdot 4 + 2a \leqslant a \cdot 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 13a > 3, \\ -2a \leqslant -32; \end{cases} \quad \begin{cases} a > \frac{3}{13}, \\ a \geqslant 16; \end{cases} \quad a \geqslant 16.$$

Ответ: $a \geqslant 16$.

2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x+8 \geqslant 26, \\ x+3 < a \end{cases}$ при всех значениях параметра a.

Решение: $\begin{cases} 3x \geqslant 26-8; \\ x < a-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x < a-3. \end{cases}$

Изобразим решения неравенств на числовой оси (см. рис. 7)

Рис. 7.

Возможны три случая.

1) $6 < a-3$ (см. рис. 8), т.е. $a > 9$. Тогда $x \in [6; a-3)$.

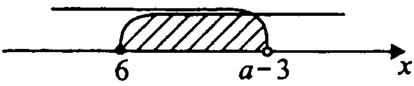


Рис. 8.

2) $a-3 = 6$ (см. рис. 9), $a = 9$ — решений нет.

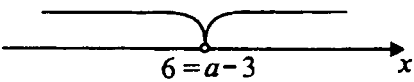


Рис. 9.

2) $a-3 < 6$ (см. рис. 10), $a < 9$. В этом случае система также не имеет решений.

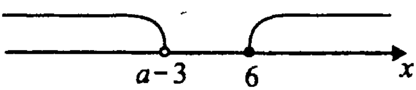


Рис. 10.

Ответ: Если $a > 9$, $x \in [6; a-3)$.

Если $a \leqslant 9$, решений нет.

3. При каких значениях параметра a система неравенств

$\begin{cases} 3x \leqslant 5+ax, \\ 17(x-a) \geqslant 2(5x+7)-17a \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

Решение: Преобразуем систему:

$$\begin{cases} 3x \leqslant 5 + ax, \\ 17x - 17a \geqslant 10x - 17a + 14; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - ax \leqslant 5, \\ 7x \geqslant 14; \end{cases} \quad \begin{cases} (3-a)x \leqslant 5, \\ x \geqslant 2. \end{cases} \qquad (1)$$

Решим первое неравенство системы.

Если $3 - a > 0$, т.е. $a < 3$, то $x \leqslant \dfrac{5}{3-a}$.

Если $3 - a < 0$, т.е. $a > 3$, то $x \geqslant \dfrac{5}{3-a}$.

Если $3 - a = 0$, т.е. $a = 3$, то $0 \leqslant 5$ — верное неравенство, решениями системы являются все решения второго неравенства, т.е. $x \geqslant 2$.

Рассмотрим систему (1).

1) $a = 3$, $\begin{cases} 0 \leqslant 5, \\ x \geqslant 2; \end{cases}$ $x \geqslant 2$.

При $a = 3$ система (1) имеет решение.

2) $a < 3$, $\begin{cases} x \leqslant \dfrac{5}{3-a} \\ x \geqslant 2. \end{cases}$

Эта система имеет хотя бы одно решение, если $\dfrac{5}{3-a} \geqslant 2$ (см. рис. 11).

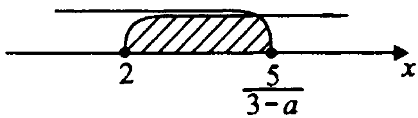


Рис. 11.

Так как в этом случае $a < 3$, т.е. $3-a > 0$, можно неравенство $\dfrac{5}{3-a} \geqslant 2$ умножить на $3 - a$, получим $5 \geqslant 2(3-a)$, $5 \geqslant 6 - 2a$, $2a \geqslant 1$, $a \geqslant 0{,}5$.

При $\begin{cases} a \geqslant 0{,}5, \\ a < 3 \end{cases}$ система (1) имеет решения.

2) $a > 3$. В этом случае $\begin{cases} x \leqslant \dfrac{5}{3-a}, \\ x \leqslant 2. \end{cases}$

Эта система при любом $a > 3$ имеет решения.

Учитывая все рассмотренные случаи, получаем, что исходная система имеет решения при $a \geqslant 0{,}5$.

Ответ: $a \geqslant 0{,}5$.

Упражнения

2.1. При каких значениях параметра a число 3 является решением неравенства $8x(a+4) \leqslant 3a(x-7)$?

Решите неравенство при каждом значении параметра.

2.2. $7x \geqslant 3a + 49$.

2.3. $x - 8 < 5(x + a)$.

2.4. $(a+2)x > 6a$.

2.5. $a(5x-3) \geqslant 1 + 2x$.

2.6. При каких значениях параметра p решением неравенства $8p - 2x + 3 < 6(p + x)$ будет промежуток $(2; +\infty)$?

2.7. Найдите все значения параметра m, при которых хотя бы одно значение x из промежутка $(1; 7]$ является решением неравенства $3(2p - x) \leqslant 5 + p$.

2.8. Найдите все значения параметра a, при которых число -8 является решением системы неравенств $\begin{cases} x - 5a < 3, \\ 3 - 2ax \leqslant a. \end{cases}$

2.9. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x - 4 < 15, \\ 5 - x > a \end{cases}$ при всех значениях параметра a.

2.10. При каких значениях параметра m система неравенств $\begin{cases} 8(a - x) + 28 \leqslant 3(2x + a) + 5a, \\ ax > 3 - 2x \end{cases}$ не имеет решений?

§ 3. Графики на плоскости Oxy

Некоторые задания с параметром удобно решать, представив условие в графическом виде. Для этого нужно уметь строить графики уравнений и семейства кривых, зависящих от параметра.

1. Уравнение прямой

Уравнение прямой можно записать так: $ax + by + c = 0$ или $y = kx + p$.

Уравнение прямой, проходящей параллельно оси абсцисс Ox, выглядит так: $y = c$, где c — ордината любой точки прямой (см. рис. 12а).

Уравнение прямой, проходящей параллельно оси ординат Oy, выглядит так: $x = p$, где p — абсцисса любой точки прямой (см. рис. 12б).

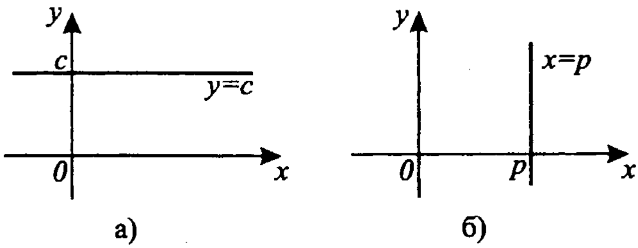


Рис. 12.

Рассмотрим уравнение прямой $ax + by + c = 0$.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение примет вид $by + c = 0$, $y = -\dfrac{c}{b}$.

Если $a \neq 0$, $b = 0$, то $ax + c = 0$, $x = -\dfrac{c}{a}$. Эти случаи мы уже разобрали.

Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то уравнение можно записать так $by = -c - ax$, $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$, то есть в виде $y = kx + p$.

Выясним, как зависит вид прямой от параметров k и p.

Если $x = 0$, то $y = p$, значит прямые $y = kx + p$ проходят через точку $(0; p)$, то есть пересекают ось Oy в этой точке.

Например, $y = kx + 2$ — это семейство прямых, пересекающих ось Oy в точке $(0; 2)$. Некоторые из этих прямых показаны на рисунке 13. То есть параметр p показывает, какая ордината у точки пересечения прямой с осью ординат. Назовём параметр p свободным коэффициентом.

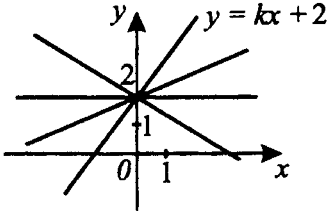


Рис. 13.

Выясним, что показывает значение параметра k в уравнении $y = kx+p$. Рассмотрим две точки с абсциссами x_0 и $x_0 + \Delta x$. Найдём их ординаты.
$y(x_0) = kx_0 + p$, $y(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + p$,
$y(x_0 + \Delta x) = k \cdot x_0 + p + k \cdot \Delta x$.

Абсциссы этих точек отличаются на Δx, ординаты на $\Delta y = k\Delta x$. То есть $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta x}{\Delta x} = k$. Другими словами, $k = \operatorname{tg}\alpha$ (см. рис. 14), где α — угол между прямой и положительным направлением оси Ox.

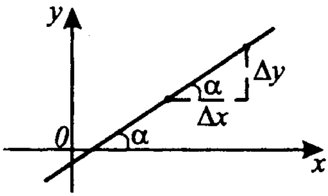


Рис. 14.

Число k называют угловым коэффициентом, так как он показывает, под каким углом к оси Ox проходит прямая.

Если $k = 0$, то прямая параллельна оси Ox, если $k > 0$, угол α острый, если же $k < 0$, угол α тупой (см. рис. 15).

Мы получили, что $y = kx + b$, где k — известное число, b — параметр — это семейство параллельных прямых с угловым коэффициентом k. Например, на рисунке 16 изображены некоторые из семейства прямых $y = -0{,}5x + b$.

Заметим, что прямые $y = k(x - x_0) + y_0$ проходят через точку $(x_0; y_0)$.

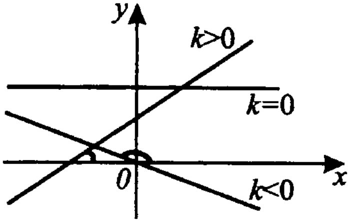


Рис. 15.

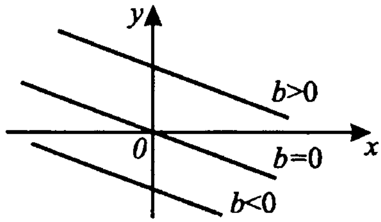


Рис. 16.

Рассмотрим задачу.

1. При каких значениях a прямая $y = 2ax + 7$

а) параллельна прямой $y = (a+5)x - 3a$?

б) совпадает с этой прямой?

Решение: Прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны, но свободные коэффициенты не равны:

$$\begin{cases} 2a = a + 5, \\ 7 \neq -3a; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 5, \\ a \neq -\dfrac{7}{3}; \end{cases} \quad a = 5.$$

При $a = 5$ прямые параллельны.

Прямые совпадают, если равны и угловые, и свободные коэффициенты соответственно, то есть $\begin{cases} 2a = a + 5, \\ 7 = -3a. \end{cases}$

Эта система не имеет решений, поэтому эти прямые не могут совпадать.

Ответ: а) $a = 5$, б) нет таких a.

2. Взаимное расположение прямых на плоскости. Системы линейных уравнений

Прямые не имеют общих точек, если они параллельны. Если они совпадают, то общих точек бесконечно много.

Если прямые пересекаются, у них одна общая точка.

Давайте рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Их геометрическое представление на плоскости Oxy — две прямые, причём решение системы — пара (x_0, y_0) — является общей точкой двух этих прямых.

1) Если $a_2 b_2 \neq 0$, то возможны три случая.

а) $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, тогда прямые пересекаются и система имеет одну общую точку.

б) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, $c_2 \neq 0$ или $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ и $c_1 = c_2 = 0$, тогда прямые совпадают и система имеет бесконечно много решений.

в) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, тогда прямые параллельны и система решений не имеет.

2) Рассмотрим случаи, когда $a_2 b_2 = 0$.

г) Если $\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0 \end{cases}$ и $b_2 \neq 0$, то прямые параллельны при $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$, когда $c_2 \neq 0$ либо при $c_1 = c_2 = 0$ или совпадают (при $c_1 \neq c_2$).

Аналогично, если $\begin{cases} b_1 = 0, \\ b_2 = 0 \end{cases}$ и $a_2 \neq 0$, то прямые параллельны при $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{a_1}{a_2}$, когда $c_2 = 0$, и при $c_1 = c_2 = 0$.

д) Если $\begin{cases} a_1 \neq 0, \\ a_2 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} b_1 \neq 0, \\ b_2 = 0, \end{cases}$ то прямые пересекаются.

2. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} 5x + ay = 18, \\ (a+7)x + a^2 y = 6 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

Решение: Рассмотрим два случая.

1) $a = 0$, тогда система примет вид $\begin{cases} 5x = 18, \\ 7x = 6. \end{cases}$

Эта система не имеет решений.

2) $a \neq 0$.

Система имеет одно решение, если $\dfrac{a+7}{5} \neq \dfrac{a^2}{a}$, то есть $(a+7)a \neq a^2 \cdot 5$,

$a + 7 \neq 5a$,

$4a \neq 7$,

$a \neq 1\frac{3}{4}$.

Система имеет единственное решение при $a \neq 0$, $a \neq 1\frac{3}{4}$.

Значит, $a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; 1\frac{3}{4}\right) \cup \left(1\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; 1\frac{3}{4}\right) \cup \left(1\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

3. Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = a(x-2)+3$ имеет не менее двух общих точек с квадратом, вершины которого находятся в точках $(-5; 0)$, $(0; 3)$, $(-1; -1)$.

Решение: Построим квадрат $BCDE$ с заданными вершинами (см. рис. 17).

Найдём координату точки D. Так как $DC = BE$ и $DC \| BE$, то вектор $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$. Координаты $\overrightarrow{BE}\,\{-4; 1\}$, координаты $\overrightarrow{CD}\,\{x_D - x_C; y_D - y_C\}$, то есть $\{x_D - 0; y_D - 3\}$. У равных векторов — равные координаты, поэтому $x_D - 0 = -4$, $x_D = -4$, $y_D - 3 = 1$, $y_D = 4$. Получим $D(-4; 4)$.

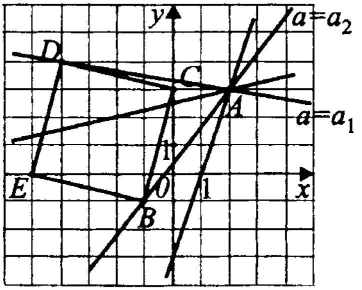


Рис. 17.

$y = a(x-2)+3$ — семейство прямых, проходящих через точку $A(2; 3)$. Это легко доказать, подставив $x = 2$, $y = 3$ в уравнение прямой. Заметим, что при увеличении углового коэффициента a прямые вращаются вокруг точки A против часовой стрелки.

По рисунку 17 видно, что при $a \in (a_1; a_2)$ прямая имеет с квадратом более одной общей точки.

Найдём a_1. Прямая $y = a(x-2)+3$ проходит через точку $(-4; 4)$.

$a(-4-2)+3 = 4,$

$-6a = 1,$

$a = -\dfrac{1}{6}.$

Найдём a_2. Прямая проходит через точку $(-1; -1)$.

$a(-1-2)+3 = -1,$

$-3a = -4,$

$a = \dfrac{4}{3}.$

Значит, искомые $a \in \left(-\dfrac{1}{6}; \dfrac{4}{3}\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\dfrac{1}{6}; \dfrac{4}{3}\right)$.

Упражнения

3.1. Постройте прямую $y = a$, если:

а) $a = -3$,

б) $a = -1$,

в) $a = 0$,

г) $a = 4$.

3.2. Постройте прямую $x = a$, если:

а) $a = -3$,

б) $a = -1$,

в) $a = 0$,

г) $a = 4$.

3.3. Постройте прямую $y = kx - 3$, если:

а) $k = 0$,

б) $k = -1$,

в) $k = 0{,}5$,

г) $k = 2$.

3.4. Постройте прямую $y = \frac{1}{2}x + a$, если:

а) $a = 0$,

б) $a = -2$,

в) $a = 2$,

г) $a = 4$.

3.5. Постройте прямую $y = a(x - 3) - 2$, если:

а) $a = 0$,

б) $a = -1$,

в) $a = 0{,}5$,

г) $a = 3$.

3.6. Найдите k, при котором прямая $y = kx + 7$ проходит через точку $(2; 1)$.

3.7. Найдите a, при котором прямая $y = 2x + a$ проходит через точку $(-3; 5)$.

3.8. При каких значениях a прямая $y = 5ax + 8$

а) параллельна прямой $y = (a^2 + 2a)x + a + 5$?

б) совпадает с этой прямой?

3.9. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} 3x - 2ay = 6, \\ (a+5)x - a^2y = 10 \end{cases}$ имеет

а) ровно одно решение,

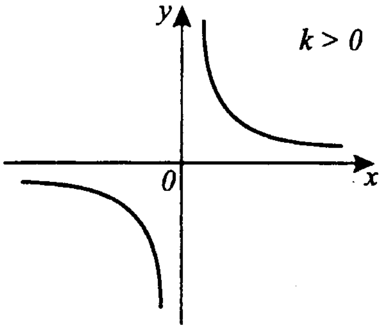
б) бесконечно много решений.

3.10. Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = a(x + 2) - 5$ имеет не более одной общей точки с квадратом, вершины которого находятся в точках $(-1; -2)$, $(3; 2)$, $(7; -2)$.

3. График функции y = k/x

Область допустимых значений $x \neq 0$. Графиком этой функции является гипербола (при $k \neq 0$).

Если $k > 0$, её ветви расположены в I и III четвертях (см. рис. 18а), если же $k < 0$, то во II и IV четвертях (см. рис. 18б).



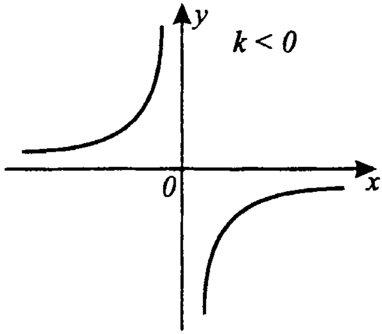


Рис. 18.

Иногда уравнение гиперболы записывают в виде $xy = k$, $k \neq 0$.

Если рассмотреть две гиперболы $y = \dfrac{k_1}{x}$ и $y = \dfrac{k_2}{x}$, где k_1 и k_2 одного знака и $|k_1| > |k_2|$, то ветви гиперболы $y = \dfrac{k_2}{x}$ будут лежать к осям координат ближе, чем ветви $y = \dfrac{k_1}{x}$ (см. рис. 19).

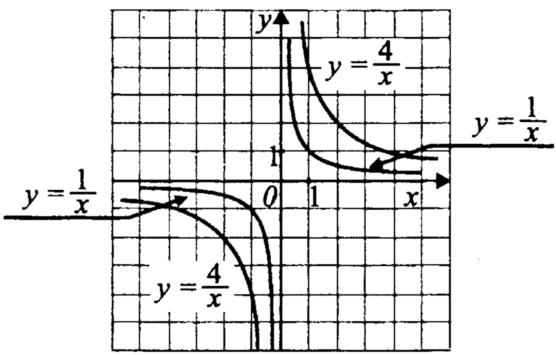


Рис. 19.

4. Найдите, при каких значениях параметра p уравнение $p \cdot |x| = \dfrac{3x-6}{x^2-2x}$ имеет один корень.

Решение: Решим задачу графически.

Уравнение $p \cdot |x| = \dfrac{3x-6}{x^2-2x}$ имеет столько решений, сколько общих точек имеют графики $y = p \cdot |x|$ и $y = \dfrac{3x-6}{x^2-2x}$.

При $x \geqslant 0$ график $y = p \cdot |x|$ — часть прямой $y = px$, при $x < 0$ — часть прямой $y = -px$. Несколько графиков такого вида можно увидеть на рисунке 20а.

а) б)

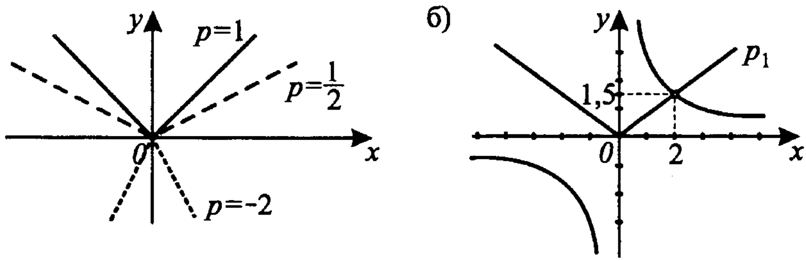


Рис. 20.

Построим график функции $y = \dfrac{3x-6}{x^2-2x}$. (1)

Найдём область допустимых значений аргумента $x^2 - 2x \neq 0$, $x \neq 0$, $x \neq 2$. Упростим уравнение (1):

$$\frac{3x-6}{x^2-2x} = \frac{3(x-2)}{x(x-2)} = \frac{3}{x},\ y = \frac{3}{x}.$$

График уравнения (1) — гипербола с выколотой точкой (так как $x \neq 2$). По рисунку 20б видно, что графики имеют одну общую точку, если $p \neq 0$ и если график $y = p_1 \cdot |x|$ не проходит через точку $A\left(2; \dfrac{3}{2}\right)$.

Найдём p_1. $y = p_1|x|$, $\dfrac{3}{2} = p_1 \cdot |2|$, $p_1 = \dfrac{3}{2} : 2 = \dfrac{3}{4}$.

Значит, исходное уравнение имеет один корень при $p \neq 0$ и $p \neq \dfrac{3}{4}$.

Ответ: $p \neq 0, p \neq \dfrac{3}{4}$.

4. Окружность

Уравнение окружности имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, при этом $(x_0; y_0)$ — координаты центра окружности, $r > 0$ — радиус окружности.

Например, окружность $x^2 + y^2 = R^2$ имеет центр в начале координат и радиус R.

5. Постройте окружность

а) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$,

б) $(x - 7)^2 + y^2 = 4$,

в) $x^2 + y^2 = 9$,

г) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$.

Решение: а) Это окружность с центром $(3; -2)$ и радиусом 1 (см. рис. 21а).

б) Это окружность с центром $(7; 0)$ и радиусом 2 (см. рис. 21б).

в) Это окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 3 (см. рис. 21в).

г) Преобразуем уравнение, выделив полные квадраты:
$x^2-2x+y^2+4y = 4$, $x^2-2x+1+y^2+4y+4 = 4+1+4$, $(x-1)^2+(y+2)^2 = 9$. Строим окружность с центром $(1; -2)$ и радиусом 3 (см. рис. 21г).

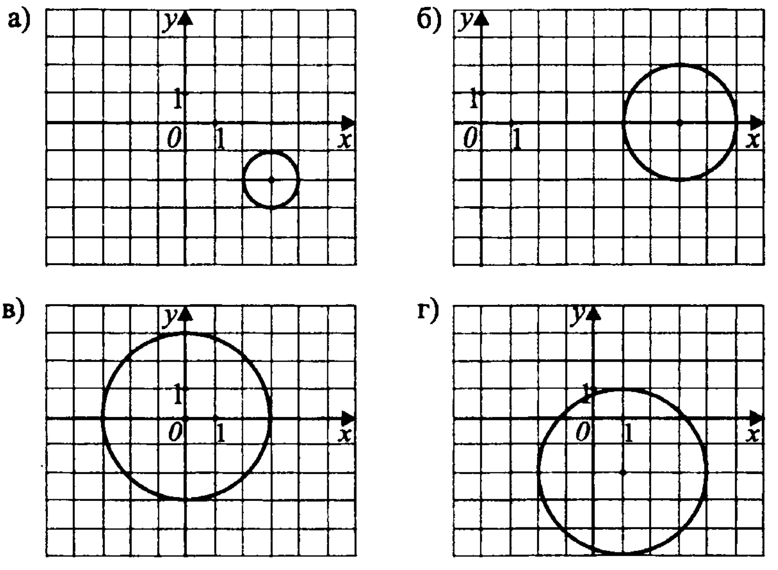


Рис. 21.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + 6x + y^2 = a^2 - 9, \\ (x-3)(y+3) = 0 \end{cases}$ имеет нечётное число решений.

Решение: Решим задачу графически.

Уравнение $x^2+6x+y^2 = a^2-9$ можно привести к виду $(x+3)^2+y^2 = a^2$, его график — окружность с центром в точке $A\ (-3; 0)$ и радиусом $R = |a|$. $(x-3)(y+3) = 0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x-3=0, \\ y+3=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{ll} x=3, & (1) \\ y=-3. & (2) \end{array}\right.$

Это две прямых, параллельных осям координат (см. рис. 22).

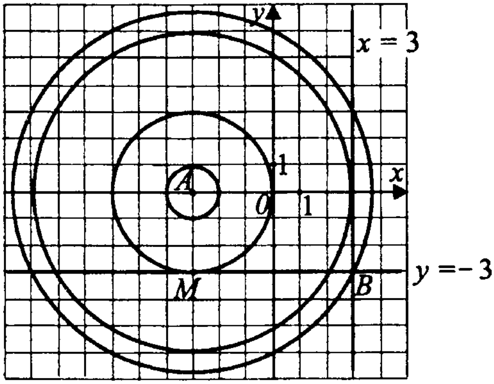


Рис. 22.

По рисунку видно, что расстояние от точки A до прямой $y = -3$ равно 3, а до прямой $x = 3$ равно 6. Значит, при $R < 3$ окружность и прямая (2) не имеют общих точек, при $R = 3$ имеют 1 общую точку M и при $R > 3$ имеют 2 точки пересечения. Аналогично при $R < 6$ окружность и прямая (1) не имеют общих точек, при $R = 6$ — одну и при $R > 6$ — две общих точки. Таким образом, система имеет нечётное число решений при $|a| = 3$, то есть при $a = \pm 3$, и при $|a| = 6$, то есть при $a = \pm 6$. Казалось бы, что других решений задача не имеет, но прямые $x = 3$ и $y = -3$ имеют общую точку $B(3; -3)$. Если окружность проходит через эту точку, система будет иметь 3 решения. Искомое значение a можно найти из прямоугольного $\triangle AMB$ или подставив значения $x = 3$, $y = -3$ в уравнение окружности. $|a| = \sqrt{45}$.

Ответ: $\pm 3; \pm 6; \pm\sqrt{45}$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых система
$\begin{cases} y = \sqrt{-x^2 - 6x - 5}, \\ y = a(x-3)+2 \end{cases}$ имеет решения.

Решение: Построим график уравнения
$y = \sqrt{-x^2 - 6x - 5}$, $y = \sqrt{4 - (x^2 + 6x + 9)}$.

Если $y \geqslant 0$, то $y^2 = 4 - (x+3)^2$, $(x+3)^2 + y^2 = 4$. При $y < 0$ нет точек, удовлетворяющих уравнению. Получилась полуокружность с центром $(-3; 0)$ и радиусом 2 (см. рис. 23).

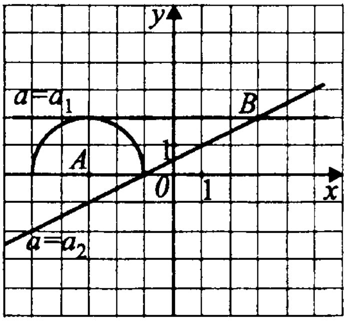


Рис. 23.

$y = a(x-3)+2$ — семейство прямых с угловым коэффициентом a, проходящих через точку $B(3; 2)$.

Рассмотрим рисунок 23.

Видно, что кривые имеют общие точки, то есть система уравнений имеет решения, если $a \in [a_1; a_2]$.

$a_1 = 0$. Найдём a_2 из условия, что прямая проходит через точку с координатами $(-1; 0)$.

$$a(-1-3)+2 = 0;\ -4a = -2,\ a = \frac{1}{2}.$$

Значит, система имеет решения при $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Упражнения

3.11. Постройте график функции $y = \dfrac{a}{x}$, если:

а) $a = 1$,

б) $a = 8$,

в) $a = 0{,}2$,

г) $a = -1$,

д) $a = -4$.

3.12. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $a|x| = -\dfrac{8x + 24}{x^2 + 3x}$ не имеет корней.

3.13. Постройте график окружности $x^2 + y^2 = a^2$, где:

а) $a = 1$,

б) $a = 2$,

в) $a = 3$,

г) $a = -2$.

3.14. Постройте график уравнения $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = a$, если:

а) $a = 1$,

б) $a = 4$,

в) $a = 9$,

г) $a = -4$.

3.15. Постройте график уравнения $(x - a)^2 + (y - 1)^2 = 4$, если:

а) $a = -3$,

б) $a = 0$,

в) $a = 4$.

3.16. Постройте график уравнения $(x + 2)^2 + (y + a)^2 = 1$, если:

а) $a = -3$,

б) $a = 0$,

в) $a = 4$.

3.17. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} (x + 5)(y + 3) = 0, \\ (x + 3)^2 + y^2 - 4y = a^2 - 4 \end{cases}$ имеет нечётное число решений.

3.18. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} y = \sqrt{4x - x^2}, \\ y - 2 = a(x + 4) \end{cases}$ имеет решения.

3.19. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 - 10x - 2y = a^2 + 2a - 25 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

5. Парабола

Рассмотрим график функции $y = x^2$. Это парабола (см. рис. 24) с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вверх. Парабола имеет ось симметрии, проходящую через вершину параллельно оси ординат Oy.

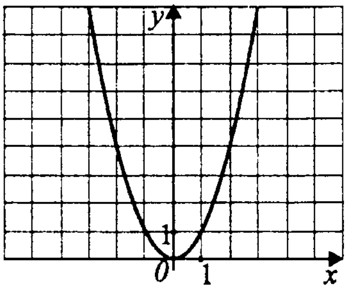


Рис. 24.

Парабола $y = (x-p)^2 + b$ получается из параболы $y = x^2$ сдвигом на вектор $\{p; b\}$. В точке $(p; b)$ находится вершина такой параболы. Например, $y = (x-p)^2 + 2$ — семейство парабол, вершина которых перемещается по прямой $y = 2$ (см. рис. 25).

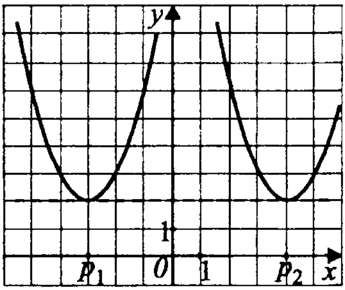


Рис. 25.

Вершины парабол $y = (x-2)^2 + b$ перемещаются по прямой $x = 2$ (см. рис. 26).

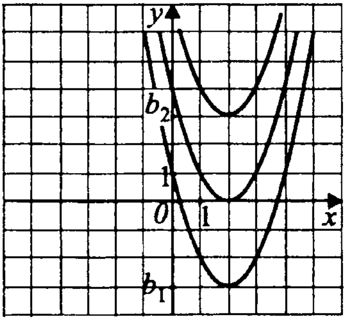


Рис. 26.

Параболы $y = ax^2$ $(a > 0)$ получаются из графика $y = x^2$ растяжением в a раз вдоль оси ординат Oy (см. рис. 27).

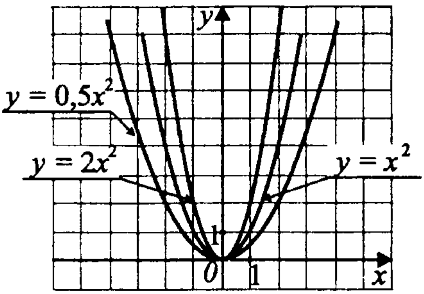


Рис. 27.

Рассмотрим параболу $y = -ax^2$. Она получается из параболы $y = ax^2$ отражением относительно оси абсцисс (см. рис. 28).

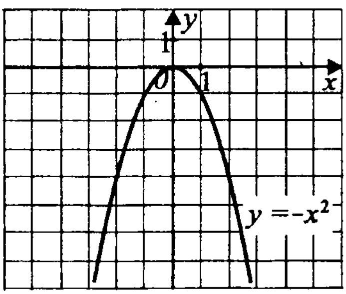


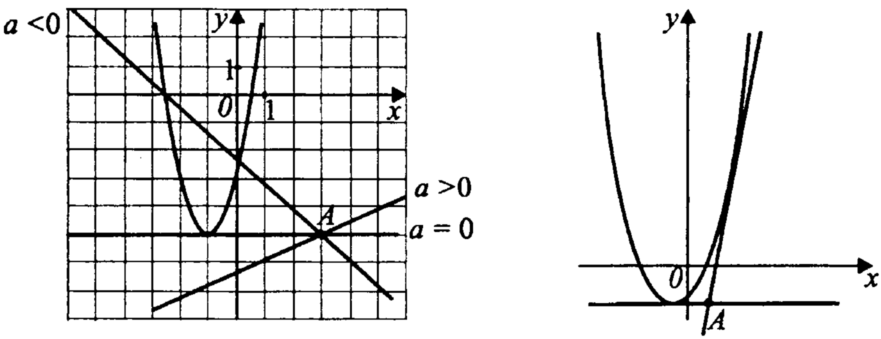
Рис. 28.

Если уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 + bx + c$, то её вершину можно найти по формулам $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; $y_0 = y(x_0)$.

8. Найдите значение параметра a, при котором система $\begin{cases} y = 2x^2 + 4x - 3, \\ y = ax - 5 - 3a \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

Решение: Построим графики уравнений.

$y = 2x^2 + 4x - 3$ — парабола с вершиной с координатами $x_0 = -\dfrac{4}{2 \cdot 2} = -1$, $y_0 = -5$ (см. рис. 29).



а) б)

Рис. 29.

Уравнение $y = ax - 5 - 3a$ запишем в виде $y = a(x - 3) - 5$. Это семейство прямых, проходящих через точку $A(3; -5)$. Видим, что при $a < 0$ прямая и парабола имеют 2 общие точки, а при $a = 0$ у них ровно одна общая точка. Рассмотрим случай $a > 0$. На рисунке 29б построен рисунок в другом масштабе. На этом рисунке видно, что при $a = a_1$ прямая и парабола также имеют единственную общую точку. Найдём a_1.

$2x^2 + 4x - 3 = ax - 5 - 3a$, $2x^2 + (4 - a)x + 3a + 2 = 0$.

Найдём дискриминант.

$D = (4-a)^2 - 4 \cdot 2(3a+2) = 16 - 8a + a^2 - 24a - 16 = a^2 - 32a = a(a-32)$.

Квадратное уравнение имеет один корень при $a = 0$ и $a = 32$.

Ответ: $a = 0$, $a = 32$.

6. Кусочные графики

Один из видов задач с параметром формулируется так: постройте график функции $y = f(x)$ (задаётся уравнением или системой условий) и определите, при каких значениях параметра m уравнение $f(x) = m$ имеет k (заданное число) корней. Рассмотрим несколько примеров.

9. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \leqslant 2, \\ (x-3)^2 - 1, \text{ если } 2 < x \leqslant 5, \\ 5{,}5 - 0{,}5x, \text{ если } x > 5. \end{cases} \qquad (1)$$

При каких значениях m график уравнения $y = m$ имеет ровно три общие точки с графиком функции (1)?

Решение: Построим график (1).

$y = x$ и $y = -0{,}5x + 5{,}5$ — прямые.

$y = (x-3)^2 - 1$ — парабола с вершиной $(3; -1)$.

График функции (1) изображен на рисунке 30.

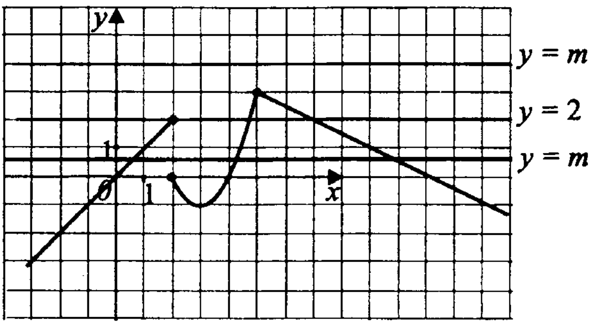


Рис. 30.

Прямые вида $y = m$ параллельны оси абсцисс. По рисунку видно, что три общие точки графики имеют при $m \in \{-1\} \cup [0; 2]$.

Ответ: $m \in \{-1\} \cup [0; 2]$.

Упражнения

3.19. Постройте график параболы $y = ax^2$, если:

а) $a = -2$,

б) $a = -1$,

в) $a = 1$,

г) $a = 0{,}5$,

д) $a = 3$.

3.20. Постройте график уравнения $y = -x^2 + a$, если:

а) $a = 0$,

б) $a = -3$,

в) $a = 4$.

3.21. Постройте график уравнения $y = (x + a)^2 + 5$, если:

а) $a = 0$,

б) $a = -3$,

в) $a = 4$.

3.22. Постройте график уравнения $y = |x| + a$, если:

а) $a = 0$,

б) $a = -3$,

в) $a = 4$.

3.23. Постройте график уравнения $y = |x + a| - 5$, если:

а) $a = 0$,

б) $a = -3$,

в) $a = 4$.

3.24. Найдите значения параметра a, при котором система
$\begin{cases} y - 2 = 6x - 3x^2, \\ x - 2 = a(y + 3) \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

3.25. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -x - 2, \text{ если } x < -1, \\ 2x - x^2 + 2, \text{ если } -1 \leqslant x < 2, \\ 2x - 4, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases} \quad (1)$$

При каких значениях p график уравнения $y = p$ имеет ровно 3 общие точки с графиком функции (1)?

3.26. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -\dfrac{3}{x}, \text{ если } x \leqslant -1, \\ 2 - x, \text{ если } -1 < x < 3, \\ x^2 - 10x + 26, \text{ если } x \geqslant 3. \end{cases} \quad (2)$$

При каких значениях p график уравнения $y = p$ имеет ровно 2 общие точки с графиком функции (2)?

3.27. Постройте график функции $y = \dfrac{x^3 - 4x}{x+2}$. (3)

При каких значениях p график уравнения $y = p$ имеет ровно 1 общую точку с графиком функции (3)?

§ 4. Квадратные уравнения с параметром

Напомним, что квадратным называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, в котором $a \neq 0$. Если $a = 0$, то уравнение становится линейным. Если значения параметров b или c равны нулю, то уравнение называют неполным.

Решим неполное уравнение $ax^2 + bx = 0$, $b \neq 0$. Вынесем за скобку общий множитель, получим $x(ax + b) = 0$. Уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ ax + b = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\dfrac{b}{a}. \end{array}\right.$ (На a можно разделить, так как $a \neq 0$). Уравнение имеет два корня.

Решим неполное уравнение $ax^2 + c = 0$, $c \neq 0$. $ax^2 = -c$, $x^2 = -\dfrac{c}{a}$.

Если $-\dfrac{c}{a} < 0$ (т.е. $ac > 0$), то корней нет.

Если же $-\dfrac{c}{a} > 0$ (т.е. $ac < 0$), то $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

Если же $b = 0$ и $c = 0$, то уравнение сводится к виду $ax^2 = 0$. Это уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Рассмотрим теперь полное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \cdot b \cdot c \neq 0$ (то есть все коэффициенты отличны от нуля).

Тогда $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (1), если $b^2 - 4ac \geqslant 0$,

а если $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение не имеет корней.

Выражение $b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения и обозначают буквой D.

Итак, если $D > 0$, квадратное уравнение имеет два корня,
если $D = 0$, один корень,
если $D < 0$, корней нет.

Если квадратное уравнение неполное, то формула (1) для него справедлива, но её использование не целесообразно.

1. При каких значениях p уравнение $x^2 + 3x - 2 = p$ имеет ровно один корень?

Решение: Это квадратное уравнение. Решим его двумя способами.

I способ — аналитический.

Запишем уравнение в виде $x^2 + 3x - 2 - p = 0$, $x^2 + 3x - (2 + p) = 0$. Квадратное уравнение имеет один корень, если дискриминант равен нулю. $D = 3^2 - 4 \cdot (-2 - p) = 9 + 8 + 4p = 4p + 17$.

$4p + 17 = 0$, $p = -\dfrac{17}{4} = -4\dfrac{1}{4}$.

II способ — графический.

Построим графики уравнений $y = x^2 + 3x - 2$ и $y = p$.

Первый из них — уравнение параболы с вершиной

$x_0 = -\dfrac{3}{2}$, $y_0 = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) - 2 = \dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} - 2 = -4\dfrac{1}{4}$, ветви которой направлены вверх.

Прямая $y = p$ проходит параллельно оси Ox (см. рис. 31) и пересекают ось ординат в точке с координатами $(0; p)$.

Видим, что прямая и парабола имеют одну общую точку при $p = -4\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $-4\dfrac{1}{4}$.

2. При каких значениях p два различных корня имеет уравнение
а) $6x^2 - px = 0$;
б) $x^2 + px - 8 = 0$;
в) $9x^2 + px + 4 = 0$;
г) $px^2 - 3 = 0$?

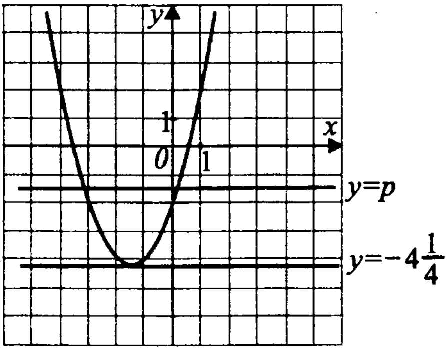


Рис. 31.

Решение:

а) $6x^2 - px = 0,\ x(6x - p) = 0,\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 6x - p = 0; \end{array}\right.\quad x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{p}{6}.$

Казалось бы, это уравнение при любом p имеет два корня. Но если $x_1 = x_2$, а это возможно при $\dfrac{p}{6} = 0$, то есть при $p = 0$, уравнение будет иметь только один корень. Значит, два корня уравнение имеет при $p \neq 0$.

б) $x^2 + px - 8 = 0$. Это квадратное уравнение при любом значении p. У него два корня, если дискриминант больше нуля.

$D = p^2 - 4 \cdot (-8) = p^2 + 32.$

Понятно, что $p^2 \geqslant 0$, тогда $p^2 + 32 > 0$ при любом значении p.

в) $9x^2 + px + 4 = 0$. Аналогично предыдущему пункту, два корня в этом уравнении будет при $D > 0$.

$D = p^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = p^2 - 12^2 = (p - 12) \cdot (p + 12).$

$(p - 12) \cdot (p + 12) > 0$ при $p > 12$ или $p < -12$.

г) $px^2 - 3 = 0$. Рассмотрим случай, когда это уравнение не является квадратным, то есть $p = 0$. Оно превращается в неверное равенство $0 - 3 = 0$, значит корней не имеет.

Если $p \neq 0$, то $x^2 = \dfrac{3}{p}$. Это уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{3}{p}}$, если $\dfrac{3}{p} > 0$, что верно при $p > 0$.

Ответ: а) $p \neq 0$, б) p — любое, в) $p < -12$ или $p > 12$, г) $p > 0$.

3. При каких значениях параметра m уравнение $mx^2 + 3x - 2 = 0$ имеет единственный корень?

Решение: При $m = 0$ уравнение становится линейным $3x - 2 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = \frac{2}{3}$.

При $m \neq 0$ уравнение квадратное, оно имеет один корень при $D = 0$. Дискриминант $D = 3^2 - 4 \cdot m \cdot (-2) = 9 + 8m$.

$D = 0$, если $9 + 8m = 0$, то есть $m = -\frac{9}{8}$.

Значит, уравнение имеет единственный корень при $m = 0$ и $m = -\frac{9}{8}$.

Ответ: 0; $-1\frac{1}{8}$.

4. При каких значениях параметра a уравнение $(a-8)x^2 + 2ax + a + 1 = 0$ имеет корни?

Решение: Если $a - 8 = 0$ $(a = 8)$, то уравнение не является квадратным. Подставим $a = 8$ в исходное уравнение $16x + 8 + 1 = 0$, $x = -\frac{9}{16}$ — корень уравнения.

Если $a \neq 8$, то уравнение имеет корни при $D \geqslant 0$.
$D = (2a)^2 - 4 \cdot (a - 8) \cdot (a + 1) = 4a^2 - 4(a^2 - 7a - 8) = 28a + 32$.

$D \geqslant 0$ при $28a + 32 \geqslant 0$, т.е. $a \geqslant -\frac{32}{28}$, $a \geqslant -1\frac{1}{7}$. В этом случае мы должны были бы исключить $a = 8$, но при этом значении параметра уравнение тоже имеет корень, значит подойдут все $a \geqslant -1\frac{1}{7}$.

Ответ: $\left[-1\frac{1}{7}; +\infty\right)$.

5. Решите уравнение $x^2 - 5px + 6p^2 = 0$.

Решение: $D = (5p)^2 - 4 \cdot 6p^2 = p^2$.

$$x_{1,2} = \frac{5p \pm \sqrt{p^2}}{2},\ x_1 = \frac{5p + p}{2} = 3p,\ x_2 = \frac{5p - p}{2} = 2p.$$

Ответ: $3p$, $2p$.

6. Решите уравнение $x^2 + 2px - x = p - p^2 + 6$.

Решение: Преобразуем уравнение

$x^2 + (2p-1)x + p^2 - p - 6 = 0$.

$D = (2p-1)^2 - 4(p^2 - p - 6) = 4p^2 - 4p + 1 - 4p^2 + 4p + 24 = 25$,

$$x_1 = \frac{-(2p-1) + \sqrt{25}}{2} = \frac{-2p+6}{2} = 3 - p.$$

$$x_2 = \frac{-(2p-1) - 5}{2} = \frac{-2p-4}{2} = -p - 2.$$

Ответ: $3 - p$, $-p - 2$.

7. Решите уравнение $(p-3)x^2 + (3p-4)x - 4p + 7 = 0$.

Решение: Если $p - 3 \neq 0$, т.е. $p \neq 3$, то

$D = (3p-4)^2 - 4(p-3)(-4p+7) = 9p^2 - 24p + 16 - 4(-4p^2 + 19p - 21) =$
$= 9p^2 - 24p + 16 + 16p^2 - 76p + 84 = 25p^2 - 100p + 100 = (5p-10)^2$.

$$x_{1,2} = \frac{-(3p-4) \pm (5p-10)}{2(p-3)},$$

$$x_1 = \frac{-3p + 4 + 5p - 10}{2(p-3)} = \frac{2p-6}{2p-6} = 1.$$

$$x_2 = \frac{-3p + 4 - 5p + 10}{2(p-3)} = \frac{-8p+14}{2(p-3)} = \frac{-4p+7}{p-3}.$$

Если $p = 3$, то уравнение становится линейным, $5x - 5 = 0$, $x = 1$.

Ответ: Если $p = 3$, $x = 1$;

если $p \neq 3$, то $x = 1$, $x = \dfrac{7-4p}{p-3}$.

8. Решите уравнение $(p-7)x^2 + x + 3 = 0$.

Решение: Если $(p-7) = 0$, $p = 7$, то уравнение линейное $x + 3 = 0$, $x = -3$.

Если $p \neq 7$, то уравнение квадратное. Найдём дискриминант квадратного уравнения.

$D = 1^2 - 4(p-7) \cdot 3 = 1 - 12p + 84 = 85 - 12p$.

Если $85 - 12p < 0$, $p > \dfrac{85}{12}$, то корней нет.

Если $85-12p=0,\ p=\frac{85}{12}$, то уравнение имеет один корень

$$x=-\frac{1}{2\left(\frac{85}{12}-7\right)}=-6.$$

Если $D>0,\ p<\frac{85}{12}$, то $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{85-12p}}{2(p-7)}$.

Ответ: Если $p=7$, то $x=-3$;

если $p=\frac{85}{12}$, то $x=-6$;

если $p<\frac{85}{12},\ p\neq 7$, то $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{85-12p}}{2(p-7)}$;

если $p>\frac{85}{12}$, то корней нет.

9. Решите уравнение $(a^2-1)x^2+(3a-3)x+2a-2=0$ при всех значениях параметра a.

Решение: Разберём несколько случаев.

1) $a^2-1\neq 0,\ a\neq\pm 1$. Тогда

$D=(3a-3)^2-4(a^2-a)(2a-2)=9(a-1)^2-4(a-1)(a+1)\cdot 2(a-1)=$
$=(a-1)^2\cdot(9-8(a+1))=(a-1)^2\cdot(1-8a)$.

Т.к. $a\neq 1,\ (a-1)^2>0$. Учитывая это, получаем $D<0$ при $1-8a<0$, то есть $a>\frac{1}{8}$.

При $a\in\left(\frac{1}{8};1\right)\cup(1;+\infty)$ корней нет.

При $a=\frac{1}{8}$ $(D=0)$ уравнение имеет один корень

$$x=-\frac{(3a-3)}{2(a^2-1)}=-\frac{3}{2(a+1)}=-\frac{3}{2\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)}=-\frac{4}{3}.$$

При $D > 0,\ 1 - 8a > 0,\ a < \frac{1}{8}$.

Уравнение имеет два корня.

$$x_{1,2} = \frac{-(3a-3) \pm \sqrt{(a-1)^2(1-8a)}}{2a^2-2}.$$

$$x_1 = \frac{-3(a-1) + (a-1)\sqrt{1-8a}}{2(a^2-1)} = \frac{-3+\sqrt{1-8a}}{2(a+1)},$$

$$x_2 = \frac{-3-\sqrt{1-8a}}{2(a+1)}.$$

Нам осталось разобрать два случая: $a = 1$ и $a = -1$.

При $a = 1$ уравнение превращается в тождество $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0$. Его корнем будет любое действительное число.

При $a = -1$ уравнение станет линейным $(-3-3)x - 2 - 2 = 0$, $-6x - 4 = 0,\ x = -\frac{2}{3}$.

Мы разобрали все возможные случаи и можно выписать ответ.

Ответ: Если $a = 1,\ x$ — любое число;

если $a = -1,\ x = -\frac{2}{3}$;

если $a < -1$ или $-1 < x < \frac{1}{8}$, то $x_{1,2} = -\frac{-3 \pm \sqrt{1-8a}}{2(a+1)}$;

если $a = \frac{1}{8}$, то $x = -\frac{4}{3}$;

если $\frac{1}{8} < a < 1$ или $a > 1$, то корней нет.

Давайте посмотрим, как можно было упростить решение, если заметить, что в левой части уравнения $(a^2-1)x^2 + (3a-3)x + 2a - 2 = 0$ есть общий множитель $(a-1)$.

Вынесем его за скобку.

$(a-1)\big((a+1)x^2 + 3x + 2\big) = 0$. Очевидно, что при $a = 1$ уравнение обращается в тождество при любом действительном x.

Если $a \neq 1$, получим уравнение $(a+1)x^2 + 3x + 2 = 0$.

При $a = -1$ оно линейное вида $3x + 2 = 0,\ x = -\frac{2}{3}$.

При $a \neq -1$ оно квадратное, тогда его дискриминант $D = 3^2 - 4(a+1)\cdot 2 = 9 - 8a - 8 = 1 - 8a$.

Если $D > 0,\ 1 - 8a > 0,\ a < \frac{1}{8}$, то корни уравнения $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1-8a}}{2(a+1)}$.

Если $D = 0,\ a = \frac{1}{8}$, то $x = -\frac{4}{3}$.

Если $D < 0,\ a > \frac{1}{8}$, то корней нет.

10. Найдите значения k, при которых прямая $y = kx - 8$ и парабола $y = x^2 + 5x - k$ имеют ровно одну общую точку.

Решение: Чтобы заданные парабола и прямая имели ровно одну общую точку, нужно, чтобы уравнение $kx - 8 = x^2 + 5x - k$ имело ровно один корень.

Выполним преобразования.

$x^2 - kx + 5x - k + 8 = 0,$

$x^2 - (k-5)x - k + 8 = 0;$

Получившееся квадратное уравнение имеет единственный корень при $D = 0$.

Найдём дискриминант.

$D = (k-5)^2 - 4\cdot(-k+8) = k^2 - 10k + 25 + 4k - 32 = k^2 - 6k - 7.$

$k^2 - 6k - 7 = 0$ при $k = -1,\ k = 7.$

Ответ: $-1;\ 7$.

11. Найдите значение p, при котором парабола $y = -3x^2 + px + 1$ и прямая $y = 2x + p$ пересекаются в точке с абсциссой $x = 3$.

Решение: Если графики пересекаются, то их ординаты в точке пересечения равны. Получаем $-3x^2 + px + 1 = 2x + p$.

Если $x = 3$, то $-3\cdot 3^2 + 3p + 1 = 2\cdot 3 + p,\ 2p = 32,\ p = 16.$

Ответ: 16.

Упражнения

4.1. При каких значениях параметра m уравнение $3x^2 - 5x + 1 - m = 0$ имеет а) ровно один корень?
б) два корня?

4.2. При каких значениях параметра p два различных корня имеет уравнение:
а) $2x^2 - px = 0$;
б) $x^2 - px - 2 = 0$;
в) $25x^2 - px + 9 = 0$;
г) $px^2 + 18 = 0$?

4.3. При каких значениях параметра p уравнение $px^2 - 2x + 4 = 0$ имеет единственный корень?

4.4. При каких значениях параметра a уравнение $(a+4)x^2 - 2ax + a - 3 = 0$ имеет корни?

Решите уравнения:

4.5. $x^2 + 8px - 9p^2 = 0$.

4.6. $x^2 + (2a + 3)x + a^2 + 3a = 0$.

4.7. $x^2 + 5x - ax - 2a^2 - a + 6 = 0$.

4.8. $(p + 2)x^2 + (2p - 4)x - 3p - 2 = 0$.

4.9. $(p + 5)x^2 - x - 1 = 0$.

4.10. $(a^2 - 4)x^2 - (3a + 6)x - 5a - 10 = 0$.

4.11. Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx + 3$ и парабола $y = x^2 + 3x + k$ имеют ровно одну общую точку.

4.12. Найдите значение p, при котором прямая $y = 2x - 3p$ и парабола $y = 6x^2 - px - 5$ пересекаются в точке с абсциссой $x = 2$.

§ 5. Разложение квадратного трёхчлена на множители. Формулы Виета

1. Разложение квадратного трёхчлена на множители

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то трёхчлен $ax^2 + bx + c$ можно разложить на множители следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если дискриминант соответствующего квадратного уравнения равен нулю, то в уравнении один корень x_1 и $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$. Если при этом $a > 0$, то $ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}(x - x_1)\right)^2$ и трёхчлен является полным квадратом.

1. Напишите квадратное уравнение, корнями которого являются числа 3 и $5p$.

Решение: Нам нужно написать любое квадратное уравнение, корни которого 3 и $5p$.

Напишем приведённое квадратное уравнение вида $x^2 + bx + c = 0$. Пусть $x_1 = 3$, $x_2 = 5p$. Тогда $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) =$
$= (x - 3)(x - 5p) = x^2 - 3x - 5px + 15p = x^2 - (3 + 5p)x + 15p$.

Ответ: $x^2 - (3 + 5p)x + 15p = 0$.

2. Найдите значение p, при котором уравнение $2x^2 + 3px + 90 + p = 0$ имеет корни $-p$ и -5.

Решение: Если квадратное уравнение имеет корни $-p$ и -5, то его можно записать в виде $a(x + p)(x + 5) = 0$, $a(x^2 + (p + 5)x + 5p) = 0$.

В искомом уравнении $a = 2$, тогда $2x^2 + (2p + 10)x + 10p = 0$ — искомое. По условию $2p + 10 = 3p$ и $10p = p + 90$.

Получим $p = 10$.

Ответ: $p = 10$.

3. При каких числовых значениях m выражение $(4 - m)x^2 + (m + 2)x + m$ является полным квадратом?

Решение: Квадратный трёхчлен является полным квадратом, если его можно представить в виде $(px + q)^2$ или (что то же самое) в виде $a(x - x_0)^2$, где $a > 0$. Значит, заданное выражение является полным квадратом, если $4 - m > 0$ и при этом дискриминант D квадратного уравнения
$(4 - m)x^2 + (m + 2)x + m = 0$ равен нулю.

Найдём D.

$D = (m + 2)^2 - 4(4 - m) \cdot m = m^2 + 4m + 4 - 16m + 4m^2 = 5m^2 - 12m + 4$.

$5m^2 - 12m + 4 = 0$, если $m = 2$ или $m = \dfrac{2}{5}$.

$4 - m > 0$ при $m < 4$. Очевидно, что оба значения m удовлетворяют требуемому условию.

Ответ: $2; \frac{2}{5}$.

2. Теорема Виета

Для приведённого квадратного уравнения $x^2+px+q=0\,(1)$, имеющего корни x_1 и x_2, выполняются следующие формулы:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q. \end{cases} \qquad (2)$$

При этом, если дискриминант равен нулю, то считают $x_1=x_2$.

Справедлива также теорема, обратная теореме Виета.

Если для чисел x_1, x_2, p, q справедливы формулы (2), то x_1 и x_2 — корни уравнения (1) и других корней нет.

Для квадратного уравнения общего вида $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ с корнями x_1 и x_2 верны формулы Виета $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$, а также и обратная теорема Виета, аналогичная указанной выше.

4. Дано уравнение $x^2-(3p^2-p+2)x+7p+3=0$. Известно, что сумма его корней равна 4. Найдите произведение его корней и число p.

Решение: По теореме Виета, если данное квадратное уравнение имеет корни x_1 и x_2, то

$$\begin{cases} x_1+x_2=3p^2-p+2, \\ x_1x_2=7p+3. \end{cases}$$

По условию $x_1+x_2=4$, тогда $3p^2-p+2=4$, $3p^2-p-2=0$, $p_1=1$, $p_2=-\frac{2}{3}$.

Если $p=1$, $x_1x_2=7\cdot1+3=10$, если $p=-\frac{2}{3}$, $x_1x_2=7\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+3=-1\frac{2}{3}$.

Однако мы не нашли x_1 и x_2, а потому нельзя утверждать, что уравнение будет иметь вещественные корни при найденных значениях p. При $p=1$ уравнение $x^2-4x+10=0$ не имеет вещественных корней, при

$p = -\frac{2}{3}$ уравнение $x^2 - 4x - \frac{5}{3} = 0$ имеет вещественные корни.

Ответ: $x_1 x_2 = -1\frac{2}{3}$, $p = -\frac{2}{3}$.

5. При некотором значении параметра p корни квадратного уравнения $5px^2 + (p^2 - 16)x - 2p + 1 = 0$ являются противоположными числами. Найдите эти корни и значения p.

Решение: По теореме Виета для корней уравнения x_1 и x_2 выполняется: $x_1 + x_2 = -\frac{p^2 - 16}{5p}$, $x_1 x_2 = \frac{1 - 2p}{5p}$, если $p \neq 0$. По условию $x_2 = -x_1$. Получаем $x_1 + (-x_1) = 0$, $x_1 x_2 = x_1(-x_1) = -x_1^2$.

$-\frac{(p^2 - 16)}{5p} = 0$, тогда $p_1 = 4$, $p_2 = -4$. Отсюда при $p = 4$,

$-x_1^2 = \frac{1 - 2p}{5p} = \frac{1 - 8}{20} = -\frac{7}{20}$, $x_1^2 = \frac{7}{20}$, $x_1 = \sqrt{\frac{7}{20}}$ или $x_1 = -\sqrt{\frac{7}{20}}$.

При $p = -4$, $-x_1^2 = \frac{1 - 2 \cdot (-4)}{5 \cdot (-4)} = -\frac{9}{20}$, $x_1^2 = \frac{9}{20}$, $x_1 = \frac{3}{\sqrt{20}}$ или $x_1 = -\frac{3}{\sqrt{20}}$.

Ответ: При $p = -4$ корни $\frac{3}{\sqrt{20}}$ и $-\frac{3}{\sqrt{20}}$;
при $p = 4$ корни $\sqrt{\frac{7}{20}}$ и $-\sqrt{\frac{7}{20}}$.

6. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2 + 4tx - 11t^2 = 0$ удовлетворяют условию $x_1^2 + x_2^2 = 38$. Найдите t.

Решение: По теореме Виета $x_1 + x_2 = -4t$, $x_1 x_2 = -11t^2$. По условию $x_1^2 + x_2^2 = 38$. Выразим $x_1^2 + x_2^2$ через $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$.
$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-4t)^2 - 2(-11t^2) = 16t^2 + 22t^2 = 38t^2$, $38t^2 = 38$, $t^2 = 1$, $t_{1,2} = \pm 1$. Очевидно, что при $t = \pm 1$ уравнение имеет вещественные корни.

Ответ: 1; -1.

7. Разность корней уравнения $2x^2-4x+p=0$ равна 4. Найдите значение p и корни уравнения.

Решение: По теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{-4}{2}$, $x_1x_2=\frac{p}{2}$. По условию $x_1-x_2=4$. Составим систему уравнений $\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1x_2=\frac{p}{2}, \\ x_1-x_2=4. \end{cases}$

Из системы $\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1-x_2=4 \end{cases}$ найдем $x_1=3$ и $x_2=-1$.

Тогда $\frac{p}{2}=3\cdot(-1)$, $p=-3\cdot 2=-6$.

Ответ: $p=-6$, $x_1=3$, $x_2=-1$.

8. Напишите приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются $p+1$ и $2p-9$.

Решение: Будем искать уравнение в виде $x^2+kx+q=0$, корни которого x_1 и x_2 удовлетворяют формулам Виета: $x_1+x_2=-k$, $x_1x_2=q$.

По условию $x_1=p+1$, $x_2=2p-9$.

Получаем $q=(p+1)(2p-9)=2p^2-7p-9$,

$-k=(p+1)+(2p-9)=3p-8$, $k=8-3p$.

Искомое уравнение $x^2+(8-3p)x+2p^2-7p-9=0$.

Ответ: $x^2+(8-3p)x+2p^2-7p-9=0$.

Упражнения

5.1. Напишите приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

а) 4 и p

б) -8 и $p+3$

в) $p-8$ и $3p-4$

г) 0 и $8p$

5.2. Найдите значения параметра p, при которых уравнение

$3x^2+(p+6)x-2p-10=0$ имеет корни $\frac{4}{3}$ и $-p$.

5.3. Дано уравнение $x^2 + (6t^2 + t - 5)x + 8 - 3t = 0$. Известно, что произведение его корней равно 2. Найдите число t и сумму его корней.

5.4. При каких значениях m выражение
$(m-1)x^2 - (6+4m)x + 7m + 3 = 0$ является полным квадратом?

5.5. Дано уравнение $x^2 + (6t^2 + t - 5)x + 3t + 2 = 0$. Известно, что сумма его корней равна -2. Найдите число t и произведение его корней.

5.6. При некотором значении параметра p корни квадратного уравнения $3px^2 + (p^2 - 25)x - 20 + p = 0$ являются противоположными числами. Найдите значение p и эти корни.

5.7. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2 + 6mx + 8m^2 = 0$ удовлетворяют условию $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{8}$. Найдите m.

5.8. Один из корней уравнения $6x^2 + 5px + 2p = 0$ в 4 раза меньше другого и не равен нулю. Найдите p.

5.9. Напишите приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются числа

а) $2p$ и $3p$;

б) $p - 5$ и $3p + 2$;

в) $7p + 1$ и 0.

§ 6. Расположение корней квадратного уравнения относительно заданных точек

Если в уравнении с параметром дискриминант оказывается полным квадратом, несложно найти корни уравнения и сопоставить их с заданной точкой (точками).

Разберём несколько подобных задач.

1. Поиск корней и ограничения

1. Найдите все значения параметра a, при которых только один корень квадратного уравнения $x^2 - (3p + 9)x + 30p - 10 = 0$ меньше 7.

Решение: Найдём корни данного уравнения.

$D = (3p+9)^2 - 4(30p - 10) = 9p^2 + 54p + 81 - 120p + 40 =$

$= 9p^2 - 66p + 121 = (3p-11)^2$. $x_1 = \dfrac{3p+9+(3p-11)}{2} = \dfrac{6p-2}{2} = 3p-1$,

$x_2 = \dfrac{3p+9-(3p-11)}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$.

Так как $x_2 = 10 > 7$, то x_1 должен быть меньше 7, поскольку один из корней должен быть меньше семи. $3p - 1 < 7$, $3p < 8$, $p < 2\frac{2}{3}$.

Замечание: Поиск корней уравнения упрощается, если записать его в виде $x^2 - ((3p-1)+10) + 10(3p-1) = 0$. По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = 3p-1$, $x_2 = 10$.

Ответ: $p < 2\frac{2}{3}$.

2. Найдите все значения параметра m, при которых один из корней уравнения $x^2 - (m+3)x - 2m^2 + 3m + 2 = 0$ находится между числами 2 и 4, а второй — между числами -2 и 1.

Решение: Данное квадратное уравнение имеет дискриминант
$D = (m+3)^2 - 4 \cdot (-2m^2 + 3m + 2) = m^2 + 6m + 9 + 8m^2 - 12m - 8 =$
$= 9m^2 - 6m + 1 = (3m-1)^2 \geqslant 0$, поэтому его корни

$$x_1 = \frac{m+3+(3m-1)}{2} = 2m+1,\ x_2 = \frac{m+3-(3m-1)}{2} = -m+2.$$

Мы не знаем, какой из корней больше, поэтому разберём два случая, чтобы найти искомые значения параметра.

1) $\begin{cases} 2 < 2m+1 < 4, \\ -2 < -m+2 < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 < 2m < 3, \\ -4 < -m < -1; \end{cases}$ $\begin{cases} 0{,}5 < m < 1{,}5, \\ 1 < m < 4; \end{cases}$
$1 < m < 1{,}5$.

2) $\begin{cases} 2 < -m+2 < 4, \\ -2 < 2m+1 < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < -m < 2, \\ -3 < 2m < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -2 < m < 0, \\ -1{,}5 < m < 0; \end{cases}$
$-1{,}5 < m < 0$.

Ответ: $-1{,}5 < m < 0$ или $1 < m < 1{,}5$.

Если поиск корней квадратного уравнения приводит к нахождению дискриминанта, который не является полным квадратом, то становится технически менее сложным не выписывать и решать неравенства относительно корней уравнения, а воспользоваться теоремой Виета или свойствами квадратичной функции.

2. Сравнение корней с нулём

1°. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$. Если $x_1 \cdot x_2 < 0$, то x_1 и x_2 — числа разного знака. Другими словами, если $\frac{c}{a} < 0$, то данное уравнение имеет два корня, один из которых больше нуля, а другой меньше нуля.

Показать, что уравнение имеет корни при $\frac{c}{a} < 0$ достаточно просто.

Так как $\frac{c}{a} < 0$, то и $ac < 0$, тогда дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac > 0$, и мы получили, что в уравнении два различных корня.

2°. Выясним, при каких условиях уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два положительных корня.

В квадратном уравнении есть действительные корни, если $D \geqslant 0$. (Если корни должны быть разные, то $D > 0$).

Рассмотрим числа x_1 и x_2. Они положительны $(x_1 > 0,\ x_2 > 0)$ только тогда, когда их сумма и произведение положительны, то есть $x_1 \cdot x_2 > 0$ и $x_1 + x_2 > 0$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Получаем, что $x_1 > 0,\ x_2 > 0$, если $\begin{cases} \frac{c}{a} > 0, \\ -\frac{b}{a} > 0, \\ D \geqslant 0. \end{cases}$

Аналогично $x_1 < 0,\ x_2 < 0$, если $\begin{cases} \frac{c}{a} > 0, \\ -\frac{b}{a} < 0, \\ D \geqslant 0. \end{cases}$

3. Найдите p, при которых корни уравнения $3x^2 + (p+6)x + p = 0$:
а) разного знака (один положительный, другой — отрицательный);
б) положительные;
в) отрицательные.

Решение: Найдём дискриминант уравнения
$D = (p+6)^2 - 12p = p^2 + 36.$
Уравнение при любом значении p имеет два различных корня, т.к. $D > 0$.

а) Корни разного знака (один положительный, другой — отрицательный), если $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{p}{3} < 0$, то есть при $p < 0$.

б) Оба корня положительные, если $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{p}{3} > 0$ и

$x_1 + x_2 = -\dfrac{p+6}{3} > 0$; $\begin{cases} p > 0, \\ p + 6 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} p > 0, \\ p < -6; \end{cases}$ таких p нет.

в) Оба корня отрицательные, если

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \dfrac{p}{3} > 0, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{p+6}{3} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} p > 0, \\ p + 6 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} p > 0, \\ p > -6; \end{cases} \quad p > 0.$$

Ответ: а) $p < 0$; б) нет таких p; в) $p > 0$.

4. Найдите p, при которых корни уравнения $x^2 - 6x - 5 - p = 0$ больше числа 2.

Решение: Найдём дискриминант. $D = 36 - 4(-5-p) = 56 + 4p$. В условии не сказано, что должно быть два различных корня, поэтому $D \geqslant 0$.

Также необходимо, чтобы корни x_1 и x_2 удовлетворяли условиям $x_1 > 2,\ \ x_2 > 2.$

Рассмотрим два числа $x_1 - 2 > 0$ и $x_2 - 2 > 0$. Эти условия будут выполняться, если

$$\begin{cases} (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0, \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0, \\ (x_1 + x_2) - 4 > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Используя формулы Виета, получим $x_1 + x_2 = 6,\ \ x_1 \cdot x_2 = -5 - p$. Подставим выражение для суммы и произведения в систему (1) и учтём условие $D \geqslant 0$.

$$\begin{cases} -5 - p - 2 \cdot 6 + 4 > 0, \\ 6 - 4 > 0, \\ 56 + 4p \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} p < -13, \\ p \geqslant -14; \end{cases} \quad -14 \leqslant p < -13.$$

Ответ: $-14 \leqslant p < -13$.

В этой задаче мы воспользовались сведением сравнения корней квадратного уравнения с некоторым числом к сравнению корней с нулём. К сожалению, этот метод работает только в том случае, если оба корня сравниваются с одним и тем же числом.

3. Расположение корней квадратичной функции

5. При каких значениях параметра a число 2 находится между корнями квадратного уравнения $x^2 + (3a + 4)x + 2 - a = 0$?

Решение: Обозначим левую часть исходного уравнения через $f(x)$. Парабола $y = f(x)$ должна пересекать ось абсцисс в двух точках $x_1 < 2$ и $x_2 > 2$. Графически этот случай показан на рисунке 32.

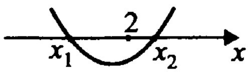


Рис. 32.

Видим, что если $f(x) < 0$, то при условии того, что ветви параболы направлены вверх, этого необходимо и достаточно для выполнения условия $x_1 < 2 < x_2$. Причём при этом обязательно будет два различных корня.

$f(2) = 2^2 + (3a + 4) \cdot 2 + 2 - a = 14 + 5a$. $14 + 5a < 0$, $a < -2{,}8$.

Ответ: $a < -2{,}8$.

Запишем условия, при которых число β лежит между корнями квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Достаточно рассмотреть два случая в зависимости от знака a (см. рис. 33).

$x_1 < \beta < x_2$

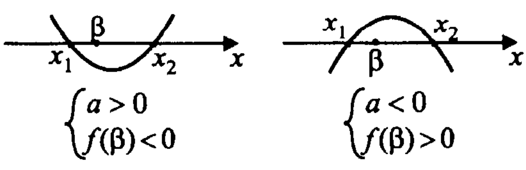


Рис. 33.

Совокупность этих двух систем равносильна неравенству $af(\beta) < 0$.

Теперь найдём условия, при которых корни квадратичной функции принадлежат заданному промежутку, то есть $\beta < x_1 < x_2 < \gamma$ для чисел β и γ.

Рассмотрим функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$. Чтобы упростить рассуждения, умножим все коэффициенты на a. Тогда корни уравнения $f(x) = 0$ будут совпадать с корнями уравнения $a \cdot f(x) = 0$, но ветви соответствующей параболы будут направлены вверх, так как $a^2 > 0$. Графическое представление условия $\beta < x_1 < x_2 < \gamma$ на рисунке 34.

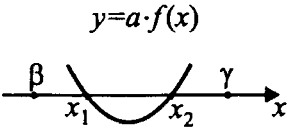


Рис. 34.

Чтобы корни были, нужно условие $D > 0$ или $D \geqslant 0$ (в зависимости от того, что сказано в условии о количестве корней). Чтобы корни принадлежали промежутку $(\beta; \gamma)$, должны выполняться условия.

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ a \cdot f(\beta) > 0, \\ a \cdot f(\gamma) > 0, \\ \beta < x_0 < \gamma; \end{cases}$$

здесь $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы.

Задач, связанных с расположением корней квадратичной функции, много, но если понять принцип, то практически любую из них можно решить подобным образом.

При этом важно помнить, что требование $a \cdot f(\beta) < 0$ обеспечивает положение числа β между корнями, а $a \cdot f(\beta) > 0$ обуславливает положение числа β вне промежутка между корнями (если корни есть). Положение вершины параболы x_0 показывает, с какой стороны от числа β в этом случае находятся корни.

6. При каких значениях a любой корень уравнения $x^2+6x+5 = 0$ меньше любого корня уравнения $(a-3)x^2 + 2x - 1 = 0$?

Решение: Корнями уравнения $x^2 + 6x + 5 = 0$ являются числа -1 и -5. Значит, нам нужно, чтобы все корни второго уравнения были больше числа $\beta = -1$.

Рассмотрим $f(x) = (a-3)x^2 + 2x - 1$.

Если $a - 3 = 0$, то $x = 0{,}5$ и этот случай нам подходит. Обозначим через D дискриминант, а через x_0 — абсциссу вершины параболы $y = f(x)$.

Если $a - 3 \neq 0$, то уравнение квадратное и имеет корень, только если $D \geqslant 0$. $-1 < x_1 < x_2$ (см. рис. 35), если $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ (a-3)f(-1) > 0, \\ x_0 > -1. \end{cases}$

$y=(a-3)\cdot f(x)$

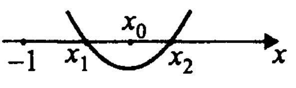


Рис. 35.

$D = 4-4\cdot(a-3)\cdot(-1) = 4a-8$, $f(-1) = (a-3)\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-1 = a-6$,

$x_0 = -\dfrac{2}{2\cdot(a-3)} = -\dfrac{1}{a-3}$.

$$\begin{cases} 4a - 8 \geqslant 0, \\ (a-3)(a-6) > 0, \\ -\dfrac{1}{a-3} > -1; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geqslant 2, \\ a < 3 \text{ или } a > 6, \\ 1 - \dfrac{1}{a-3} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leqslant a < 3 \text{ или } a > 6 \\ \dfrac{a-4}{a-3} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \leqslant a < 3 \text{ или } a > 6 \\ a < 3 \text{ или } a > 4; \end{cases} \quad 2 \leqslant a < 3 \text{ или } a > 6.$$

Учитывая, что $a = 3$ подходит, получаем $2 \leqslant a \leqslant 3$ или $a > 6$.

Ответ: $2 \leqslant a \leqslant 3$ или $a > 6$.

Упражнения

6.1. Найдите все значения параметра p, при которых только один корень квадратного уравнения $x^2 + (2p - 11)x + 24 - 6p = 0$ больше 2.

6.2. Найдите все значения параметра p, при которых один из корней уравнения $x^2 - 2px - 3p^2 + 4p - 1 = 0$ находится между числами -2 и 0, а другой — между числами 1 и 4.

6.3. Найдите все значения параметра p, при которых оба корня уравнения $x^2 - (8p+1)x + 7p^2 + 7p = 0$ меньше -12.

6.4. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $5x^2 + (a+2)x - a = 0$:

а) разного знака (один — положительный, другой — отрицательный),

б) положительные,

в) отрицательные.

6.5. Найдите все значения параметра p, при которых оба корня уравнения $x^2 - 12x + p + 32 = 0$ меньше числа 7 и различны.

6.6. При каких значениях параметра a число 3 находится между корнями квадратного уравнения $x^2 + (2a+1)x - 12a - 3 = 0$?

6.7. При каких значениях параметра k число 2 находится между корнями уравнения $kx^2 + 2x - 3 = 0$?

6.8. При каких значениях параметра a любой корень уравнения $x^2 + 5x + 7 - 2p = 0$ больше числа -5?

6.9. При каких значениях параметра p любой корень уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$ больше любого корня уравнения $(2-p)x^2 - x - 5 = 0$?

§ 7. Использование свойств функций и алгебраических выражений

1. Использование симметрии алгебраических выражений

Иногда в задаче требуется единственность или нечётность числа корней уравнения. Допустим, мы при этом заметили, что в этой задаче выражения симметричны, то есть не меняются, например, при замене x на $-x$ или, в случае присутствия двух переменных, при перемене местами x и y (график уравнения имеет ось симметрии $y = x$). Возникает желание воспользоваться этой симметрией.

В таком случае полезно помнить, что если координаты некоторой точки A являются решением этой системы, то и координаты симметричной точки являются решением, и тогда для выполнения требования единственности решения необходимо (но не достаточно), чтобы точка A (решение) лежала на оси симметрии. При этом на оси симметрии может лежать не одна точка из решения, или возможен случай, когда одна точка лежит на оси, а другие не лежат. То есть при использовании симметрии, как правило, необходима проверка.

7. При каких значениях параметра a уравнение $(2a-3)x^4+(a+7)x^2-2a^2-14a=0$ имеет единственное решение?

Решение: Заметим, что при замене x на $-x$ уравнение не изменится, поэтому если x_0 является корнем уравнения, то и $-x_0$ тоже будет корнем. Значит, необходимое условие единственности корня следующее: $x_0=-x_0$, то есть $x_0=0$ — корень уравнения.

Подставим в уравнение $x=0$.

$$-2a^2-14a=0,\quad -2a(a+7)=0,\ a=0 \text{ или } a=-7.$$

Теперь нужно проверить, сколько корней при этих значениях a. Тот факт, что $x=0$ является корнем, ещё не означает, что других корней нет.

1) $a=0$, $(2\cdot 0-3)x^4+(0+7)x^2-0=0$, $-3x^4+7x^2=0$, $x^2(7-3x^2)=0$, $\left[\begin{array}{l} x^2=0, \\ 7-3x^2=0, \end{array}\right.$ $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

Получаем 3 корня.

2) $a=-7$, $(2\cdot(-7)-3)x^4+0-0=0$, $-17x^4=0$, $x=0$.

Получаем 1 корень.

Значит, корень единственный при $a=-7$

Ответ: -7.

8. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} y=x^2+20a, \\ x=y^2+20a \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение: Заметим, что при одновременной замене x на y и y на x система не меняется. Значит, вместе с каждым решением $(x_0;y_0)$ система имеет решение $(y_0;x_0)$. Отсюда, необходимое условие единственности решения — существование решения вида $x=y$ (и единственность решения такого вида).

При $x=y$ получим уравнение $x=x^2+20a$, $x^2-x+20a=0$. Оно имеет единственное решение, если дискриминант $1-80a$ равен нулю. Имеем $a=\dfrac{1}{80}$.

При $a = \dfrac{1}{80}$ получаем $\begin{cases} y = x^2 + \dfrac{1}{4}, \\ x = y^2 + \dfrac{1}{4}. \end{cases}$ (1)

Сложим уравнения системы

$$x + y = x^2 + y^2 + \frac{1}{2},$$

$$x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{2} = 0,$$

$$4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y + 2 = 0,$$

$$4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 = 0,$$

$$(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 0.$$

Сумма двух неотрицательных выражений равна нулю только при условии, что каждое из них равно нулю: $\begin{cases} 2x - 1 = 0, \\ 2y - 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0{,}5, \\ y = 0{,}5. \end{cases}$

Чтобы проверить, является ли пара $(0{,}5; 0{,}5)$ решением системы (1), подставим это значение в любое из уравнений системы. $0{,}5 = 0{,}5^2 + \dfrac{1}{4}$, верно. Значит, при $a = \dfrac{1}{80}$ исходная система имеет единственное решение.

Ответ: $\dfrac{1}{80}$.

2. Использование монотонности функций

Решение ряда задач можно упростить, если использовать некоторые свойства монотонных функций.

1) Если функция $y = f(x)$ монотонная (то есть возрастает (убывает) при всех допустимых x), то уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня (см. рис. 36).

2) Если функция $y = f(x)$ возрастает, а функция $y = g(x)$ убывает при всех допустимых x, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня (см. рис. 37). Подчеркнем, что такие уравнения могут иметь единственный корень или вообще не иметь корней.

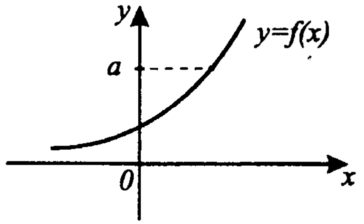


Рис. 36.

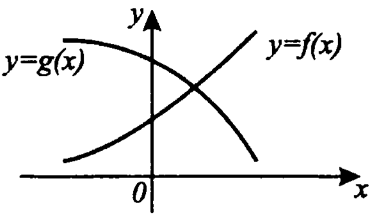


Рис. 37.

3) Сумма возрастающих функций — возрастающая функция.

9. Решите уравнение $x^2 - a^4 = |a| - \sqrt{x}$ при всех значениях параметра a.

Решение: Запишем уравнение в виде $x^2 + \sqrt{x} = a^4 + |a|$. Заметим, что $x = a^2$ — корень уравнения при любом значении a. Найдем ОДЗ: $x \geqslant 0$. При этих x функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ возрастают, значит возрастает и их сумма $y = x^2 + \sqrt{x}$. Правая часть уравнения — число. Значит, это уравнение имеет единственное решение $x = a^2$.

Ответ: $x = a^2$.

10. При всех $a > 0$ найдите корни уравнения $\frac{a}{x} = x^2 - 2x + a + 1$, удовлетворяющие условию $x \geqslant 1$.

Решение: Попробуем решить эту задачу графически.

Перепишем условие $\begin{cases} a > 0, \\ y = \dfrac{a}{x}, \quad (1) \\ y = (x-1)^2 + a, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$ (2)

График уравнения (1) — гипербола, при $a > 0$ её ветви расположены в I и III четвертях (см. рис. 38).

$y = (x-1)^2 + a$ — парабола, ветви которой направлены вверх, вершина расположена в точке $(1; a)$.

При $x \geqslant 1$ $y = (x-1)^2 + a$ возрастает, а $y = \frac{a}{x}$ убывает.

Значит, у них не более одной общей точки.

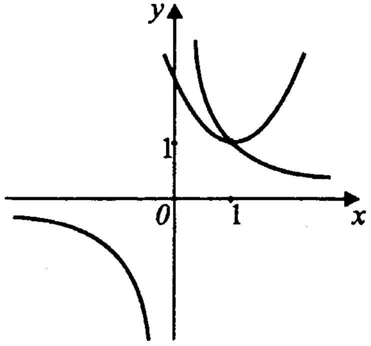


Рис. 38.

Заметим, что при $x = 1$ значения этих двух функций совпадают. Значит, $x = 1$ — единственный корень уравнения, удовлетворяющий заданному условию.

Ответ: $x = 1$.

3. Использование ОДЗ и оценка множества значений

Иногда после нахождения ОДЗ нам остаётся проверить, являются ли некоторые числа корнями уравнения.

11. Решите уравнение $\sqrt{x-5} + (a-2)x = 7\sqrt{15-3x} + a^2 - 24$ при всех значениях параметра a.

Решение: Найдем ОДЗ.

$$\begin{cases} x-5 \geqslant 0; \\ 15-3x \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant 5; \\ x \leqslant 5; \end{cases} \quad x = 5.$$

Множество допустимых значений переменной x состоит из одного числа. Проверим, при каких a число 5 будет корнем уравнения.

$$\sqrt{5-5} + (a-2)\cdot 5 = 7\sqrt{15-3\cdot 5} + a^2 - 24,$$

$5a - 10 = a^2 - 24$, $a^2 - 5a - 14 = 0$, $a_1 = -2$, $a_2 = 7$.

При других a корней нет.

Ответ: Если $a = -2$, $a = 7$, то $x = 5$; если $a \neq 2$, $a \neq -7$, то корней нет.

Метод оценки (использующий ограниченность некоторых выражений и функций) также позволяет легко решить некоторые задачи.

12. Найдите, при каких значениях m и n выражение $n^2 + m^2 - 6m + 18n + 3$ принимает наименьшее значение. Какое это значение?

Решение: Обозначим через A и преобразуем заданное выражение.

$$A = n^2 + 18n + m^2 - 6m + 3 = (n^2 + 18n + 81) - \\ -81 + (m^2 - 6m + 9) - 9 + 3 = (n + 9)^2 + (m - 3)^2 - 87.$$

Полный квадрат некоторого выражения принимает наименьшее значение (нуль), если это выражение равно нулю. Так как $(n + 9)^2 \geqslant 0$, $(m - 3)^2 \geqslant 0$, то $A \geqslant -87$, причём $A = -87$, только если

$$\begin{cases} n + 9 = 0, \\ m - 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} n = -9, \\ m = 3. \end{cases}$$

Ответ: $n = -9, m = 3$; наименьшее значение -87.

13. При каких значениях параметра a уравнение $|x + 3a + 7| + (x - a + 15)^2 = 0$ имеет хотя бы один корень?

Решение: $|x + 3a + 7| \geqslant 0, \quad (x - a + 15)^2 \geqslant 0$.

Их сумма может быть равна нулю, только если оба эти выражения равны нулю.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + 3a + 7 = 0, \\ x - a + 15 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3a - 7, \\ 4a - 8 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2, \\ x = -13. \end{cases}$$

Исходное уравнение имеет корень при $a = 2$.

Ответ: 2.

Упражнения

7.1. При каких значениях параметра a уравнение $(3a - 7)x^4 + (2 - a)x^2 - 4a + 2a^2 = 0$ имеет единственное решение?

7.2. При каких значениях параметра b система $\begin{cases} 2y = 2x^2 + 5b, \\ 2x = 2y^2 + 5b \end{cases}$ имеет единственное решение?

7.3. Решите уравнение $x^6 + 2x^4 - 2a^2 = |a|(a^2 + 3) - 3(\sqrt{x})^4$ при всех значениях параметра a.

7.4. Для всех положительных значений a найдите корни уравнения $\frac{3a}{x} = x^2 - 4x + a + 3$, удовлетворяющие условию $x \geqslant 2$.

7.5. Решите уравнение $\sqrt{24 - 3x} + (p + 3)x = 2\sqrt{2x - 16} - p^2 - 2p$ при всех значениях параметра p.

7.6. Найдите, при каких значениях p и t выражение $p^2 + 4t^2 - 8p + 4t + 1$ принимает наименьшее значение. Какое это значение?

7.7. При каких значениях параметра a уравнение $(x + 2a - 3)^2 + \sqrt{x + a - 1} = 0$ имеет хотя бы один корень?

7.8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(x + a^2)^2 + |3x - a + 4| + |9x + 16| = 0$ имеет корни.

Ответы

Решение линейных уравнений с параметром

1.1. $x = 5a$. **1.2.** $x = \dfrac{-7a + a^3 + 18}{8}$. **1.3.** Если $a = -2$, то корней нет; если $a \neq -2$, то $x = \dfrac{7a}{a+2}$. **1.4.** Если $a \neq \pm 1$, то $x = \dfrac{2}{1-a}$; если $a = -1$, то x — любое число; если $a = 1$, то корней нет. **1.5.** Если $a = 3$, то x — любое число; если $a = -1$, то корней нет; если $a \neq 3$, $a \neq -1$, то $x = \dfrac{a}{a+1}$. **1.6.** $a = 5$, $-1\frac{1}{4} < a \leqslant -1$. **1.7.** $a = 1$, $a = \frac{1}{2}$. **1.8.** Если $a = 0$, то решений нет; если $a \neq 0$, то $x = 2$, $y = -\dfrac{1}{a}$.

Решение линейных неравенств с параметром

2.1. $a \leqslant -2\frac{2}{3}$. **2.2.** $x \geqslant \frac{3}{7}a + 7$. **2.3.** $x > \dfrac{5a+8}{-4}$. **2.4.** Если $a = -2$, x — любое число; если $a > -2$, $x > \dfrac{6a}{a+2}$; если $a < -2$, $x < \dfrac{6a}{a+2}$. **2.5.** Если $a = \frac{2}{5}$, нет решений; если $a > \frac{2}{5}$, $x \geqslant \dfrac{3a+1}{5a-2}$; если $a < \frac{2}{5}$; $x \leqslant \dfrac{3a+1}{5a-2}$. **2.6.** $p = 6{,}5$. **2.7.** $p \leqslant 5{,}2$. **2.8.** $-2{,}2 < a \leqslant -0{,}2$. **2.9.** Если $a < -6$, то $x < 11$; если $a \geqslant -6$, то $x < 5 - a$. **2.10.** $a \leqslant -2$.

Графики на плоскости Oxy

3.6. $k = -3$. **3.7.** $a = 11$. **3.8.** а) $a = 0$, б) $a = 3$. **3.9.** а) $a \neq 0$, $a \neq 10$, б) $a = 0$. **3.10.** $a \leqslant -0{,}2$, $a \geqslant 3$. **3.12.** $a = 0$, $a = \frac{8}{9}$. **3.17.** ± 2; ± 5; $\pm\sqrt{29}$. **3.18.** $-0{,}5$; 0. **3.19.** $a > 1$. **3.25.** $a = 0$. **3.26.** $0 \leqslant p \leqslant 2$, $p = 3$. **3.27.** $0 < p < 1$, $3 < p \leqslant 5$. **3.28.** $p = -1$, $p = 8$.

Квадратные уравнения с параметром

4.1. а) $-1\frac{1}{12}$; б) $m > -1\frac{1}{12}$. **4.2.** а) $p \neq 0$; б) при любом p; в) $p > 30$ или $p < -30$; г) $p < 0$. **4.3.** $p = 0$, $p = -3$. **4.4.** $a \leqslant 12$. **4.5.** p, $-9p$. **4.6.** $-a$,

$-a-3$. **4.7.** $a+2$, $3-2a$. **4.8.** 1, $\frac{-3p-2}{p+2}$. **4.9.** Если $p=-5$, $x=-1$; если $p<-5\frac{1}{4}$, нет корней; если $-5\frac{1}{4}<p<-5$, $p>-5$, $x_{12}=\frac{1\pm\sqrt{4p+21}}{2(p+5)}$.

4.10. Если $a=-2$, то x — любое число; если $a=2$, то $x=1\frac{2}{3}$; если $1{,}55\leqslant a<2$, $a>2$, $x_{12}=\frac{-3\pm\sqrt{20a-31}}{2(a-2)}$; если $a<1{,}55$, то корней нет. **4.11.** $k=3$, $k=7$. **4.12.** $p=-15$.

Разложение квадратного трёхчлена на множители

5.1. а) $x^2-(4+p)x+4p=0$; б) $x^2+(5-p)x-8p-24=0$; в) $x^2+(12-4p)x+3p^2-28p+32=0$; г) $x^2-8px=0$. **5.2.** $p=5$. **5.3.** $t=2$, $x_1+x_2=-21$. **5.4.** $m=6$. **5.5.** $t=-\frac{7}{6}$, $x_1x_2=-1{,}5$. **5.6.** При $p=5$, $x_{1,2}=\pm1$. **5.7.** -2. **5.8.** 3. **5.9.** а) $x^2-5px+6p^2=0$; б) $x^2+(3-4p)x+3p^2-13p-10=0$; в) $x^2-(7p+1)x=0$.

Расположение корней квадратного уравнения относительно заданных точек

6.1. $p\geqslant3$ и $p=2{,}5$; (указание: не забудьте рассмотреть случай $D=0$). **6.2.** $-\frac{1}{3}<p<0$; $1<p<\frac{5}{3}$. **6.3.** $p<-13$. **6.4.** а) $a>0$, б) $a<-12-\sqrt{140}$, в) $-12+\sqrt{140}<a<0$. **6.5.** $3<p<4$. **6.6.** $a>1{,}5$. **6.7.** $-0{,}25<k<0$. **6.8.** $\frac{3}{8}\leqslant p<\frac{7}{2}$. **6.9.** $a<-4$, $2<a\leqslant2{,}05$.

Использование свойств функций и алгебраических выражений

7.1. 2. **7.2.** $\frac{1}{10}$. **7.3.** Если $a\geqslant0$, $x=\sqrt{a}$; если $a<0$, $x=\sqrt{-a}$. **7.4.** $x=3$. **7.5.** Если $p\neq-2$, $p\neq12$, то корней нет; если $p=-2$, $p=12$, то $x=8$. **7.6.** $p=4$, $t=-0{,}5$, значение -16. **7.7.** $a=2$. **7.8.** $a=-1\frac{1}{3}$.

ГИА-9

Учебное издание

Коннова Елена Генриевна

МАТЕМАТИКА. 9 КЛАСС
ПОДГОТОВКА К ГИА. ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

Под редакцией ***Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *В. Кириченко*
Компьютерная верстка *Г. Безуглова*
Корректор *Н. Коновалова*

Подписано в печать с оригинал-макета 06.02.2014.
Формат 60x84 1/16. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,72.
Тираж 5000 экз. Заказ № **20.**

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ЗАО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.