ЕГЭ за 30 дней

МАТЕМАТИКА

ЭКСПРЕСС-РЕПЕТИТОР

А.П. ВЛАСОВА, Н.И. ЛАТАНОВА,
Н.В. ЕВСЕЕВА, Л.А. ШИШКИНА,
Г.Н. ХРОМОВА

ЕГЭ за 30 дней

МАТЕМАТИКА

ЭКСПРЕСС-РЕПЕТИТОР

АСТ•Астрель
Москва

УДК 373:51
ББК 22.1я721
Е32

Е32 **ЕГЭ** за 30 дней : Математика : Экспресс-репетитор / А.П. Власова, Н.И. Латанова, Н.В. Евсеева, Л.А. Шишкина, Г.Н. Хромова — М.: АСТ: Астрель, 2011. — 175, [1] с. — (Единый государственный экзамен).

ISBN 978-5-17-073145-9 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 978-5-271-33909-7 (ООО «Издательство Астрель»)

В пособии, адресованном выпускникам, абитурентам и учителям, системно представлен курс математики в том объеме, в котором он проверяется на ЕГЭ.

Пособие рассчитано на 30 занятий. Каждое занятие включает теоретический материал, примеры решения типовых задач и ответы к ним. Добросовестная работа с данным пособием поможет подготовиться к экзамену за месяц и набрать максимальный балл при выполнении ЕГЭ по математике.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

Тесты

**Власова Алла Петровна, Латанова Нина Ивановна,
Евсеева Наталья Владимировна, Шишкина Людмила Алексеевна,
Хромова Галина Николаевна**

ЕГЭ
за 30 дней

МАТЕМАТИКА

ЭКСПРЕСС-РЕПЕТИТОР

Редакция «Образовательные проекты»

Ответственный редактор *Г.Н. Хромова*
Художественный редактор *Т.Н. Войткевич*
Технический редактор *А.Л. Шелудченко*
Корректор *И.Н. Мокина*
Оригинал-макет подготовлен ООО «БЕТА-Фрейм»
Обложка — дизайн-группа «Дикобраз»

Подписано в печать 02.02.2011. Формат 84×108 $^1/_{16}$
Усл. печ. л. 18,48. Тираж экз. Заказ №

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2; 953005 — литература учебная

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.60.953.Д.001683.02.10 от 05.02.2010 г.

ООО «Издательство Астрель» 129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а

ООО «Издательство АСТ» 141100, РФ, Московская обл., г. Щелково, ул. Заречная, д. 96

Наши электронные адреса: www.ast.ru. E-mail: astpub@aha.ru

ISBN 978-5-17-073145-9 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 978-5-271-33909-7 (ООО «Издательство Астрель»)

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Если вы хотите быстро подготовиться к ЕГЭ или проверить свою готовность к экзамену, а заодно и повторить школьный курс математики, то эта книга будет вам неоценимым помощником. В ней вы найдете самый необходимый теоретический материал, многочисленные примеры выполнения экзаменационных заданий и дополнительные задания для самостоятельного решения, чтобы проверить свои знания.

Открывается книга контрольной работой, по содержанию и структуре аналогичной экзаменационной. Она включает все задания группы В и три задания группы С (задания С5 и С6 — олимпиадного уровня, они достаточно сложны и требуют отдельной подготовки). Выполнив эту контрольную работу, вы поймете, на что надо обратить особое внимание, какие темы проработать более внимательно. Разбор этой контрольной завершает первое занятие.

Каждый день рассчитан на полтора часа занятий. Наиболее легким заданиям посвящено одно занятие, более объемным или трудным, охватывающим разнообразный материал, — два или три занятия. На каждом занятии дается краткий теоретический материал, основные формулы, примеры выполнения типовых заданий. Плюс дополнительные примеры для самостоятельного решения. Постарайтесь выполнить их. Ко всем дополнительным примерам приведены ответы.

В конце книги дана вторая контрольная работа, чтобы вы смогли проверить свои знания и оценить, насколько вы готовы в ЕГЭ. Последний день посвящен тренировке по заполнению экзаменационных бланков и оформлению решений.

Желаем успеха!

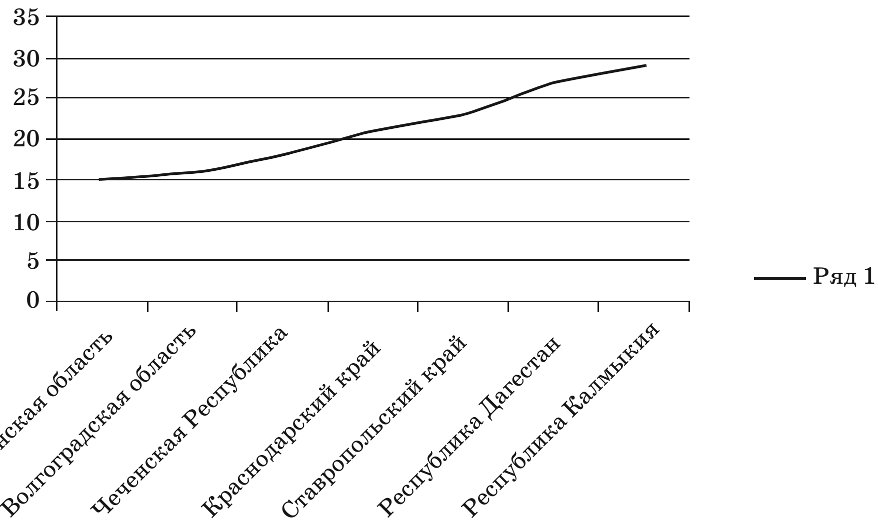
День 1

Контрольная работа № 1

Часть 1

B1. Блокнот дороже ручки на 20%. Ручка стоит 15 руб. У Пети есть 100 рублей. Он купил 2 блокнота. Сколько ручек может купить Петя на оставшиеся деньги?

B2. На графике представлены конкурентные позиции Дагестана в сфере добычи нефти в 2008 г. По оси абсцисс отложено место соответствующей области в РФ. Определите, какая область находится на низшей позиции? В ответе укажите номер области, начиная слева.



B3. Решите уравнение $7^{\sqrt{x-2}} = 343$.

B4. Острые углы прямоугольного треугольника ABC равны 15° и 75°. Определите угол между высотой CH и медианой CM, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

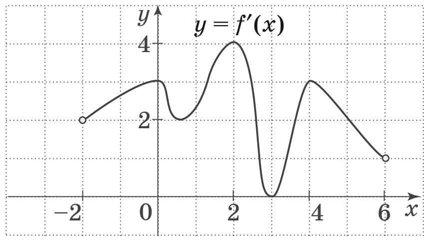
B5. Для украшения зала требуется купить растения в горшках в количестве 1500 штук. Возможны три варианта поставщиков. В какой фирме закупка наиболее дешевая?

Фирма	Стоимость 10 горшков	Стоимость доставки в % от стоимости цветов	Дополнительные условия
1	770 руб.	4%	
2	780 руб.	2%	
3	800 руб.	1%	Доставка бесплатная при стоимости заказа от 120 тыс. руб.

B6. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты: (2; 1), (6; 1), (3; 5), (5; 5).

B7. Найдите значение выражения $3^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{25}} + 2 \cdot 4^{\log_2 \sqrt{2}}$.

B8. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = x + 5$ или совпадает с ней.



B9. Объем одного куба в 125 раз больше объема другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

B10. В квартире имеется 5 ламп накаливания по 100 вт, срок службы 3000 часов и цена одной лампы 25 руб. Какова будет денежная экономия, если все лампы накаливания заменить люминесцентными (20 вт) по цене 150 руб., срок службы 12 000 часов, за расчетный период 12 000 часов?

B11. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{1}{x^2 + 3x - 4}$ на отрезке $\left[-3; -\dfrac{1}{4}\right]$.

B12. В течение часа на одном станке можно сделать на 5 деталей меньше, чем на другом, поэтому при изготовлении на нем партии из 100 деталей времени затрачивается на 1 час больше. За какое время можно изготовить 100 деталей на станке с большей производительностью?

Часть 2

C1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{\cos 2x + \cos \dfrac{3x}{4}}{1 - \sin x} = 1, \\ 3 - 3\sin x - 2(\cos x)^2 = 0. \end{cases}$

C2. В правильной четырехугольной пирамиде $ABCDT$ сторона основания равна $3\sqrt{2}$. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $30°$. Найдите расстояние между BD и AT.

C3. Решите неравенство $11^{\log_{\frac{1}{11}}(\log_7 x^2)} < 7^{\log_{\frac{1}{7}}(\log_{11} x^2)}$.

Разбор выполнения заданий

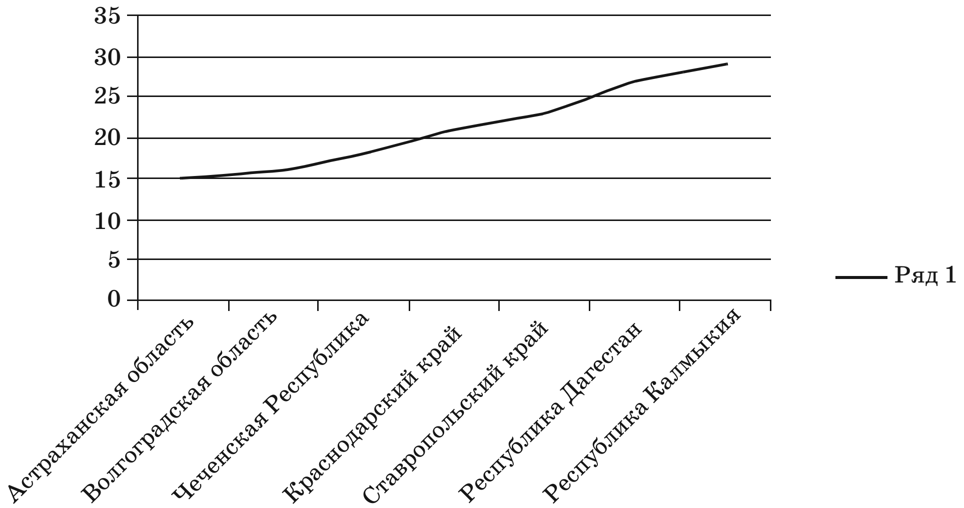
Часть 1

B1. Блокнот дороже ручки на 20%. Ручка стоит 15 руб. У Пети есть 100 рублей. Он купил 2 блокнота. Сколько ручек может купить Петя на оставшиеся деньги?

Решение. Пусть стоимость ручки составляет 100%, тогда стоимость блокнота будет 120%. Откуда находим, что блокнот стоит 18 руб. После покупки двух блокнотов у Пети осталось 64 руб., на которые Петя может купить 4 ручки.

Ответ: 4.

B2. На графике представлены конкурентные позиции Дагестана в сфере добычи нефти в 2008 г. По оси абсцисс отложено место соответствующей области в РФ. Определите, какая область находится на низшей позиции? В ответе укажите номер области, начиная слева.



Решение. Из графика видно, что низшую конкурентную позицию занимает Астраханская область, она занимает первую позицию.

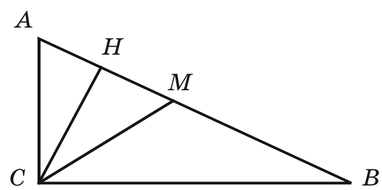
Ответ: 1.

B3. Решите уравнение $7^{\sqrt{x-2}} = 343$.

Решение. Приведем обе части уравнения к одному и тому же основанию: 7. Получим $7^{\sqrt{x-2}} = 7^3$, $\sqrt{x-2} = 3$, $x - 2 = 9$, $x = 11$.

Ответ: 11.

B4. Острые углы прямоугольного треугольника ABC равны 15° и 75°. Определите угол между высотой CH и медианой CM, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Решение. $\angle ACH = \angle MBC = \angle MCB = 15^\circ$ (так как треугольник MCB равнобедренный). Таким образом, $\angle HCM = 90^\circ - \angle ACH - \angle MBC = 60^\circ$.

Ответ: 60.

B5. Для украшения зала требуется купить растения в горшках в количестве 1500 штук. Возможны три варианта поставщиков. В какой фирме закупка наиболее дешевая?

Фирма	Стоимость 10 горшков	Стоимость доставки в % от стоимости цветов	Дополнительные условия
1	770 руб.	4%	
2	780 руб.	2%	
3	800 руб.	1%	Доставка бесплатная при стоимости заказа от 120 тыс. руб.

Решение. Рассчитаем стоимость покупки в каждой фирме с учетом доставки и дополнительных условий.

Фирма 1. Так как цена указана за 10 горшков, то стоимость 1 горшка равна 77 руб., а стоимость 1500 горшков составляет $77 \cdot 1500 = 115\,500$ (руб.). Определим стоимость доставки: $115\,500 \cdot 0{,}04 = 4620$ (руб.), а стоимость всей покупки с доставкой: $115\,500 + 4620 = 120\,120$ (руб.).

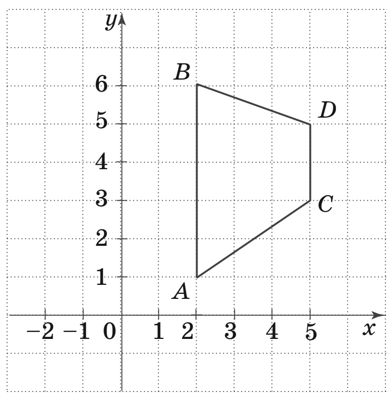
Фирма 2. Стоимость 1 горшка равна 78 руб., а стоимость 1500 горшков составляет $78 \cdot 1500 = 117\,000$ (руб.). Определим стоимость доставки: $117\,000 \times \times\, 0{,}02 = 2340$ (руб.), а стоимость всей покупки с доставкой: $117\,000 + 2340 = = 119\,340$ (руб.).

Фирма 3. Стоимость 1 горшка равна 80 руб., стоимость 1500 горшков составляет $80 \cdot 1500 = 120\,000$ (руб.). С учетом дополнительных условий, что доставка бесплатная, стоимость всей покупки равна 120 000 (руб.).

Сравним стоимость предполагаемой покупки в каждой фирме: 120 120 (руб.) в первой, 119 340 (руб.) во второй, 120 000 (руб.) в третьей, очевидно, самый дешевый вариант предлагает фирма 2.

Ответ: 2.

B6. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты: (2; 1), (6; 1), (3; 5), (5; 5).



Решение. На бумаге в клеточку нарисуем вершины трапеции. Видим, что $AB \parallel DC$. Определим по клеточкам длины сторон: $AB = 5$, $DC = 2$, высота трапеции $h = 3$. По определению площади трапеции $S = \dfrac{AB + DC}{2} \cdot 3 = \dfrac{5+2}{2} \cdot 3 = \dfrac{7}{2} \cdot 3 = = 10{,}5$.

Ответ: 10,5.

B7. Найдите значение выражения $3^{\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{25}} + 2 \cdot 4^{\log_2\sqrt{2}}$.

Решение. Чтобы воспользоваться основным логарифмическим тождеством, приведем первый логарифм к основанию 3, а второй — к основанию 2:

$$3^{\log_3(\sqrt[4]{25})^2} + 2 \cdot 2^{2\log_2\sqrt{2}} = 5 + 4 = 9.$$

Ответ: 9.

B8. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = x + 5$ или совпадает с ней.

Решение. Из геометрического смысла производной имеем, что угловой коэффициент касательной к графику функции численно равен значению производной в точке, к которой проведена касательная. Из графика видно, что значение, равное 1, производная принимает в двух точках.

Ответ: 2.

B9. Объем одного куба в 125 раз больше объема другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

Решение. Обозначим длину ребра одного куба b, другого a. Тогда их объемы равны V_1 и V_2. $V_1 = b^3$, $V_2 = a^3$. Из условия задачи $V_1 = 125 \cdot V_2$, т.е. $b^3 = 125 \cdot a^3$. Откуда $b = 5a$. Площади поверхностей кубов соответственно равны $S_1 = 6b^2$ и $S_2 = 6a^2$. Сделаем замену в формуле $S_1 = 6b^2 = 6 \cdot (5a)^2 = 6 \cdot 25 \cdot a^2 = 25 \cdot 6 \cdot a^2 = 25 \cdot S_2$.

Ответ: 25.

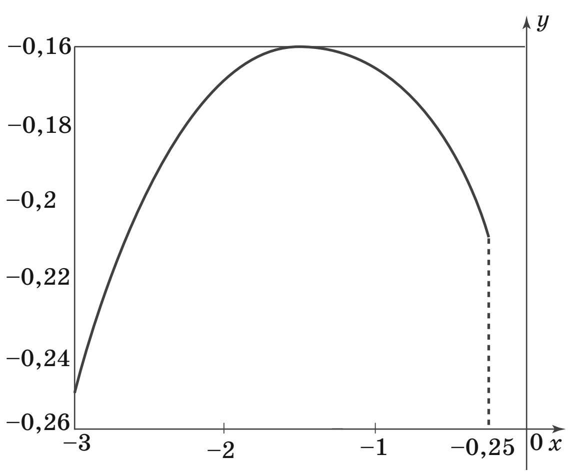
B10. В квартире имеется 5 ламп накаливания по 100 вт, срок службы 3000 часов и цена одной лампы 25 руб. Какова будет денежная экономия, если все лампы накаливания заменить люминесцентными (20 вт) по цене 150 руб., срок службы 12 000 час, за расчетный период 12 000 часов?

Решение. За расчетный период нам понадобится всего $4 \cdot 5 = 20$ обычных ламп накаливания стоимостью $20 \cdot 25 = 500$ руб. Денежные затраты на оплату электроэнергии равны $100 \cdot 5 \cdot 12\,000 \cdot 3{,}8 = 22\,800\,000$ (руб.), к этой сумме прибавим стоимость самих ламп. Итого получаем 22 800 500 (руб). Затраты на оплату электроэнергии с люминесцентными лампами равны $5 \cdot 20 \times 3{,}8 \cdot 12\,000 = 4\,560\,000$ плюс стоимость самих ламп 750 (руб.), итого получается 4 560 750 (руб.). Таким образом, получаем экономию за расчетный период 12 000 часов 18 239 750 (руб.).

Ответ: 18 239 750.

B11. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{1}{x^2 + 3x - 4}$ на отрезке $\left[-3; -\dfrac{1}{4}\right]$.

Решение. График функции $y = \dfrac{1}{x^2 + 3x - 4}$ изображен на рис.



Из рисунка получаем, что наименьшее значение возможно или в точке $x = -3$ или $x = -1/4$. Получим, что $y(-3) = -0{,}25$; $y(-1/4) \approx -0{,}213$. Таким образом получаем, что наименьшее значение функции достигается в точке -3 и равно $-0{,}25$.

Ответ: $-0{,}25$.

B12. В течение часа на одном станке можно сделать на 5 деталей меньше, чем на другом, поэтому при изготовлении на нем партии из 100 деталей времени затрачивается на 1 час больше. За какое время можно изготовить 100 деталей на станке с большей производительностью?

Решение. Пусть p_1 (дет./ч) — производительность первого станка, p (дет./ч) — производительность второго станка. Тогда $p_1 = p + 5$. Условию задачи будет удовлетворять следующее уравнение: $\frac{100}{p} = \frac{100}{p+5} + 1$, $p^2 + 5p - 500 = 0$, $p = 20$. Производительность станка с большей производительностью будет 25, а время, за которое можно изготовить 100 деталей, равно 4 часа.

Ответ: 4.

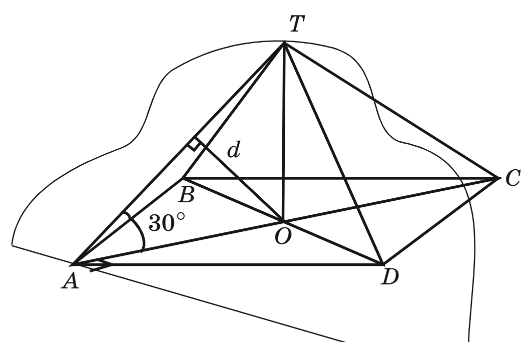
Часть 2

C1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{\cos 2x + \cos\dfrac{3x}{4}}{1 - \sin x} = 1, \\ 3 - 3\sin x - 2(\cos x)^2 = 0. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: $\sin x \neq 1$. Решаем второе уравнение исходной системы: $3 - 3\sin x - 2(\cos x)^2 = 0$, $-2(1 - (\sin x)^2) - 3\sin x + 3 = 0$, $2(\sin x)^2 - 3\sin x + 1 = 0$, $\sin x = 1$ (посторонний корень – п.к.), $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Подставляем полученное значение $\sin x = \frac{1}{2}$ в первое уравнение системы, получим $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} = 2$ (1). Так как $\cos 2x \leqslant 1$ и $\cos\frac{3x}{4} \leqslant 1$, то равенство (1) возможно только тогда, когда $\cos 2x = 1$, $2x = 2\pi k$, $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ и $\cos\frac{3x}{4} = 1$, $\frac{3x}{4} = 2\pi l$, $x = \frac{8\pi l}{3}$, $l \in \boldsymbol{Z}$. Теперь надо найти общие решения, т.е. $\pi k = \frac{8\pi l}{3}$ или $3k = 8l$. Таким образом, получаем, что $k = 8t$, $l = 3p$; $t, p \in \boldsymbol{Z}$. Или решения исходной системы: $x = 8\pi l$, $l \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $x = 8\pi l$, $l \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

C2. В правильной четырехугольной пирамиде $ABCDT$ сторона основания равна $3\sqrt{2}$. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $30°$. Найдите расстояние между BD и AT.



Решение. Диагональ квадрата $ABCD$ равна 6. Рассмотрим треугольник OTC.

$OT = \sqrt{3}$. Проведем плоскость через AT параллельно BD. Для этого в плоскости ABC проведем прямую l, параллельную BD. Прямые l и AT образуют плоскость β (как две пересекающиеся прямые), которая будет параллельна BD (по признаку параллельности прямой и плоскости). Плоскости ABC и β пересекаются по прямой l. Построим плоскость, перпендикулярную к ABC и β. Для этого из точки T опустим перпендикуляр на ABC, обозначим точку пересечения как O. Затем из точки O опустим перпендикуляр на прямую l. По теореме о трех перпендикулярах прямые $l \perp AT$, $l \perp AO$. Из треугольника TOA находим расстояние от точки O до плоскости β. Это будет перпендикуляр из вершины прямого угла $\rho = \dfrac{\sqrt{3}\cdot 3}{\sqrt{9+3}} = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

С3. Решите неравенство $11^{\log_{\frac{1}{11}}(\log_7 x^2)} < 7^{\log_{\frac{1}{7}}(\log_{11} x^2)}$.

Решение. ОДЗ: $x \neq 0$; $11^{-\log_{11}(\log_7 x^2)} < 7^{-\log_7(\log_{11} x^2)}$, $11^{\log_{11}(\log_7 x^2)^{-1}} < 7^{\log_7(\log_{11} x^2)^{-1}}$, $\dfrac{1}{\log_7 x^2} < \dfrac{1}{\log_{11} x^2}$, $\dfrac{\ln 7}{\ln x^2} < \dfrac{\ln 11}{\ln x^2}$, $\dfrac{1}{\ln x^2}(\ln 7 - \ln 11) < 0$, $\dfrac{1}{\ln x^2} > 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

День 2

Задание B1

В заданиях группы B1 представлена реальная ситуация, возникающая при покупке и продаже товаров. Эти задания связаны с действиями с процентами, нахождением целой части числа при делении с недостатком и с избытком и с другими простейшими вычислениями.

Пример 1. Кусочек сахара весом 10 г растворен в 150 г воды. Определите концентрацию полученного раствора.

Решение. Концентрация полученного раствора — это процентное содержание сахара в растворе, т.е. количество процентов сахара в ста процентах раствора. Вес полученного раствора составляет $150 + 10 = 160$ (г). Определим, сколько процентов составляет сахар весом 10 г в растворе весом 160 г. Для этого составим пропорцию:

160 г — 100%,

10 г — x %,

откуда находим $x = \dfrac{10 \cdot 100}{160} = 6{,}25$ (%).

Ответ: 6,25.

Пример 2. Фермер планировал собрать 66 000 ц зерна, а собрал на 4% больше. Сколько зерна собрал фермер?

Решение. Примем 66 000 ц за 100%. Тогда фермер собрал 104% зерна. Составим пропорцию:

66 000 ц — 100%,

x ц — 104%,

откуда определяем, что фермер собрал $x = \dfrac{66000 \cdot 104}{100} = 68\,640$ (ц).

Ответ: 68 640.

Пример 3. Какое расстояние в километрах преодолеет истребитель за 10 минут, летя со скоростью, на одну четвертую превышающую скорость звука? Скорость звука принять равной 332 м/с.

Решение. По условию задачи скорость звука равна 332 м/с. Найдем одну четвертую от скорости звука, для этого умножим $332 \cdot \dfrac{1}{4} = 83$ (м/с). Тогда скорость истребителя составит $332 + 83 = 415$ (м/с). Вычислим путь истребителя за 10 минут. Сначала выразим минуты в секундах: $10 \cdot 60 = 600$ (с). Расстояние S равно $V \cdot t$, где V — скорость истребителя в м/с, t — время полета в секундах, тогда $S = 415 \cdot 600 = 249\,000$ (м). Переведем метры в километры, получим, что расстояние равно 249 км.

Ответ: 249.

Пример 4. Шоколадка стоит 17 руб. 50 коп. Сколько шоколадок можно купить на 100 рублей?

Решение. Сначала оценим количество шоколадок, которые можно было бы купить на 100 рублей. Для этого разделим 100 : 17,50. Эти числа не делятся нацело. Запишем это деление с остатком: $100 = 17{,}50 \cdot 5 + 12{,}50$. Таким образом, на 100 рублей можно купить 5 шоколадок.

Ответ: 5.

Пример 5. В санатории на каждого отдыхающего положено 200 мл кефира в день. В санатории 831 человек. Какое наименьшее количество поллитровых пакетов кефира необходимо заготовить на 3 дня? (Открытых пакетов не должно оставаться на следующий день.)

Решение. Определим количество кефира в день, необходимое для всех отдыхающих санатория: $200 \cdot 831 = 166\,200$ (мл).

Найдем количество пакетов кефира для всего санатория в день. Для этого разделим количество кефира 166 200 мл на вес (объем) одного пакета: $166\,200 : 500 = 332{,}4$. Так как количество пакетов должно быть целым числом, то округляем в большую сторону, т.е. количество пакетов за один день составляет 333. На три дня необходимо заготовить $333 \cdot 3 = 999$ (пакетов).

Ответ: 999.

Пример 6. Цена доллара в рублях снизилась за некоторый промежуток времени на 20%. На сколько процентов за это же время выросла цена рубля по отношению к доллару?

Решение. Пусть 1 доллар стоил x руб. Будем считать, что x руб. — это 100%. После понижения цены на 20% 1 доллар стал стоить $0{,}8x$ руб. До снижения цены 1 руб. стоил $\frac{1}{x}$ долларов, после снижения цены 1 руб. стоит $\frac{1}{0{,}8x} = \frac{5}{4x}$. Составим пропорцию:

$\frac{1}{x}$ — 100%,

$\frac{5}{4x}$ — ? %.

Откуда определим, что цена рубля возросла до 125%, т.е. разница между ценами составляет $125 - 100 = 25$ (%).

Ответ: 25.

Пример 6. Сколько грамм растворенных солей содержится в 1 кг воды Средиземного моря, если солей в нем находится на 100% больше, чем в черноморской воде, которая содержит в 1 кг 18 г растворенных солей?

Решение. Примем за 100% содержание солей в черноморской воде. Тогда 100% — это 18 г растворенных солей. По условию задачи в воде Средиземного моря растворенных солей на 100% больше, т.е. 200%. Составим пропорцию:

100% — 18 г,

200% — x г,

откуда $x = \frac{200 \cdot 18}{100} = 36$ (г).

Ответ: 36.

Пример 7. Некоторый товар стоил 500 руб. Затем цену на него повысили на 10%, а затем снизили на 10%. Какой в итоге стала цена товара?

Решение. Найдем цену товара после повышения на 10%. Составим пропорцию:

100% — 500 руб.,

110% — x руб.,

откуда новая цена $x = \dfrac{500 \cdot 110}{100} = 550$ (руб.).

Найдем цену товара после понижения на 10%. Принимаем цену 550 руб. за $100\ \%$, составим пропорцию:

100% — 550 руб.,

90% — x руб.,

откуда окончательная цена товара $x = \dfrac{550 \cdot 90}{100} = 495$ (руб.).

Ответ: 495.

Пример 9. Сколько денег мама дала Пете, если после похода в магазин у него осталось 30 рублей, что составило 15% от суммы всех денег, которые мама ему дала.

Решение. Примем за 100% количество денег, которое мама дала Пете. Составим пропорцию:

15% — 30 руб.,

100% — x руб.,

откуда $x = \dfrac{100 \cdot 30}{15} = 200$ (руб.).

Ответ: 200.

Пример 10. На кондитерской фабрике для выпечки одного кекса и одного сладкого пирога расходуется 0,1 и 0,15 грамм ванильного сахара соответственно. Какое минимальное количество пакетов ванильного сахара по 5 грамм необходимо для выпечки 200 кексов и 180 пирогов?

Решение. Вычислим количество ванильного сахара, необходимое для выпечки 200 кексов: $0{,}1 \cdot 200 = 20$ (г). Количество ванильного сахара для выпечки 180 пирогов составит: $0{,}15 \cdot 180 = 27$ (г). Следовательно, всего для выпечки потребуется: $20 + 27 = 47$ (г) ванильного сахара. Так как в одном пакете содержится 5 г ванильного сахара, определим необходимое количество пакетов: $47 : 5 = 9{,}4$. Количество пакетов должно быть целым числом, поэтому округлим до целого числа с избытком. Получим 10 пакетов.

Ответ: 10.

Дополнительные задания

1. Банк обещает своим клиентам годовой рост вклада 11%. Какую сумму может получить через год человек, вложивший в этот банк 230 тысяч рублей? (Ответ дайте в тысячах рублей.)

2. Сколько нужно добавить сахара к 280 г воды, чтобы получить 30-процентный раствор сахарного сиропа?

3. Первые монеты в 7 в. до н.э. изготовлялись из электрона — сплава, содержащего 75% золота и 25% серебра. Сколько кг серебра содержится в 15 кг монет?

4. Школе выделили 500 000 рублей на оборудование компьютерного класса. Сколько компьютеров можно купить, если до скидки на 10 % один компьютер стоил 26 000 рублей?

5. Мороженое стоит 28 руб. 50 коп. Сколько штук мороженого можно купить на 189 рублей?

6. Больной принимает по 3 таблетки в день. Упаковка содержит 50 таблеток. Какое минимальное количество упаковок необходимо на двухмесчный курс лечения? (Принимаем, что один месяц содержит 30 дней.)

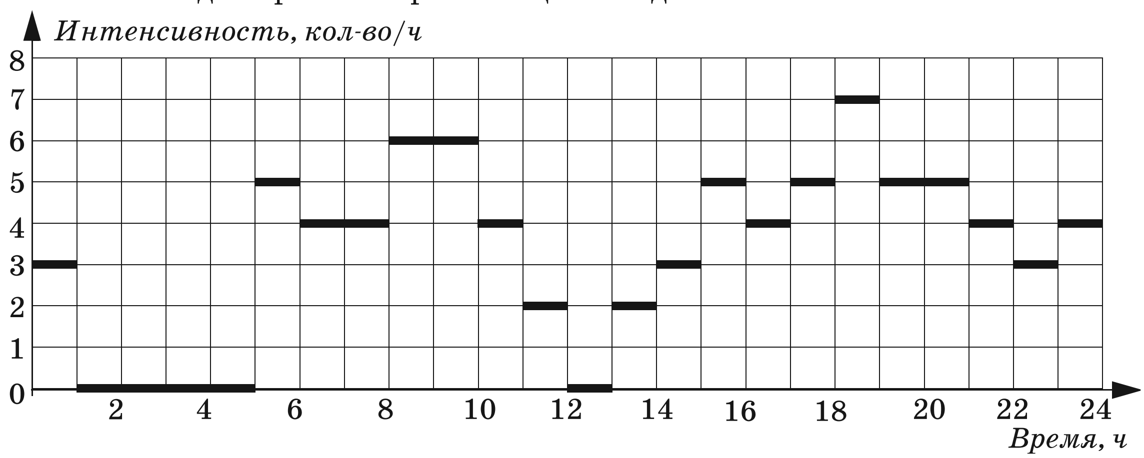
7. Поезд Москва–Санкт-Петербург отправляется в 23 часа 40 минут. Согласно расписанию он должен находиться в пути 7 часов. По техническим причинам поезд был задержан на станции Бологое на 30 минут. Найдите время прибытия поезда в Санкт-Петербург. (Ответ укажите в часах и минутах через запятую.)

День 3

Задание B2

Задания группы B2 требуют умения анализировать и трактовать информацию, представленную в виде графиков или диаграмм. Стоит заметить, что графиком можно изобразить лишь непрерывный процесс, дискретный процесс изображается в виде диаграмм. Но иногда для наглядности контрольные точки диаграммы соединяются отрезками, хотя между ними (точками) не существует никаких промежуточных значений. В данной подборке представлены задачи, имеющие различные по своему виду диаграммы.

Пример 1. На станции Тушино был произведен подсчет электропоездов, проходящих через эту станцию в рабочие дни. На рисунке показана интенсивность движения (количество проходящих поездов в час) в течение суток. Сколько поездов прошло через станцию с 3 до 12 часов?

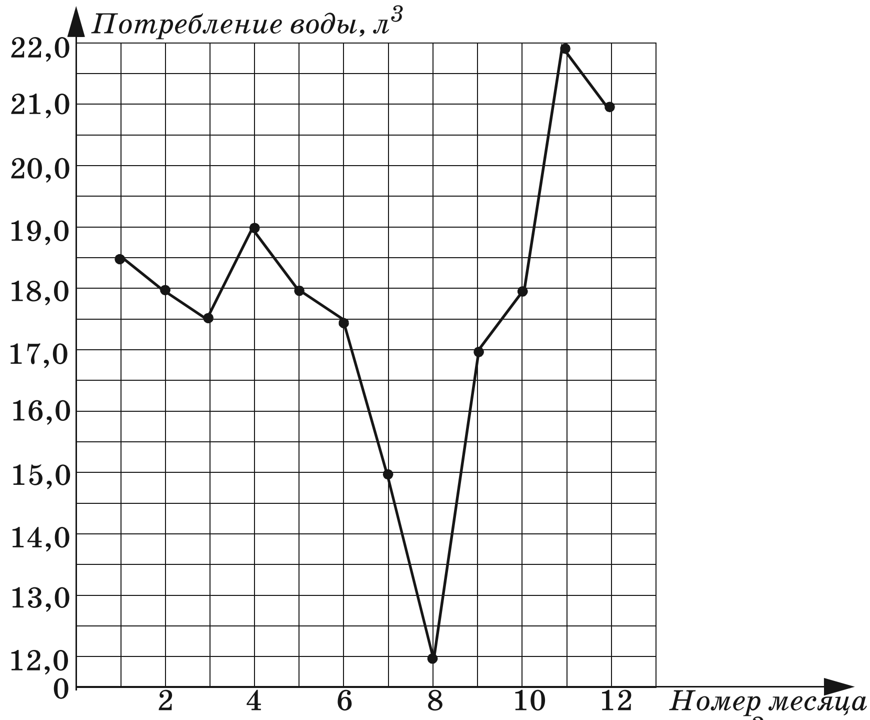


Решение. На горизонтальной оси найдем точки 3 и 12. Проведем через них вертикальные прямые. Будем рассматривать отрезки диаграммы, заключенные в полученной полосе. Согласно диаграмме с 3 до 5 часов через станцию не прошел ни один поезд. В течение одного часа — с 5 до 6 часов — прошли 5 поездов, а в течение 2-х часов — с 6 до 8 часов — 8 поездов (по 4 поезда в час). С 8 до 10 часов — 12 поездов (за 2 часа по 6 поездов в час). С 10 до 11 часов — 4 поезда. С 11 до 12 часов — 2 поезда.

Сложим полученные данные: $5 + 8 + 12 + 4 + 2 = 31$ (поезд).

Ответ: 31.

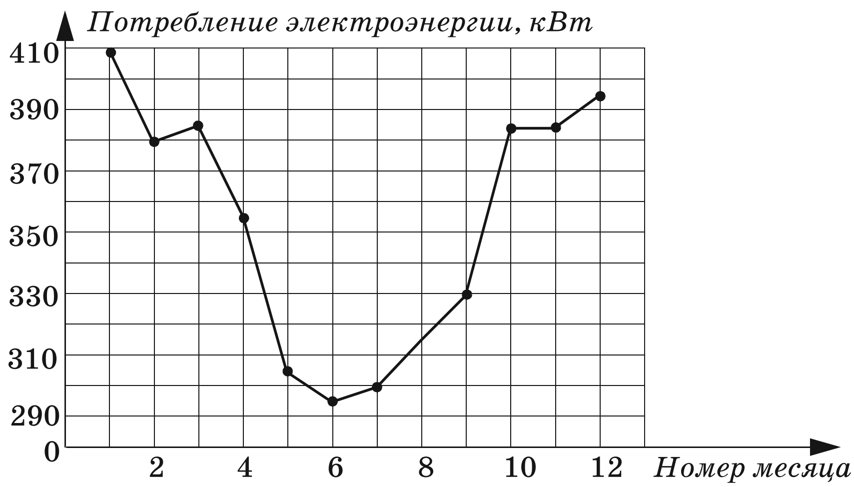
Пример 2. В городской квартире был установлен счетчик, учитывающий потребление воды лицами, проживающими в этой квартире. На рисунке жирными точками показано потребление воды по месяцам (1 — январь, 2 — февраль, 3 — март и так далее, 12 — декабрь). Для наглядности жирные точки соединены линиями. Сколько месяцев в году жильцы квартиры ежемесячно потребляли более 18,0 кубических литров воды?



Решение. Найдем на вертикальной оси отметку 18,0 $л^3$. Проведем через эту точку горизонтальную прямую. Найдем жирные точки, расположенные выше этой прямой: 18,0 $л^3$, 18,5 $л^3$, 19,0 $л^3$, 22,0 $л^3$. Из рисунка видно, что выделенные нами точки соответствуют следующим месяцам 1 (январь), 4 (апрель), 11 (ноябрь), 12 (декабрь). Таким образом, жильцы квартиры потребляли более 18,0 кубических литров воды 4 месяца.

Ответ: 4.

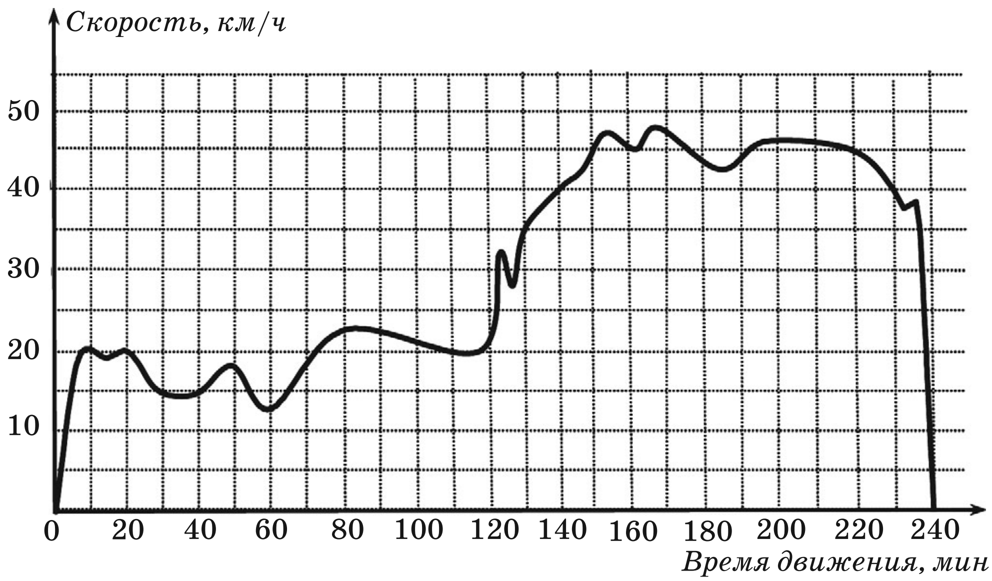
Пример 3. В каждой квартире или частном доме имеется счетчик, учитывающий потребление электроэнергии лицами, проживающими в этой квартире или доме. На рисунке жирными точками показано сезонное потребление электроэнергии в городской квартире по месяцам (1 — январь, 2 — февраль, 3 — март и так далее, 12 — декабрь). Для наглядности жирные точки соединены линиями. В каком месяце потребление электроэнергии было минимально? В ответе указать номер месяца.



Решение. На рисунке найдем жирную точку, расположенную ближе всего к горизонтальной оси. Эта точка имеет координаты 6 — по горизонтали и немного больше 290 по вертикали. Таким образом, наименьшее потребление электроэнергии было в 6 месяце (июне).

Ответ: 6.

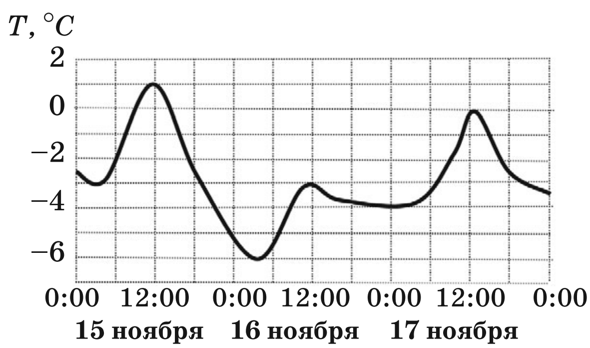
Пример 4. Грузовой автомобиль, приняв груз на складе в Москве, отправился в город Шорново Тверской области. На рисунке представлено изменение скорости автомобиля в зависимости от времени. Сколько часов от начала движения автомобиль разгонялся до 45 км/ч?



Решение. Найдем на вертикальной оси отметку 45. Проведем через нее горизонтальную прямую. Эта прямая пересечет график в пяти точках. Возьмем точку, ближайшую к вертикальной оси. Через нее проведем вертикальную прямую. Она пройдет через точку 150 на горизонтальной оси. Таким образом, автомобиль впервые достиг скорости 45 км/ч на 150 минуте движения. Так как требуется найти время в часах, то переведем 150 минут в часы: 150 : 60 = 2,5 (час).

Ответ: 2,5.

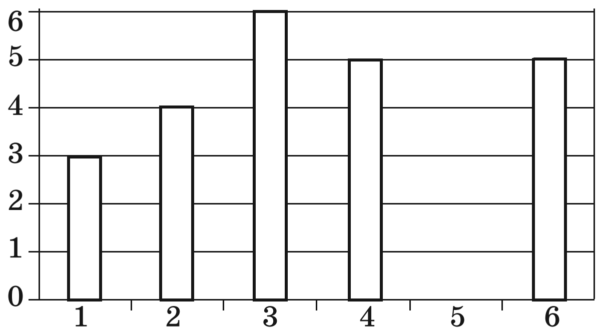
Пример 5. На графике изображено изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указаны дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите наибольшую температуру воздуха 16 ноября.



Решение. На горизонтальной оси выберем отрезок, соответствующий 16 ноября — он находится между вторым и третьим нулем (0:00). Через эти метки проведем вертикальные линии. Рассмотрим кусок графика, заключенный между этими прямыми. Выделенная кривая поднимается до отметки $-3°$, а затем опускается до $-4°$. Следовательно, 16 ноября наибольшая температура составляла $-3°$.

Ответ: -3.

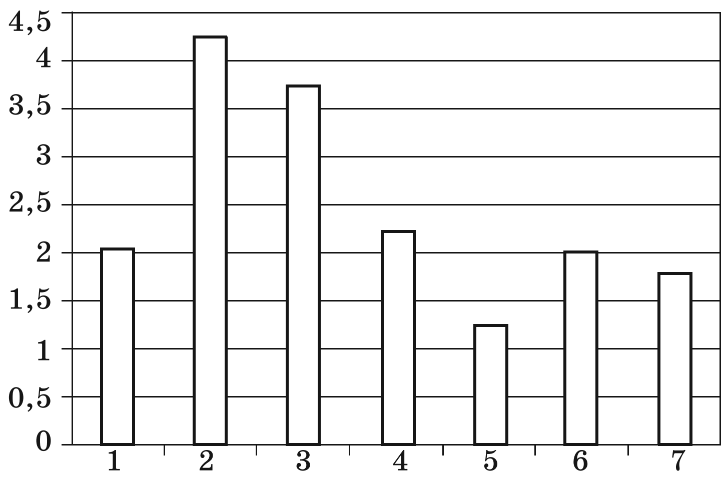
Пример 6. Учительница английского языка построила диаграмму своего расписания. На вертикальной оси она отметила количество уроков, а на горизонтальной – дни недели, зашифровав их: 1— понедельник, 2 — вторник, 3 — среда, 4 — четверг, 5 — пятница, 6 — суббота. Определите, в какой день недели у учительницы методический день (нет уроков). В ответе укажите номер дня недели.



Решение. Если в какой-то день нет уроков, то отсутствует столбец диаграммы, соответствующий этому дню. Из представленного рисунка видно, что нет столбца, относящегося к числу 5. Значит 5 день недели — методический день.

Ответ: 5.

Пример 7. Готовясь к выступлению на Ректорате, председатель Приемной комиссии университета подготовил информацию о конкурсе абитуриентов по каждому из 7 факультетов. Информацию он представил в виде диаграммы: по горизонтальной оси расположены факультеты по номерам, а по вертикальной оси — количество абитуриентов на одно учебное место. Определите, какой факультет пользовался наибольшей популярностью у абитуриентов. В ответе укажите номер факультета.



Решение. Если факультет пользуется наибольшей популярностью, то на этом факультете самый большой конкурс, а на диаграмме этому факультету соответствует столбец наибольшей высоты. Из представленного рисунка видно, что самый высокий столбец относится к числу 2. Следовательно, факультет 2 был самым популярным факультетом университета.

Ответ: 2.

Дополнительные задания

1. На станции Тушино был произведен подсчет электропоездов, проходящих через эту станцию в рабочие дни. На рисунке показана интенсивность движения (количество проходящих поездов в час) в течение суток. Сколько часов длится перерыв в движении поездов? Рисунок взять из примера 1.

2. В городской квартире был установлен счетчик, учитывающий потребление воды лицами, проживающими в этой квартире (рис. из примера 2). На рисунке жирными точками показано потребление воды по месяцам (1 — январь, 2 — февраль, 3 — март и так далее, 12 — декабрь). Для наглядности жирные точки соединены линиями. В каком месяце потребление воды было минимально? В ответе укажите номер месяца.

3. Грузовой автомобиль, приняв груз на складе в Москве, отправился в город Шорново Тверской области. На рисунке к примеру 4 представлено изменение скорости автомобиля в зависимости от времени. Сколько минут автомобиль двигался со скоростью больше 40 км/ч?

4. На графике к примеру 5 показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали – значение температуры в градусах Цельсия. Определите наименьшую температуру воздуха 17 ноября.

5. Учительница английского языка построила диаграмму своего расписания (см. рис. к примеру 6). На вертикальной оси она отметила количество уроков, а на горизонтальной — дни недели, зашифровав их: 1 — понедельник, 2 — вторник, 3 — среда, 4 — четверг, 5 — пятница, 6 — суббота. Определите по диаграмме, какой день недели у учительницы наиболее загруженный. В ответе укажите номер дня недели.

6. Готовясь к выступлению на Ректорате, председатель Приемной комиссии университета подготовил информацию о конкурсе абитуриентов по каждому из 7 факультетов. Информацию он представил в виде диаграммы (см. рис. к примеру 7): по горизонтальной оси расположены факультеты по номерам, а по вертикальной оси – количество абитуриентов на одно учебное место. Определите, какой факультет пользовался наименьшей популярностью у абитуриентов. В ответе укажите номер факультета.

7. В каждой квартире или частном доме имеется счетчик, учитывающий потребление электроэнергии лицами, проживающими в этой квартире или доме. На рисунке к примеру 3 жирными точками показано сезонное потребление электроэнергии в городской квартире по месяцам (1 — январь, 2 — февраль, 3 — март и так далее, 12 — декабрь). Для наглядности жирные точки соединены линиями. Сколько месяцев в году потребление электроэнергии не превышало 320 кВт?

День 4

Задание B3

Задания B3 включают в себя решение уравнений и неравенств различных типов: линейные, квадратные, дробно-рациональные, показательные, логарифмические и иррациональные. Рассмотрим отдельно каждый тип уравнений и простейших неравенств.

1. Линейные, квадратные и дробно-рациональные уравнения

Равенство вида $f(x) = g(x)$ с переменной называется уравнением с *одним неизвестным* x. Решить уравнение — значит, найти все значения переменной x, при котором оно обращается в верное числовое равенство или доказать, что таких значений не существует. Всякое значение переменной, при котором выражения $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные числовые значения, называется *корнем уравнения*. *Областью допустимых значений* (ОДЗ) уравнения называется множество значений неизвестного, при которых выражения $f(x)$ и $g(x)$ имеют смысл одновременно.

Линейные уравнения (или уравнения первой степени). Линейным уравнением с одной переменной называется уравнение вида $ax = b$, где a и b — действительные числа. 1) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то $0 \cdot x = b$ не имеет решения; 2) если $a = 0$, $b = 0$, то $0 \cdot x = 0$, получаем бесконечное множество решений, так как уравнение выполняется для любого x; 3) если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = b/a$.

Квадратные уравнения (или уравнения второй степени). Уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$ называются квадратными. Это уравнение имеет решения $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, где $b^2 - 4ac = D$ называется *дискриминантом*. Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня; если $D = 0$ — два равных корня $x_1 = x_2 = -b/2a$, если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных решений. Если коэффициент при x — b является четным, то решения можно записать как $x_{1,2} = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$.

Два уравнения $f(x) = g(x)$ и $f_1(x) = g_1(x)$ называются *равносильными*, если они имеют одни и те же корни или каждое из которых не имеет корней.

Уравнение $f_1(x) = g_1(x)$ (2) называется *следствием* уравнения $f(x) = g(x)$ (1), если каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2). Уравнение (2) может иметь более широкое множество решений, поэтому при переходе к уравнению-следствию обязательна проверка полученных корней.

При решении уравнений (неравенств) либо используется переход к уравнению-следствию, либо используется переход к равносильному уравнению (или к равносильной системе уравнений и неравенств).

Пример 1. Решите уравнение $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^2-1}$.

Решение: Рассмотрим ОДЗ: $x \neq \pm 1$. Приведем уравнение к общему знаменателю и решим полученное уравнение:

$$\frac{x^2-1}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x^2-1)}; \quad \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2-1)} - \frac{x-1}{(x-1)(x^2-1)} = 0;$$

$$\frac{(x-1)(x+1-1)}{(x-1)(x^2-1)} = 0; \quad \frac{x}{x^2-1} = 0; \quad x = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 2. Решите уравнение $(x + 3)(x^2 + 1) = 0$.

Решение. Уравнение представляет собой произведение двух сомножителей $x + 3$ и $x^2 + 1$, поэтому это уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{ll} x + 3 = 0, & (1) \\ x^2 + 1 = 0. & (2) \end{array}\right.$$

Первое уравнение дает корень, равный -3. Второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: -3.

Пример 3. Решите уравнение $\frac{x^2 + 2x - 15}{x-3} = 0$.

Решение. Определим ОДЗ: $x \neq 3$. Решая квадратный трехчлен $x^2 + 2x - 15 = 0$, получаем два корня: $x_1 = -5$ и $x_2 = 3$. Последний корень не подходит по ОДЗ.

Ответ: -5.

Пример 4. Решите уравнение $(x + 2)(x + 3)(x + 6)(x + 7) = -4$.

Решение. Перемножив первую и четвертую скобки, а также вторую и третью, перепишем исходное уравнение в виде: $(x^2 + 9x + 18)(x^2 + 9x + 14) = -4$, обозначим $t = x^2 + 9x$, получим $(t + 18)(t + 14) = -4$, $t^2 + 32t + 256 = 0$, $t_1 = {}$ $= t_2 = -16$. Возвращаясь к переменной x, $x^2 + 9x + 16 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $\frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$.

2. Показательные уравнения

Напомним, что показательная функция $y = a^x$ определена при $a > 0$, $a \neq 1$. При $a > 1$ функция возрастающая, а при $a < 1$ убывающая.

Свойства степеней положительных чисел с действительным показателем:

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad (1) \qquad (a_1 a_2)^x = (a_1)^x (a_2)^x \quad (2)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (3) \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (4)$$

Пример 5. Решите уравнение $4^{x+2} = 1$.

Решение. Приводим уравнение к виду, чтобы левая и правая части были с одним основанием: $4^{x+2} = 4^0$. Приравниваем показатели степеней $x + 2 = 0$, откуда $x = -2$.

Ответ: -2.

Пример 6. Решите уравнение $2^x 5^x = 0{,}1(10^{x-3})^3$.
Решение. $10^x = 10^{3x-10}$, $x = 5$.
Ответ: 5.

Пример 7. Решите уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-9} = 64^{x+1}$.

Решение. Приводим обе части уравнения к одному основанию, равному 4: $4^{9-3x} = 4^{3(x+1)}$. Приравниваем показатели степеней и получаем: $9 - 3x = 3x + 3$ или $6x = 6$, $x = 1$.
Ответ: 1.

Пример 8. Решите уравнение $3 \cdot 3^{x-1} + \frac{5}{3} \cdot 3^x = 24$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, используя свойства степеней: $\frac{3 \cdot 3^x}{3} + \frac{5 \cdot 3^x}{3} = 24$ или $\frac{8}{3} \cdot 3^x = 24$, откуда $\frac{3^x}{3} = 3$ и $3^x = 3^2$, т.е. $x = 2$.
Ответ: 2.

Пример 9. Решите уравнение $10^{2x+1} = 17^{2x+1}$.

Решение. Так как по свойству показательной функции $17^{2x+1} > 0$, то поделим обе части уравнения на 17^{2x+1} и получим: $\left(\frac{10}{17}\right)^{2x+1} = 1$. Представим $1 = \left(\frac{10}{17}\right)^0$. Тогда уравнение принимает вид: $\left(\frac{10}{17}\right)^{2x+1} = \left(\frac{10}{17}\right)^0$, откуда $2x + 1 = 0$ и $x = -0{,}5$.
Ответ: $-0{,}5$.

3. Логарифмические уравнения

Логарифмом положительного числа b по основанию a называют такое число c, что $a^c = b$ и записывают в виде $c = \log_a b$ при условии, что $a > 0$ и $a \neq 1$. Выражение $a^{\log_a b} = b$ $(a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1)$ называется основным логарифмическим тождеством.

Приведем основные формулы для решения заданий.

$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ и $c \neq 1)$

$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ и $c \neq 1)$

$\log_c a^m = m\log_c a$ $(a > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$ и $m \in \boldsymbol{R})$

$\log_{c^n} = \frac{1}{n} \log_c a$ $(a > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$ и $n \in \boldsymbol{R})$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 1,\ c \neq 1)$

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена при всех $x > 0$, $a \neq 1$ и $a > 0$.

При решении логарифмических уравнений целесообразно привести их к простейшему виду:

$\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ f(x) > 0,\ \varphi(x) > 0)$, которое равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$.

Рассмотрим примеры решения логарифмических уравнений.

Пример 10. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$.

Решение. Определим ОДЗ: $x > 0$. Согласно определению логарифма $c = \log_a b$, который является показателем степени c, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b, получаем: $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$.

Ответ: 27.

Пример 11. Решите уравнение $11^{\log_{11}(8-x)} = \log_3 81$.

Решение. Определяем ОДЗ: $x < 8$. Согласно основному логарифмическому тождеству имеем: $11^{\log_{11}(8-x)} = 8 - x$. Тогда исходное уравнение принимает вид: $8 - x = 4$, откуда $x = 4$.

Ответ: 4.

Пример 12. Решите уравнение $2\log_3(x + 1) = \log_3(x + 3)$.

Решение. Используя свойство логарифма, преобразуем левую часть уравнения: $2\log_3(x + 1) = \log_3(x + 1)^2$. Тогда исходное уравнение принимает вид: $\log_3(x + 1)^2 = \log_3(x + 3)$, которое равносильно следующему: $(x + 1)^2 = x + 3$, т.е. $x^2 + x - 2 = 0$. Корнями этого уравнения являются числа: -2 и 1. С учетом ОДЗ $x = 1$.

Ответ: 1.

4. Иррациональные уравнения

Корни четной степени, входящие в уравнение (неравенство) являются арифметическими, т. е. значения подкоренного выражения неотрицательно, а корни нечетной степени определены при любом действительном значении подкоренного выражения. При решении иррациональных уравнений мы избавляемся от корня, возводя обе части уравнения в соответствующую степень. Но если степень четная, то таким образом мы переходим к следствию, в этом случае <u>обязательно требуется</u> проверка полученных решений. Далее мы рассматриваем равносильные переходы.

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geqslant 0. \end{array}\right.$

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0 \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{array}\right.$

Пример 13. Решите уравнение $\sqrt[3]{3x - 17} = -2$.

Решение. Так как в левой части уравнения стоит корень нечетной (третьей) степени, то возводим обе части уравнения в куб: $3x - 17 = -8$, откуда $x = 3$.

Ответ: 3.

Пример 14. Найдите корень уравнения $\sqrt{x^2 - 15} = 7$ (если корней больше одного, то в бланке ответов запишите меньший корень).

Решение. Возводим в квадрат обе части уравнения: $x^2 - 15 = 49$, откуда $x^2 = 64$ и $x = \pm 8$. Так как по условию задачи требуется найти наименьший корень, то выбираем $x = -8$.

Ответ: -8.

Пример 15. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 24x - 3} = -x$.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = x^2, & (1) \\ -x \geqslant 0, & (2) \end{cases}$$

где неравенство (2) означает, что знаки левой и правой частей исходного уравнения должны совпадать. В данном случае $x \leqslant 0$.

Решая уравнение (1), получим, что $-2x - 3 = 0$ и $x = -1{,}5$. Этот корень отрицательный и не противоречит условию.

Ответ: $-1{,}5$.

Пример 16. Решите уравнение $(x^2 - 4)\sqrt{x - 1} = 0$. В ответе укажите сумму корней.

Решение. Определим ОДЗ: $x \geqslant 0$. Левая часть исходного уравнения равна произведению сомножителей, поэтому уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{ll} x^2 - 4 = 0, & (1) \\ \sqrt{x - 1} = 0. & (2) \end{array} \right.$$

Из уравнения (1) следует, что $x \pm 2$. С учетом ОДЗ подходит корень $x = 2$. Находим из (2) уравнения $x = 1$. Сумма корней равна $2 + 1 = 3$.

Ответ: 3.

Дополнительные задания

Решите уравнения.

1. $x^3 - 1 = 0$.

2. $\frac{(x+1)(x-6)}{(x+1)(x-3)} = 0$.

3. $x^4 - 1 = 0$. В ответе укажите сумму корней.

4. $\frac{x^2 + 3x}{2x + 3} = 0$. В ответе укажите меньший корень.

5. $\frac{x^2 - 5x}{3x + x^2} = 0$.

6. $\frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = 0$.

7. $3^{x-2} = 10^{x-2}$.

8. $5^{x^2 - 7x + 12} = 1$. В ответе укажите сумму корней.

9. $12 \cdot 4^x - 11 = 2^{2x}$.

10. $2^{4x-3} = 0{,}125^{x+1}$.

11. $\log_2(3x - 1) = 3$.

12. $\log_2 x = 2 - \log_2 4$.

13. $\log_{\sqrt[3]{4}} x = \frac{3}{2}$.

14. $19^{\log_{19} x} = \log_9 81$.

15. $\sqrt{6x - 9} = 3$.

16. $\sqrt[3]{3x + 11} = -1$.

17. $\sqrt{5 - x} = x - 5$.

18. $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = x$.

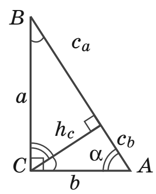
19. $(x + 6)\sqrt{x + 5} = 0$.

День 5

Задание B4

Задания группы B4 связаны с решением геометрических задач. Напомним основные формулы, необходимые для определения сторон и углов в прямоугольных треугольниках.

Пусть дан прямоугольный треугольник ABC. Угол C — прямой, т.е. равен 90°, $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$. Тогда верны следующие утверждения.



Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$, где a, b — катеты прямоугольного треугольника, c — гипотенуза.

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника:

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$, здесь α — угол, противолежащий катету a.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Значения тригонометрических функций основных углов:

$\sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, $\sin\dfrac{\pi}{6} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

Пусть r — радиус вписанной окружности, а R — радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности.

Верны следующие формулы для их вычисления: $R = \dfrac{c}{2}$, $r = \dfrac{a + b - c}{2}$.

Пусть h_c — высота, проведенная из угла C; c_a — проекция катета a на гипотенузу; c_b — проекция катета b на гипотенузу. Тогда справедливы следующие формулы: $h_c = \dfrac{ab}{c} = \sqrt{c_a c_b}$, $b^2 = c_b \cdot c$, $a^2 = c_a \cdot c$, $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{c_a}{c_b}$.

В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой угла, заключенного между боковыми сторонами.

Пример 1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\operatorname{tg}A = \dfrac{\sqrt{51}}{7}$. Найдите $\sin B$.

Решение. Используем известную тригонометрическую формулу для нахождения косинуса угла через тангенс $1 + \mathrm{tg}^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$. Получим $\dfrac{1}{\cos^2 a} = 1 + \dfrac{51}{49} = \dfrac{100}{49}$. Откуда $\cos A = \dfrac{7}{10}$ (косинус угла A положителен, так как угол A — острый угол прямоугольного треугольника).

Сумма углов A и B прямоугольного треугольника равна $90°$. Поэтому $\sin B = \sin(90° - A) = \cos A = \dfrac{7}{10} = 0{,}7$.

Ответ: 0,7.

Пример 2. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 5\sqrt{7}$, $AC = 4\sqrt{7}$. Найдите $\mathrm{tg}A$.

Решение. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Подставим числовые данные и получим $(4\sqrt{7})^2 + BC^2 = (5\sqrt{7})^2$. Откуда $BC^2 = 7(25 - 16) = 7 \cdot 9 = 63$; $BC = 3\sqrt{7}$. Угол A противолежит катету BC, поэтому $\mathrm{tg}A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{7}} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

Пример 3. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 25$, $\cos A = 0{,}28$. Найдите высоту CH.

Решение. Используем основное тригонометрическое тождество $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ и найдем $\sin A$: $(0{,}28)^2 + \sin^2 A = 1$; $\sin^2 A = 1 - (0{,}28)^2 = 1 - \left(\dfrac{7}{25}\right)^2 = \dfrac{625 - 49}{625} = \dfrac{576}{625} = \left(\dfrac{24}{25}\right)^2$; $\sin A = \dfrac{24}{25}$.

Теперь мы сможем найти катеты AC и BC: $AC = AB \cdot \cos A = 25 \cdot 0{,}28 = 7$, $BC = AB \cdot \sin A = 25 \cdot \dfrac{24}{25} = 24$.

Высота в прямоугольном треугольнике, проведенная к гипотенузе, вычисляется по формуле $CH = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = \dfrac{7 \cdot 24}{25} = \dfrac{168}{25} = 6{,}72$.

Ответ: 6,72.

Пример 4. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AH = 36$, $\mathrm{tg}A = \dfrac{5}{6}$. Найдите BH.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник CAH. Для этого треугольника верно $CH = AH \cdot \mathrm{tg}A$, поэтому $CH = 36 \cdot \dfrac{5}{6} = 30$.

Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Высота CH равна среднему геометрическому проекций катетов на гипотенузу, т.е. $CH = \sqrt{AH \cdot BH}$; $30 = \sqrt{36 \cdot BH}$; $900 = 36 \cdot BH$; $BH = 25$.

Ответ: 25.

Пример 5. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AB = 10$, $\sin A = 0{,}6$. Найдите BH.

Решение. Найдем катет CB из треугольника ABC: $CB = AB \cdot \sin A = 10 \cdot 0{,}6 = 6$. Теперь используем формулу $CB^2 = AB \cdot BH$ и найдем $BH \cdot 36 = 10 \cdot BH$; $BH = 3{,}6$.

Ответ: 3,6.

Пример 6. В треугольнике $AC = BC = 5\sqrt{11}$, $\cos BAC = 0{,}1$. Найдите высоту AH.

Решение. В треугольнике ABC проведем высоту CK к стороне AB. Треугольник ACK прямоугольный, поэтому $AK = AC \cdot \cos BAC = 5\sqrt{11} \cdot 0{,}1 = \frac{5\sqrt{11}}{10} = \frac{\sqrt{11}}{2}$. Так как треугольник ABC — равнобедренный, то $AB = 2AK = \sqrt{11}$ и угол CAB равен углу ABC.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AHB. Катет $AH = AB \cdot \sin ABH$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2 ABH + \cos^2 ABH = 1$; $\sin^2 ABH + 0{,}01 = 1$; $\sin^2 ABH = \frac{99}{100}$; $\sin ABH = \frac{3\sqrt{11}}{10}$; $AH = AB \cdot \sin ABH = \sqrt{11} \cdot \frac{3\sqrt{11}}{10} = \frac{33}{10} = 3{,}3$.

Ответ: 3,3.

Пример 7. В треугольнике $AC = BC = 2\sqrt{2}$, угол C равен 135°. Найдите высоту AH.

Решение. В треугольнике ACB угол C равен 135°, поэтому треугольник тупоугольный и основание высоты AH, проведенной к стороне BC, точка H будет находиться на продолжении стороны BC за точку C. При этом угол HCA является смежным с углом 135° и равен 45°.

В прямоугольном треугольнике AHC сторона AH является катетом, сторона AC гипотенузой, поэтому $AH = AC \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$.

Ответ: 2.

Пример 8. В треугольнике $AC = BC$, $AB = 2$, $\cos A = \frac{1}{\sqrt{101}}$. Найдите высоту CH.

Решение. Треугольник ABC равнобедренный, поэтому высота, проведенная к основанию AB, является медианой, $AH = \frac{AB}{2} = 1$. Треугольник ACH прямоугольный. Катет $CH = AH \cdot \mathrm{tg} A$. Тангенс угла A найдем по формуле $1 + \mathrm{tg}^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$; $1 + \mathrm{tg}^2 A = 101$; $\mathrm{tg} A = 10$; $CH = AH \cdot \mathrm{tg} A = 1 \cdot 10 = 10$.

Ответ: 10.

Пример 9. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите синус внешнего угла при вершине B.

Решение. Назовем искомый угол α. Тогда $\sin\alpha = \sin(180 - B) = \sin B$. Треугольник ABC — прямоугольный, поэтому сумма углов A и B равна $90°$; $\sin B = \sin(90 - A) = \cos A$.

Найдем $\cos A$ из основного тригонометрического тождества $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. $\frac{15}{16} + \cos^2 A = 1$; $\cos^2 A = \frac{1}{16}$; $\cos A = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

Пример 10. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 30$, $\sin A = \frac{\sqrt{19}}{10}$. Найдите высоту CH.

Решение. Так как треугольник ABC прямоугольный, то $\cos B = \cos(90 - A) = \sin A = \frac{\sqrt{19}}{10}$.

Из прямоугольного треугольника BHC катет $CH = BC \cdot \sin B = 30 \cdot \sin B$. Синус угла B найдем из основного тригонометрического тождества $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$; $\sin^2 B + \frac{19}{100} = 1$; $\sin^2 B = \frac{81}{100}$; $\sin B = 0{,}9$. Поэтому $CH = 30 \cdot 0{,}9 = 27$.

Ответ: 27.

Дополнительные задания

1. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 44$, $\mathrm{tg} A = \frac{\sqrt{105}}{4}$. Найдите AC.

2. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 5{,}6$, $\cos A = \frac{8}{\sqrt{89}}$. Найдите BC.

3. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 10$, $\cos A = \frac{1}{\sqrt{26}}$. Найдите BC.

4. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 3$, $\mathrm{tg} A = \frac{2\sqrt{10}}{3}$. Найдите AB.

5. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \frac{1}{8}$, $AC = 8$. Найдите AB.

6. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 24$, $\sin A = \frac{3}{5}$. Найдите BC.

7. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 82$, $\cos B = \frac{9}{41}$. Найдите AC.

8. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 3\sqrt{3}$, $AB = 5\sqrt{3}$. Найдите $\sin B$.

9. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 5$, $AC = 4$. Найдите $\mathrm{tg} A$.

10. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 5\sqrt{17}$, $BC = 3\sqrt{17}$. Найдите $\cos A$.

11. В треугольнике ABC угол C равен 90°, высота CH равна 100, $BH = 50$. Найдите $\mathrm{tg} A$.

12. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AB = 10$, $\sin A = 0{,}6$. Найдите BH.

13. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AC = 8$, $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите AH.

14. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AC = 75$, $AH = 45$. Найдите $\cos B$.

15. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AC = 20$, $AH = 12$. Найдите $\cos B$.

16. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $BC = 5$, $\mathrm{CH} = 2\sqrt{6}$. Найдите $\sin A$.

17. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AB = 6$, $\sin A = 0{,}5$. Найдите AH.

18. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AB = 9$, $\cos A = \frac{2}{3}$. Найдите BH.

19. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AB = 5$, $\mathrm{tg} A = \frac{3}{4}$. Найдите AH.

20. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AB = 17$, $\mathrm{tg} A = 4$. Найдите AH.

21. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AB = 37$, $\mathrm{tg} A = 6$. Найдите BH.

22. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $BC = 6$, $\sin A = \frac{2}{3}$. Найдите AH.

23. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $BC = 4$, $\sin A = 0{,}5$. Найдите BH.

24. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $BC = 20{,}4$, $\mathrm{tg} A = \frac{15}{8}$. Найдите BH.

День 6

Задание B5

Задания группы B5 посвящены решению задач, каждая из которых содержит в себе несколько «траекторий», сходящихся в одной точке, — ответ. При решении задачи не достаточно просто оценить исходные данные: что больше, что меньше, необходимо аккуратно просчитать каждый предложенный вариант, учитывая все дополнительные условия и бонусы (если они есть), и выбрать тот вариант, что соответствует вопросу задачи: наиболее выгодный (дешевый, быстрый, близкий) или наоборот наиболее невыгодный (дорогой, долгий, дальний). Рассмотрим типовые примеры решения.

Пример 1. Для того, чтобы связать джемпер дочке-подростку, хозяйке необходимо 600 граммов шерсти. Можно купить цветную пряжу по цене 145 рублей за 1 моток (100 грамм), или можно купить неокрашенную пряжу по цене 120 рублей за 1 моток (100 грамм) и окрасить ее в нужный цвет. Один пакетик краски стоит 80 рублей и рассчитан на окраску 300 грамм пряжи. Сколько рублей будет стоить наиболее выгодная покупка?

Решение. Рассмотрим стоимость каждого варианта покупки. На изготовление джемпера необходимо 600 граммов пряжи, 1 моток содержит 100 грамм, следовательно, потребуется 6 мотков.

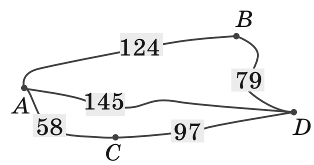
Если использовать цветную пряжу, то на ее приобретение потребуется $145 \cdot 6 = 870$ (руб.).

Если же купить неокрашенную пряжу за $120 \cdot 6 = 720$ (руб.), краску нужного цвета $600 : 300 = 2$ (пакета), заплатив за нее $80 \cdot 2 = 160$ (руб.), то стоимость покупки составит $720 + 160 = 880$ (руб.).

Сравнив предполагаемые расходы: 870 рублей и 880 рублей, делаем вывод, что выгоднее купить цветную пряжу и связать из нее джемпер.

Ответ: 870.

Пример 2. Шоферу нужно проехать из пункта A в пункт D, в который ведут три дороги: через пункт B, через пункт C и прямой маршрут без промежуточных пунктов. Расстояния между соседними пунктами в километрах показаны на схеме. Известно, что если ехать через B, то средняя скорость будет равна 70 км/ч, если ехать через C, то средняя скорость — 50 км/ч, а если ехать напрямую, то 58 км/ч. Шофер выбрал маршрут так, чтобы доехать до D за наименьшее время. Сколько часов он планирует пробыть в пути?



Решение. Рассчитаем время движения по каждому маршруту. Если ехать через пункт B, то путь составит $124 + 79 = 203$ (км) и шофер преодолеет его за $203 : 70 = 2{,}9$ (ч).

Через пункт C придется ехать $58 + 97 = 155$ (км) в течение $155 : 50 = 3{,}1$ (ч).

Если добираться в пункт D по прямому маршруту, то для этого потребуется $145 : 58 = 2{,}5$ (ч).

Сравним расчетное время: 2,9 часа — через B, 3,1 часа — через C, 2,5 часа — без промежуточных пунктов. Очевидно, шофер планировал добраться из пункта A в пункт D за 2,5 часа.

Ответ: 2,5.

Пример 3. Один из клиентов компании сотовой связи решил поменять тариф. Ему предложили три новых: по первому тарифу звонки внутри сети становились на 20% дешевле, по второму — звонки абонентам других сотовых компаний дешевели на 15%, а по третьему — на 10% дешевели услуги мобильного Интернета.

Согласно полученной распечатке звонков за предыдущий месяц клиент потратил 150 рублей на звонки внутри сети, 210 рублей на звонки абонентам других сотовых компаний и 300 рублей на мобильный Интернет. Предположив, что в следующем месяце режим пользования будет таким же, он выбрал более выгодный для себя тариф. Сколько рублей он планирует сэкономить?

Решение. За предыдущий месяц клиент заплатил $150 + 210 + 300 = 660$ (руб.). Оценим предполагаемые затраты по новым тарифам. По первому тарифу стоимость звонков внутри сети составит $100 - 20 = 80$ (%) от их стоимости по старому тарифу, это $150 \cdot 0{,}8 = 120$ (руб.), а весь пакет услуг обойдется $120 + 210 + 300 = 630$ (руб.).

По второму тарифу стоимость звонков абонентам других сотовых компаний составит $100 - 15 = 85$ (%) от их стоимости по старому тарифу, это $210 \cdot 0{,}85 = 178{,}5$ (руб.), а весь пакет услуг обойдется $150 + 178{,}5 + 300 = 628{,}5$ (руб.).

По третьему тарифу стоимость мобильного Интернета составит $100 - 10 = 90$ (%) от его стоимости по старому тарифу, это $300 \cdot 0{,}9 = 270$ (руб.), весь пакет услуг обойдется $150 + 210 + 270 = 630$ (руб.).

Сравним предполагаемые расходы: 630 рублей по первому и по третьему тарифу, 628,5 рублей по второму. Второй тариф более выгодный, чем первый и третий, и гораздо привлекательней, чем тариф прошлого месяца. Экономия составит $660 - 628{,}5 = 32{,}5$ (руб.).

Ответ: 32,5.

Пример 4. Анна Михайловна собирается купить через Интернет пылесос, холодильник и пароварку. Она проводит маркетинговые исследования — изучает цены и сравнивает доставки в трех фирмах. Цены товара и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей заплатит Анна Михайловна за самый дешевый вариант покупки?

Магазин	Цена пылесоса, руб.	Цена холодильника, руб.	Цена пароварки, руб.	Доставка, руб.	Дополнительные условия
I	4200	12 600	3600	500	Акция: цена на пылесос снижена в 2 раза
II	4500	11 000	2500	500	При общей стоимости товара более 15 000 руб. пароварка в подарок и бесплатная доставка
III	4000	10 000	3000	1000	При общей стоимости товара более 15 000 руб. скидка 10% и бесплатная доставка

Решение. Рассчитаем стоимость покупки в каждом магазине с учетом доставки и дополнительных услуг.

Магазин I. Цена на пылесос снижена в 2 раза, следовательно, он стоит 4200 : 2 = 2100 (руб.), а стоимость общей покупки с доставкой: 2100 + + 12 600 + 3600 + 500 = 18 800 (руб.).

Магазин II. Стоимость пылесоса и холодильника составляет 4500 + + 11 000 = 15 500 (руб.). Так как она превышает 15 000 рублей, заявленные в дополнительных условиях, то Анна Михайловна получит бесплатную доставку и пароварку в подарок, а стоимость общей покупки составит 15 500 (руб.).

Магазин III. Стоимость пылесоса, холодильника и пароварки составляет 4000 + 10 000 + 3000 = 17 000 (руб.). Так как она превышает 15 000 рублей, заявленные в дополнительных условиях, то Анна Михайловна получит бесплатную доставку и скидку 10%, равную 17 000 · 0,1 = 1700 (руб.), а стоимость общей покупки составит 17 000 − 1700 = 15 300 (руб.).

Сравним стоимость предполагаемой покупки в каждом магазине: 18 800 (руб.) в первом, 15 500 (руб.) во втором, 15 300 (руб.) в третьем, очевидно, самый дешевый вариант предлагает магазин III.

Ответ: 15 300.

Пример 5. В 2007 году МГТС предложил пользователям три тарифных плана. Условия по каждому тарифу были представлены в таблице:

Номер тарифного плана	Абонентская плата (руб.)	Стоимость 1 минуты разговора (руб.)	Особые условия
1	125	0,28	—
2	125	0,23	Оплата за первые 370 мин. разговора 104 руб.
3	125	-	255 руб. за любое количество минут разговора

Какой тарифный план для семьи Ивановых наиболее невыгодный, если за прошедшие полгода они разговаривали в среднем 728 минут в месяц и планируют не превышать это количество. В ответе укажите номер тарифного плана.

Решение. Рассчитаем предполагаемую стоимость разговоров по каждому тарифу.

По первому (повременному) плану необходимо будет заплатить за 728 мин по цене 0,28 руб. за 1 минуту и абонентскую плату 125 руб.: 125 + 728 · 0,28 = = 125 + 203,84 = 328,84 (руб.).

По второму (смешанному) — абонентскую плату 125 руб., 104 руб. за 370 мин, а за оставшиеся 728 − 370 = 358 (мин) заплатить по цене 0,23 руб. за 1 минуту разговора: 125 + 104 + (728 − 370) · 0,23 = 229 + 82,34 = 311,34 (руб.).

По третьему (безлимитному) необходимо будет заплатить абонентскую плату и 255 руб. за телефонные разговоры: 125 + 255 = 380,00 (руб.).

Сравнив предполагаемые расходы 328,84 руб., 311,34 (руб.) и 380,00 (руб.), видно, что наиболее невыгодным для Ивановых будет **третий** (безлимитный) тарифный план.

Ответ: 3.

Пример 6. Семья Федоровых решила переклеить обои в комнате. Они измерили комнату: сумма длин стен — 10,37 метра, а высота потолка — 2,65 метра. В магазине им понравились два вида обоев.

Обои в желтых тонах по цене 260 рублей за рулон имели длину рулона 10 м, ширину рулона 50 см и раппорт рисунка 70 см.

Обои в бежевых тонах по цене 440 рублей за рулон имели длину рулона 10 м, ширину рулона 90 см и раппорт рисунка 40 см.

Стены оклеиваются цельными вертикальными полосами, встык без нахлеста, без смещения раппорта (раппорт — это часть рисунка — аналог периода функции, при повторении формирующий рисунок всего рулона).

Какие обои экономически более выгодны для Федоровых? В какую сумму им обойдется переклейка комнаты (ответ дать в рублях).

Решение. Рассчитаем, сколько потребуется рулонов желтых обоев при высоте потолка 2,65 (м) и раппорте рисунка 0,7 (м). Найдем, сколько раппортов будет содержать одна полоса $2{,}65 : 0{,}7 \approx 3{,}8$ (раппорта). Так как раппорт смещать нельзя, то округляем это число до целого с избытком. Итак, на одну полосу желтых обоев потребуется 4 раппорта, $0{,}7 \cdot 4 = 2{,}8$ (м). В одном рулоне содержится 10 метров. Найдем, сколько целых полос можно вырезать из рулона: $10 : 2{,}8 \approx 3{,}6$ (полос) — это 3 целых полосы. Сумма длин стен в комнате 10,37 (м), их покрываем обоями по ширине полос. Ширина желтых обоев 0,5 (м), следовательно, $10{,}37 : 0{,}5 \approx 20{,}7$ (полос). Значит, потребуется 21 целая полоса. Так как из одного рулона можно вырезать 3 полосы, то для комнаты необходимо купить $21 : 3 = 7$ (рулонов). Для этого потребуется $260 \cdot 7 = 1820$ (рублей).

Рассчитаем количество рулонов бежевых обоев. При высоте потолка 2,65 (м) и раппорте рисунка 0,4 (м). Найдем, сколько раппортов будет содержать одна полоса $2{,}65 : 0{,}4 \approx 6{,}6$ (раппорт). Округляем это число до целого с избытком — 7 раппортов, $0{,}4 \cdot 7 = 2{,}8$ (м). В одном рулоне содержится 10 метров. Найдем, сколько целых полос можно вырезать из рулона: $10 : 2{,}8 \approx 3{,}6$ (полос) — это 3 целых полосы. Сумма длин стен в комнате 10,37 (м), их покрываем обоями по ширине полос. Ширина бежевых обоев 0,9 (м), следовательно, $10{,}37 : 0{,}9 \approx \approx 11{,}5$ (полос). Значит, потребуется 12 целых полос. Так как из одного рулона можно вырезать 3 полосы, то для комнаты необходимо купить $12 : 3 = 4$ (рулона). Для этого потребуется $440 \cdot 4 = 1760$ (рублей).

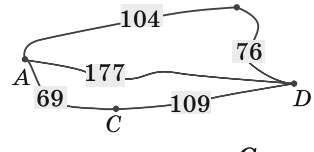
Сравнив предполагаемые расходы 1820 рублей на желтые обои и 1760 рублей на бежевые обои, делаем вывод, что покупка бежевых более выгодна.

Ответ: 1760.

Дополнительные задания

1. Для того чтобы связать джемпер дочке-подростку, хозяйке необходимо 600 граммов шерсти. Можно купить цветную пряжу по цене 150 рублей за 1 моток (100 грамм), или можно купить неокрашенную пряжу по цене 60 рублей за 1 моток (50 грамм) и окрасить ее в нужный цвет. Один пакетик краски стоит 50 рублей и рассчитан на окраску 200 грамм пряжи. Сколько рублей будет стоить наиболее невыгодная покупка?

2. Шоферу нужно проехать из пункта A в пункт D, в который ведут три дороги: через пункт B, через пункт C и прямой маршрут без промежуточных пунктов. Расстояния между соседними пунктами в километрах показаны на схеме. Известно, что если ехать через B, то средняя скорость будет равна 72 км/ч, если ехать через C, то средняя скорость — 63 км/ч, а если ехать напрямую, то 59 км/ч. Шофер выбрал маршрут так, чтобы доехать до D за наименьшее время. Сколько часов он планирует пробыть в пути?



3. Один из клиентов компании сотовой связи решил поменять тариф. Ему предложили три новых: по первому тарифу звонки внутри сети становились на 20% дешевле, по второму — звонки абонентам других сотовых компаний дешевели на 10% , а по третьему — на 15% дешевели услуги мобильного Интернета.

Согласно полученной распечатке звонков за предыдущий месяц клиент потратил 160 рублей на звонки внутри сети, 230 рублей на звонки абонентам других сотовых компаний и 450 рублей на мобильный Интернет. Предположив, что в следующем месяце режим пользования будет такими же, он выбрал более выгодный для себя тариф. Сколько рублей он планирует сэкономить?

4. Пенсионерка с дочерью собрались в паломническую поездку. Они выбрали три паломнические службы и проанализировали их прайс-листы, занеся цены и условия поездки в таблицу. Сколько будет стоить самый дешевый для них вариант?

Паломническая служба	Питание на 1 человека, руб.	Проживание на 1 человека, руб.	Проезд на 1 человека, руб.	Дополнительные условия
1	1600	800	2400	Скидка пенсионерам на проезд 20%
2	1500	1200	2600	Скидка пенсионерам на проезд 30%
3	1200	1600	2800	Скидки пенсионерам: на проезд — 25% , на проживание — 10%

5. В 2007 году МГТС предложил пользователям три тарифных плана. Условия по каждому тарифу были представлены в таблице:

Номер тарифного плана	Абонентская плата (руб.)	Стоимость 1 минуты разговора (руб.)	Особые условия
1	125	0,28	—
2	125	0,23	Оплата за первые 370 мин. разговора 104 руб.
3	125	—	255 руб. за любое количество минут разговора

Какой тарифный план для семьи Ивановых наиболее выгодный, если за прошедшие полгода они разговаривали в среднем 852 минут в месяц и планируют не превышать это количество. В ответе указать номер тарифного плана.

6. Семья Федоровых решила переклеить обои в комнате. Они измерили комнату: сумма длин стен — 9,7 метра, а высота потолка — 2,65 метра. В магазине им понравились два вида обоев.

Обои в голубых тонах по цене 270 рублей за рулон имели длину рулона 10 м, ширину рулона 50 см и раппорт рисунка 60 см.

Обои в зеленых тонах по цене 450 рублей за рулон имели длину рулона 10 м, ширину рулона 90 см и раппорт рисунка 50 см.

Стены оклеиваются цельными вертикальными полосами, встык без нахлеста, без смещения раппорта (раппорт — это часть рисунка — аналог периода функции, при повторении формирующий рисунок всего рулона).

Какие обои экономически более выгодны для Федоровых? В какую сумму им обойдется переклейка комнаты (ответ дайте в рублях).

День 7

Задание B6

Занятие посвящено решению задач группы B6, которые представляют собой задачи на вычисление площадей плоских фигур, таких как треугольники, четырехугольники, круг и его части, а также комбинации четырехугольников и т. п. Фигуры изображаются на клетчатой бумаге с известной стороной клетки, обычно равной 1 см.

Приведем основные формулы, необходимые для нахождения площадей плоских фигур.

Площадь прямоугольного треугольника: $S = \frac{1}{2} a \cdot b,$ (1)

где a, b — катеты.

Площадь треугольника: $S = \frac{1}{2} a \cdot h,$ (2)

где a — сторона (основание) треугольника, h — высота, опущенная на сторону a.

Площадь параллелограмма: $S = a \cdot h,$ (3)

где a — сторона (основание) параллелограмма, h — высота, опущенная на сторону a.

Площадь ромба (ромб — это параллелограмм с одинаковыми сторонами. Диагонали ромба взаимно-перпендикулярны) может быть вычислена по формуле:

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}, \quad (4)$$

где d_1, d_2 — диагонали ромба.

Площадь прямоугольника: $S = a \cdot b,$ (5)

где a, b — стороны прямоугольника.

Площадь квадрата (поскольку по определению квадрата $a = b$): $S = a^2$. (6)

Площадь трапеции: $S = \frac{a + b}{2} h,$ (7)

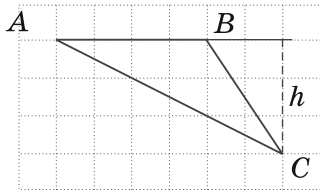
где a, b — параллельные стороны трапеции (верхнее и нижнее основания), h — высота трапеции.

Площадь круга: $S = \pi R^2,$ (8)

где R — радиуса круга.

При вычислении площади целесообразно так выбирать необходимые размеры фигуры, чтобы длины сторон, высоты и др. измерялись целым числом клеток. В некоторых случаях бывает необходимо разделить фигуру на несколько частей, площади которых удобно вычислить по клеткам.

Рассмотрим примеры решения задач.

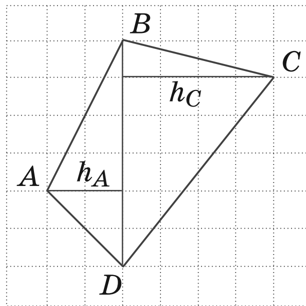


Пример 1. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 см $\times$ 1 см. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке (в квадратных сантиметрах).

Решение. Для вычисления площади треугольника используем формулу (2). В качестве основания выбираем сторону AB, длина которой составляет целое число клеток и легко вычисляется по рисунку: $AB = 4$.

Высота, опущенная на сторону AB, равна $h = 3$. Тогда площадь треугольника составляет $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

Ответ: 6.

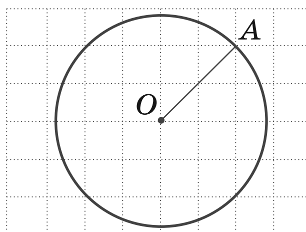


Пример 2. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 см $\times$ 1 см. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на рисунке (ответ дайте в квадратных сантиметрах).

Решение. Представим площадь четырехугольника в виде суммы площадей треугольников: $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$. Тогда согласно формуле (2) $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot h_A$ и $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot h_C$, где h_A и h_C высоты, опущенные из вершины A и вершины C соответственно. Здесь $h_A = 2$, $h_C = 4$.

Вычислим искомую площадь: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot h_A + \frac{1}{2} BD \cdot h_C = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 + \frac{1}{2} \times$ $\times\, 6 \cdot 4 = 6 + 12 = 18$.

Ответ: 18.



Пример 3. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 см $\times$ 1 см. Найдите площадь круга S с центром в точке O. В ответе укажите значение равное $\frac{S}{\pi}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

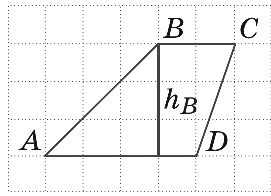
Решение. Площадь круга вычисляется по формуле (8). Как видно из рисунка, радиус круга OA проходит по диагоналям клеток. Так как одна клетка является квадратом со стороной 1 см, то диагональ одной клетки составляет $\sqrt{2}$ см. Длина радиуса круга OA состоит из двух клеток: $OA = 2\sqrt{2}$.

Таким образом, площадь круга $S = \pi(2\sqrt{2})^2 = 8\pi$. Так как в ответе следует указать $\frac{S}{\pi}$, то $\frac{S}{\pi} = 8$.

Ответ: 8.

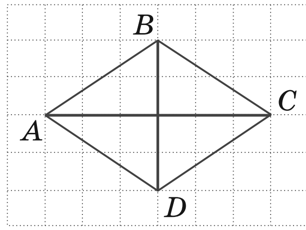
Пример 4. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 см $\times$ $\times$ 1 см. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке (в квадратных сантиметрах).

Решение. Изображенный на рисунке четырехугольник является трапецией. Площадь трапеции вычисляется по формуле (7). Как видно из рисунка, верхнее основание трапеции BC равно 2, нижнее основание $AD = 4$. Высота h_B, проведенная из вершины B, равна 3. Таким образом, площадь трапеции равна: $S = \frac{2+4}{2} \cdot 3 = 9$.



Ответ: 9.

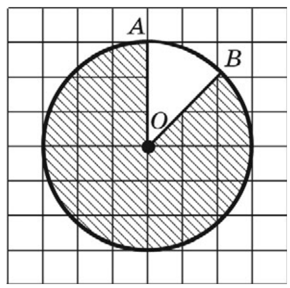
Пример 5. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 см × 1 см. Найдите площадь ромба, изображенного на рисунке (в квадратных сантиметрах).



Решение. На рисунке изображен четырехугольник, который является ромбом, так как противоположные стороны параллельны, т.е. $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, а диагонали взаимно перпендикулярны $AC \perp BD$. Для вычисления площади применим формулу (4). Определим из рисунка диагональ $BD = 4$, $AC = 6$. Тогда $S = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$.

Ответ: 12.

Пример 6. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 см × 1 см. Найдите площадь заштрихованной части круга S с центром в точке O. В ответе укажите значение, равное $\frac{S}{\pi}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

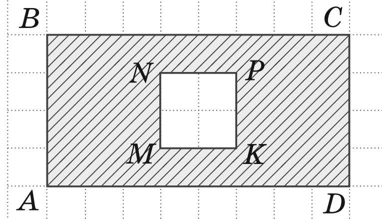


Решение. Площадь всего круга вычисляется по формуле (8). Как видно из рисунка, радиус круга $R = OA = 3$. Площадь заштрихованной части равна $S = S_{кр} - S_{AOB}$, где $S_{кр}$ — площадь всего круга, S_{AOB} — площадь сектора AOB. Из рисунка видно, что угол $AOB = 45°$, тогда площадь сектора составляет $\frac{1}{8}$ часть круга, т. е. $S_{AOB} = \frac{1}{8} S_{кр}$. Вычисляем площадь заштрихованной части равна $S = S_{кр} - S_{кр} = \frac{7}{8} S_{кр} = \frac{7}{8} \cdot \pi \cdot 9 = 7{,}875\pi$. Так как в ответе следует указать $\frac{S}{\pi}$, то $\frac{S}{\pi} = 7{,}875$.

Ответ: 7,875.

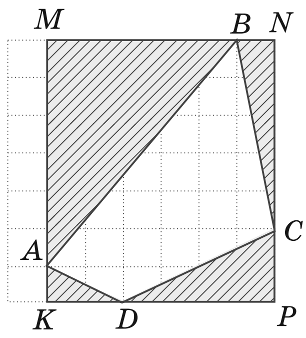
Пример 7. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 м × 1 м. На рисунке изображена стена, в которой имеется окно, не подлежащее покраске. Найдите, какова площадь покраски стены (в квадратных метрах).

Решение. Площадь заштрихованной части равна $S = S_{ABCD} - S_{MNPK}$, где $S_{ABCD} = AB \cdot BC$, $S_{MNPK} = MN \cdot MK$. Определим по рисунку размеры стены и окна: $AB = 4$, $BC = 8$, $MN = 2$, $MK = 2$. Вычислим площадь покраски: $S = 4 \times 8 - 2 \cdot 2 = 28$.



Ответ: 28.

Пример 8. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 см × 1 см. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на рисунке. (Ответ дайте в квадратных сантиметрах.)



Решение. Рассмотрим наиболее универсальный метод вычисления плоской фигуры, когда не удается сразу применить формулы (1)÷(7). Заключим четырехугольник $ABCD$ в прямоугольник $MNPK$ так, что вершины четырехугольника лежат на сторонах прямоугольника $MNPK$. Тогда площадь четырехугольника $ABCD$ равна площади прямоугольника $MNPK$ за исключением площадей заштрихованных прямоугольных треугольников, т. е.

$$S_{ABCD} = S_{MNPK} - S_{\triangle AKD} - S_{\triangle DCP} - S_{\triangle BNC} - S_{\triangle AMB} = MN \cdot MK - \frac{1}{2}AK \cdot KD -$$

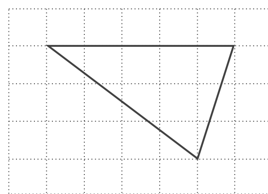
$$- \frac{1}{2}DP \cdot CP - \frac{1}{2}BN \cdot NC - \frac{1}{2}AM \cdot MB = 6 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 - \frac{1}{2} \times$$

$$\times 6 \cdot 5 = 42 - 1 - 4 - 2{,}5 - 15 = 19{,}5.$$

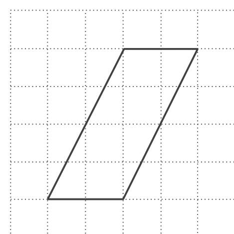
Ответ: 19,5.

Дополнительные задания

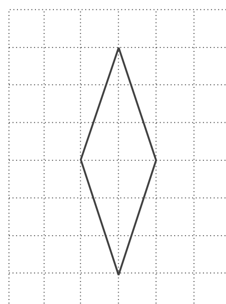
1. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 см × 1 см. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке (в квадратных сантиметрах).



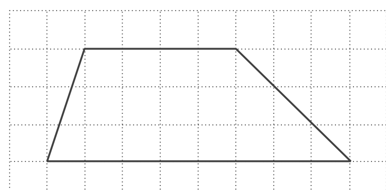
2. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 см × 1 см. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на рисунке (в квадратных сантиметрах).



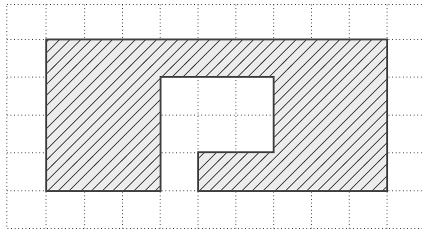
3. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 см × 1 см. Найдите площадь ромба, изображенного на рисунке (в квадратных сантиметрах).



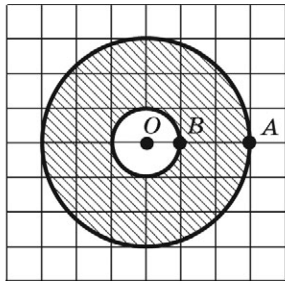
4. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 см × 1 см. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке (в квадратных сантиметрах).



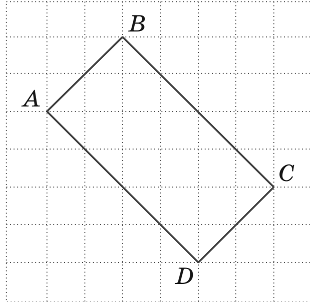
5. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 м $\times$ 1 м. На рисунке изображена стена. В которой имеется балконная дверь с окном, не подлежащее покраске. Найдите, какова площадь покраски стены (в квадратных метрах).



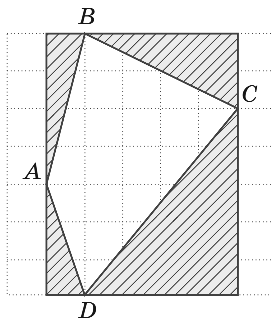
6. Найдите площадь заштрихованного кольца S. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$. Размер каждой клетки 1 см $\times$ 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



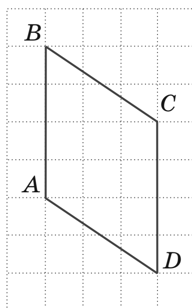
7. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.



8. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.



9. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 см $\times$ 1 см. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на рисунке. (Ответ дайте в квадратных сантиметрах.)



День 8

Задание В7

Занятие посвящено вычислению степенных, логарифмических и тригонометрических выражений, а также выражений с радикалами. При решении подобного типа заданий используются тождественные преобразования алгебраических, логарифмических и тригонометрических выражений, формулы сокращенного умножения. Напомним формулы, которые вам потребуются при решении задач.

I. Свойства степеней

С натуральным показателем

а) Свойства, выражающиеся равенствами:

$n, m \in \boldsymbol{N}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (1)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0,\ m > n \quad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (3)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \frac{a^m}{a^n},\ m > n \quad (4)$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (5)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m} \quad (7)$$

$$0^n = 0,\ 1^n = 1 \quad (8)$$

$$|a^n| = |a|^n \quad (9)$$

если $a^m = a^n$ при $a \neq 1$, то $m = n$ (10)

б) Свойства, выражающиеся неравенствами:

если $0 \leqslant a < b$, то $a^n < b^n\ \forall n \in \boldsymbol{N}$ (11)

если $a > 1$, то $a^m > a^n$ при $m > n$ (12)

если $0 < a < 1$, то $a^m < a^n$ при $m > n$ (13)

если $a < 0$, то $a^n > 0$ при четном n и $a^n < 0$ при нечетном n (14)

в) $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $\forall a \in \boldsymbol{R}$

$\sqrt[n]{a^n} = a$ при нечетном n

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ при четном n

С целым показателем

$a \neq 0$, $b \neq 0$ m, n — целые числа

а) Свойства, выражающиеся равенствами, аналогичны свойствам степеней с натуральным показателем, кроме свойства $0^n = 0$.

б) Свойства, выражающиеся неравенствами:

если $0 < a < b$, то $a^n < b^n$ при $n > 0$ и $a^n > b^n$ при $n < 0$ (11)

если $a > 1$, то $a^m > a^n$ при $m > n$ (12)

если $0 < a < 1$, то $a^m < a^n$ при $m > n$ (13)

если $a < 0$, то $a^n > 0$ при четном n и $a^n < 0$ при нечетном n (14)

С рациональным и действительным показателем

($a > 0$, $b > 0$ m, n — произвольные рациональные числа)

$m = \frac{g}{r}$, где g — целое число, r — натуральное число

а) Свойства, выражающиеся равенствами, аналогичны свойствам степеней с целым показателем.

б) Свойства выражающиеся неравенствами:

если $a < b$, то $a^m < b^m$ при $m > 0$ и $a^m > b^m$ при $m < 0$ (11)

если $a > 1$, то $a^m > a^n$ при $m > n$ (12)

если $0 < a < 1$, то $a^m < a^n$ при $m > n$ (13)

II. Свойства логарифмов

Определение. Логарифмом числа b по снованию a называют такое число c, что $a^c = b$ и записывают в виде $c = \log_a b$ при условии $b > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$.

Основные свойства ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $d = 1$)

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc \qquad (1)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c} \qquad (2)$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\log_a b \qquad (3)$$

$$\log_a b^n = n\log_a b \qquad (4)$$

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b \qquad (5)$$

$$\log_a a = 1 \qquad (6)$$

$$\log_a 1 = 0 \qquad (7)$$

$$\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a} \qquad (8)$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad (9)$$

$$a^{\log_a b} = b \qquad (10)$$

Выражение (10) называется основным логарифмическим тождеством.

III. Формулы для решения задач по тригонометрии

1. Угол α в радианах связан с углом α° в градусах: $\alpha = \frac{\pi \cdot \ \alpha^\circ}{180^\circ}$

2. Основное тригонометрическое тождество: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

3. $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4. При делении формулы (2) почленно на $\cos^2\alpha$ получим:

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$

5. При делении формулы (2) почленно на $\sin^2\alpha$ получим:

$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$.

6. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

7. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
8. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

4. Формулы сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \tag{1}$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \tag{2}$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \tag{3}$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \tag{4}$$

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1. Вычислите значение выражения $\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{24}$.

Решение. Представим $54 = 27 \cdot 2$ и $24 = 3 \cdot 8$. Тогда $\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{24} = \sqrt[4]{27 \cdot 2} \times \sqrt[4]{3 \cdot 8}$. Применяя свойства степеней, запишем последнее выражение как $\sqrt[4]{27 \cdot 2} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot 8} = 3^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 3^1 \cdot 2^1 = 6$.

Ответ: 6.

Пример 2. Вычислите значение выражения $-11(625)^{\frac{1}{4}} + 63$.

Решение. Преобразуем исходное выражение: $-11(625)^{\frac{1}{4}} + 63 = -11 \cdot (5^4)^{\frac{1}{4}} + 63 = -11 \cdot 5 + 63 = -55 + 63 = 8$.

Ответ: 8.

Пример 3. Вычислите значение выражения $\dfrac{169^{\frac{7}{2}}}{169^3} - 100^{\frac{1}{2}}$.

Решение. Представим $169^{\frac{7}{2}}$ как $169^{3,5}$ и преобразуем первое слагаемое $\dfrac{169^{\frac{7}{2}}}{169^3} = \dfrac{169^{3,5}}{169^3} = 169^{3,5-3} = 169^{0,5} = 169^{\frac{1}{2}} = \sqrt{169} = 13$. Вычислим $100^{\frac{1}{2}} = 10$. Подставляем полученные результаты в исходное выражение: $13 - 10 = 3$.

Ответ: 3.

Пример 4. Вычислите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{131} + \sqrt{3})^2}{\sqrt{393} + 67}$.

Решение. Возведем числитель в квадрат и преобразуем: $(\sqrt{131} + \sqrt{3})^2 = 131 + 2\sqrt{131} \cdot \sqrt{3} + 3 = 134 + 2\sqrt{393}$. Подставим полученное выражение в исходное и произведем сокращение: $\dfrac{134 + 2\sqrt{393}}{\sqrt{393} + 67}$.

Ответ: 2.

Пример 5. Вычислите значение выражения $\dfrac{19(a^6)^{335}+13(a^{67})^{30}}{(4a^{1005})^2}$.

Решение. Применяя свойство степени с натуральным показателем, производим следующие вычисления: $(a^6)^{335}=a^{2010}$, $(a^{67})^{30}=a^{2010}$, $(4a^{1005})^2=16a^{2010}$. Тогда исходное выражение принимает вид: $\dfrac{19\cdot\ a^{2010}+13a^{2010}}{16\cdot\ a^{2010}}=\dfrac{32\cdot\ a^{2010}}{16\cdot\ a^{2010}}$.

Ответ: 2.

Пример 6. Вычислите значение выражения $\log_5 325-\log_5 13$.

Решение. Применяя свойства логарифмов $\log_a b-\log_a c=\log_a\dfrac{b}{c}$ и $\log_a b^n=$ $=n\log_a b$, вычисляем: $\log_5 325-\log_5 13=\log_5\dfrac{325}{13}=\log_5 25=\log_5 5^2=2\log_5 5=2$.

Ответ: 2.

Пример 7. Вычислите значения выражения $10+7\log_{\frac{1}{9}}81$.

Решение. С учетом свойства логарифмов $\log_{a^m}b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ запишем исходное выражение в виде: $10+7\log_{\frac{1}{9}}81=10+7\log_{3^{-2}}3^4=10-7\left(\dfrac{4}{2}\right)\times$ $\times\log_3 3=-4$.

Ответ: −4.

Пример 8. Вычислите значение выражения $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{13}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11}:\left(\dfrac{1}{15}\right)^{11}$.

Решение. Преобразуем исходное выражение

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{13}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{11}:\left(\frac{1}{15}\right)^{11}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{11}\ \left(\frac{1}{3}\right)^{11}:\left(\frac{1}{15}\right)^{11}=\frac{1}{25}\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^{11}:$$

$$:\left(\frac{1}{15}\right)^{11}=\frac{1}{25}=0{,}04.$$

Ответ: 0,04.

Пример 9. Вычислите значение выражения $\operatorname{tg}\alpha$, если

$$\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}\text{ и }\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}.$$

Решение. По условию задачи угол α находится в III четверти, где $\cos\alpha<0$, $\operatorname{tg}\alpha>0$. Определим $\cos\alpha$ из основного тригонометрического тождества: $\cos\alpha=$ $=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\dfrac{1}{5}}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Вычислим искомое выражения: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$

$$=\frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Пример 10. Вычислите значение выражения $\frac{97 \cdot \cos 29^\circ \cdot \sin 29^\circ}{\sin 58^\circ}$.

Решение. Воспользуемся формулой для синуса двойного угла. Вычислим выражение, стоящее в числителе: $\cos 29^\circ \cdot \sin 29^\circ = \frac{1}{2}\sin 58^\circ$. Исходное выражение принимает вид: $\frac{97 \cdot \sin 58^\circ}{2\sin 58^\circ} = \frac{97}{2} = 48{,}5$.

Ответ: 48,5.

Пример 11. Вычислите значение выражения $\frac{11}{\sqrt{3}} \cdot (\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ)$.

Решение. Воспользуемся формулой для косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin s^2\alpha$. Исходное выражение принимает вид: $\frac{11}{\sqrt{3}} \cdot (\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ) = -\frac{11}{\sqrt{3}}(\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) = -\frac{11}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ = -\frac{11}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -5{,}5$.

Ответ: $-5{,}5$.

Дополнительные задания

1. Вычислите значение выражения $45 - 2\sqrt[4]{11} \cdot 11^{\frac{3}{4}}$.

2. Вычислите значение выражения $8 - \sqrt[3]{3} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$.

3. Вычислите значение выражения $-11 \cdot (625)^{\frac{1}{4}} + 63$.

4. Вычислите значение выражения $\log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} 1$.

5. Вычислите значение выражения $\log_3 297 - \log_3 11$.

6. Вычислите значение выражения $7 + 2\log_2 \frac{1}{32}$.

7. Вычислите значение выражения $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

8. Вычислите значение выражения $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

День 9

Задание B8

На задания B8 отводится два занятия, которые включают в себя все основные типы задач по «Началам математического анализа» с использованием производных, т.е. с использованием графиков функций, вычислением производной, определением наибольших и наименьших значений функции по заданному графику и т.п. Напомним основные формулы.

Геометрический смысл производной — значение производной в данной точке равно тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс $0x$.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $A(x_0, y_0)$, имеет вид:

$$y = y_0 + k(x - x_0),$$

где — k угловой коэффициент прямой; $k = \mathrm{tg}\alpha$, α — угол наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс.

Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны.

Уравнение касательной к заданной функции $y = f(x)$, проведенной в точке $A(x_0, f(x_0))$, которая принадлежит этой функции, имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

где $f'(x_0)$ — значение производной данной функции в точке с абсциссой x_0.

Если касательная параллельна какой-либо прямой с заданным угловым коэффициентом k, то $f'(x_0) = k$.

Если $f'(x) > 0$ на (a, b), то $y = f(x)$ строго возрастает на $[a, b]$.

Если $f'(x) \geqslant 0$ на (a, b), то $y = f(x)$ не убывает на $[a, b]$.

Если $f'(x) < 0$ на (a, b), то $y = f(x)$ строго убывает на $[a, b]$.

Если $f'(x) \leqslant 0$ на (a, b), то $y = f(x)$ не возрастает на $[a, b]$.

Промежутки возрастания (убывания) функции называются *промежутками монотонности.*

Экстремум — это максимум или минимум функции.

Для нахождения экстремума требуется выполнение двух условий. Первое необходимое условие — равенство нулю производной функции (либо она не существует) $f'(x_0) = 0$. Точки, в которых $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует (включая случай $f'(x_0) = \infty$) называются *критическими*.

Вторым достаточным условием экстремума является изменение знака производной в окрестности критической точки с плюса на минус (максимум), либо с минуса на плюс (минимум).

Если $f'(x) < 0$, при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка минимума.

Если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка максимума.

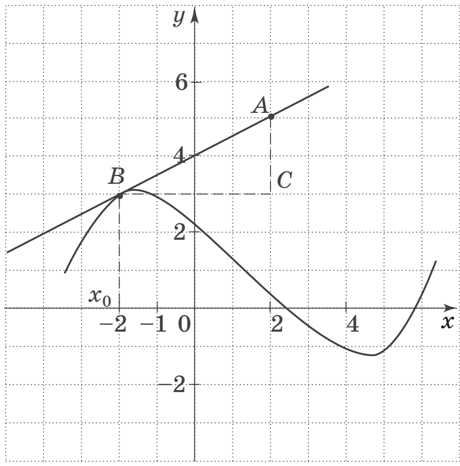
Максимум — это значение функции в точке максимума $f(x_0)$; минимум — это значение функции в точке минимума $f(x_0)$.

Значение максимума превосходит все остальные значения функции в некотором интервале (окрестности) вокруг рассматриваемой точки x_0. Аналогично для минимума, поэтому максимум и минимум называют *локальными экстремумами*.

Функция $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, может иметь несколько локальных минимумов и максимумов, причем в некоторых точках локальный минимум может превышать локальный максимум.

Не путайте экстремум с наибольшим (наименьшим) значением функции на отрезке $[a, b]$. Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ определяются все локальные экстремумы внутри отрезка с использованием производной (как указано выше). Далее вычисляются значения функции на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$. Наибольшее (наименьшее) значение функции выбирается среди всех значений локальных экстремумов и значений функции $f(a)$ и $f(b)$.

Рассмотрим примеры с использованием уравнения касательной.

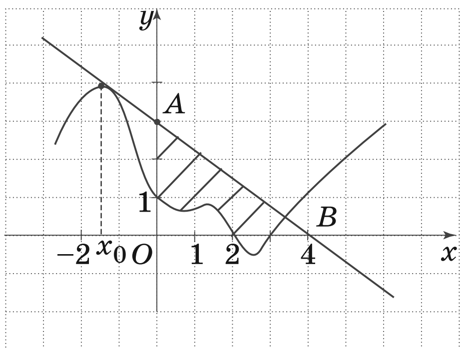


Пример 1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая касается графика функции в точке с абсциссой −2 и проходит через точку $A(2; 5)$. Найдите значение производной функции в точке с абсциссой −2.

Решение. Решение этого примера основано на геометрическом смысле производной. Прямая AB является касательной к графику функции в точке с абсциссой, равной −2. Следовательно, для определения значения производной функции в этой точке необходимо вычислить тангенс угла наклона прямой AB к положительному направлению оси абсцисс. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $BC \parallel 0x$, $AC \parallel 0y$.

$$f'(-2) = \text{tg}\angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{4} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.



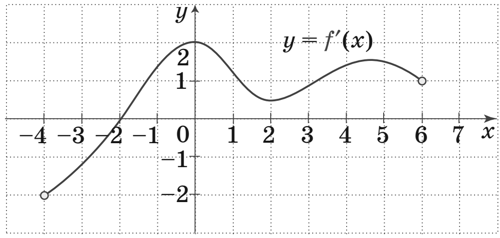
Пример 2. На рисунке изображена касательная, проведенная к графику функции $f(x)$ в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции в точке x_0.

Решение. Как было указано выше, значение производной функции $f(x)$, в точке с абсциссой x_0 равно тангенсу угла α наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс. Так как этот угол тупой, т.е. $\alpha > 90°$, то $\text{tg}\angle\alpha < 0$ и знак производной $f'(x_0) < 0$. Для нахождения численного значения производной определим из $\triangle ABO$ $\text{tg}\angle ABO$ и возьмем его со знаком «минус»:

$f'(x_0) = -\text{tg}\angle ABO = -\dfrac{AO}{OB} = -\dfrac{3}{4} = -0{,}75$, где AO, OB — длины катетов в $\triangle ABO$.

Ответ: −0,75.

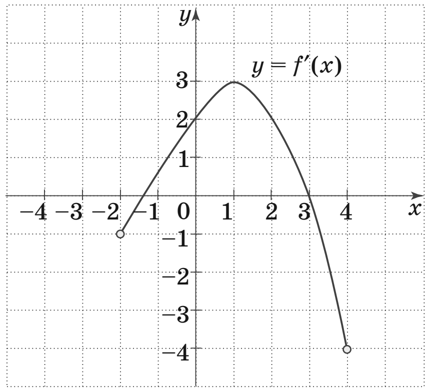
Пример 3. На рисунке изображен график производной некоторой функции $y = f(x)$, которая задана на промежутке $(-4; 6)$. Укажите количество точек, в которых касательная параллельна прямой $y = x + 2$ или совпадает с ней.



Решение. Угловой коэффициент заданной прямой $y = x + 2$ равен $k = 1$. Чтобы касательная была параллельна этой прямой или совпадала с ней, необходимо, чтобы $f'(x_0) = k = 1$. Поэтому на рисунке находим точки, в которых производная равна 1. Для этого через точку на оси ординат $y = 1$ проводим прямую, параллельную оси абсцисс. Точки пересечения графика функции $y = f'(x)$ с этой прямой $y = 1$ являются искомыми. В данном случае точек пересечения 3.

Ответ: 3.

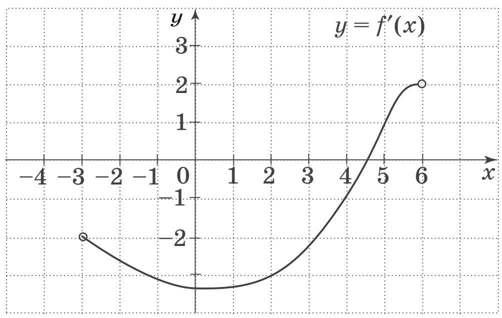
Пример 4. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-2; 4)$. График ее производной изображен на рисунке. Найдите точку, в которой тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, имеет наибольшее значение.



Решение. Тангенс угла наклона касательной равен значению производной в данной точке. Как видно из графика, наибольшее значение производной достигается при $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 5. На рисунке изображен график производной некоторой функции $y = f'(x)$, которая задана на промежутке $(-3; 6)$. Укажите точку x_0, в которой касательная к функции наклонена к оси абсцисс под углом $45°$.

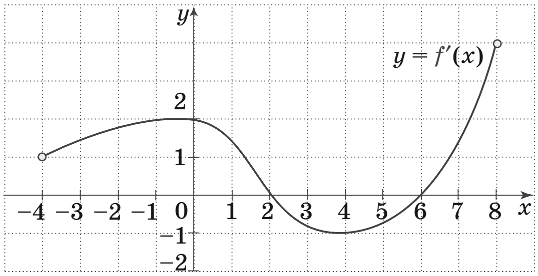


Решение. Тангенс угла наклона касательной равен значению производной в точке касания $f'(x) = \mathrm{tg}\angle\alpha$. По условию задачи $\alpha = 45°$, значит, $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}45° = 1$, т.е. $f'(x) = 1$.

На графике определим точку x_0, для которой ордината приведенного графика $f'(x_0) = 1$. Это точка $x_0 = 5$.

Ответ: 5.

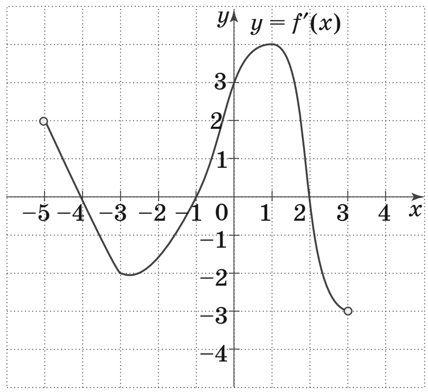
Пример 6. На рисунке изображен график производной некоторой функции $y = f'(x)$, которая задана на промежутке $(-4; 8)$. Укажите точку x_0, в которой касательная к функции параллельна оси абсцисс или совпадает с ней. (Если таких точек несколько, то в ответе укажите их сумму их абсцисс.)



Решение. По условию задачи касательная параллельна оси абсцисс или совпадает с ней, значит, угол $\alpha = 0$ и $k = \text{tg}\ \alpha = 0$. Таким образом, найдем точки x_0, при которых $f'(x_0) = 0$. Это точки пересечения приведенного графика с осью абсцисс. Таких точек две: $x_0 = 2$ или $x_0 = 6$.

Ответ: 8.

Пример 7. На рисунке изображен график производной некоторой функции $y = f'(x)$, которая задана на промежутке $(-5; 3)$. Укажите точку x_0, в которой касательная к графику функции перпендикулярна оси ординат. (Если таких точек несколько, то в ответе укажите количество точек.)



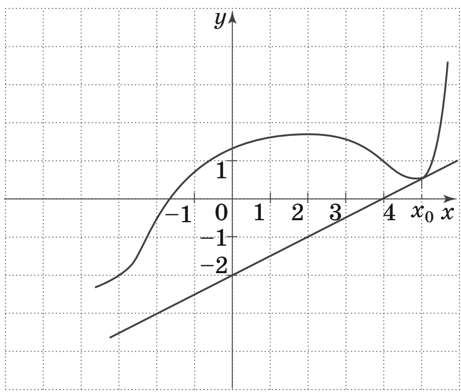
Решение. По условию касательная перпендикулярна оси ординат, т.е. касательная параллельна оси абсцисс Ox или совпадает с ней. Последнее означает, что угол наклона касательной к оси абсцисс $\alpha = 0$, $\text{tg}\ \alpha = 0$ и $f'(x_0) = 0$.

Определим на рисунке точки x_0, в которых $f'(x_0) = 0$, т.е. точки пересечения графика с осью абсцисс. Таких точек три: $x_0 = -4$, $x_0 = -1$ или $x_0 = 2$.

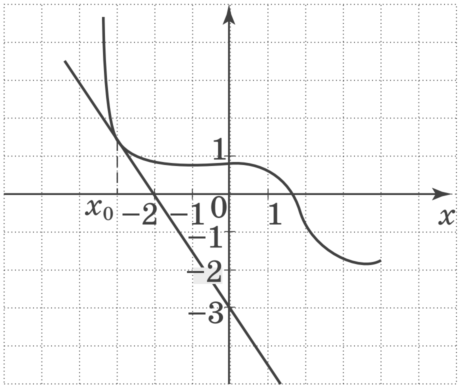
Ответ: 3.

Дополнительные задания

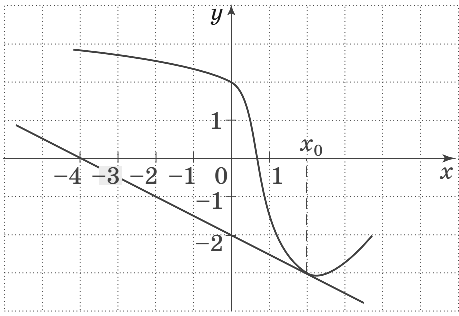
1. На рисунке изображена касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



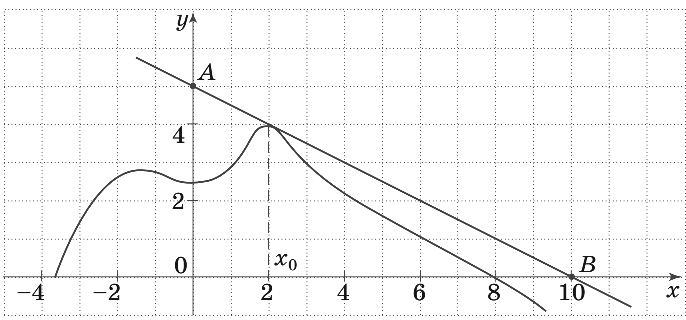
2. На рисунке изображена касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



3. На рисунке изображена касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

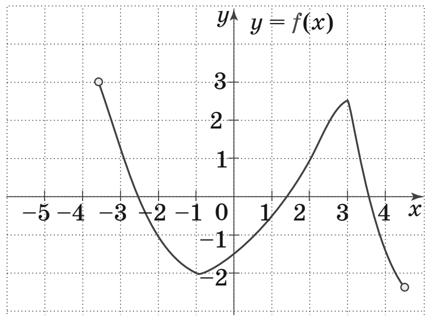


4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точки $A(0; 5)$ и $B(10; 0)$, касается графика функции в точке x_0. Найдите значение производной функции в этой точке.



День 10

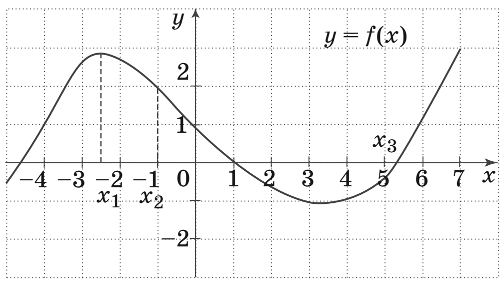
Задание B8 (окончание)



Пример 8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке (−3,5; 4,5). Найдите длину участка, на котором производная функции неотрицательна.

Решение. Если производная функции $f'(x_0) \geqslant 0$ на каком-либо промежутке, то функция не убывает. Как видно из графика, функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке [−1; 3]. При $x \in (-1; 3)$ производная $f'(x) > 0$. В точках $x = -1$ $f'(x) = 0$ и $x = 3$ $f'(x) = 0$. Эти точки являются точками минимума и максимума. Следовательно, $f'(x_0) \geqslant 0$ на промежутке [−1; 3]. Длина того промежутка составляет 4.

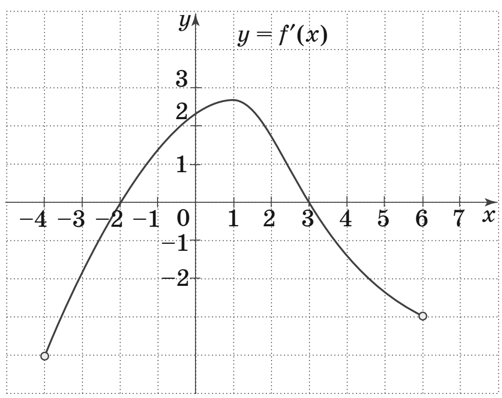
Ответ: 4



Пример 9. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. В какой из точек: x_1, x_2, x_3 производная функции $f'(x)$ отрицательна? В ответе укажите индекс точки.

Решение. Как указано в начале предыдущего урока, знак производной связан с возрастанием (убыванием) функции. Если $f'(x) < 0$ на промежутке (a, b), то функция $y = f(x)$ убывает. Как видно из рисунка, функция $y = f(x)$ убывает на участке, большем x_1. Следовательно, точка x_2 принадлежит участку убывания функции, где $f'(x) < 0$. Точка x_3 принадлежит участку возрастания функции. Точка x_1 является точкой максимума. В точке x_2 $f'(x) < 0$.

Ответ: 2.

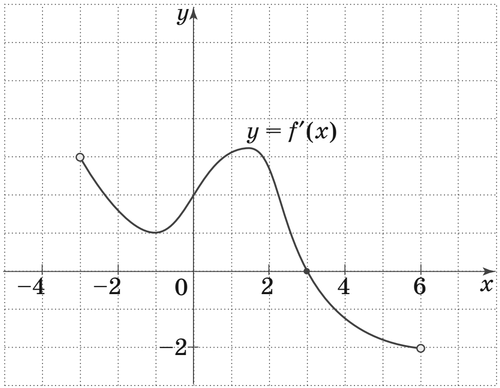


Пример 10. На рисунке изображен график производной некоторой функции $f(x)$, которая задана на промежутке (−4; 6). Укажите длину участка возрастания функции.

Решение. Функции $y = f(x)$ возрастает при неотрицательных значениях ее производной $f'(x) \geqslant 0$. Как видно из приведенного графика, функция на промежутке $x \in [-2; 3]$ возрастает. Длина участка возрастания функции равна: $l = 2 + 3 = 5$.

Ответ: 5.

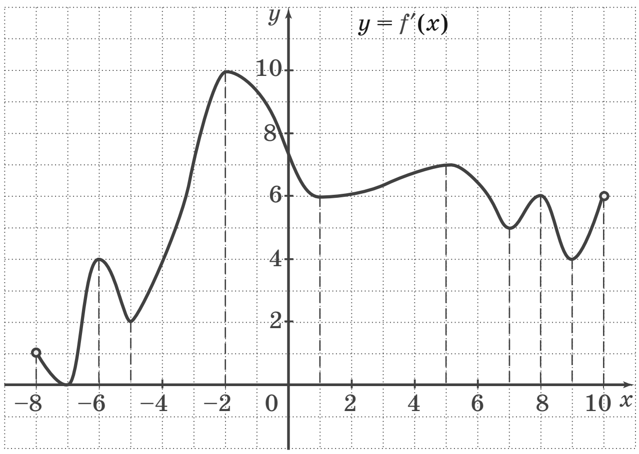
Пример 11. На рисунке изображен график некоторой функции, заданной на промежутке $(-3;\ 6)$. Найдите точку, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



Решение. Так как необходимым условием экстремума является равенство нулю производной функции, то определим по графику, в каких точках производная $f'(x)$ обращается в ноль. В данном примере это одна точка $x = 3$. В окрестности этой точки производная меняет знак с плюса на минус. Значит, выполняется достаточное условие достижения максимума функции. Других точек экстремума нет, т.е. наибольшее значение функция $f(x)$ принимает в точке $x = 3$.

Ответ: 3.

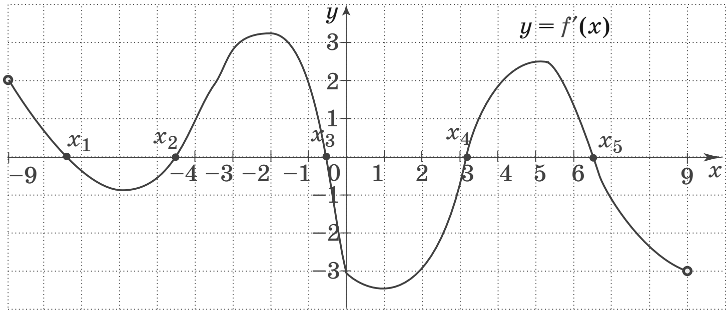
Пример 12. На рисунке изображен график производной $y = f'(x)$ функции. Функция задана на промежутке $[-8;\ 10]$. Укажите точку, в которой функция $y = f(x)$ достигает наибольшего значения.



Решение. Из приведенного графика видно, что на промежутке $(-8;\ 10)$ производная $f'(x) \geqslant 0$. Хотя в точке $x = -7$ производная обращается в нуль, но знак производной не меняется. Значит, точка $x = -7$ не является точкой экстремума. Из условия $f'(x) \geqslant 0$ следует, что функция $y = f(x)$ не убывает и наибольшего значения функция достигает в конце промежутка при $x = 10$.

Ответ: 10.

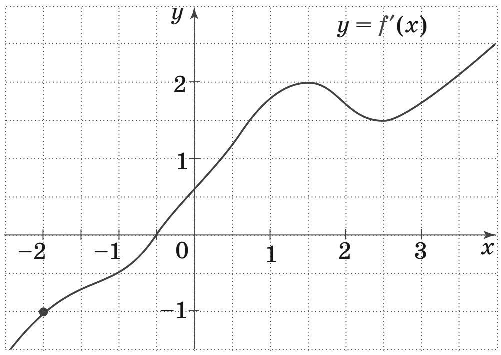
Пример 13. На рисунке изображен график производной функции, заданной на промежутке $(-9;\ 9)$. Сколько точек максимума имеет функция $y = f(x)$ на этом промежутке?



Решение. Как видно из рисунка, производная функции обращается в нуль в пяти точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Для достижения максимума в этих точках знак производной должен меняться с плюса на минус. Определим по графику, в каких точках будет максимум: x_1, x_3, x_5. Таким образом, функция достигает максимума в трех точках.

Ответ: 3.

Пример 14. На рисунке изображен график производной некоторой функции, заданной на промежутке $(-2{,}5;\ 4)$. Укажите точку x_0, в которой касательная к функции наклонена к оси абсцисс под углом $135°$.



Решение. Тангенс угла наклона касательной равен значению производной функции в точке касания, т.е. $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$. По условию задачи $\alpha = 135°$, $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}135° = -1$, т.е. $f'(x_0) = -1$. На графике определяем точку x_0, при которой ордината графика $f'(x_0) = -1$. Это точка $x_0 = -2$.

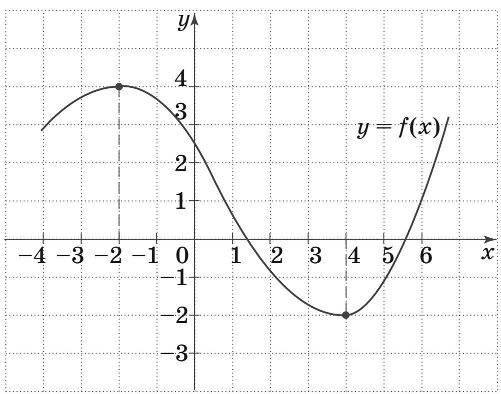
Ответ: −2.

Пример 15. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите:

а) на каком участке производная функции отрицательна (в ответе укажите длину участка);

б) точку максимума функции;

в) точку минимума функции.



Решение. а) Если производная функции отрицательна $f'(x_0) < 0$ на каком-либо промежутке $[a,\ b]$, то функция на этом промежутке убывает. По графику видно, что функция убывает на промежутке $[-2,\ 4]$. Длина этого участка составляет 6.

Ответ: 6.

б) Точка x_0 является точкой максимума функции $y = f(x)$, если для всех значений аргумента x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Как видно из приведенного графика максимальное значение функции достигается при $x_0 = -2$ («горбик» на рисунке).

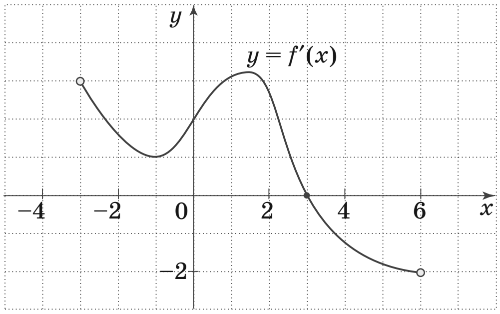
Ответ: −2.

в) Точка x_0 является точкой минимума функции $y = f(x)$, если для всех значений аргумента x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$. Как видно из приведенного графика минимальное значение функции достигается при $x_0 = 4$ («впадина» на рисунке).

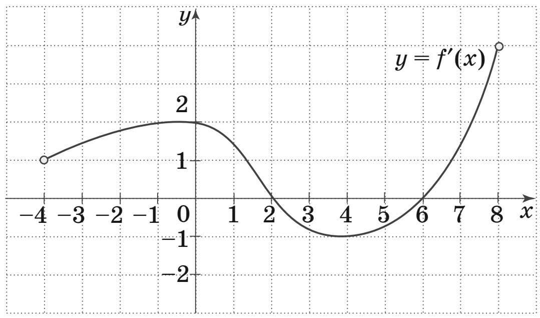
Ответ: 4.

Дополнительные задания

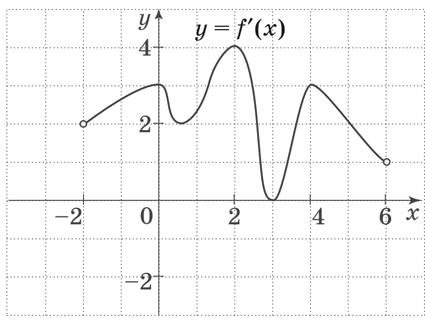
5. На рисунке изображен график производной некоторой функции $f(x)$, которая задана на промежутке $(-3; 6)$. Укажите точку x_0, в которой касательная параллельна прямой $y = 2x + 7$. (Если таких точек x_0 несколько, то в ответе укажите их количество.)



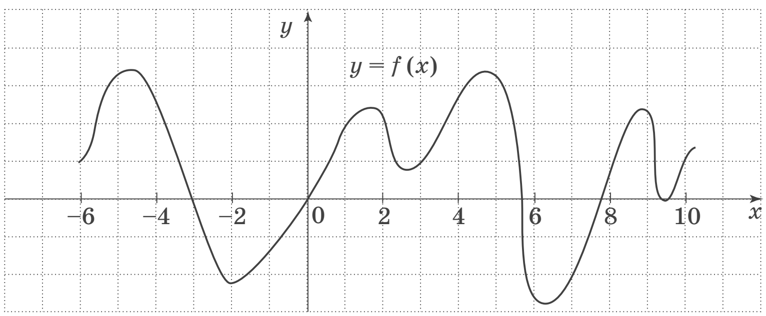
6. На рисунке изображен график производной некоторой функции $f(x)$, которая задана на промежутке $(-4; 8)$. Укажите число длин участков возрастания функции.



7. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$. Функция задана на промежутке $(-2; 6)$. Укажите точку, в которой функция достигает наибольшее значение.



8. Функция, определенная по промежутке $[-6; 10]$, приведена на графике. Определите количество точек экстремума.



День 11

Задание B9

Занятие посвящено решению заданий по геометрии на определение площадей поверхностей и объемов пространственных фигур.

Задания группы B9 связаны с решением задач на определение объемов и площадей поверхностей тел.

Приведем основные определения и формулы.

Многогранником называется тело, ограниченное в пространстве конечным числом плоскостей.

Призмой называется многогранник, две грани которого — равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях (основания), а остальные грани — параллелограммы.

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.

Прямая призма называется *правильной*, если ее основаниями являются правильные многоугольники.

Призма, основанием которой является параллелограмм, называется *параллелепипедом*.

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*.

Прямоугольный параллелепипед с равными ребрами называется *кубом*.

Объем призмы определяется по формуле $V = S_{\text{осн}} \cdot h$, где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания призмы, h — высота.

Объем прямоугольного параллелепипеда: $V = abc$, где a, b, c — длины трех ребер, выходящих из одной вершины.

Объем куба: $V = a^3$, где a — ребра куба.

n — угольной пирамидой называется многогранник, одной гранью которого является n-угольник (основание пирамиды), остальными — треугольники (боковые грани), у которых только одна общая вершина (вершина пирамиды).

Пирамида называется *правильной*, если ее основание — правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.

Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$, где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания пирамиды, h — высота.

Объем усеченной пирамиды: $V = \frac{1}{3} h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$, где S_1 и S_2 — площади оснований, h — высота пирамиды.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой*.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды: $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} Pl$, где P — периметр основания, l — апофема.

Тетраэдром называется треугольная пирамида.

Тетраэдр называется *правильным*, если все его ребра равны.

Прямым круговым цилиндром называется фигура, полученная вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Поверхность цилиндра состоит из двух оснований (двух равных кругов, лежащих в параллельных плоскостях) и боковой поверхности.

Отрезок, с одним концом на окружности одного основания, с другим концом — на окружности другого основания, перпендикулярный плоскостям оснований, называется *образующей цилиндра*.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований.

Площадь боковой поверхности цилиндра: $S_{бок} = 2\pi Rh$, где R — радиус основания цилиндра, h — высота цилиндра

Объем цилиндра: $V = \pi R^2 h$.

Прямым круговым конусом называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.

Поверхность конуса состоит из основания (круга) и боковой поверхности.

Отрезок с одним концом в вершине конуса, с другим концом — на окружности основания, называется *образующей конуса*.

Площадь боковой поверхности конуса: $S_{бок} = \pi Rl$, где R — радиус основания конуса, l – образующая конуса.

Объем конуса: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, здесь R — радиус основания, h — высота конуса.

Шаром называется тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся от данной точки (центра) на расстоянии, не большем данного (радиус шара). Граница шара называется *сферой*.

Поверхность сферы: $S = 4\pi R^2$, где R — радиус сферы.

Объем шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Примеры решения задач.

Пример 1. Объем куба равен 99. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

Решение. Обозначим объем данного куба $V_{куба} = 99$. Обозначим длину ребра данного куба a, $V_{куба} = a^3$. В основании заданной четырехугольной пирамиды находится квадрат со стороной a. Высота пирамиды равна $\frac{a}{2}$. Ее объем вычисляется по формуле $V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}$. Поэтому $V_{пир} = \frac{V_{куба}}{6} = \frac{99}{6} = 16{,}5$.

Ответ: 16,5.

Пример 2. Площадь осевого сечения цилиндра равна 137. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π.

Решение. Площадь осевого сечения цилиндра находится по формуле $S_{ос.сеч.} = 2 \cdot r \cdot l$, где r и l, соответственно радиус основания и образующая цилиндра. Площадь боковой поверхности цилиндра находится по формуле $S_{бок.\ пов.} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l$.

Вычислим $\frac{S_{\text{бок.пов.}}}{\pi} = \frac{2\pi rl}{\pi} = 2 \cdot r \cdot l = S_{\text{ос.сеч.}} = 137.$

Ответ: 137.

Пример 3. Объем одного куба в 125 раз больше объема другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

Решение. Обозначим длину ребра одного куба b, другого — a. Тогда их объемы равны V_1 и V_2. $V_1 = b^3$, $V_2 = a^3$.

Из условия задачи $V_1 = 125 \cdot V_2$, то есть $b^3 = 125 \cdot a^3$. Откуда $b = 5 \cdot a$. Площади поверхностей кубов соответственно равны $S_1 = 6 \cdot b^2$ и $S_2 = 6 \cdot a^2$.

Сделаем замену в формуле $S_1 = 6 \cdot b^2 = 6 \cdot (5a)^2 = 6 \cdot 25 \cdot a^2 = 25 \cdot S_2$.

Ответ: 25.

Пример 4. Радиусы трех шаров равны 0,5; 3 и 4. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов

Решение. Обозначим радиусы шаров $R_1 = 0{,}5$; $R_2 = 3$; $R_3 = 4$; R_4, где R_4 — радиус искомого шара. Сумма объемов трех данных шаров равна $V_4 = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_1^3 + R_2^3 + R_3^3) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{8} + 27 + 64\right) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{729}{8} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_4)^3$. Следовательно $R_4 = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

Пример 5. Высота конуса равна 12, образующая равна 20. Найдите его объем, деленный на π.

Решение. Объем конуса находится по формуле $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h$, где h — высота конуса. Найдем радиус основания $R_{\text{осн}} = \sqrt{l^2 - h^2}$, где l — образующая конуса, $R_{\text{осн}} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$. $\frac{V_{\text{конуса}}}{\pi} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h}{\pi} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R_{\text{осн}}^2 \cdot h}{\pi} = \frac{1}{3} \cdot R_{\text{осн}}^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot 12 = 1024$.

Ответ: 1024.

Пример 6. От треугольной пирамиды, объем которой равен 144, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.

Решение. Площадь основания искомой пирамиды равна четвертой части площади основания данной пирамиды. Высота искомой пирамиды равна высоте данной пирамиды. Поэтому

$$V_{\text{отсеч пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{отсеч осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot S_{\text{задан осн}} \cdot h = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{\text{задан осн}} \cdot h = \frac{1}{4} \cdot V_{\text{задан пир}} = \frac{1}{4} \cdot 144 = 36.$$

Ответ: 36.

Пример 7. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 128. Точка E — середина высоты. Высота треугольной пирамиды в два раза меньше высоты четырехугольной. Площадь основания треугольной пирамиды в два раза меньше площади основания четырехугольной. Найдите объем треугольной пирамиды.

Решение. $V_{\text{треуг}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн треуг}} \cdot h_{\text{треуг}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{\text{осн четырехуг}} \cdot \frac{1}{2} h_{\text{четырехуг}} =$

$= \frac{1}{4} \cdot V_{\text{четырехуг}} = \frac{1}{4} \cdot 128 = 32.$

Ответ: 32.

Пример 8. Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 19. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

Решение. Высота треугольной пирамиды равна высоте шестиугольной. Площадь основания треугольной пирамиды в шесть раз меньше площади основания шестиугольной.

$V_{\text{треуг}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн треуг}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot S_{\text{осн шестиуг}} \cdot h = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{шестиуг}}$. Поэтому $V_{\text{шестиуг}} = 6V_{\text{треуг}} = 19 \cdot 6 = 114.$

Ответ: 114.

Пример 9. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4 и 6. Объем параллелепипеда равен 108. Найдите его диагональ.

Решение. Обозначим ребра прямоугольного параллелепипеда $a = 4$, $b = 6$, c. Тогда $V_{\text{пар}} = a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 6 \cdot c = 108$. Откуда $c = 4{,}5$.

Главная диагональ находится по формуле $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} =$

$= \sqrt{4^2 + 6^2 + 4{,}5^2} = 8{,}5.$

Ответ: 8,5.

Пример 10. Площадь поверхности правильного тетраэдра равна 41. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины сторон данного тетраэдра.

Решение. Поверхность искомого многогранника состоит из восьми правильных треугольников, площадь каждого из которых равна четвертой части площади грани тетраэдра или одной шестнадцатой части площади поверхности тетраэдра. Поэтому площадь поверхности многогранника

$S_{\text{пов многогр}} = 8 \cdot \frac{1}{16} \cdot S_{\text{пов тетр}} = \frac{1}{2} \cdot 41 = 20{,}5.$

Ответ: 20,5.

Дополнительные задания

1. Объем куба равен 168. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

2. Ребра тетраэдра равны 5. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.

3. Радиусы двух шаров равны $2\sqrt{6}$ и 5. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.

4. В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 7 и отстоит от других боковых ребер на 5 и 12. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.

5. Длина окружности основания цилиндра равна 0,2, высота равна 50. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

6. Объем треугольной пирамиды равен 81. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 4 : 5, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

7. От треугольной призмы, объем которой равен 57, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объем оставшейся части.

8. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 36 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.

9. Объем первого цилиндра равен 16 м^3. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

10. Площадь диаметрального сечения шара равна 30. Найдите площадь поверхности шара.

11. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 12, боковые ребра равны 10. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

12. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Площадь ее поверхности равна 120. Найдите высоту призмы.

13. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 5. Найдите объем параллелепипеда.

14. Объем конуса равен 50. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

15. Площадь поверхности куба равна 98. Найдите его диагональ.

16. Объем куба равен 343. Найдите площадь его поверхности.

17. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 7 и 24, и боковым ребром, равным 4.

18. В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 10 и отстоит от других боковых ребер на 8 и 15. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.

День 12

Задание B10

Задания B12 посвящены решению прикладных физических задач. Эти задачи можно охарактеризовать как «построение математической модели физического процесса». Процесс может быть описан либо уравнением, либо неравенством. При решении неравенства, чаще всего, требуется найти не весь возможный интервал изменения физического параметра, а лишь его наименьшее (наибольшее) значение. Все используемые величины рассматриваются с учетом своей размерности.

Представленные задачи напрямую связаны с физическими процессами, и часть используемых постоянных величин (констант) представляет собой десятичные дроби, содержащие существенное количество разрядов после запятой, поэтому и ответы в задачах могут получиться в виде бесконечной десятичной дроби. В таких случаях в условии требуется округлить полученное число до указанного разряда с избытком или недостатком. Внимательно дочитывайте условие задачи до конца. Рассмотрим типовые примеры решения задач.

Пример 1. Каким минимально возможным может быть V — объем воздушного шара, чтобы при заполнении его гелием (плотность гелия $\rho_г = 0{,}1890$ кг/м^3), он мог поднять груз массой $m_{гр} = V(\rho_в - \rho_г)$ не менее 85 кг, где $\rho_в = 1{,}3$ кг/м^3 — плотность воздуха? Ответ запишите в виде десятичной дроби, округленной до десятых.

Решение. По условию задачи масса груза $m_{гр}$ должна быть не меньше 85 кг, т.е. $m_{гр} \geqslant 85$. Подставим в неравенство выражение массы через объем и разность плотностей: $V(\rho_в - \rho_г) \geqslant 85$. Учитывая заданные значения плотности газов, получим неравенство относительно переменной V: $V(1{,}3 - 0{,}1890) \geqslant 85$.

Решим его: $V(1{,}3 - 0{,}1890) \geqslant 85$; $V \cdot 1{,}111 \geqslant 85$; $V \geqslant \frac{85}{1{,}111}$; $V \geqslant 76{,}50765077$. Таким образом, минимальный объем шара будет равен $V = 76{,}50765077$. Это не бесконечная десятичная дробь, но число достаточно большое по количеству знаков после запятой. По условию задачи требуется записать ответ «в виде десятиной дроби, округленной до десятых». Проделаем эту операцию: округлить до десятых — значит оставить после запятой один знак. В числе 76,50765077 первый знак после запятой — 5, второй знак — 0, следовательно, округляем с недостатком – отбрасываем все знаки после запятой, кроме первого: $76{,}50765077 \approx 76{,}5$. Это число и записываем в качестве ответа.

Ответ: 76,5.

Пример 2. При фотосъемке для улучшения освещенности экрана за лампой, расположенной на расстоянии $l = 3$ м, параллельно экрану поставили зеркало. На какое наибольшее расстояние d от лампы нужно поставить зеркало, чтобы освещенность экрана $E = \frac{I_v}{l^2} + \frac{I_v}{(l+2d)^2}$ была не менее 31,28 лк ($I_v = 207$ кд — сила света лампы)?

Решение. Освещенность экрана должна быть не менее 31,28 лк, т.е. $E \geqslant 31{,}28$. Подставим в неравенство заданное выражение для E и значения $l = 3$ и $I_v = 207$, получим неравенство относительно одной переменной d: $\frac{207}{3^2} + \frac{207}{(3+2d)^2} \geqslant 31{,}28$. Решим его. Умножим обе части неравенства на выражение $9(3 + 2d)^2$: $207(3 + 2d)^2 + 207 \cdot 9 \geqslant 31{,}28 \cdot 9 \cdot (3 + 2d)^2$. Разделим обе части неравенства на 9 и преобразуем его: $23 \cdot (3 + 2d)^2 + 207 \geqslant 31{,}28 \cdot (3 + 2d)^2$; $207 \geqslant (31{,}28 - 23) \cdot (3 + 2d)^2$; $(3 + 2d)^2 \leqslant 207 : 8{,}28$; $(3 + 2d)^2 \leqslant 25$. Полученное неравенство решаем с учетом того, что $3 + 2d$ — это расстояние, величина положительная, т.е. $0 < 3 + 2d \leqslant 5$; $0 < 2d \leqslant 2$; $0 < d \leqslant 1$. Таким образом, для улучшения освещенности зеркало можно поставить на расстояние не более 1 м.

Ответ: 1.

Пример 3. До какой температуры t_n° C можно нагреть тепловым насосом, работающим по циклу Карно, воздух в палатке, если на улице температура воздуха $t_в^\circ = -5$ °C, а отопительный коэффициент $W = \frac{t_n + 273}{t_n - t_в}$ не меньше 14,4?

Решение. По условию задачи отопительный коэффициент W должен быть не меньше 14,4, то есть $W \geqslant 14{,}4$. Подставим в неравенство выражение для W и значение $t_в = -5$: $\frac{t_n + 273}{t_n - t_в} \geqslant 14{,}4$; $\frac{t_n + 273}{t_n + 5} \geqslant 14{,}4$. Решим неравенство относительно переменной t_n°: $t_n + 273 \geqslant 14{,}4(t_n + 5)$; $(14{,}4 - 1)\, t_n \leqslant 273 - 14{,}4 \cdot 5$; $13{,}4\, t_n \leqslant 201$; $t_n \leqslant 15$. Итак, воздух в палатке можно нагреть до температуры 15 °C.

Ответ: 15.

Пример 4. Воздушный шар наполнен водородом на объем $V_0 = 45$ м^3. На сколько градусов t° C нужно увеличить температуру водорода в шаре, чтобы объем шара $V = V_0(1 + \beta t)$ достиг 50 м^3, где температурный коэффициент объемного расширения газов $\beta = 0{,}003661$ C^{-1}? Ответ запишите в виде целой части от полученной величины.

Решение. Подставим в формулу $V = V_0(1 + \beta t)$ величины начального и конечного объемов и коэффициента объемного расширения газов: $50 = 45(1 + 0{,}003661t)$. Решим уравнение относительно переменой t: $50 - 45 = 45 \times 0{,}003661t$; $t = 5 : 0{,}164745$; $t = 30{,}34993475$.

Ответ предлагается записать в виде целой части от полученной величины. Так как 30,34993475 число положительное, то для определения целой части отбрасываем все знаки после запятой: $[30{,}34993475] = 30$.

Ответ: 30.

Пример 5. Автомобиль массой $m = 1200$ кг начал равноускоренное движение по горизонтальному участку дороги со скоростью $v_0 = 60$ км/ч. На сколько километров в час изменится скорость автомобиля $v - v_0$, если работа двигателя $A = \frac{k^2 m}{2}(v^2 - v_0^2)$ составила 93 750 н · м (1 н · м = 1 (кг · м)/с^2), где $k = \frac{5}{18}$ — коэффициент связи размерностей 1 км/ч $= \frac{5}{18}$ м/с?

Решение. В формулировке задачи уже согласованы между собой размерности всех физических величин с помощью коэффициента k.

В формулу работы двигателя подставим значения величины работы $A = 93\,750$, массы автомобиля $m = 1200$, начальной скорости разгона $v_0 = 60$ и величину коэффициента $k = \frac{5}{18}$. В результате получаем равенство: $93\,750 = \left(\frac{5}{18}\right)^2 \frac{1200}{2}(v^2 - 60^2)$; $93\,750 \cdot 18^2 = 25 \cdot 600 \cdot (v^2 - 60^2)$; $v^2 - 60^2 = 2025$; $v^2 = 2025 + 3600 = 5625 = 75^2$; $v = 75$.

Таким образом, при заданной работе двигателя, автомобиль разгонится с 60 км/ч до 75 км/ч. Изменение скорости составит $v - v_0 = 75 - 60 = 15$ (км/ч).

Ответ: 15.

Пример 6. Высота падающего потока воды, протекающей через плотину, $h = 30$ м. Какой наименьшей объем воды V должен протекать в течение часа, чтобы при падении потока его мощность $N = \frac{g\rho Vh}{3600}$ не опускалась ниже 500 000 Вт (считать ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, плотность воды $\rho = = 1000$ кг/м^3, 1 Вт = 1 (кг · м^2)/с^3)?

Решение. В формулировке данной задачи размерности физических величин согласованы.

Мощность потока не должна быть меньше 500 000 Вт, т.е. $N \geqslant 500\,000$. Подставим в неравенство выражение для мощности потока, значения ускорения свободного падения $g = 10$, плотность воды $\rho = 1000$ и высоту плотины $h = 30$. В результате имеем: $\frac{10 \cdot 1000 \cdot V \cdot 30}{3600} \geqslant 500\,000$. Решим неравенство относительно переменной V: $\frac{V}{12} \geqslant 500$; $V \geqslant 500 \cdot 12$; $V \geqslant 6000$. Таким образом, чтобы поддерживать заданную мощность за один час с высоты плотины должно падать не менее 6000 кубических метров воды в час.

Ответ: 6000.

Дополнительные задания

1. Каким минимально возможным может быть V — объем воздушного шара, чтобы при заполнении его водородом (плотность водорода $\rho_{\text{вод}} = 0{,}09$ кг/м^3), он мог поднять груз массой $m_{\text{гр}} = V(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{вод}})$ не менее 120 кг, где $\rho_{\text{в}} = 1{,}3$ кг/м^3 — плотность воздуха? Ответ запишите в виде десятичной дроби, округленной до десятых.

2. При фотосъемке для улучшения освещенности экрана за лампой, расположенной на расстоянии $l = 2$ м, параллельно экрану поставили зеркало. На какое наибольшее расстояние d от лампы нужно поставить зеркало, чтобы освещенность экрана $E = \dfrac{I_v}{l^2} + \dfrac{I_v}{(l+2d)^2}$ была не менее 39 лк, где $I_v = 108$ кд — сила света лампы?

3. До какой температуры $t_п{}^\circ$ С можно нагреть тепловым насосом, работающим по циклу Карно, воздух в палатке, если на улице температура воздуха $t_в{}^\circ = -9^\circ$ С, а отопительный коэффициент $W = \dfrac{t_п + 273}{t_п - t_в}$ не меньше 18,6?

4. Воздушный шар наполнен водородом на объем $V_0 = 52$ м^3. На сколько градусов $t^\circ\,C$ нужно увеличить температуру водорода, чтобы объем шара $V = V_0(1 + \beta t)$ достиг 60 м^3, где температурный коэффициент объемного расширения газов $\beta = 0{,}003661$ С$^{-1}$? Ответ запишите в виде целой части от полученной величины.

5. С какой скоростью v_0 начал равноускоренное движение по горизонтальному участку дороги автомобиль массой $m = 2700$, если он разогнался до скорости $v = 80$ км/ч, при этом работа двигателя $A = \dfrac{k^2 m}{2}(v^2 - v_0^2)$ составила 500 000 н · м (1 н · м = 1 (кг · м)/с^2), где $k = \dfrac{5}{18}$ — коэффициент связи размерностей 1 км/ч = $\dfrac{5}{18}$ м/с?

6. Высота падающего потока воды, протекающей через плотину, $h = 40$ м. Какой наименьшей объем воды V должен протекать в течение минуты, чтобы при падении потока его мощность $N = \dfrac{g\rho V h}{3600}$ не опускалась ниже 5 000 000 Вт (считать ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, 1 Вт = 1 (кг · м^2)/с^3)?

День 13

Задание B11

Занятие посвящено решению задач типа B11 на нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции. По методу решения представленные задачи можно разделить на три типа:

— вычисление наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке;

— вычисление максимума (минимума) значения функции на области определения;

— определение точек максимума (точек минимума).

Независимо от формулировки неотъемлемой частью решения задач этого типа является вычисление производной (дифференцирование) функции. Сформулируем ряд теорем:

1) теорема о производной суммы (разности) двух функций

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x); \qquad (1)$$

2) теорема о производной произведения двух функций

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x); \qquad (2)$$

3) теорема о производной произведения функции и постоянной величины

$$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x), \text{ где } c = \text{const}; \qquad (3)$$

4) теорема о производной частного двух функций

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)},\ v(x) \neq 0; \qquad (4)$$

5) теорема о производной сложной функции

$$f'(h(x)) = f'(h) \cdot h'(x). \qquad (5)$$

Приведем примеры решения заданий.

Пример 1. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 16x - 8\text{tg}x - 4\pi + 11 \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right].$$

Решение. Используя формулу (1), найдем производную заданной функции:

$$y' = (16x - 8\text{tg}x - 4\pi + 11)' = (16x)' - (8\text{tg}x)' - (4\pi)' + (11)'.$$

Учитывая, что $(16x)' = 16(x)' = 16$, $(8\text{tg}x)' = 8(\text{tg}x)' = 8\frac{1}{\cos^2 x}$, $(4\pi)' = 0$, $(11)' = 0$, преобразуем ее: $y' = 16 - \frac{8}{\cos^2 x}$.

Найдем критические точки функции, для этого приравняем производную к нулю:

$$16-\frac{8}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{array}\right.$$

Решим два простейших тригонометрических уравнения:

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\\ x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k.\end{array}\right. \quad n, k\in \boldsymbol{Z},$$

$$\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\pi l,\ l\in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{4}+2\pi l,\\ x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m.\end{array}\right. \quad l, m\in \boldsymbol{Z}.$$

Каждое из этих уравнений имеет бесконечно много решений, следовательно, исходная функция имеет бесконечно много критических точек. Выберем те из них, которые принадлежат заданному отрезку $\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right]$, это

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4},\\ x=-\frac{\pi}{4}.\end{array}\right.$$

Так как требуется найти наибольшее значение функции на отрезке, то нет необходимости исследовать функцию на монотонность и определять точки экстремума. Достаточно вычислить значение функции в выбранных критических точках и на концах отрезка и сравнить получившиеся значения между собой:

$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=16\cdot\frac{\pi}{4}-8\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-4\pi+11=4\pi-8\cdot 1-4\pi+11=3;$

$y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=16\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)-8\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)-4\pi+11=-4\pi-8\cdot 1(-1)-4\pi+11=19-$ $-8\pi\approx -6{,}13;$

$y\left(\frac{\pi}{3}\right)=16\cdot\frac{\pi}{3}-8\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-4\pi+11=\frac{16\pi}{3}-8\cdot\sqrt{3}-4\pi+11=\frac{4\pi}{3}-8\sqrt{3}+$ $+11\approx 1{,}33;$

$y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=16\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)-8\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)-4\pi+11=\frac{-16\pi}{3}-8\cdot(-\sqrt{3})-4\pi+11=-\frac{28\pi}{3}$ $++8\sqrt{3}+11\approx -4{,}46.$

Из сравнения видно, что наибольшее значение, которое достигает функция на указанном отрезке — это $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]} y(x)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=3.$

Следует заметить, что в заданиях группы В ответы должны быть представлены в виде целого числа или десятичной дроби, а числа $19-8\pi$, $\frac{4\pi}{3}-$

$-8\sqrt{3}+11$ и $-\dfrac{28\pi}{3}+8\sqrt{3}+11$ содержат π, $\sqrt{3}$ и не удовлетворяют требованиям к ответу.

Ответ: 3.

Пример 2. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\sin x - 9x + 3$ на отрезке $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Решение. Воспользуемся формулой (1) и вычислим производную функции: $y' = (5\sin x - 9x + 3)' = (5\sin x)' - (9x)' + (3)'$. Учитывая, что $(5\sin x)' = 5(\sin x)' = 5\cos x$, $(9x)' = 9(x)' = 9$, $(3)' = 0$, преобразуем ее: $y' = 5\cos x - 9$.

Функция $f(x) = \cos x$ ограниченная $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, следовательно, $-5 \leqslant 5\cos x \leqslant 5$, а $-14 \leqslant 5\cos x - 9 \leqslant -4$. Таким образом, производная $y' < 0$ для любого действительного значения аргумента. Исходная функция не имеет критических точек, а наименьшее значение на отрезке достигается в одной из граничных точек отрезка. Далее возможны два пути решения:

— найти значения функции в точках $-\dfrac{3\pi}{2}$ и 0, сравнить их и выбрать наименьшее;

— исследовать функцию на монотонность и определить, на каком конце отрезка достигается наименьшее значение.

Рассмотрим оба варианта.

Так как производная отрицательна на отрезке, то функция на нем убывает и достигает наименьшего значения в правой граничной точке, т. е. при $x = 0$.

Проверим наш вывод, вычислив значения функции на концах отрезка:

$y\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 5\sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) - 9\cdot\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) + 3 = 5\cdot 1 + \dfrac{27\pi}{2} + 3 = 8 + \dfrac{27\pi}{2}$, $y(0) = 5\sin 0 = 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$. Очевидно, что $y\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) > y(0)$ и искомое значение равно $\min\limits_{\left[-\frac{3\pi}{2};\, 0\right]} y(x) = y(0) = 3$.

Ответ: 3.

Пример 3. Найдите наибольшее значение функции $y = \cos^2 x - \cos x + 2$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. Для вычисления производной от исходной функции, воспользуемся формулами (1) и (5):

$y' = (\cos^2 x - \cos x + 2)' = (\cos^2 x)' - (\cos x)' + (2)' = 2\cos x\cdot(\cos x)' - (\cos x)' + (2)' = -2\cos x\cdot\sin x + \sin x = \sin x(-2\cos x + 1)$. Приравняем производную к нулю и найдем критические точки функции:

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x(-2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos x = \dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Решим простейшие тригонометрические уравнения $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$,

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi l. \end{array}\right. \quad n, l \in \boldsymbol{Z}.$$

Исходная функция имеет бесконечно много критических точек, однако лишь $x = \pi$ принадлежит отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Определим значения функции в точках $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} + 2 = 0 - 0 + 2 = 2,$$

$$y(\pi) = \cos^2\pi - \cos\pi + 2 = (-1)^2 + 1 + 2 = 4,$$

$$y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos^2\frac{3\pi}{2} - \cos\frac{3\pi}{2} + 2 = 0 - 0 + 2 = 2.$$

Сравним полученные результаты, очевидно, что наибольшее значение, которое достигает заданная функция на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]} y(x) = y(\pi) = 4$.

Ответ: 4.

Пример 4. Найдите наибольшее значение функции $y = -4^x - 12x^2 + 11$ на отрезке $[0,5; 2]$.

Решение. Продифференцируем функцию: $y' = (-4^x - 12x^2 + 11)' = (-4^x)' - (12x^2)' + (11)'$. Воспользуемся тем, что $(4^x)' = 4^x \cdot \ln 4$, $(12x^2)' = 12 \cdot 2x = 24x$, $(11)' = 0$ и преобразуем выражение: $y' = -4^x \cdot \ln 4 - 24x$. Найти критические точки заданной функции проблематично, но в этом нет необходимости, достаточно оценить знак производной при $x > 0$: так как $-4^x < 0$, $\ln 4 > 0$, то $-4^x \cdot \ln 4 < 0$, а учитывая, что $-24x < 0$, получаем $y' = -4^x \cdot \ln 4 - 24x < 0$. Таким образом, функция убывает на интервале $(0; +\infty)$, а значит, и на отрезке $[0,5; 2]$, и наибольшее значение достигается на левом конце отрезка: $y(0,5) = -4^{0,5} - 12 \cdot (0,5)^2 + 11 = -2 - \frac{12}{4} + 11 = 9 - 3 = 6$.

Ради интереса можно вычислить значение функции в точке $x = 2$ и сравнить его с полученным выше: $y(2) = -4^2 - 12 \cdot 2^2 + 11 = -16 - 12 \cdot 4 + 11 = -5 - 48 = -53$. Очевидно, что $y(2) < y(0,5)$ и $\max\limits_{[0,5;\, 2]} y(x) = y(0,5) = 6$.

Ответ: 6.

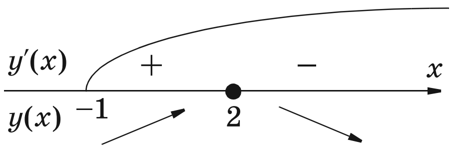
Пример 5. Найдите наибольшее значение функции $y = 10^{\lg(x+1)} - \frac{x^2}{4} - 1$.

Решение. Область определения функции $y = 10^{\lg(x+1)} - \frac{x^2}{4} - 1$ $D(f) = (-1; +\infty)$. Преобразуем функцию: $10^{\lg(x+1)} - \frac{x^2}{4} - 1 = x + 1 - \frac{x^2}{4} - 1 = x - \frac{x^2}{4}$ и продифференцируем: $y' = \left(x - \frac{x^2}{4}\right)' = (x)' - \left(\frac{x^2}{4}\right)'$.

Так как $(x)' = 1$, $\left(\frac{x^2}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{x}{2}$, то производная будет равна $y' = 1 - \frac{x}{2}$.

Приравняем ее к нулю и найдем критические точки функции:

$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.



Так как в задании требуется найти наибольшее значение функции не на отрезке, а на области определения функции, то недостаточно вычислить значение функции в критической точке, необходимо доказать, что это значение будет наибольшим. Для этого исследуем функцию на монотонность.

Воспользуемся схемой. На числовой прямой отметим область определения функции и критические точки, принадлежащие этой области. Определим знак производной на каждом из получившихся интервалов $(-1; 2)$ и $(2; +\infty)$.

Найдем значения производной в промежуточных точках $x = 0$ и $x = 3$:

$y'(0) = 1 - \frac{0}{2} = 1 > 0$, $y'(3) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} < 0$. На интервале $(-1; 2)$ производная положительна, следовательно, функция $y(x)$ монотонно возрастает. На интервале $(2; \infty)$ производная отрицательна, а функция $y(x)$ монотонно убывает. Точка $x = 2$ является точкой максимума и, именно в ней функция достигает наибольшего значения.

Определим значение функции в точке максимума: $y(2) = 2 - \frac{2^2}{4} = 2 - \frac{4}{4} = 2 - 1 = 1$. Таким образом $y_{\max} = 1$.

Ответ: 1.

Пример 6. Найдите наименьшее значение функции

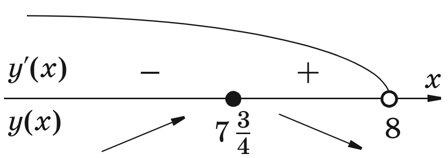
$$y = \log^2_{0,25}(8 - x) - 2\log_{0,25}(8 - x) + 3.$$

Решение. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 8)$. Найдем производную:

$y' = (\log^2_{0,25}(8 - x) - 2\log_{0,25}(8 - x) + 3)' = (\log^2_{0,25}(8 - x))' - (2\log_{0,25}(8 - x))' + (3)' = 2\log_{0,25}(8 - x) \cdot \frac{1}{(8-x)\ln 0,25} \cdot (-1) - 2 \cdot \frac{1}{(8-x)\ln 0,25} \cdot (-1) = \frac{2}{(8-x)\ln 0,25} \cdot (1 - \log_{0,25}(8 - x)) = \frac{2}{(x-8)\ln 4} \cdot (1 + \log_4(8 - x)) = \frac{2}{(x-8)\ln 4} \times (1 + \log_4(8 - x))$ и критические точки функции: $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x-8)\ln 4} \cdot (1 + \log_4(8 - x)) = 0 \Leftrightarrow \log_4(8 - x) = -1 \Leftrightarrow 8 - x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{31}{4} \Leftrightarrow x = 7\frac{3}{4}$.

Исследуем функцию на монотонность.

Критическая точка разбивает область определения функции на два интервала $\left(-\infty; 7\frac{3}{4}\right)$ и $\left(7\frac{3}{4}; 8\right)$.



На каждом из них определим знак производной. Для этого найдем значения функции в промежуточных точках $x = 0$ и $x = 7\frac{7}{8}$:

$$y'(0) = \frac{2}{(0-8)\ln 4} \cdot (1 + \log_4(8-0)) = \frac{-1}{4\ln 4} \cdot (1 + \log_4 8) = \frac{-1}{4\ln 4} \cdot (1 + \log_{2^2} 2^3) =$$

$$= \frac{-1}{4\ln 4} \cdot \left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{-1}{4\ln 4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{-5}{8\ln 4} < 0, \text{ так как } \ln 4 > 0;$$

$$y'\left(7\frac{7}{8}\right) = \frac{2}{\left(7\frac{7}{8} - 8\right)\ln 4} \cdot \left(1 + \log_4\left(8 - 7\frac{7}{8}\right)\right) = \frac{2}{-\frac{1}{8}\ln 4} \cdot \left(1 + \log_4 \frac{1}{8}\right) = \frac{-16}{\ln 4} \times$$

$$\times \left(1 + \log_{2^2} 2^{-3}\right) = \frac{-16}{\ln 4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{\ln 4} > 0.$$

На интервале $\left(-\infty; 7\frac{3}{4}\right)$ производная $y'(x) < 0$, следовательно, функция $y(x)$ монотонно убывает, на интервале $\left(7\frac{3}{4}; 8\right)$ производная $y'(x) > 0$, а функция $y(x)$ монотонно возрастает. Точка $x = 7\frac{3}{4}$ является точкой минимума, и в ней функция достигает наименьшего значения. Найдем значение функции в этой точке $y\left(7\frac{3}{4}\right) = \log^2_{0,25}\left(8 - 7\frac{3}{4}\right) - 2\log_{0,25}\left(8 - 7\frac{3}{4}\right) + 3 = \log^2_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} + 2\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} + 3 = (-1)^2 - 2 + 3 = 2$. Таким образом $y_{\min} = 2$.

Ответ: 2.

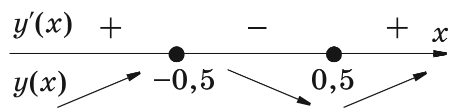
Пример 7. Найдите точку максимума функции $y = 14x^3 - 10{,}5x + 73$.

Решение. Найти точку максимума (точку минимума) функции — значит найти точку из области определения функции, в которой производная равна нулю, а при переходе через нее производная меняет знак.

Заданная функция определена на всей числовой прямой, т. е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Определим критические точки: $y' = (14x^3 - 10{,}5x + 73)' = (14x^3)' - (10{,}5x)' + (73)' = 14 \cdot 3 \cdot x^2 - 10{,}5 = 42x^2 - 10{,}5$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 42x^2 - 10{,}5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0{,}25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -0{,}5, \\ x = 0{,}5. \end{array}\right.$$

Исследуем функцию на монотонность. Определим знаки производной на интервалах $(-\infty; -0{,}5)$, $(-0{,}5; 0{,}5)$ и $(0{,}5; +\infty)$. Вычислим значение производной в промежуточных точках $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$:



$y'(-1) = 42 \cdot (-1)^2 - 10{,}5 = 42 - 10{,}5 = 31{,}5 > 0,$

$y'(0) = 42 \cdot 0 - 10{,}5 = -10{,}5 < 0,$

$y'(1) = 42 \cdot (1)^2 - 10{,}5 = 42 - 10{,}5 = 31{,}5 > 0.$

Для того чтобы критическая точка была точкой максимума, необходимо, что бы при переходе через нее производная меняла знак с «+» на «−». Этому условию удовлетворяет $x = -0{,}5$, она является точкой максимума: $x_{\max} = -0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

Пример 8. Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - 7x + 7)e^{4-x}$.

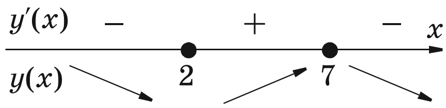
Решение. Данная функция определена на всей числовой прямой: $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Продифференцируем ее, воспользовавшись формулой (2):

$y' = ((x^2 - 7x + 7)e^{4-x})' = (x^2 - 7x + 7)' \cdot e^{4-x} + (x^2 - 7x + 7) \cdot (e^{4-x})' = (2x - 7) \cdot e^{4-x} + (x^2 - 7x + 7) \cdot (e^{4-x}) \cdot (4 - x)' = (2x - 7) \cdot e^{4-x} + (x^2 - 7x + 7) \times (e^{4-x}) \cdot (-1) = (2x - 7) \cdot e^{4-x} + (x^2 - 7x + 7) \cdot e^{4-x} \cdot (-1) = e^{4-x} \cdot (-1) = e^{4-x} \times (2x - 7 - x^2 + 7x - 7) = -e^{4-x} \cdot (x - 2)(x - 7)$ и найдем критические точки функции: $y' = 0 \Leftrightarrow -e^{4-x} \cdot (x^2 - 9x + 14) = 0 \Leftrightarrow -e^{4-x} \cdot (x - 2)(x - 7)$.

Функция $-e^{4-x} < 0$ для любого $x \in D(f)$, следовательно $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 7. \end{array}\right.$

Исследуем функцию на монотонность.

Определим знаки производной на интервалах $(-\infty; 2)$, $(2; 7)$ и $(7; +\infty)$. Вычислим значение производной в промежуточных точках $x = 0$, $x = 4$ и $x = 8$:



$y'(0) = -e^{4-0} \cdot (0 - 2)(0 - 7) = -14e^4 < 0,$

$y'(4) = -e^{4-4} \cdot (4 - 2)(4 - 7) = 6 > 0,$

$y'(8) = -e^{4-8} \cdot (8 - 2)(8 - 7) = -6e^{-4} < 0.$

Для того, чтобы критическая точка была точкой минимума, необходимо, чтобы при переходе через нее производная меняла знак с «–» на «+». Этому условию удовлетворяет $x = 2$, она является точкой минимума: $x_{\min} = 2$.

Ответ: 2.

Дополнительные задания

1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 6 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} - 4\sqrt{3} \cdot x - 8\sqrt{3}\cos x \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 6\cos x - \frac{27}{\pi}x + 4 \text{ на отрезке } \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right].$$

3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3 - 2\sqrt{2}\sin x - \cos 2x \text{ на отрезке } \left[0; \frac{2\pi}{3}\right].$$

4. Найдите наименьшее значение функции $y = -9^x - 3x^2 + 5$ на отрезке $[0{,}5; 1]$.

5. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{\log_2(x + 5)} + x^2 - 3$.

6. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_3(81 - x^2)$.

7. Найдите точку минимума функции $y = x^2(2x - 3) - 13$.

8. Найдите точку максимума функции $y = (x + 11)e^{3-x}$.

День 14

Задание В12

Задания группы В12 посвящены решению текстовых задач. К ним относятся задачи на движение, работу и проценты. Этим задачам отводится три занятия. Занятие 14 посвящено решению текстовых задач на ***движение****. Рассмотрим задачи на движение по прямой: навстречу друг другу и вдогонку. Используем известную формулу:* $S = V \cdot t$ *, где* S *— расстояние,* V *— скорость,* t *— время прохождения этого расстояния.*

Пример 1. Расстояние между пунктами А и В составляет 180 км. Скорость первого лыжника на 3 км/ч больше скорости второго лыжника, поэтому он затрачивает на путь из пункта А в пункт В на 2 часа меньше второго. Какова скорость первого лыжника?

Решение. Обозначим скорость первого лыжника через x (км/ч). Тогда скорость второго лыжника составит $(x - 3)$ км/ч. Время, за которое первый лыжник пройдет путь из пункта А в пункт В равно $t = \frac{S}{V} = \frac{180}{x}$ (ч). Время, за которое второй лыжник пройдет этот путь, равно $\frac{180}{x-3}$ (ч). С учетом условия задачи, что первый лыжник затрачивает на весь путь на 2 часа меньше второго, составим уравнение

$$\frac{180}{x-3} - \frac{180}{x} = 2.$$

Приводя уравнение к общему знаменателю, получим, что $x^2 - 3x + 270 = 0$, решением которого является $x = 18$ (км/ч).

Ответ: 18.

Пример 2. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 45 км, выехал велосипедист. Через 30 минут вслед за ним выехал второй велосипедист, который прибыл в пункт В на 15 минут раньше первого. Какова скорость первого велосипедиста, если она на 3 км/ч меньше скорости второго. (Ответ укажите в км/ч.)

Решение. Пусть скорость первого велосипедиста x км/ч, а скорость второго велосипедиста — $(x + 3)$ км/ч. Время, которое затратил первый велосипедист на весь путь, составит $t = \frac{45}{x}$ (ч), а время второго велосипедиста — $\frac{45}{x+3}$ (ч). По условию задачи второй велосипедист выехал из пункта А позже на 30 минут, а прибыл в пункт В на 15 минут раньше первого велосипедиста. Таким образом, второй велосипедист, у которого по условию задачи скорость больше, чем у первого, затратил на весь путь времени меньше на $30 + 15 = 45$ минут, т.е. разница во времени прохождения пути первым и вторым велосипедистами составит 45 минут. Так как время в пути вычислено в часах, то нужно перевести минуты в часы: 45 минут равны $\frac{3}{4}$ часа. Составим уравнение:

$$\frac{45}{x} - \frac{45}{x+3} = \frac{3}{4},$$

откуда следует, что $x^2 + 3x - 180 = 0$.

Решением этого уравнения является $x = 12$ км/ч.

Ответ: 12.

Пример 3. Два велосипедиста стартовали друг за другом с интервалом в 9 минут. Второй велосипедист догнал первого в 9 км от старта. Доехав до отметки 27 км, второй велосипедист повернул обратно и встретил первого на расстоянии 2 км от точки поворота. Найдите скорость второго велосипедиста. (Скорости велосипедистов считать постоянными. Ответ дайте в км/ч.)

Решение. Обозначим скорость первого велосипедиста через x км/ч, а скорость второго велосипедиста через y км/ч. Время, которое затратил первый велосипедист для прохождения расстояния 9 км, равно $\frac{9}{x}$ (ч), а время второго велосипедиста — $\frac{9}{y}$ (ч). Так как по условию задачи время старта отличалось на 9 минут, то расстояние, равное 9 км, велосипедисты прошли за разное время. Составим первое уравнение для первой встречи велосипедистов:

$$\frac{9}{x} - \frac{9}{y} = \frac{9}{60}. \qquad (1)$$

Вторая встреча велосипедистов произошла в 2 км от точки поворота. При этом первый велосипедист проехал путь $S = 27 - 2 = 25$ (км), затратив на этот путь $t = \frac{25}{x}$ (ч), а второй велосипедист проехал $S = 27 + 2 = 29$ (км), затратив $t = \frac{29}{y}$ (ч).

Разница во времени остается той же: 9 минут. Составим второе уравнение для второй встречи велосипедистов:

$$\frac{25}{x} - \frac{29}{y} = \frac{9}{60}. \qquad (2)$$

Решим систему двух уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases} \frac{9}{x} - \frac{9}{y} = \frac{9}{60}, \\ \frac{25}{x} - \frac{29}{y} = \frac{9}{60}. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $\frac{1}{x} = \frac{1}{60} + \frac{1}{y}$ и подставим во второе:

$\frac{25}{60} + \frac{25}{y} - \frac{29}{y} = \frac{9}{60}$, откуда $\frac{4}{y} = \frac{4}{15}$ и $y = 15$ (км/ч).

Ответ: 15.

Пример 4. Расстояние между пунктами А и В составляет 80 км. Из пункта А в пункт В выходит первый турист. Через один час 20 минут из пункта В навстречу ему выходит второй турист. Оба туриста встречаются на середине пути. Если бы оба туриста вышли одновременно, то через 5 часов расстояние между ними составило бы 37,5% первоначального. Найдите скорость первого туриста. (Ответ дайте в км/ч.)

Решение. Пусть скорость первого туриста x км/ч, а скорость второго туриста y км/ч. По условию задачи туристы встречаются в середине пути, т.е. каждый из туристов прошел одинаковый путь, равный 40 км.

Время первого туриста до встречи составляет $\frac{40}{x}$ часов, а время второго туриста — $\frac{40}{y}$ часов. С учетом того, что второй турист вышел из пункта В позже на 3 часа 20 минут, запишем уравнение:

$$\frac{40}{x} = \frac{40}{y} + \frac{10}{3}. \quad (1)$$

При условии, что туристы вышли одновременно и шли по 5 часов каждый, первый турист прошел расстояние $5x$, а второй турист прошел расстояние $5y$. Тогда расстояние между ними равно $S = 80 - 5x - 5y$. Это расстояние составляет 10% от первоначальных 80 км, т.е. $0{,}375 \cdot 80 = 30$ (км). Поэтому второе уравнение будет иметь вид:

$$80 - 5x - 5y = 30. \quad (2)$$

Решая систему двух уравнений $\begin{cases} \frac{40}{x} = \frac{40}{y} + \frac{10}{3}, \\ 80 - 5x - 5y = 30 \end{cases}$ с двумя неизвестными x и y, получим в результате подстановки неизвестной $y = 10 - x$, выраженной из второго уравнения, в первое:

$$\frac{40}{x} = \frac{40}{10 - x} + \frac{10}{3} \quad (3)$$

или $x^2 - 34x + 120 = 0$. Это уравнение имеет корни: 4 и 30. Второй корень не удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: 4.

Пример 5. Дачник, идущий к поезду, пройдя за первый час 3 км, рассчитал, что, двигаясь с такой скоростью, он опоздает на один час. Поэтому остальной путь он проходит со скоростью 5 км/час и приходит за 36 минут до отхода поезда. Определите, какой путь должен пройти дачник.

Решение. Обозначим весь путь в км через S. Если дачник двигается со скоростью 3 км/ч, то время в пути будет равно $\frac{S}{3}$ часа. Это будет превышать на 1 час требуемое для посадки на поезд время. Значит, необходимое время для посадки на поезд равно $\frac{S}{3} - 1$ (1).

Если дачник остальной путь $S - 3$ проходит со скоростью 5 км/ч, то время, затраченное на весь путь, равно $\frac{S-3}{5} + 1$. По условию задачи в этом случае дачник пришел раньше на 36 минут. Переводя время в минутах в часы, получим, что у дачника осталось лишнее время до прихода поезда, равное $\frac{3}{5}$ часа. Поэтому необходимое время для посадки на поезд равно $\frac{S-3}{5} + 1 + \frac{3}{5}$ (2). Приравняв (1) и (2), получим уравнение:

$$\frac{S}{3} - 1 = \frac{S-3}{5} + 1 + \frac{3}{5}. \quad (3)$$

Решением последнего уравнения будет $S = 15$ (км).

Ответ: 15.

Пример 6. Два велосипедиста выехали навстречу друг другу из пунктов А и В, расстояние между которыми 28 км. Через час они встретились и, не останавливаясь, продолжали ехать с той же скоростью. Первый велосипедист прибыл в пункт В на 35 минут раньше, чем второй в пункт А. Какова скорость первого велосипедиста? (Ответ дайте в км/ч.)

Решение. Обозначим скорость первого велосипедиста через x км/ч, а скорость второго велосипедиста через y км/ч. По условию задачи встреча велосипедистов произошла через 1 час, т.е. за это время первый велосипедист проехал путь $x \cdot 1$ (км), а второй велосипедист $y \cdot 1$ (км) и $x + y = 28$ (1). Время, затраченное первым велосипедистом на прохождение всего пути, равно $t = \frac{28}{x}$ (ч), а время второго велосипедиста — $\frac{28}{y}$ (ч).

Так как первый велосипедист проехал расстояние 28 км на 35 минут быстрее, то составим второе уравнение (предварительно переведя 35 минут в часы):

$$\frac{28}{y} - \frac{28}{x} = \frac{35}{60}. \qquad (2)$$

Решая систему двух уравнений (1) и (2), получим, что $x = 16$ (км/ч).

Ответ: 16.

Пример 7. Первую половину пути автобус проходит со скоростью 60 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 90 км/ч. Определите среднюю скорость автобуса.

Решение. Обозначим весь путь автобуса через S. Время, за которое автобус проехал путь $\frac{S}{2}$ со скоростью 60 км/ч, равно $\frac{S}{2 \cdot 60}$ (ч). Время, за которое он проехал путь со скоростью 90 км/ч, равно $\frac{S}{2 \cdot 90}$ (ч). Время, затраченное на весь путь, составит $\left(\frac{S}{120} + \frac{S}{180}\right)$ (ч).

Для нахождения средней скорости автобуса необходимо разделить длину пути на общее время:

$$V = \frac{S}{\frac{S}{120} + \frac{S}{180}} = 72 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 72.

Пример 8. Половину времени, которую автобус находится в пути, он проходит со скоростью 60 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 90 км/ч. Определите среднюю скорость автобуса.

Решение. Обозначим весь путь автобуса через S, время в пути через t. Путь, который автобус проходит со скоростью 60 км/ч, составит $\frac{t}{2} \cdot 60 = 30t$, а путь, который автобус проходит со скоростью 90 км/ч, составит $45\ t$, откуда $S = 30t + 45t = 75t$.

Так как средняя скорость равна длине пути, деленному на общее время, то $V = \frac{75t}{t} = 75$ (км/ч).

Ответ: 75.

Пример 9. Две трети пути автобус проходит со скоростью 60 км/ч, а оставшуюся часть пути — со скоростью 90 км/ч. Определите среднюю скорость автобуса.

Решение. Обозначим длину пути автобуса через S. Время, за которое автобус проходит $\frac{2}{3}$ пути, равно $\frac{2S}{3 \cdot 60}$ (ч). Время, за которое автобус проходит оставшуюся часть пути, составит $\frac{S}{3 \cdot 90}$ (ч). Общее время нахождения автобуса в пути равно: $\left(\frac{2S}{3 \cdot 60} + \frac{S}{3 \cdot 90}\right)$ (ч).

Среднюю скорость находим по формуле:

$$V = \frac{S}{\frac{2S}{180} + \frac{S}{270}} = 67{,}5 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 67,5.

Пример 10. Моторная лодка проходит вниз по течению реки из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 36 км, а затем возвращается обратно в пункт А. Время на всю поездку туда и обратно составляет 7,5 часа. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде составляет 10 км/ч. (Ответ дайте в км/ч.)

Решение. Обозначим скорость течения реки через x км/ч. Тогда скорость лодки по течению равна $(x + 10)$ км/ч и скорость лодки против течения — $(10 - x)$ км/ч. Следует учесть, что $x < 10$. Время, затраченное на движение моторной лодки по течению равно $\frac{36}{x + 10}$ (ч).

Время, которое лодка затратит на возвращение в пункт А, составит $\frac{36}{10 - x}$ (ч). Составим уравнение согласно условию задачи:

$$\frac{36}{x + 10} + \frac{36}{10 - x} = 7{,}5.$$

После преобразований уравнение принимает вид: $x^2 = 4$, откуда $x = 2$ (км/ч).

Ответ: 2.

Дополнительные задания

1. Скорость первой машины на 10 км/ч больше скорости второй машины, поэтому расстояние в 480 км первая машина преодолевает на 2/3 часа быстрее второй. Найдите скорость второй машины.

2. Расстояние между селами A и B равно 150 км. Из села A в село B одновременно выезжают две машины. Первая машина проезжает в час на 10 км больше второй и прибывает в село B на 0,5 часа раньше второй машины. Найдите скорость первой машины.

3. Скорый поезд был задержан у семафора на 16 минут и ликвидировал опоздание на перегоне в 80 километров, идя со скоростью на 10 км/ч больше, чем по расписанию. Определите скорость поезда по расписанию.

4. Расстояние от пункта A до пункта B автобус должен был проехать со скоростью 60 км/ч. Однако на середине пути он задержался на 30 минут и, чтобы не опоздать в пункт B, увеличил скорость на 15 км/ч. Найдите расстояние между пунктами A и B? (Ответ укажите в км.)

5. Две трети времени, которые автобус находится в пути, он проходит со скоростью 60 км/ч, а оставшееся время — со скоростью 90 км/ч. Определите среднюю скорость автобуса.

6. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 10 км/ч, прошла по течению реки 91 км и вернулась обратно. Найдите скорость течения реки, если весь путь лодки занял 20 часов.

7. Катер, идя по течению реки, затрачивает на весь путь от пристани А до пристани В 32 часа, а на обратный путь — 48 часов. За какое время проплывет плот от пристани А до пристани В?

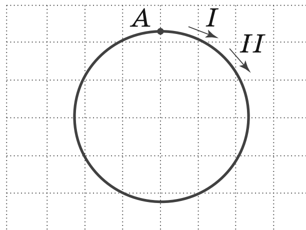
День 15

Задание B12 (продолжение)

Рассмотрим решение задач на движение по окружности (замкнутой трассе). Следует учесть две различные ситуации:

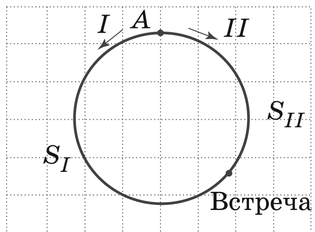
1) когда одно тело догоняет другое и

2) когда два тела движутся навстречу друг другу.



Рассмотрим первый случай. Пусть из точки A одновременно в одном направлении начали движение два тела с разными скоростями. Первая их встреча после старта произойдет, когда тело, имеющее большую скорость, например, второе, пройдет весь круг и путь, пройденный первым телом за это время. Таким образом, разность в путях первого и второго тела равна длине окружности l:

$S_{\text{II}} - S_{\text{I}} = l.$



Второй случай.

Пусть из точки A одновременно начали движение два тела в разных направлениях. Их первая встреча произойдет, когда сумма путей первого и второго тел будет равна длине окружности:

$S_{\text{I}} + S_{\text{II}} = l.$

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 11. Два спортсмена бегают по замкнутой трассе. На пробег трассы первый спортсмен затрачивает на 5 с меньше, чем второй. Если спортсмены бегут в одном направлении, то встречаются через 30 с. Через какое время они встретятся, если побегут в разных направлениях?

Решение. Пусть первый спортсмен пробегает трассу длиной l за x с, а второй спортсмен — за $(x + 5)$ с. Тогда скорость первого спортсмена равна $\frac{l}{x}$, а скорость второго спортсмена — $\frac{l}{x+5}$. Путь, пройденный первым спортсменом за 30 с, равен $\frac{30l}{x}$, а путь второго спортсмена за это же время составляет $\frac{30l}{x+5}$. Так как спортсмены бегут в одном направлении, то $\frac{30l}{x} - \frac{30l}{x+5} = l$, откуда следует, что $x = 10$ (с) и скорость первого спортсмена $\frac{l}{10}$. Скорость второго спортсмена тогда $\frac{l}{15}$.

По условию задачи требуется определить время встречи спортсменов, когда они побегут в разных направлениях. Обозначим это неизвестное время как T. Тогда путь первого спортсмена будет $S_{\mathrm{I}} = \frac{lT}{10}$, а путь второго спортсмена — $S_{\mathrm{II}} = \frac{lT}{15}$. Составим уравнение: $\frac{lT}{10} + \frac{lT}{15} = l$, из которого определим, что $T = 6$ (с).

Ответ: 6.

Пример 12. Скорость первого велогонщика на 6 км/ч больше скорости второго, поэтому на прохождение одного пятисотметрового круга он тратит на 10 с меньше, чем второй. На сколько метров больше проходит первый гонщик по сравнению со вторым за время, когда второй проходит один круг?

Решение. Пусть x км/ч скорость первого велогонщика, $(x - 6)$ км/ч — скорость второго велогонщика. Время прохождения одного круга первым велогонщиком составляет $\frac{0{,}5}{x}$ (ч), а время второго велогонщика— $\frac{0{,}5}{x-6}$ (ч). Составим уравнение:

$$\frac{0{,}5}{x-6} - \frac{0{,}5}{x} = \frac{10}{3600},$$

откуда находим $x = 36$ (км/ч).

Скорость второго велогонщика составляет 30 км/ч, а время прохождения круга $\frac{0{,}5}{30} = \frac{1}{60}$ (ч). За время $t = \frac{1}{60}$ (ч) первый велогонщик пройдет путь, равный $S = 36 \cdot \frac{1}{60} = 0{,}6$ (км) $= 600$ (м). Первый гонщик проходит больше второго на $\triangle S$: $\triangle S = 600 - 500 = 100$ (м).

Ответ: 100.

Кроме задач на движения к текстовым задачам относятся также задачи на **работу**.

Если объем работы не задан конкретно, то этот объем принимают за единицу. Производительность (аналог скорости в задачах на движение) вычисляется как $V = \frac{A}{t}$, где A — количество работы, t — время работы.

Пример 13. Два слесаря выполняли работу по замене труб в доме, работая вместе три дня, а затем первый из них заболел и второму пришлось отработать еще 17 дней для завершения работы. За сколько дней первый слесарь смог бы заменить трубы в доме, работая один, если для выполнения этой работы второму слесарю потребовалось бы на шесть дней больше, чем первому?

Решение. Пусть x — количество дней, за которые первый слесарь сможет заменить трубы, работая один. Тогда второму слесарю потребуется для этого $x + 6$ дней. Принимая всю работу $A = 1$, получим, что производительность первого слесаря $\frac{1}{x}$, а производительность второго слесаря $\frac{1}{x+6}$. По условию задачи время работы первого слесаря 3 дня, а второго — 20 дней.

Таким образом, первый слесарь выполнил $\frac{3}{x}$ часть работы, а второй слесарь $\frac{20}{x+6}$ частей работы. Вместе они завершили всю работу, т.е. $\frac{3}{x} + \frac{20}{x+6} = 1$.

После приведения к общему знаменателю, получим уравнение $x^2 - 17x + 18 = 0$, корнями которого являются числа 18 и 1. Второй корень не подходит по условию задачи.

Ответ: 18.

Пример 14. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 20 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за три дня выполняет такую же работу, какую второй рабочий выполняет за четыре дня?

Решение. Принимаем за неизвестную x время выполнения всей работы первым рабочим, за y — время выполнения всей работы вторым рабочим. Принимаем за всю работу $A = 1$. Тогда производительность труда первого рабочего равна $\frac{1}{x}$, производительность труда второго рабочего — $\frac{1}{y}$.

По условию задачи оба рабочих, работая вместе, выполнили всю работу. т.е.

$$\frac{20}{x} + \frac{20}{y} = 1. \qquad (1)$$

Используем второе условие задачи: первый рабочий за 3 дня выполнит $\frac{3}{x}$ объема работы, а второй рабочий за 4 дня выполнит $\frac{4}{y}$ объема работы, значит,

$$\frac{3}{x} = \frac{4}{y}. \qquad (2)$$

Решим систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} \frac{20}{x} + \frac{20}{y} = 1, \\ \frac{3}{x} = \frac{4}{y}. \end{cases}$$

Решая систему методом подстановки, получим, что $x = 35$.

Ответ: 35.

Пример 15. Рабочий и его ученик, работая вместе, могут закончить работу за 14 часов. Если сначала будет работать один рабочий, а потом его сменит ученик, то вся работа будет выполнена за 28 часов, причем рабочий выполнил на 250% больше работы, чем ученик. За сколько часов сможет выполнить всю работу один рабочий?

Решение. Пусть x — время, за которое сможет выполнить всю работу один рабочий, y — время, за которое выполнит всю работу ученик. Очевидно, что $x < y$. Принимая работу $A = 1$, получим, что производительность труда рабочего равна $\frac{1}{x}$ и производительность труда ученика — $\frac{1}{y}$. По условию задачи, работая вместе 14 часов, они выполнили всю работу, поэтому

$$\frac{14}{x} + \frac{14}{y} = 1. \qquad (1)$$

Второе условие в задаче касается последовательной работы рабочего и ученика. Будем считать, что ученик выполнил 100% работы, тогда рабочий — 350%. Вместе они выполнили 350% + 100% = 450%, что составляет весь объем работы.

Составим пропорцию для ученика:
1— 450%

? — 100%, откуда следует, что ученик выполнил $\frac{2}{9}$ части всей работы, а рабочий — $\frac{7}{9}$.

Время, за которое ученик выполнит свою часть работы составляет $\frac{2y}{9}$, а рабочий выполнит $\frac{7}{9}$ части работы за $\frac{7x}{9}$. Составим второе уравнение:

$$\frac{7x}{9}+\frac{2y}{9}=28. \qquad (2)$$

Выразим из уравнения (2) $y=\frac{252-7x}{2}$ (3) и подставим в уравнение (1):

$$\frac{14}{x}+\frac{28}{252-7x}=1.$$

Преобразуем это уравнение: $x^2 - 46x + 504 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 28$ и $x_2 = 18$.

Подставляя $x_1 = 28$ в выражение (3), получим, что $y_1 = 28$. Это противоречит условию задачи, так как $x < y$.

Подставляя $x_2 = 18$ в выражение (3), получим, что $y_2 = 63$.

Ответ: 18.

Пример 16. После того, как из котлована выкачали 3/8 находившейся в нем воды, насос заменили на более мощный, и вся работа двух насосов по осушению котлована заняла 15 часов. Если бы оба насоса работали одновременно, котлован осушили бы за 5 часов. За какое время можно выкачать воду из котлована одним более мощным насосом?

Решение. Пусть x время, за которое можно выкачать из котлована всю воду одним более мощным насосом, y — время, за которое выкачает воду другой насос, причем $x < y$. Тогда производительность мощного насоса $\frac{1}{x}$, производительность второго насоса — $\frac{1}{y}$.

Составим таблицу по первому условию задачи.

Насос	Производительность	Работа	Время
I	$\frac{1}{x}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5x}{8}$
II	$\frac{1}{y}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3y}{8}$

Из этой таблицы получим первое уравнение:

$$\frac{5x}{8}+\frac{3y}{8}=15. \qquad (1)$$

Составим таблицу по второму условию задачи.

Насос	Производительность	Время	Работа
I	$\frac{1}{x}$	5	$\frac{5}{x}$
II	$\frac{1}{y}$	5	$\frac{5}{y}$

Исходя из этой таблицы, составим второе уравнение:

$$\frac{5}{x} + \frac{5}{y} = 1. \qquad (2)$$

Выразим из уравнения (1) $y = \frac{120 - 5x}{3}$ (3) и подставим в уравнение (2):

$$\frac{5}{x} + \frac{15}{120 - 5x} = 1.$$

Преобразуем это уравнение: $x^2 - 26x + 120 = 0$. Уравнение имеет два корня $x_1 = 20$ и $x_2 = 6$.

Подставляя $x_1 = 20$ в выражение (3) получим, что $y_1 = \frac{20}{3}$. По условию задачи $x < y$, поэтому корень $x_1 = 20$ не подходит.

Подставляя $x_2 = 6$ в выражение (3) получим, что $y_2 = 30$. Следовательно, этот корень удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 6.

Дополнительные задания

8. Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 3 секунды быстрее второго и догоняет второе каждые полторы минуты. За какое время первое тело проходит окружность? Ответ укажите в минутах.

9. Две точки движутся по окружности длиной 1,2 м с постоянными скоростями. Если они движутся в разных направлениях, то встречаются через 15 секунд. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через 60 секунд. Определите скорость более быстрой точки. Ответ укажите в м/с.

10. Два каменщика работали вместе 12 дней на кладке стен дома, а затем один первый каменщик заканчивал работу еще 9 дней. За сколько дней сможет выполнить эту работу первый каменщик, работая один, если второму потребуется для этого на 13 дней меньше?

11. Два рабочих вместе строили дом 8 дней, а затем один первый рабочий заканчивал строительство еще 4 дня. За сколько дней смог бы выполнить эту работу первый рабочий, работая один, если известно, что второму рабочему пришлось бы работать на шесть дней больше?

12. За шестичасовую смену рабочий сделал на 64 детали больше, чем его ученик, так как тратил на изготовление одной детали на 2 минуты меньше. Сколько деталей сделал ученик за смену?

День 16

Задание B12 (окончание)

Занятие 16 посвящено решению задач на проценты. В примерах задания группы B1 мы рассмотрели простые задачи на проценты, которые можно принять за опорные при решении задач на проценты B12.

Трудность при решении таких задач возникает, когда нужно определить, какую величину следует принять за 100%. На наш взгляд, существует способ, который значительно упрощает решение подобных задач: принимать за 100% следует ту величину, которая в условии задачи стоит в родительном или творительном падежах. Рассмотрим примеры.

Пример 17. Платье стоит 600 рублей, а кофта стоит 240 рублей. На сколько процентов платье дороже кофты?

Решение. Так как при формулировке вопроса слово «кофта» стоит в родительном падеже, то примем стоимость кофты за 100%. Составим пропорцию:

240 руб. — 100%

600 руб. — $x\%$,

откуда определяем x — стоимость платья в процентах:

$$x = \frac{600 \cdot 100}{240} = 250\ (\%).$$

Вычислим, на сколько процентов платье дороже кофты: $250\% - 100\% = 150\%$.

Ответ: 150.

Сформулируем эту задачу по-другому.

Пример 18. Платье стоит 600 рублей, а кофта — 240 рублей. На сколько процентов кофта дешевле платья?

Решение. Теперь принимаем за 100% стоимость платья. Составим пропорцию:

600 руб. — 100%

240 руб. — $x\%$

и определим в процентах цену кофты:

$$x = \frac{240 \cdot 100}{600} = 40\ (\%).$$

Вычислим разницу в стоимости платья и кофты в процентах: $100\% - 40\% = 60\%$.

Ответ: 60.

Пример 19. За январь цена картофеля повысилась на 30%, а в феврале снизилась на 12%. На сколько процентов повысилась цена на картофель за два месяца?

Решение. По условию задачи цена картофеля в январе стала больше, чем в предыдущем месяце. Пусть в предыдущем месяце цена картофеля была x руб., что составляет 100%. Так как 1% — это сотая часть числа, то повышение цены на 30% означает, что картофель в январе стоит на $0{,}3x$ руб.

больше, чем первоначальная цена, т.е. $1{,}3x$ руб. Эти рассуждения можно подтвердить составлением пропорции:

x руб. — 100%

? руб. — 130%.

Откуда следует, что новая цена картофеля в январе составляет $\frac{x \cdot 130}{100} = 1{,}3x$ (руб.).

Так как в феврале цена картофеля снизилась на 12% относительно январской, то примем цену в январе за 100%. Тогда цена в феврале составляет $100\% - 12\% = 88\%$. Следовательно, определим цену в феврале как 88% от цены в январе. Составим пропорцию:

$1{,}3x$ руб. — 100%

? руб. — 88%, откуда следует, что цена картофеля в феврале равна $\frac{1{,}3x \cdot 88}{100} = 1{,}144$ (руб.).

По условию задачи нужно определить, на сколько процентов повысилась цена за два месяца, т.е. на сколько процентов цена в феврале, которая составляет $1{,}144x$ руб. больше первоначальной цены в x руб. Принимаем первоначальную цену x руб. за 100% и составляем пропорцию:

x руб. — 100%

$1{,}144x$ руб. — ?%,

откуда следует, что новая цена равна $\frac{1{,}144x \cdot 100}{x} = 114{,}4$ (%) и повышение составит $114{,}4 - 100 = 14{,}4$ (%).

Ответ: 14,4.

Пример 20. Два магазина торгуют одним и тем же товаром. В первом магазине цена товара на 20% меньше, чем во втором. Количество проданных изделий в первом магазине на 20% больше, чем во втором. В каком магазине выручка за один день будет больше?

Решение. Пусть цена товара в первом магазине x руб. Определим цену товара во втором магазине, составив пропорцию:

x руб. — 80%

? руб. — 100%.

Откуда цена товара во втором магазине $\frac{x \cdot 100}{80} = 1{,}25x$ (руб.).

Пусть количество изделий, проданных во втором магазине m штук, что составляет 100%, а в первом магазине — 120%, т.е.

m — 100%

? — 120%, и в первом магазине продано изделий $1{,}2m$ штук.

Вычислим выручку в первом магазине, умножив цену товара на количество проданных изделий: $x \cdot 1{,}2m = 1{,}2mx$.

Для второго магазина выручка составит: $1{,}25x \cdot m = 1{,}25mx$.

Таким образом, выручка во втором магазине выше.

Ответ: 2.

Пример 21. Число школьников, посещающих кружок по физике, составляет 80% от числа школьников, посещающих спортивную секцию. Число школьников, посещающих спортивную секцию, составляет $312{,}5\%$ от числа школьников, посещающих математический кружок. Сколько процентов составляет число школьников, посещающих математический кружок от числа школьников, посещающих кружок по физике?

Решение. Допустим, что число школьников, посещающих спортивную секцию, составляет x человек. Тогда число школьников, посещающих кружок по физике, составит $0{,}8x$ человек.

Обозначим число школьников, посещающих математический кружок, m человек и примем m человек за 100%. Составим пропорцию по условию задачи:

m — 100%

? — 312,5%.

Откуда число школьников, посещающих спортивную секцию, равно $\dfrac{m \cdot 312{,}5}{100} = 3{,}125m$.

С другой стороны, число школьников из спортивной секции равно x человек, т.е. $3{,}125m = x$, откуда следует, что число школьников посещающих математический кружок, равно $m = \dfrac{x}{3{,}125}$.

Число школьников, посещающих кружок по физике, составляет $0{,}8x$ человек. Примем $0{,}8x$ за 100% и определим из пропорции, сколько процентов составляет число школьников, посещающих математический кружок:

$0{,}8x$ — 100%

$\dfrac{x}{3{,}125}$ — ?

Откуда следует, что $\dfrac{x \cdot 100}{3{,}125 \cdot 0{,}8x} = 40$ (%).

Ответ: 40.

Пример 22. Смешали 30%-й раствор соляной кислоты с 10%-м раствором и получили 600 г 15%-го раствора соляной кислоты. Определите, сколько грамм 30%-го раствора было взято.

Решение. Пусть x — масса 30%-го раствора, y — масса 10%-го раствора. Масса смеси равна:

$$x + y = 600. \quad (1)$$

Содержание соляной кислоты в 30%-м растворе составляет $\dfrac{x \cdot 30}{100} = 0{,}3x$ (г).

Содержание соляной кислоты в 10%-м растворе составляет $\dfrac{y \cdot 10}{100} = 0{,}1y$ (г).

Содержание соляной кислоты в 15%-м растворе равно $\dfrac{600 \cdot 15}{100} = 90$(г), откуда следует, что

$$0{,}3x + 0{,}1y = 90. \quad (2)$$

Для наглядности удобно заполнить таблицу:

	Содержание соляной кислоты, в %	**Масса раствора, в г**	**Масса соляной кислоты, в г**
Первый раствор	30	x	$0{,}3x$
Второй раствор	10	y	$0{,}1y$
Третий раствор	15	600	90

Решая систему уравнений (1) и (2), получим, что $x = 150$ (г).

Ответ: 150.

Дополнительные задания

13. За декабрь цена на яблоки повысилась на 20%, а в январе снизилась на 14%. На сколько процентов повысилась цена на яблоки за два месяца?

14. За I квартал цена на телевизор понизилась на 10%, а за II квартал — еще на 15%. На сколько процентов снизилась цена на телевизор за два квартала?

15. В течение февраля цена на огурцы выросла на 30%, а в течение марта — на 20% от цены февраля. На сколько процентов поднялась цена за два месяца?

16. Цена на товар снизилась на 20%. На сколько процентов больше можно купить товаров на те же деньги?

17. В первом магазине висит объявление: «Цены снижены в 1,3 раза», а в другом «Цены снижены на 30%». В каком магазине цена на товар ниже, если первоначальная цена товара была одинаковой. В ответе укажите номер магазина.

18. Руда, добываемая в шахте, содержит 61% примесей, а обогащенная руда — 22% примесей. Найдите, сколько необходимо тонн руды, добываемой в шахте, чтобы получить 17 тонн обогащенной руды.

19. На сколько процентов увеличится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 30%, а другое — на 20%?

День 17

Задание С1

Задания С1 включают в себя решение уравнений различных типов: уравнения, содержащие модуль, иррациональные, тригонометрические уравнения и системы уравнений. Задания группы С более сложные, чем в группе В. Мы посвятим решению данного задания два занятия.

Уравнения с модулем

Уравнения, содержащие модуль аргумента могут быть сведены к следующей совокупности систем уравнений:

$$f(|x|) = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ f(-x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Уравнения, содержащие модуль функции, могут быть сведены к следующей совокупности систем уравнений:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$$

или

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x);$$

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Уравнения вида $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_n(x)| = g(x)$ проще решать методом интервалов.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решите уравнение $|x - 3| + |x - 5| = 2.$ (1)

Решение. Разобьем всю числовую ось на три области: 1) $x \in (-\infty; 3]$, 2) $x \in (3; 5]$, 3) $x \in (5; \infty)$. В области 1) уравнение (1) представимо как $-x + 3 - x + 5 = 2$, $x = 3$. В области 2) уравнение (1) представимо как $x - 3 - x + 5 = 2$, $x \in (3; 5]$. В области 3) уравнение (1) запишется $x - 3 + x - 5 = 2$, $x \in \varnothing$. Собирая все эти решения получаем $x \in [3; 5]$.

Ответ: [3; 5].

Пример 2. Решите уравнение $|3x - 2| - |2x - 3| = 0.$

Решение. Представим разность модулей как разность квадратов: $(3x - 2)^2 - (2x - 3)^2 = 0$, $(3x - 2 - 2x + 3)(3x - 2 + 2x - 3) = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Ответ: $\{\pm 1\}$.

Пример 3. Решите уравнение $|x-5|+|-x+5|=6$.

Решение. Используя то, что $|a-b|=|b-a|$, получим $2|x-5|=6$, $|x-5|=$ $=3$, $x-5=\pm 3$, $x_1=8$, $x_2=2$.

Ответ: $\{2; 8\}$.

Дополнительные задания

1. Решите уравнение $|x+4|+|x-2|=6$.

2. Решите уравнение $|5x-4|-|3x+2|=0$.

3. Решите уравнение $|2x-6|+|-2x+6|=8$.

Иррациональные уравнения

Теория решения таких уравнений приведена при рассмотрении задания **В4**. Приведем решение более сложных примеров.

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{3x-21}=7-x$.

Решение. $\sqrt{3x-21}=7-x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-17x+70=0 \\ x \leqslant 7 \end{cases} \Leftrightarrow x-7.$

Ответ: $x=7$.

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt{9-3x}=\sqrt{x+1}$.

Решение. $\sqrt{9-3x}=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-3x=x+1 \\ x \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

Ответ: $x=2$.

Пример 6. Решите уравнение $\sqrt{3x+1}\sqrt{x-1}=2$.

Решение. Находим ОДЗ: $x \geqslant -1$, возведем обе части уравнения в квадрат, $3x^2-2x-5=0$, $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{5}{3}$.

Ответ: $x=\dfrac{5}{3}$.

Пример 7. Решите уравнение $3\sqrt{3+\dfrac{2}{x}}-5\sqrt{\dfrac{x}{3x+2}}=2.$ (1)

Решение. ОДЗ: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup (0; \infty)$, пусть $t=\sqrt{3+\dfrac{2}{x}}$, тогда (1) запишется как $3t-\dfrac{5}{t}=2$, $t>0$, $3t^2-2t-5=0$, $t_1=-1$ (п. к.), $t_2=\dfrac{5}{3}$. Перейдя к исходной переменной, $\sqrt{3+\dfrac{2}{x}}=\dfrac{5}{3}$, $3+\dfrac{2}{x}=\dfrac{25}{9}$, $x=-9$.

Ответ: $x=-9$.

Пример 8. Решите уравнение: $\sqrt{x-7}-\sqrt[3]{2x}=1.$ (1)

Решение. ОДЗ: $x \geqslant 7$, пусть $t=\sqrt{x-7}$, $t^2=x-7$, $x=t^2+7$, тогда (1) запишем как $t-1=\sqrt[3]{2t^2+14}$, $t^3-5t^2+3t-15=0$, $(t-5)(t^2+3)=0$, $t=5$, возвращаясь к переменной x, получим $\sqrt{x-7}=5$, $x=32$.

Ответ: $x=32$.

Пример 9. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{3x+11} = \sqrt[3]{3x+4}$. **(1)**

Решение. Возведем обе части уравнения в куб, получим $x + 3 + 3\sqrt[3]{(x+3)^2} \times \sqrt[3]{3x+11} + 3\sqrt[3]{(3x+11)^2}\sqrt[3]{x+3} + 3x + 11 = 3x + 4$, $3\sqrt[3]{x+3}\sqrt[3]{3x+11} \times (\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{3x+11}) = -x - 10$, заметим, что выражение в скобках равно правой части уравнения (1). Это выражение заменим на правую часть уравнения (1). Данное преобразование не является равносильным, так как исходное уравнение (1) не является тождеством. Поэтому полученное решение нужно будет проверить. Произведя указанную замену, получим $3\sqrt[3]{x+3}\sqrt[3]{3x+11} \times \sqrt[3]{3x+4} = -x - 10$ (2). Возведем обе части (2) опять в куб и после приведения подобных членов, получаем $244x^3 + 1974x^2 + 5133x + 4564 = 0$ (3), корень $x = -4$ можно найти, тогда (3) раскладывается на множители: $(x + 4)(244^2 + 998x + 1141) = 0$, у квадратного уравнения во второй скобке нет решения (дискриминант отрицательный), поэтому получаем решение $x = -4$. Подставляя найденное решение в (1), убеждаемся, что найденное решение подходит.

Ответ: $x = -4$.

Пример 10. Решите уравнение $\sqrt{3x+3} - \sqrt{2x} = \sqrt{2x+5} - \sqrt{x+2}$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \geqslant 0, \\ x \geqslant -2, \\ x \geqslant -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 0$; перепишем исходное уравнение в виде $\sqrt{3x+3} + \sqrt{x+2} = \sqrt{2x+5} + \sqrt{2x}$, затем возведем в квадрат обе части полученного уравнения, приведем подобные члены, $4x + 5 + 2\sqrt{3x^2 + 9x + 6} = 4x + 5 + 2\sqrt{4x^2 + 10x}$, $x^2 + x - 6 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ (п.к.)

Ответ: $x = 2$.

Пример 11. Решите уравнение

$$3\sqrt{(2x-1)(3x-2)} - 3\sqrt{3x-2} - 2\sqrt{2x-1} + 2 = 0. \qquad (1)$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ x \geqslant \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{2}{3}$. Пусть $\sqrt{2x-1} = a$, $\sqrt{3x-2} = b$, тогда уравнение (1) запишется как $3ab - 3b - 2a + 2 = 0$, перегруппировав члены полученного уравнения, приведем его к виду $(a - 1) \cdot (3b - 2) = 0$, решая которое, получим: $(a - 1) = 0$ или $(3b - 2) = 0$, переходим к x, $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 1, \\ 3\sqrt{3x-2} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \dfrac{22}{27}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \dfrac{22}{27}. \end{array}\right.$

Пример 12. Решите уравнение:

$$\sqrt{3x^2+x+2}+\sqrt{x^2+2x+3}=\sqrt{3x^2+3}+\sqrt{x^2+x+4}.$$

Решение. ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$. Перепишем исходное уравнение в виде $\sqrt{3x^2+x+2}-\sqrt{3x^2+3}=\sqrt{x^2+x+4}-\sqrt{x^2+2x+3}$. Применяем к полученному уравнению формулу: $\sqrt{n}-\sqrt{m}=\dfrac{n-m}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}$, если $n,\ m \geqslant 0,\ n+m>0$ (или домножаем левую и правую части уравнения на сопряженные выражения).

$$\frac{3x^2+x+2-3x^2-3}{\sqrt{3x^2+x+2}+\sqrt{3x^2+3}}=\frac{x^2+x+4-x^2-2x-3}{\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+2x+3}},$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{3x^2+x+2}+\sqrt{3x^2+3}}=\frac{-x+1}{\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+2x+3}}$$ (2), один корень $x=1$, этот корень единственный, так как левая часть уравнения (2) положительна, а правая часть отрицательна.

Ответ: $x=1$.

Дополнительные задания

4. Решите уравнение $\sqrt{3x+1}\ \sqrt{x-1}=2.$

5. Решите уравнение $\sqrt{x+14\sqrt{x-49}}+\sqrt{x-14\sqrt{x-49}}=10.$

6. Решите уравнение $\sqrt{x+8\sqrt{x-16}}-\sqrt{x-8\sqrt{x-16}}=6.$

7. Решите уравнение $4x^2-4x-2\sqrt{4x^2-4x+1}=7.$

8. Решите уравнение $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-2x+1}=4.$

9. Решите уравнение $(x+2)\sqrt{x-3}=0.$

10. Решите уравнение $\sqrt{(x+1)^2}=2.$

11. Решите уравнение $(x+1)^2+\sqrt{x}=\sqrt{x}+4.$

12. Решите уравнение $\sqrt{-x^2+9x+11}=\sqrt{x^2+4x+4}.$

13. Решите уравнение $(x-3)\sqrt{x^2-10x+9}=3x-9.$

День 18

Задание С1 (окончание)

Тригонометрические уравнения

Решение тригонометрических уравнений, как правило, сводится к приведению исходного уравнения к простейшему.

Напомним основные формулы, необходимые для решения тригонометрических уравнений.

$\sin x = t$, $x = (-1)^n \arcsin t + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

или $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin t + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \\ x = \pi - \arcsin t + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z} \end{array}\right.$

$\cos x = t$, $x = \pm\arccos t + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{ctg} x = t$, $x = \operatorname{arcctg} t + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

$\sin x = -t$, $x = (-1)^{n+1} \arcsin t + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

или $\left[\begin{array}{l} x = -\arcsin t + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \\ x = -\pi + \arcsin t + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z} \end{array}\right.$

$\cos x = -t$, $x = \pi - (\pm\arccos t) + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{tg} x = -t$, $x = -\operatorname{arctg} t + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{ctg} x = -t$, $x = \pi - \operatorname{arcctg} t + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

Рассмотрим наиболее часто используемые методы решения тригонометрических уравнений.

1. Приведение уравнений к квадратным.

Пример 13. Решите уравнение $2\sqrt{3}(\cos x)^2 = 7\sin x + 4\sqrt{3}$.

Решение. $2\sqrt{3}(\cos x)^2 = 7\sin x + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(1 - \sin x)^2) = 7\sin x + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}(\sin x)^2 + 7\sin x + 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{-7 \pm 1}{4\sqrt{3}} = \left[\begin{array}{l} -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ \text{(п. к.)} \\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2}, \end{array}\right. \quad \sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2},$$

$x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 14. Решите уравнение $\cos 2x = 3 + 5\sin|x|$.

Решение.

$$\cos 2x = 3 + 5\sin|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0,\\ (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 3 + 5\sin x;\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 3 - 5\sin x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0,\\ 2(\sin x)^2 + 5\sin x + 2 = 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ 2(\sin x)^2 - 5\sin x + 2 = 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0,\\ \sin x = \left[\begin{array}{l}-2 \text{ (п. к.)}\\ -\dfrac{1}{2};\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ \sin x = \left[\begin{array}{l}2 \text{ (п. к.)},\\ \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0,\\ x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ x = (-1)^{n}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{N},\\ x = (-1)^{n}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\ n < 0.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{N},\\ x = (-1)^{n}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\ n < 0.\end{array}\right.$

Пример 15. Решите уравнение $3\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{6}\sin x$.

Решение. $3\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{6}\sin x \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \geqslant 0,\\ 9(1 + \cos x) = 6(\sin x)^2\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \geqslant 0,\\ 2(\cos x)^2 + 3\cos x + 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \geqslant 0,\\ \cos x = \left[\begin{array}{l}-1,\\ -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l}\pi + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},\\ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x = \left[\begin{array}{l}\pi + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},\\ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

Пример 16. Решите уравнение

$$3\cos x + 2\sqrt{2}(\cos x)^2 + \sqrt{2}(\sin x)^2 = 0.$$

Решение. $3\cos x + 2\sqrt{2}(\cos x)^2 + \sqrt{2}(\sin x)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}(\cos x)^2 + 3\cos x + \sqrt{2} =$

$$= 0 \Leftrightarrow \cos x = \left[\begin{array}{l}-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ -\dfrac{2}{\sqrt{2}} \text{ (п. к.)};\end{array}\right. \quad x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Пример 17. Решите уравнение $\frac{\sqrt{3}}{3}+2\sin 2x=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$.

Решение. $\frac{\sqrt{3}}{3}+2\sin 2x=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0,\\ \frac{\sqrt{3}}{3}+2\sin 2x=\frac{2}{2\sin x\cos x}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0,\\ \sin 2x=t,\\ 6t^2+\sqrt{3}\,t-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l} t_1=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\ (\text{п. к.}),\\ t_2=\frac{\sqrt{3}}{2},\end{array}\right.\end{cases}$ $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

2. Однородные уравнения: так называются уравнения, в которых сумма показателей степеней каждого из слагаемых, входящих в уравнение, одна и та же, пусть сумма показателей равна n. В тригонометрических уравнениях эта степень часто равняется двум. Делением такого уравнения на $(\sin x)^n$ или $(\cos x)^n$ однородное уравнение сводится к уравнению относительно $\operatorname{tg}x$ или $\operatorname{ctg}x$.

Пример 18. Решите уравнение $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. **(1)**

Решение. Подставим в (1) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, получим $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$. Делаем вывод, что $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$, так как нет угла, у которого и синус и косинус равнялся бы нулю одновременно. Поделим обе части уравнения (1) на $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, получим $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$, $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $x=\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ: $x=\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Пример 19. Решите уравнение $6(\sin x)^2+2\sin x\cos x-2(\cos x)^2=3$.

Решение. $6(\sin x)^2+2\sin x\cos x-2(\cos x)^2=3 \Leftrightarrow 6(\sin x)^2+2\sin x\cos x-2(\cos x)^2=3((\cos x)^2+(\sin x)^2) \Leftrightarrow 3(\sin x)^2+2\sin x\cos x-5(\cos x)^2=0$ (2), подставим в (2) $\cos x=0$, получим $3(\sin x)^2=0$, $\sin x=0$. Делаем вывод, что $\cos x\neq 0$, так как нет угла, у которого и синус и косинус равнялся бы нулю одновременно. Поделим обе части уравнения (2) на $(\cos x)^2$, получим $3(\operatorname{tg}x)^2+2\operatorname{tg}x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=\frac{-5}{3},\\ \operatorname{tg}x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z},\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=-\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z},\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

3. Решения уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента.

Пример 20. Решите уравнение $\sqrt{2}\sin 3x+\sqrt{2}\cos 3x=\sqrt{3}$.

Решение. Разделим обе части уравнения на 2, $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \left[\begin{array}{l} 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Пример 21. Решите уравнение $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 1$ и найдите наименьший положительный корень.

Решение. Разделим обе части уравнения на 2, $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}$,

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi}{12} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \end{array}\right.$$

наименьший положительный корень равен $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.

4. Решение уравнений разложением на множители, вводя формулы сложения, преобразуя сумму в произведение и произведение в сумму, вводя формулу понижения степени и другие преобразования.

Пример 22. Решите уравнение $\sin 5x = \sin 3x\cos 2x$.

Решение. $\sin 5x = \sin 3x\cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x\cos 3x + \sin 3x\cos 2x = \sin 3x\cos 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\cos 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Пример 23. Решите уравнение $\cos 3x + \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

Решение. $\cos 3x + \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 4x\cos x + \sqrt{2}\cos 4x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos 4x(2\cos x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4},\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4},\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Пример 24. Решите уравнение $\cos 3x - \cos x = \sqrt{3}\sin x$ и найдите все корни, принадлежащие промежутку $[0; \pi]$.

Решение. $\cos 3x - \cos x = \sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow -2\sin 2x \sin x = \sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin 2x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Получилось три серии ответов, для каждой серии найдем те корни, которые входят в указанный промежуток.

1) $0 \leqslant \pi k \leqslant \pi$, $0 \leqslant k \leqslant 1$, $k = 0; 1$. Таким образом, корни $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ входят в данный промежуток.

2) Рассмотрим теперь вторую серию. $0 \leqslant \dfrac{-\pi}{6} + \pi n \leqslant \pi$, $\dfrac{1}{6} \leqslant n \leqslant \dfrac{1}{6} + 1$, $n = 1$, $x_3 = \dfrac{5\pi}{6}$.

3) Найдем корни из третьей серии. $0 \leqslant \dfrac{-\pi}{3} + \pi m \leqslant \pi$, $\dfrac{1}{3} \leqslant m \leqslant \dfrac{1}{3} + 1$, $m = 1$, $x_4 = \dfrac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\left\{0; \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{6}; \pi\right\}$, $\left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Пример 25. Решите уравнение $\sin 5x - \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение. $\sin 5x - \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sin 5x + \sin x =$
$= -\cos 2x \Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\sin 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \sin 3x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \dfrac{-\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \dfrac{-5\pi}{18} + \dfrac{2\pi m}{3},\ m \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \dfrac{-\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \dfrac{-5\pi}{18} + \dfrac{2\pi m}{3},\ m \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Пример 26. Решите уравнение $2\cos x + \sin x + \sin 2x + 1 = 0$.

Решение. $2\cos x + \sin x + \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \mp\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \mp\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Пример 27. Решите уравнение $\sin 9x = 2\sin 3x$.

Решение. $\sin 9x = 2\sin 3x \Leftrightarrow \sin 9x - \sin 3x - \sin 3x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\cos 6x \sin 3x - \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x(2\cos 6x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0, \\ \cos 6x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \mp\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \mp\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Пример 28. Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \dfrac{3}{(\cos x)^2} = 5$.

Решение. $\operatorname{tg} x + \dfrac{3}{(\cos x)^2} = 5 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x + (3 + 3(\operatorname{tg} x)^2) = 5 \Leftrightarrow 3(\operatorname{tg} x)^2 + \operatorname{tg} x - 2 =$

$$= 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{3}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{3}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Пример 29. Решите уравнение $\sin\dfrac{\pi(x^2 + 1)}{x^2 + 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi(x^2 + 1)}{x^2 + 3} = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ \dfrac{\pi(x^2 + 1)}{x^2 + 3} = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \dfrac{(x^2 + 1)}{x^2 + 3} = \dfrac{1}{3} + 2k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ \dfrac{(x^2 + 1)}{x^2 + 3} = \dfrac{2}{3} + 2n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \end{array}\right.$ так как

$\dfrac{(x^2 + 1)}{x^2 + 3} < 1$, получаем $k = 0$ и $n = 0$.

Тогда $\left[\begin{array}{l}\dfrac{(x^2+1)}{x^2+3}=\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{(x^2+1)}{x^2+3}=\dfrac{2}{3},\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$

Пример 30. Решите уравнение $3(\cos x)^2 + 5(\sin x)^2 = 4$.

Решение. $3(\cos x)^2 + 5(\sin x)^2 = 4 \Leftrightarrow \dfrac{3(1+\cos 2x)}{2} + \dfrac{5(1-\cos 2x)}{2} = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Дополнительные задания

14. Решите уравнение $\sqrt{3}\cos 2x + 7\sin x = 3\sqrt{3}$.

15. Решите уравнение $\cos 6x + 2\cos 2x = 0$. Найдите его корни, лежащие в промежутке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

16. Решите уравнение $\sin 2x + \sin 6x = \sqrt{3}\cos 2x$.

17. Решите уравнение $2(\cos x)^2 + 3\sqrt{3}\sin|x| = 5$.

18. Решите уравнение $\dfrac{2|2\cos x - \sqrt{3}|}{2\cos x - \sqrt{3}} - x^2 + 9x - 20 = 0$.

19. Решите уравнение $\sqrt{2}\sin(8\sqrt{x}) + 4(\sin(2\sqrt{x}))^2 = 2$.

20. Решите уравнение $\cos(2\pi x^2) = -\sin(\pi x^2) + \cos(\pi x^2)$.

21. Решите уравнение $(1 + (\mathrm{tg}\,x)^2)(1 + \cos 2x)\cos x - 2\sin 2x = 0$.

22. Решите уравнение: $2\sin 2x = 3 + \mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x$.

23. Решите уравнение: $\cos 3x + \sin\left(5x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\cos(4x - \pi)$.

Системы уравнений

Систему двух уравнений с двумя неизвестными можно записать в виде:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y),\\ f_2(x, y) = g_2(x, y).\end{cases} \qquad (1)$$

Решением системы (1) называется пара чисел (x_0, y_0), при подстановке которых соответственно вместо x и y в каждое уравнение системы (1) она становится верным числовым равенством, т.е. $f_1(x_0, y_0) = g_1(x_0, y_0)$, $f_2(x_0, y_0) = g_2(x_0, y_0)$. Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что она не имеет решений.

Основные приемы, применяемые при решении систем

1. Когда систему можно заменить равносильной совокупностью двух систем.

Пример 31. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{4} - x^2}\,(64y^2 + 16y\sin(\pi x) + 1) = 0, \\ \cos(16\pi y) = \sqrt{2x} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{4} - x^2} = 0, \\ \cos(16\pi y) = \sqrt{2x}; \end{cases} \qquad (1) \\ \begin{cases} 64y^2 + 16y\sin(\pi x) + 1 = 0, \\ \cos(16\pi y) = \sqrt{2x}. \end{cases} \qquad (2) \end{array}\right.$$

Решение первого уравнения системы (1) $x_{1,\,2} = \pm\dfrac{1}{2}$, но подходит только положительное, так как $x \geqslant 0$, подставляя $x = \dfrac{1}{2}$ во второе уравнение системы, получим, что $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{k}{8}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ является решением системы (1). Условием существования решения первого уравнения системы (2) является неотрицательность дискриминанта:

$64(\sin(\pi x))^2 - 64) \geqslant 0$, $(\sin(\pi x))^2 - 1 \geqslant 0$, $(\sin(\pi x))^2 = 1$, $\sin(\pi x) = \pm 1$, решения первого уравнения запишется как

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + 2n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ y = -\dfrac{1}{8}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} + 2m,\ m \in \boldsymbol{Z}, \\ y = \dfrac{1}{8} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ y = -\dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

Это решение входит в решение уравнения первой системы. Таким образом, общее решение записывается.

Ответ: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{k}{8}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2. Метод подстановки. Одно из неизвестных представлено явно в уравнении и его подставляем в другое.

Пример 32. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\sqrt{2 - y + \cos x} + \sqrt{6}\sin x = 0, \\ y = 2\cos x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{2 - 2\cos x - 1 + \cos x} + \sqrt{6}\sin x = 0, \\ \sin x \leqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 3\sqrt{1 - \cos x} = -\sqrt{6}\sin x = 0, \\ \sin x \leqslant 0, \end{cases}$

$$\cos x = \left[\begin{array}{l} 1, \\ \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \quad x = \left[\begin{array}{l} 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Дополнительные задания

24. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{1-y^2}\left(x^2 - 2x\sin\dfrac{\pi y}{2} + 1\right) = 0, \\ \sin\dfrac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2. \end{cases}$

25. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x}\,(x^2 - 5x - \sqrt{x^2 - 5x - 2} - 4) = 0, \\ 12\cos y = x. \end{cases}$

26. Решите систему уравнений $\begin{cases} y\sqrt{4y^2 - 9x^2} = 0, \\ x + y + \sqrt{4y^2 - 9x^2} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

27. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2\sqrt{25x^2 - 9y^2} = 0, \\ \dfrac{x}{3} + y - \sqrt{25x^2 - 9y^2} = 6. \end{cases}$

28. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3y^2 - 8y - (x + 30) = 0, \\ (x - 4)\log_2(y - 3) = \log_2(y - 3). \end{cases}$

29. Решите систему уравнений $\begin{cases} (y - 5)\log_3\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = \log_3\left(x - \dfrac{3}{2}\right), \\ 7x^2 - 4x - (y + 14) = 0. \end{cases}$

30. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = 1, \\ x - y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

31. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{1 + y - \cos x} + \sqrt{2}\sin x = 0, \\ y = 2\cos x. \end{cases}$

32. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{-\cos^2 x + y^2 - 3} = \sin x, \\ 4\sin x = y. \end{cases}$

33. Решите систему уравнений $\begin{cases} \cos^2 x + 3\sin^2 x = \sqrt{3}\cos x, \\ y + 3\sqrt{3}\cos x = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

34. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x + 2y = 3, \\ \dfrac{2}{\sin x} - y = 1. \end{cases}$

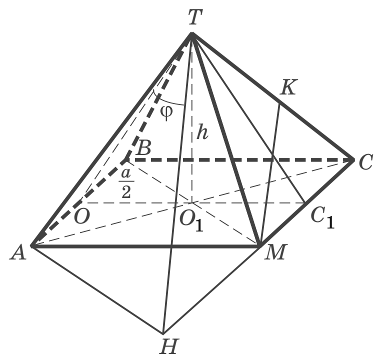
День 19

Задание С2

Задания С2 относятся к разделу «Геометрия» и включают в себя подразделы «Стереометрия» и «Планиметрия». В пространственных телах нужно уметь выделять плоские фигуры и, используя соотношения между элементами этих фигур, определять неизвестные величины. Основные соотношения в плоских фигурах приведены в теоретическом материале к заданиям группы С4, относящимся к планиметрии, а основные соотношения для пространственных тел были приведены в теории к заданию В9.

Рассмотрим методы решения основных типов задач.

Пример 1. В правильной четырехугольной пирамиде $ABCMT$ со стороной основания $a = 4\sqrt{2}$ и высотой $TO_1 = h = 1$ найдите косинус угла между прямыми OT и MK, где O и K — середины ребер AB и TC.



Решение. В плоскости MTC через точку T проведем прямую TH параллельно MK. Искомый угол — OTH. Найдем его косинус из треугольника OTH по теореме треугольника: $\cos\varphi = \frac{|OT|^2 + |TH|^2 - |OH|^2}{2|OT||TH|}$; Из ΔOTO_1 $|OT| = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{1 + 8} = 3$; $TC_1 \perp C_1H$ по теореме о трех перпендикулярах.

Из ΔHOC_1:

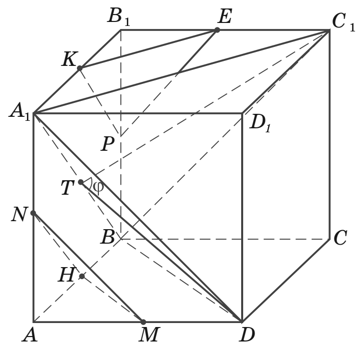
$$|OH| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \sqrt{32 + 72} = \sqrt{104}; \text{ Из } \Delta THC_1 \ |TH| = \sqrt{|TO|^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + 72} = 9.$$

Подставляя полученные выражения в формулу для косинуса, получаем $\cos\varphi = \left|\frac{9 + 81 - 104}{2 \cdot 3 \cdot 9}\right| = \frac{7}{27}$.

Ответ: $\frac{7}{27}$.

Пример 2. В кубе найдите косинус угла между плоскостями KEP и NMH, где K, E, P, N, H, M — середины ребер A_1B_1, B_1C_1, BB_1, AA_1, AB, AD.

Решение. Проведем плоскости A_1BD и C_1BA_1 параллельно плоскостям NMH и KEP соответственно. Плоскости A_1BD и C_1BA_1 пересекаются по прямой A_1B. Для построения двугранного угла между плоскостями в (A_1BD) проведем

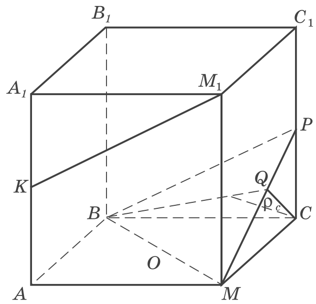


$DT \perp A_1B$, а в плоскости C_1BA_1 проведем $C_1T \perp$ $\perp A_1B$. Найдем косинус угла C_1TD, где T — середина A_1B, используя теорему косинусов.

$|TC_1| = |TD| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$; $|DC_1| = a\sqrt{2}$, a — ребро куба. $\cos\varphi = \dfrac{|DT|^2 + |TC_1|^2 - |DC_1|^2}{2 \cdot |DT||TC_1|} =$

$$= \frac{\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a^2 - 2a^2}{2 \cdot a\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.



Пример 3. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCMA_1B_1C_1M_1$ находится квадрат со стороной 2. Высота параллелепипеда равна 1. Найдите расстояние между прямыми M_1K и MP, где K и P — середины ребер AA_1 и CC_1.

Решение. Плоскость BPM параллельна прямой KM_1 по признаку параллельности прямой и плоскости ($BP \parallel KM_1$); $(BPM) \cap (MM_1C) = MP$. Построим плоскость, перпендикулярную обеим плоскостям (BPM) и (MM_1C). Для этого из точки B опустим перпендикуляр на (MM_1C_1), $BC \perp MP$, затем проведем $CQ \perp MP$. По теореме о трех перпендикулярах расстояние от точки C до плоскости BPM находится из треугольника BCQ. Нам нужно найти расстояние от точки M_1 до плоскости BPM, оно в два раза больше расстояния от точки C до плоскости BPM, так как расстояние от точки M_1 до линии пересечения плоскостей MP в два раза больше, чем от точки C. Обозначим его ρ_c и найдем из треугольника COP, где O — середина BM, проведя перпендикуляр из точки C к гипотенузе PO.

$$\rho_{M_1} = 2\rho_c = 2\frac{|OC| \cdot |CP|}{|OP|} = 2\frac{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{2 + \frac{1}{4}}} = 2\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $2\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Дополнительные задания

1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми C_1D и BN, где N — середина DC, если $AD = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $DC = AA_1 = \sqrt{2}$.

2. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $DC = AA_1 = \sqrt{6}$. Найдите расстояние от точки, находящейся на середине DC до прямой BR, где R — середина CC_1.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки N и K — середины сторон BB_1 и AB. Найдите площадь четырехугольника $DKNC_1$, если сторона куба равна 4.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки N, K, P соответственно середины сторон A_1B_1, B_1C_1, AD. Найдите угол наклона ребра AB к плоскости NKP.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M, N, K, P — середины ребер A_1B_1, B_1C_1, DC, AD. Найдите расстояние между плоскостями MNA и A_1PK, если ребро куба равно $2\sqrt{3}$.

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M, N, P — середины ребер A_1B_1, B_1C_1, DC. Найдите тангенс угла между прямыми MN и A_1P.

7. В основании пирамиды $ABCDT$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2\sqrt{7}$, $BC = 2$. Высота $AT = 8$ является боковым ребром пирамиды, DL — медиана грани CDT. Точка M принадлежит медиане DL так, что $DM : ML = 1 : 1$. Точка N лежит на диагонали основания BD. Прямые AM и TN пересекаются. Определите угол между AM и плоскостью ABC.

8. В правильной четырехугольной пирамиде $ABCDT$ все ребра равны. Точка M — середина ребра BT. В каком отношении делит объем пирамиды сечение, проходящее через прямую AM параллельно диагонали основания BD?

9. В правильной четырехугольной пирамиде $ABCDT$ все ребра равны $\sqrt{10}$. Точка M — середина ребра BT. Найдите расстояние от вершины пирамиды до плоскости, проходящей через прямую AM параллельно диагонали основания BD?

10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки N и K — середины сторон DC и CC_1. Найдите угол между прямыми NK и AD_1.

11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки N и K — середины сторон BB_1 и AB. Найдите площадь четырехугольника $DKNC_1$, если сторона куба равна $2\sqrt{2}$.

12. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в основании находится квадрат $ABCD$. Высота параллелепипеда относится к стороне основания как $\sqrt{3} : \sqrt{2}$. Найдите угол, который образует плоскость AD_1B_1 с боковым ребром.

13. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите, в каком отношении разделена главная диагональ A_1C точками ее пересечения с плоскостями AB_1D_1 и BDC_1.

14. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $DC = AA_1 = \sqrt{6}$. Найдите расстояние от точки D до прямой BR, где R — середина CC_1.

15. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите расстояние от вершины A_1 до плоскости AB_1D_1, если ребро куба равно $\sqrt{3}$.

16. В основании параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ находится квадрат $ABCD$ со стороной равной 2. Найдите высоту параллелепипеда, если площадь сечения параллелепипеда плоскостью AB_1C равна 6.

17. Сечение куба плоскостью проходит через середины ребер AD, DC и AA_1. Площадь сечения равна $3\sqrt{3}$. Найдите длину ребра куба.

18. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M, N, P, K — соответственно середины ребер A_1B_1, A_1D_1, BC, DC. Найдите расстояние между плоскостями AMN и C_1PK, если ребро куба равно 6.

19. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки N, K, P соответственно середины сторон A_1B_1, B_1C_1, AD. Найдите расстояние между прямыми NK и PD_1, если ребро куба равно 3.

20. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки N, K, P соответственно середины сторон A_1B_1, B_1C_1, AD. Найдите угол наклона ребра AB к плоскости NKP.

21. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания $a = \dfrac{3}{\sqrt{19}}$ и высотой $h = 5$. Точка M лежит на высоте основания BD, причем $BM : MD = 3 : 1$. Точка N лежит на диагонали CB_1 боковой грани CC_1B_1B. Прямые AN и A_1M пересекаются. Определите площадь сечения плоскостью AMN.

22. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания $a = \dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$. Точка M лежит на высоте основания BD, причем $BM : MD = 3 : 1$. Точка N лежит на диагонали CB_1 боковой грани CC_1B_1B. Прямые AN и A_1M пересекаются. Определите расстояние от точки B_1 до плоскости A_1MN.

23. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания $a = 5$ и высотой $h = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$. Точка M лежит на высоте основания CD, причем $CM : MD = 4 : 1$. Точка N лежит на диагонали CB_1 боковой грани CC_1B_1B. Прямые AN и A_1M пересекаются. Определите площадь сечения призмы плоскостью AMN.

24. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания $a = \sqrt{7}$ и высотой $h = \sqrt{2}$. Точка M лежит на высоте основания CD, причем $CM : MD = 4 : 1$. Точка N лежит на диагонали CB_1 боковой грани CC_1B_1B. Прямые AN и A_1M пересекаются. Определите угол между прямой CB_1 и плоскостью AMN.

День 20

Задание С3

Задания С3 включают в себя решение неравенств различных типов: линейных, квадратных, дробно-рациональных, показательных, логарифмических и иррациональных. Разбору этих заданий посвятим два занятия.

Линейные, квадратные, дробно-рациональные, показательные и логарифмические неравенства

Неравенства первой степени $ax < (>)\ b$. 1) Если $a > 0$, то решение записывается как $x <(>)\ b/a$; 2) если $a < 0$, то решение записывается как $x >(<)\ b/a$; 3) если $a = 0$, то ищется решение неравенства: $0 \cdot x <(>)\ 0$.

Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одно и то же положительное число, то получим равносильное неравенство.

Если к обеим частям неравенства прибавить (или вычесть) одно и то же число, то полученное неравенство будет равносильным исходному; т.е. любой член неравенства можно перенести из одной части в другую с противоположным знаком.

Пусть многочлен представим в виде произведения двучленов:

$$P(x) = (x - a_1)\,(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})\,(x - a_n) \qquad (3)$$

Каждый множитель в этом произведении положителен при $x > a_i$ и отрицателен при $x < a_i$ (корни многочлена расположены в порядке возрастания). На этом свойстве линейных множителей основан ***метод интервалов***. Пусть нужно определить знак $P(x)$. Нанесем на числовую ось все точки, где изменяется знак каждого из множителей, тогда знак $P(x)$ будет меняться при переходе от одной точки к другой. Удобно через эти точки проводить волну, где положительные значения многочлена будут выше числовой оси, а отрицательные — ниже оси. Таким образом, решением неравенства будут объединения всех промежутков, в которых находится нужный знак.

Аналогично рассматриваются *дробно-рациональные неравенства*:

$$\frac{M(x)}{N(x)} > 0 \Leftrightarrow M(x)N(x) > 0,\ \frac{M(x)}{N(x)} < 0 \Leftrightarrow M(x)N(x) < 0.$$

$$\frac{M(x)}{N(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} M(x)N(x) \geqslant 0, \\ N(x) \neq 0; \end{cases}$$

$$\frac{M(x)}{N(x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} M(x)N(x) \leqslant 0, \\ N(x) \neq 0. \end{cases}$$

Все неравенства вида $\dfrac{M(x)}{N(x)} > b$ или $\dfrac{M(x)}{N(x)} > f(x)$ можно свести к рассмотренным выше, если перенести одну часть неравенства (левую или правую) так, чтобы в другой части был нуль, а затем привести к общему знаменателю.

Когда неравенство представлено в виде произведения сомножителей и сравнивается с нулем, то возможны следующие равносильные замены в области существования исходного неравенства:

1) $(y_1 - y_2) \Leftrightarrow (f(y_1) - f(y_2))$, если $f(y)$ — строго возрастающая функция.
2) $(y_1 - y_2) \Leftrightarrow (f(y_2) - f(y_1))$, если $f(y)$ — строго убывающая функция.
3) $f - y \Leftrightarrow f^2 - y^2$, при $f,\ y \geqslant 0$.
4) $|y| \Leftrightarrow y^2$.
5) $|y_1| - |y_2| \Leftrightarrow y_1^2 - y_2^2$.

Пример 1. Решите неравенство $\frac{(x-3)x(x^2+x+2)}{x} < 0$.

Решение. Учитывая, что квадратный двучлен во второй скобке в числителе всегда положителен, $\frac{(x-3)x(x^2+x+2)}{x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ 0) \cup$ $\cup\ (0;\ 3)$.

Ответ: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 3)$.

Пример 2. Решите неравенство $(x+1)(x-1)^2(x-4) \geqslant 0$.

Решение. $(x+1)(x-1)^2(x-4) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) \geqslant 0$, учитывая, что при $x = 1$ неравенство равно нулю, получаем, что $x \in (-\infty;\ -1] \cup \{1\} \cup [4;\ \infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -1] \cup \{1\} \cup [4;\ \infty)$.

Пример 3. Решите неравенство $(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3x - 12) \leqslant -16$.

Решение. Введем обозначение $x^2 + 3x = t$, тогда исходное неравенство запишется как $(t-2)(t-12) \leqslant -16$, $t^2 - 14t + 40 \leqslant 0$, решением которого являются $t \in [4;\ 10]$. Возвращаясь к исходной переменной, получим

$$\begin{cases} x^2 + 3x \leqslant 10, \\ x^2 + 3x \geqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-5;\ 2], \\ x \in (-\infty;\ -4] \cup [1;\ \infty), \end{cases} \qquad x \in [-5;\ -4] \cup [1;\ 2].$$

Ответ: $[-5;\ -4] \cup [1;\ 2]$.

Приведем полезную формулу для равносильной замены по знаку показательного неравенства в области определения исходного неравенства:

$$a^{y_1} - a^{y_2} \Leftrightarrow (y_1 - y_2)(a - 1).$$

Пример 4. Решите неравенство $|3^{x^2-2x} - 18| < 9$.

Решение. Заменим неравенство на равносильное $|y_1| - |y_2| \Leftrightarrow y_1^2 - y_2^2$; $(3^{x^2-2x} - 18)^2 - 9^2 < 0$, $(3^{x^2-2x} - 18 - 9)(3^{x^2-2x} - 18 + 9) < 0$, $(3^{x^2-2x} - 3^3)(3^{x^2-2x} - 3^2) < 0$, воспользуемся равносильной заменой для показательной функции, $(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 2) < 0$, $x \in (-1;\ 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3};\ 3)$.

Ответ: $(-1;\ 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3};\ 3)$.

Пример 5. Решите неравенство $(x-5)^{x^2-11x+28} \geqslant 1$.

Решение. Из определения показательной функции $x > 5$. Используя равносильную замену для показательной функции получаем $(x-6)(x^2 - 11x + 28) \geqslant 0$, $(x-6)(x-4)(x-7) \geqslant 0$, $x \in (5;\ 6] \cup [7;\ \infty)$.

Ответ: $(5;\ 6] \cup [7;\ \infty)$.

Пример 6. Решите неравенство $1 \leqslant 3^{\left|\frac{4x-3}{2x-1}\right|} \leqslant 27$.

Решение. Перепишем исходное неравенство в виде $3^0 \leqslant 3^{\left|\frac{4x-3}{2x-1}\right|} \leqslant 3^3$, $0 \leqslant \left|\frac{4x-3}{2x-1}\right| \leqslant 3$, используя равносильную замену для модуля, $\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)^2 - 3^2 \leqslant 0$, $\left(\frac{4x-3}{2x-1} - 3\right)\left(\frac{4x-3}{2x-1} + 3\right) \leqslant 0$, $\frac{x(5x-3)}{(2x-1)^2} \geqslant 0$, $x \in (-\infty;\ 0] \cup \left[\frac{3}{5};\ \infty\right) \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup \left[\frac{3}{5};\ \infty\right) \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

Пример 7. Решите неравенство $2\left(\log_{\frac{1}{2}}(4-x)\right)^2 + 3\log_{\frac{1}{2}}(x-4)^2 + 4 \leqslant 0$.

Решение. ОДЗ: $x < 4$, учитывая ОДЗ, получим

$\left(\log_{\frac{1}{2}}(4-x)\right)^2 + 3\log_{\frac{1}{2}}(4-x) + 2 \leqslant 0$, $-2 \leqslant \log_{\frac{1}{2}}(4-x) \leqslant -1$, $x \in [0;\ 2]$.

Ответ: $[0;\ 2]$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\log_2((7^{-x^2} - 3)(7^{-x^2+16} - 1)) + \log_2 \frac{7^{-x^2} - 3}{7^{-x^2+16} - 1} > \log_2(7^{7-x^2} - 2)^2.$$

Решение. ОДЗ: $(7^{-x^2} - 3)(7^{-x^2+16} - 1) > 0$,

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 7^{-x^2} < 3, \\ 7^{-x^2} < 7^{-16}, \end{array}\right. \\ 7^{-x^2} \in (0;\ 1] \text{ (из свойства показательной функции)} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < 7^{-x^2} < 7^{-16}\ (1).$$

Примем за новую переменную $t = 7^{-x^2}$, тогда исходное неравенство запишется как $\log_2((t-3)(7^{16} \cdot t - 1)) + \log_2 \frac{t-3}{7^{16} \cdot t - 1} > \log_2(7^7 \cdot t - 2)^2$, $\log_2(t-3)^2 > \log_2(7^7 \cdot t - 2)^2$ (2), применим равносильную замену ($\log_a t - \log_a y \Leftrightarrow (t-y)(a-1)$) к неравенству (2) и получим $(t-3)^2 - (7^7 \cdot t - 2)^2 > 0$, $(t(1-7^7) - 1)(t(1+7^7) - 5) > 0$, $t \in \left(\frac{1}{1-7^7};\ \frac{5}{1+7^7}\right)$. Учитывая (1), получим, что

$0 < 7^{-x^2} < 7^{-16}$, $x \in (-\infty;\ -4) \cup (4;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -4) \cup (4;\ +\infty)$.

Пример 9. Решите неравенство $9 \cdot 25^{x^2+x} - 16 \cdot 15^{x^2+x} - 25 \cdot 9^{x^2+x} \leqslant 0$.

Решение. Неравенство является однородным относительно 5^{x^2+x} и 3^{x^2+x}; пусть $t = \left(\frac{5}{3}\right)^{x^2+x}$, $t > 0$, тогда исходное неравенство $9t^2 - 16t - 25 \leqslant 0$,

$t \in \left(0; \frac{25}{9}\right]$, $\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2+x} \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^2$, $x^2 + x - 2 \leqslant 0$, $x \in [-2; 1]$.

Ответ: $[-2; 1]$.

Пример 10. Решите неравенство $9^{x^2-1} - 84 \cdot 3^{x^2-2} + 27 > 0$.

Решение. Пусть $t = 3^{x^2}$, $t \in [1; +\infty)$, тогда $t^2 - 84t + 243 > 0$, $t \in [1; 3) \cup$ $\cup (81; +\infty)$, $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$.

Пример 11. Решите неравенство $(\sqrt[3]{7})^{-31x} < \frac{1}{7} \cdot 7^{|13x^2 - 12x - 1|}$.

Решение. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{1}{13}\right] \cup [1; \infty), \\ 39x^2 - 5x - 6 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \left(-\frac{1}{13}; 1\right), \\ 39x^2 - 67x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup [1; +\infty), \\ x \in (0; 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (0; +\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (0; +\infty)$.

Пример 12. Решите неравенство $\dfrac{\log_{5^{x-7}}(x+20)}{\log_{5^{x-7}}x^2} < 1$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} 5^{x-7} \neq 1, \\ x > -20, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 7, \\ x > -20, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$ Приведем логарифмы исходного неравенства к какому-нибудь основанию, например, e, $\dfrac{\ln(x+20)\ln 5^{x-7}}{\ln 5^{x-7} \ln x^2} < 1$,

$\dfrac{\ln(x+20)}{\ln x^2} < 1$, $\dfrac{\ln(x+20) - \ln x^2}{\ln x^2} < 0$, применим равносильную замену по знаку $(\log_a t - \log_a y \Leftrightarrow (t - y)(a - 1))$ к полученному неравенству, $\dfrac{(x + 20 - x^2)}{x^2 - 1} < 0$,

$x \in (-20; -4) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (5; 7) \cup (7; +\infty)$.

Ответ: $(-20; -4) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (5; 7) \cup (7; +\infty)$.

Пример 13. Решите неравенство $3^{\log_x\left(\frac{8-12x}{x-6}\right)} > 9$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \dfrac{8-12x}{x-6} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{2}{3};\, 1\right) \cup (1;\, 6)$; $3^{\log_x\left(\frac{8-12x}{x-6}\right)} > 3^2$,

применим равносильную замену по знаку $(\log_a t - \log_a y \Leftrightarrow (t-y)(a-1))$,

$\left(\dfrac{8-12x}{x-6} - x^2\right)(x-1) > 0$, $\dfrac{(8-12x-x^3+6x^2)(x-1)}{x-6} > 0$, $\dfrac{(x-1)(x-2)^3}{x-6} < 0$,

$x \in \left(\dfrac{2}{3};\, 1\right) \cup (2;\, 6)$.

Ответ: $\left(\dfrac{2}{3};\, 1\right) \cup (2;\, 6)$.

Пример 14. Решите неравенство $\log_{x^2}\dfrac{2x}{|x-4|} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x \neq \pm 1, \\ \dfrac{2x}{|x-4|} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x > 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$ $\log_{x^2}\dfrac{2x}{|x-4|} \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 4, \\ \dfrac{\frac{2x}{x-4} - x}{x^2-1} \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 4, \\ \dfrac{\frac{2x}{4-x} - x}{x^2-1} \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 4, \\ \dfrac{x^2-6x}{(x-4)(x-1)(x+1)} \leqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 4, \\ \dfrac{x^2-2x}{(x-4)(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (4;\, 6), \\ x \in (0;\, 1) \cup [2;\, 4). \end{array}\right.$$

Ответ: $(0;\, 1) \cup [2;\, 4) \cup (4;\, 6]$.

Пример 15. Решите неравенство $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_3 \log_{0,6}(x^2-0,4)} < 1$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 0,4 > 0, \\ \log_{0,6}(x^2-0,4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{1,4};\, \dfrac{-2}{\sqrt{10}}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{10}};\, \sqrt{1,4}\right)$;

$\log_3\log_{0,6}(x^2-0,4) > 0$, $\log_{0,6}(x^2-0,4) > 1$, $x^2 - 0,4 < 0,6$, $x^2 - 1 < 0$, с учетом

ОДЗ получаем ответ: $x \in \left(-1;\, \dfrac{-2}{\sqrt{10}}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{10}};\, 1\right)$.

Ответ: $\left(-1;\, \dfrac{-2}{\sqrt{10}}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{10}};\, 1\right)$.

Пример 16. Решите неравенство $\log_{|x-2|}(4+4x-3x^2) \leqslant 2$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x - 2 \neq 1, \\ x - 2 \neq -1, \\ x \neq 2, \\ 4 + 4x - 3x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{-2}{3};\, 1\right) \cup (1;\, 2)$.

$\log_{|x-2|}(4+4x-3x^2) \leqslant \log_{|x-2|}(x-2)^2$, $((4+4x-3x^2)-(x-2)^2)(|x-2|-1) \leqslant$ $\leqslant 0$, $(4+4x-3x^2-x^2+4x-4)((x-2)^2-1) \leqslant 0$, $(-4x^2+8x)(x-3)(x-1) \leqslant 0$, $x(x-2)(x-3)(x-1) \geqslant 0$, $x \in \left(\frac{-2}{3}; 0\right] \cup (1; 2)$.

Ответ: $\left(\frac{-2}{3}; 0\right] \cup (1; 2)$.

Пример 17. Решите неравенство $\log_{|x-3|}(16-40x+25x^2) \leqslant 2$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x \neq \frac{4}{5}, \\ x \neq 3, \\ x \neq 4, \\ x \neq 2. \end{cases}$ $\log_{|x-3|}(5x-4)^2 \leqslant \log_{|x-3|}(x-3)^2$, $((5x-4)^2-(x-3)^2)(|x-3|-1) \leqslant 0$, $(5x-4-x+3)(5x-4+x-3)\,(x-3-1)(x-3-1) \leqslant 0$, $(4x-1)(6x-7)(x-4)(x-2) \leqslant 0$, $x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}; \frac{7}{6}\right] \cup (2; 3) \cup (3; 4)$.

Ответ: $\left[\frac{1}{4}; \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}; \frac{7}{6}\right] \cup (2; 3) \cup (3; 4)$.

Пример 18. Решите неравенство $x^{\log_8(9x)} \leqslant 3^{\frac{1}{\log_3 2}}$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 3: $\log_8(9x)\log_3 x \leqslant \frac{1}{\log_3 2}$, $\frac{\log_3(9x)\log_3 x}{3\log_3 2} \leqslant \frac{1}{\log_3 2}$, $(\log_3 9 + \log_3 x)\log_3 x \leqslant 3$, пусть $t = \log_3 x$, $t^2 + 2t - 3 \leqslant 0$, $t \in [-3; 1]$, $\log_3 x \in [-3; 1]$, $x \in \left[\frac{1}{27}; 3\right]$.

Ответ: $\left[\frac{1}{27}; 3\right]$.

Пример 19. Решите неравенство $\frac{\ln(5x^2+1)}{\ln(2x+1)} \leqslant 2$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x \neq 0. \end{cases}$ $\frac{\ln(5x^2+1) - 2\ln(2x+1)}{\ln(2x+1)} \leqslant 0$,

$\frac{(5x^2+1)-(2x+1)^2}{2x} \leqslant 0$, $\frac{x^2-4x}{2x} \leqslant 0$, $x \in \left(\frac{-1}{2}; 0\right) \cup (0; 4]$.

Ответ: $\left(\frac{-1}{2}; 0\right) \cup (0; 4]$.

Дополнительные задания

1. Решите неравенство $(x^2 - 2x - 6)(x^2 - 2x - 7)$.

2. Решите неравенство $\frac{2}{3x+7} \leqslant \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$.

3. Решите неравенство $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{2}{x+1}$.

4. Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} - 1 \leqslant 0$.

5. Решите неравенство $\dfrac{4 - x}{x^2 - 7x + 12} \geqslant 1$.

6. Решите неравенство $\dfrac{3x^2 - 6x}{2x - 4} \geqslant 0$.

7. Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} \leqslant 2x + 1$.

8. Решите неравенство $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x} \geqslant 0$.

9. Решите неравенство $(3x - 6)(x + 2)(x^2 + 2x + 2) \leqslant 0$.

10. Решите неравенство $\dfrac{(x+1)^2(x-2)}{x-3} \leqslant 0$.

11. Решите неравенство $\dfrac{x + 11}{3x - 1} > \dfrac{6}{x}$.

12. Решите неравенство $\dfrac{2x + 10}{3x + 15} + \dfrac{x + 8}{3x - 3} > 0$.

13. Решите неравенство $\dfrac{x^3 + 125}{5 + x} > 0$.

14. Решите неравенство $x^2 + 4x + \dfrac{4}{x^2 + 4x + 3} < 0$.

15. Решите неравенство $\dfrac{(9 - x^2)(5 - x)}{x - 3} \leqslant 0$.

16. Решите неравенство $\dfrac{(-25 + x^2)(-1 + x)}{x^2 + 7x + 10} \leqslant 0$.

17. Решите неравенство $\dfrac{3(x^2 - 4)}{x - 2} \geqslant 0$.

18. Решите неравенство $6 - x \geqslant \dfrac{4}{x - 2}$.

19. Решите неравенство $\log_{3x-5}(x-1)^2 < 1$.

20. Решите неравенство $\log_x(\log_2(4^x - 2)) \geqslant 1$.

21. Решите неравенство $4^{\log_5\left(\frac{x-1}{x+3}\right)} < \dfrac{1}{16}$.

День 21

Задание С3 (окончание)

Иррациональные неравенства

Формулы для решения неравенств:

1. $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$

2. $\sqrt{f(x)} \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant (g(x))^2, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$

3. $\sqrt{f(x)} \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant (g(x))^2, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Часто встречающиеся равносильные преобразования на области существования исходного неравенства:

4. Знак выражения $\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}$ совпадает со знаком выражения $y_1 - y_2$, где $y_1, y_2 \geqslant 0$, или $\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} \Leftrightarrow y_1 - y_2$.

5. Знак выражения $|y_1| - \sqrt{y_2}$, где $y_2 \geqslant 0$ совпадает со знаком выражения $y_1^2 - y_2$, или $|y_1| - \sqrt{y_2} \Leftrightarrow y_1^2 - y_2$.

6. Знак выражения $\sqrt{y_1}$ совпадает со знаком выражения y_1 или $\sqrt{y_1} \Leftrightarrow y_1$, где $y_1 \geqslant 0$.

Примеры решения неравенств.

Пример 1. Решите неравенство $|x + 3| - \sqrt{x^2 - 2x - 3} \geqslant 0$.

Решение. ОДЗ: $x \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$. Заменим модуль $|x + 3| = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$, $\sqrt{x^2 + 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 2x - 3} \geqslant 0$ (1). Так как знак выражения $\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}$ совпадает со знаком выражения $y_1 - y_2$, где $y_1, y_2 \geqslant 0$ (формула 4), то заменим неравенство (1) совпадающим по знаку выражением $x^2 + 6x + 9 - x^2 + 2x + 3 \geqslant 0$, $8x + 12 \geqslant 0$, $x \geqslant \frac{-3}{2}$. Учитывая ОДЗ, получим ответ.

Ответ: $\left[-\frac{3}{2}; -1\right] \cup [3; \infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $(\sqrt{3x+5} - \sqrt{x+3})(|x-4| - x^2 - 2) < 0$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} [-3; +\infty), \\ \left[\dfrac{-5}{3}; +\infty\right). \end{cases}$ Так как знак выражения $y_1 - y_2$ при $y_1, y_2 \geqslant 0$ совпадает со знаком $(y_1)^2 - (y_2)^2$, заменим выражение $|x-4| - x^2 - 2$ на совпадающее с ним по знаку $(x-4)^2 - (x^2+2)^2$. Учитывая результат предыдущего примера, исходное неравенство запишется в виде $(2x+2)((x-4)^2 - (x^2+2)^2) < 0$, $(x+1)(x-4-x^2-2)(x-4+x^2+2) < 0$, $(x+1)(x^2-x+6) \times (x^2+x-2) > 0$, $x \in (-2; -1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(-2; -1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{7-2x}} > 0$.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases} x \in \left[\dfrac{-4}{3}; +\infty\right), \\ x \in \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right), \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{7}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$. $\dfrac{3x+4-2x-1}{\sqrt{7-2x}} > 0$, $x > -3$.

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$.

Пример 4. Решите неравенство $\sqrt{25x|x-2|+9} \geqslant 5x-3$.

Решение. $\sqrt{25x|x-2|+9} \geqslant 5x-3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \geqslant \dfrac{3}{5}, \\ 25x^2 - 50x + 9 \geqslant 25x^2 - 30x + 9; \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{3}{5}, \\ 50x - 25x^2 + 9 \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant \dfrac{3}{5}, \\ x < 2, \\ 50x - 25x^2 + 9 \geqslant 25x^2 - 30x + 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x \in \left[\dfrac{5-\sqrt{34}}{5}; \dfrac{3}{5}\right), \\ x \in \left[\dfrac{3}{5}; \dfrac{8}{5}\right] \end{array}\right. x \in \left[\dfrac{5-\sqrt{34}}{5}; \dfrac{8}{5}\right].$$

Ответ: $\left[\dfrac{5-\sqrt{34}}{5}; \dfrac{8}{5}\right]$.

Пример 5. Решите неравенство

$$\left(x+\frac{7}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-10x+25}-1}{\sqrt{10-x}-1}\right)^2 \geqslant 8\left(\frac{\sqrt{x^2-10x+25}-1}{\sqrt{10-x}-1}\right)^2.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \leqslant 10, \\ x \neq 9. \end{cases}$ Запишем исходное неравенство в виде $\left(x+\frac{7}{x}-\right.$ $\left.-8\right)\left(\frac{|x-5|-1}{\sqrt{10-x}-1}\right)^2 \geqslant 0$, $\left(\frac{x^2-8x+7}{x}\right)\cdot\left(\frac{|x-5|-1}{\sqrt{10-x}-1}\right)^2 \geqslant 0$, $x \in (0;\ 1] \cup [7;\ 9) \cup$ $\cup\ (9;\ 10] \cup \{6\} \cup \{4\}$.

Ответ: $(0;\ 1] \cup [7;\ 9) \cup (9;\ 10] \cup \{6\} \cup \{4\}$.

Пример 6. Решите неравенство $\frac{(x-1)\sqrt{x-1}+1}{x-2} < \sqrt{x-1}+\frac{1}{2}$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$ Пусть $t=\sqrt{x-1}$, $\frac{t^3+1}{t^2-1} < t+\frac{1}{2}$,

$\frac{2t^2-2t+2-2t^2+2t-t+1}{2(t-1)} < 0$, $\frac{t-3}{t-1} > 0$, $t \in [0;\ 1) \cup [3;\ +\infty)$, $x \in [1;\ 2) \cup$ $\cup\ (10;\ +\infty)$.

Ответ: $[1;\ 2) \cup (10;\ +\infty)$.

Пример 7. Решите неравенство $\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \leqslant x\sqrt{x}+27$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \neq 9. \end{cases}$ Пусть $t=\sqrt{x}$, $\frac{t^2-9}{t-3} \leqslant t^3+27$, $(t+3)(t^2-3t+8) \geqslant$ $\geqslant 0$, $t \geqslant 0$. Учитывая ОДЗ, получим $x \in [0;\ 9) \cup (9;\ +\infty)$.

Ответ: $[0;\ 9) \cup (9;\ +\infty)$.

Пример 8. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2x^2-3x-5}}{\sqrt{x-2}} < \sqrt{x+1}$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant \frac{5}{2}, \\ x \leqslant -1, \end{array}\right. \\ x \geqslant -1, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5}{2};\ +\infty\right)$. $\frac{\sqrt{2x^2-3x-5}-\sqrt{x^2-x-2}}{\sqrt{x-2}} < 0$,

воспользуемся равносильными переходами по знаку ($\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2} \Leftrightarrow y_1-y_2$), ($\sqrt{y_1} \Leftrightarrow y_1$), $\frac{x^2-2x-3}{x-2} < 0$, учитывая ОДЗ, $x \in \left[\frac{5}{2};\ 3\right)$.

Ответ: $\left[\frac{5}{2};\ 3\right)$.

Пример 9. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2+4x+4} \leqslant \sqrt{2(x^2+4x+6)}.$$

Решение. Пусть $t=(x+2)^2$, $\sqrt{t+4}+\sqrt{t} \leqslant \sqrt{2(t+2)}$, $2t+4+2\sqrt{(t+4)t} \leqslant$ $\leqslant 2t+4$, $t=0$, $x=-2$.

Ответ: $\{-2\}$.

Пример 10. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x+2}-|x-2|}{\sqrt{8-x}-|x-2|} \geqslant 1.$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \leqslant 8, \\ x \neq 4, \\ x \neq -1. \end{cases}$ $\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{8-x}-\sqrt{x^2-4x+4}} \geqslant 1,$ $\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{8-x}}{\sqrt{8-x}-\sqrt{x^2-4x+4}} \geqslant 0,$

$\dfrac{x+2-8+x}{8-x-x^2+4x-4} \geqslant 0,$ $x \in [-2; -1) \cup [3; 4).$

Ответ: $[-2; -1) \cup [3; 4).$

Неравенства с модулем

Напомним основные формулы, необходимые для решения неравенств, содержащих модуль под знаком аргумента или функции.

1. $f(|x|) < g(|x|) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ f(x) < g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ f(-x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

2. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$

3. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{array}\right.$

Когда неравенство можно привести к виду $\dfrac{f_1 \cdot\ f_2 \cdot\ \ldots\ \cdot\ f_n}{g_1 \cdot\ g_2 \cdot\ \ldots\ \cdot\ g_m} = 0$, то можно использовать равносильный переход по знаку на области ОДЗ:

4. $|y| \Leftrightarrow y^2.$

5. $|y_1| - |y_2| \Leftrightarrow (y_1)^2 - (y_2)^2.$

Рассмотрим некоторые примеры решения неравенств.

Пример 1. Решите неравенство $|x+3| < \dfrac{1}{x+3}.$

Решение. $|x+3| < \dfrac{1}{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 < \dfrac{1}{x+3}, \\ x+3 > \dfrac{-1}{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+3)^2-1}{x+3} < 0, \\ \dfrac{(x+3)^2+1}{x+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+2)(x+4)}{x+3} < 0, \\ \dfrac{x^2+6x+10}{x+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -4) \cup (-3; -2), \\ x \in (-3; \infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3; -2).$

Ответ: $(-3; -2).$

Пример 2. Решите неравенство $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geqslant 2.$

Решение. ОДЗ: $x \neq 3$; 2. 1) при $x > 3$ $\dfrac{x-3}{x^2-5x+6} - 2 \geqslant 0,$ $\dfrac{2(x-3)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{(x-3)(x-2)} \leqslant 0,$

$x \in \varnothing$. 2) при $x < 3$ $\dfrac{-x+3}{x^2-5x+6} - 2 \geqslant 0$, $\dfrac{2(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(x-2)(x-3)} \leqslant 0$, $x \in \left[\dfrac{3}{2}; 3\right)$.

Ответ: $\left[\dfrac{3}{2}; 3\right)$.

Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{|x-4|-2-x^2}{|2+x|-|x-6|} > 0$.

Решение. Запишем исходное неравенство в виде $\dfrac{|x-4|-(2+x^2)}{|2+x|-|x-8|} > 0$, заменим числитель и знаменатель на равносильные $\dfrac{(x-4)^2-(2+x^2)^2}{(2+x)^2-(x-8)^2} > 0$,

$\dfrac{(-x^2+x-6)(x^2+x-2)}{10(2x-6)} > 0$, $\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-3)} < 0$, $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 3)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1; 3)$.

Дополнительные задания

22. Решите неравенство $\sqrt{x^2-5x+6} \leqslant \sqrt{2x-4}$.

23. Решите неравенство $|x-6| - \sqrt{6-x} \geqslant 0$.

24. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{2x^2-18}-\sqrt{x^2+3x}}{7-x} \geqslant 0$.

25. Решите неравенство

$$\left(x+\frac{9}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{13-x}-1}\right)^2 \geqslant 10\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{13-x}-1}\right)^2.$$

26. Решите неравенство $\sqrt{x^5-2x^3+x} \geqslant |x^2-1|$.

27. Решите неравенство $\dfrac{(x-2)\sqrt{x-2}+1}{x-3} < \sqrt{x-2} + \dfrac{2}{3}$.

28. Решите неравенство $\dfrac{2x^2}{\sqrt{x+3}} + x \geqslant \sqrt{x+3}$.

29. Решите неравенство $\sqrt{-2x^2+6x+36} - 6 \leqslant x^2 - 3x$.

30. Решите неравенство $\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 \leqslant 3x + 7$.

31. Решите неравенство $\dfrac{-\sqrt{2x+12}+|x+2|}{-\sqrt{12+4x}+|x+3|} \geqslant 0$.

32. Решите неравенство $|x+2| \leqslant \dfrac{1}{x+2}$.

33. Решите неравенство $\dfrac{x+3}{|x+3|} \leqslant \dfrac{1}{x+3}$.

34. Решите неравенство $\big||x-1|-2x\big| \leqslant x+1$.

35. Решите неравенство $|-2x+4| \geqslant x-1$.

День 22

Задание С4

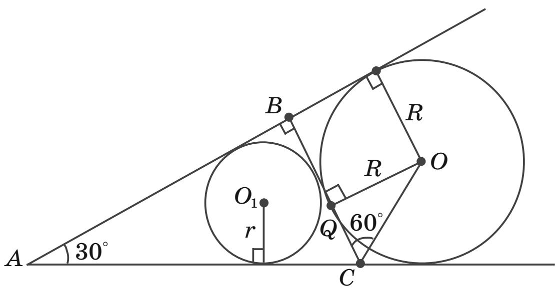
Задания С4 относятся к разделу «Геометрия» и вызывают большие трудности при решении. Разбору этих заданий посвятим два занятия. Рассмотрим задачи, в которых встречаются различные геометрические фигуры.

1. Треугольники

1.1. Прямоугольные треугольники

Основные формулы для решения заданий даны к заданиям В4.

Рассмотрим некоторые примеры.

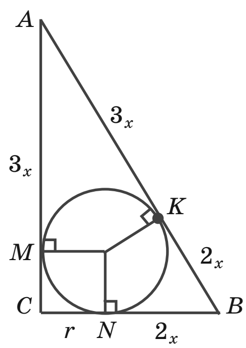


Пример 1. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 30°, а сторона AB на 6 ед. меньше полупериметра. Найдите радиус окружности, касающейся стороны BC и прямых AB и AC.

Решение. Таких окружностей — две: вневписанная с центром O и вписанная с центром в O_1. Отрезки касательных $BT = BQ = \dfrac{AC + BC - AB}{2} = \dfrac{AC + BC + AB}{2} - AB = 6 \Rightarrow R_O = 6$.

Отрезки касательных $QC = CM = 2\sqrt{3}$ из треугольника QOC. $BC = 6 + 2\sqrt{3}$; $AC = 2BC = 2(6 + 2\sqrt{3}) = 4(3 + \sqrt{3})$; $AB = BC \cdot \sqrt{3} = (6 + 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = 6(\sqrt{3} + 1)$. $r_{O_1} = \dfrac{AB + BC - AC}{2} = \dfrac{6\sqrt{3} + 6 + 6 + 2\sqrt{3} - 12 - 4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: 6, $2\sqrt{3}$.



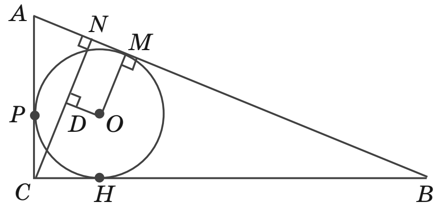
Пример 2. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36, вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2 : 3. Найдите длину гипотенузы.

Решение. Пусть K — точка касания вписанной окружности с гипотенузой. Обозначим отрезки касательных $AM = AK = 3x$, $BN = BK = 2x$. Периметр $AC + CB + AB = 3x + r + 2x + r + 5x = 36$.

Получим уравнение $r + 5x = 18$ или $r = 18 - 5x$. $AC = 3x + r = 18 - 2x$, $CB = r + 2x = 18 - 3x$, $AB = 5x$. Теперь используем формулу теоремы Пифагора: $AB^2 = AC^2 + CB^2$, $(18 - 3x)^2 + (18 - 2x)^2 = 25x^2$, $x = 3$. Гипотенуза $AB = 5x = 15$.

Ответ: 15.

Пример 3. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите расстояние от высоты, опущенной из вершины прямого угла, до центра вписанной окружности.



Решение. Искомый перпендикуляр $OD = MN$, как противоположные стороны прямоугольника $ODMN$. По теореме Пифагора найдем гипотенузу AB: $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 15^2 + 20^2 = 625$, $AB = 25$.

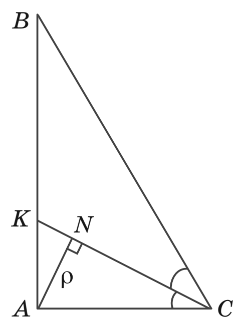
По формуле для пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике $CB^2 = BN \cdot AB$, $400 = BN \cdot 25$, $BN = 16$, $AN = AB - BN = 25 = 16 = 9$. Отрезки касательных равны: $AP = AM$, $BH = BM$, $PC = CH = r$.

По формуле для нахождения радиуса вписанной в прямоугольный треугольник окружности: $r = \dfrac{AC + CB - AB}{2} = \dfrac{15 + 20 - 25}{2} = 5$. $BM = BH = BC - CH = BC - r = 20 - 5 = 15$, $MN = BN - BM = 16 - 15 = 1$.

Ответ: 1.

Пример 4. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $BC = 20$, катет $AB = 16$. Найдите расстояние от вершины A до биссектрисы угла C.

Решение. Проведем биссектрису BK. Используя свойство биссектрисы $\dfrac{BK}{KA} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{5}{3}$, $BK + AK = 16$, вычислим $BK = 10$, $AK = 6$.



По формуле для вычисления длины биссектрисы $KC^2 = AC \cdot CB - AK \cdot KB = 12 \cdot 20 - 6 \cdot 10 = 180$, $KC = 6\sqrt{5}$. Искомое расстояние $AN = \dfrac{AK \cdot\ DC}{KC} = \dfrac{6 \cdot\ 12}{6\sqrt{5}} = \dfrac{12}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\dfrac{12}{\sqrt{5}}$.

1.2. Произвольные треугольники

Сумма углов треугольника равна 180°.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке и эта точка является центром вписанной окружности. При этом перпендикуляр, опущенный из центра вписанной окружности на сторону, является радиусом этой окружности.

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке и эта точка является центром описанной окружности.

Центр описанной окружности лежит внутри треугольника, если треугольник остроугольный, и вне треугольника, если он тупоугольный. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. В этом случае радиус описанной окружности равен медиане, проведенной к гипотенузе, и половине гипотенузы.

Здесь и далее a, b, c — стороны треугольника; α, β, γ — противолежащие им углы; R, r — радиусы описанной около треугольника и вписанной в треугольник окружностей; p – полупериметр треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

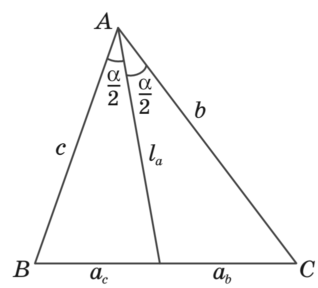
Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$.

Площадь треугольника: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, $S = \frac{1}{2}ch_c$, $S = \frac{abc}{4R}$,

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $S = pr$.

Пусть O — точка пересечения биссектрис, тогда $\frac{AO}{OL} = \frac{c+b}{a}$ и $\frac{BO}{ON} = \frac{a+c}{b}$.

Теорема о биссектрисе. Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{a_c}{a_b} = \frac{c}{b}$.



Формулы длины биссектрисы: $l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$,

$l_a^2 = bc - a_b a_c$.

Формула длины медианы: $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$.

Формула Эйлера: $OO_1 = \sqrt{R^2 - 2rR}$, где OO_1 — расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

Некоторые полезные факты

Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют треугольник, биссектрисы которого лежат на этих высотах.

Во всяком непрямоугольном треугольнике произведение расстояний от ортоцентра до концов высоты есть величина постоянная для всех высот данного треугольника.

Точка пересечения продолжения биссектрисы, проведенной из вершины треугольника, с описанной окружностью равноудалена от двух других вершин и центра вписанной окружности.

Если BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC, то треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $|\cos A|$.

Если BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC, O — центр описанной окружности, то отрезок OA перпендикулярен отрезку B_1C_1.

Расстояние от вершины треугольника до ортоцентра вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до противоположной данной вершине стороны.

Точки, симметричные ортоцентру треугольника ABC относительно прямых, содержащих его стороны, лежат на описанной окружности треугольника ABC.

Биссектриса угла между неравными сторонами треугольника делит угол между радиусом описанной окружности и высотой, проведенными из общей вершины указанных сторон пополам.

Медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

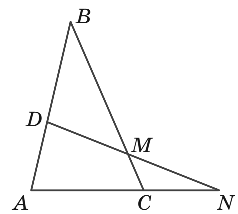
Три медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников.

1.3. Подобие треугольников

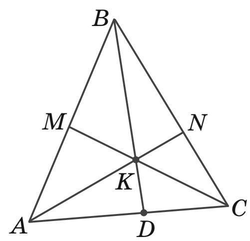
Два треугольника подобны, если у них равны все три угла, а соответствующие стороны пропорциональны.

Признаки подобия треугольников: 1) если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны; 2) если один угол первого треугольника равен углу второго треугольника, а прилежащие к этим углам стороны треугольников пропорциональны, то треугольники подобны; 3) если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.

Теорема Менелая: если треугольник пересекается секущей, то имеет место следующее соотношение: $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{AN} = 1.$



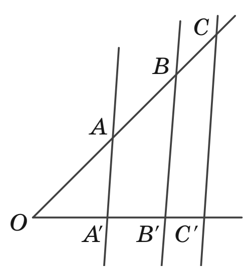
Теорема Чевы. Если в треугольнике ABC три прямые пересекаются в одной точке, то верно соотношение $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1.$



Теорема Фалеса. Если при пересечении сторон угла параллельными прямыми на одной стороне угла отсекаются равные между собой отрезки, то и на другой стороне угла отсекаются также равные между собой отрезки.

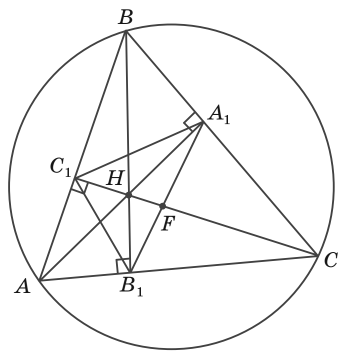
Обобщенная теорема Фалеса. При пересечении сторон угла параллельными прямыми на сторонах угла отсекаются пропорциональные отрезки.

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$



Рассмотрим несколько примеров.

Пример 5. В остроугольном треугольнике ABC со сторонами $AB = 18$, $BC = 12$, $AC = 15$ проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, которые пересекаются в точке H. Найдите отношение $\dfrac{A_1F}{FB_1}$, если точка F является точкой пересечения AA_1 и CC_1.



Решение. В треугольнике $C_1A_1B_1$ отрезки AA_1, BB_1, CC_1 являются биссектрисами. По свойству биссектрисы $\dfrac{B_1F}{FA_1} = \dfrac{C_1B_1}{C_1A_1}$.

Сначала по теореме косинусов найдем косинусы углов треугольника ABC

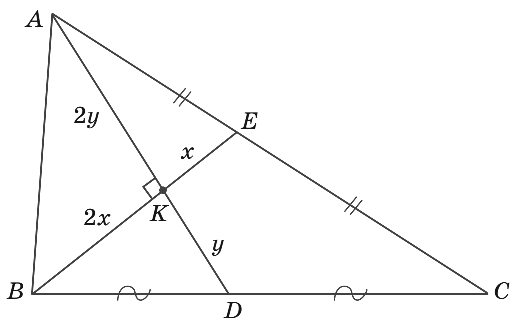
$\cos C = \dfrac{1}{8}$, $\cos B = \dfrac{9}{16}$, $\cos A = \dfrac{3}{4}$.

Найдем стороны треугольника $C_1A_1B_1$: $A_1B_1 =$

$= AB \cdot \cos C = \dfrac{9}{4}$; $C_1B_1 = CB \cdot \cos A = \dfrac{135}{16}$; $C_1A_1 = CA \cdot \cos B = 9$, $\dfrac{A_1F}{FB_1} = \dfrac{\frac{135}{16}}{9} = \dfrac{15}{16}$.

Ответ: $\dfrac{15}{16}$.

Пример 6. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются под прямым углом, $AC = 3$, $BC = 4$. Найдите AB.



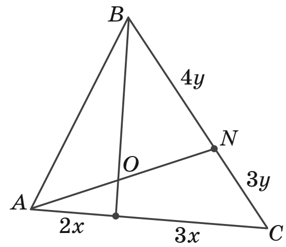
Решение. Обозначим переменой x длину отрезка KE, переменной y длину KD. По свойству медиан $BK = 2x$, $AK = 2y$. Использовав теорему Пифагора для треугольников AKE и AKB, получим систему: $\begin{cases} AK^2 + KE^2 = AE^2, \\ BK^2 + KD^2 = 4, \end{cases}$

$\begin{cases} 4y^2 + x^2 = \dfrac{9}{4}, \\ 4x^2 + y^2 = 4, \end{cases}$ сложив уравнения, получим $5y^2 + 5x^2 = \dfrac{25}{4}$ или $x^2 + y^2 =$

$= \dfrac{5}{4}$. $AB = x^2 + y^2 = 5$, $AB = \sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

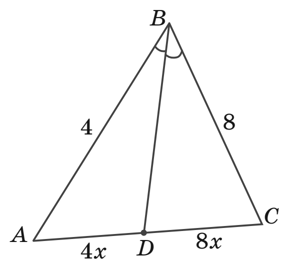
Пример 7. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки K и N так, что $CK : KA = 2 : 3$, $CN : NB = 3 : 4$. В каком отношении точка пересечения отрезков AN и BK делит отрезок KB?



Решение. Обозначим отрезки $BN = 4y$, $NC = 3y$, $AK = 2x$, $KC = 3x$. По теореме Менелая для треугольника KBC выполняется соотношение: $\frac{NC}{NB} \cdot \frac{BO}{OK} \cdot \frac{AK}{AC} = 1$ или $\frac{3}{4} \cdot \frac{BO}{OK} \cdot \frac{2}{5} = 1$. Следовательно, $\frac{BO}{OK} = \frac{10}{3}$.

Ответ: 10 : 3.

Пример 8. Дан треугольник со сторонами 4, 8, 9. Найдите длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.



Решение. Пусть стороны $AB = 4$, $BC = 8$, $AC = 9$. По свойству биссектрисы $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Можем составить систему:

$$\begin{cases} \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}, \\ AD + DC = 9. \end{cases}$$ Решив ее, получим $AD = 3$, $DC = 6$.

Теперь можем воспользоваться формулой для нахождения длины биссектрисы: $l_a^2 = bc - a_b a_c$; $BD^2 = AB \cdot DC - AD \cdot DC = 32 - 18 = 14$; $BD = \sqrt{14}$.

Ответ: $\sqrt{14}$.

Дополнительные задания

1. В прямоугольном треугольнике катеты равны 6 и 8. Из вершины прямого угла проведена высота CD. Определите радиусы вписанных в треугольники ACD и CDB окружностей.

2. Прямоугольный треугольник ABC (угол $C = 90^\circ$) вписан в окружность. Касательная, проведенная к окружности в точке C, пересекает прямую AB в точке D, $CD = 10$. Из вершины прямого угла проведена высота CH, которая равна 6. Определите отрезок HB.

3. Прямоугольный треугольник ABC (угол $C = 90^\circ$) вписан в окружность. Касательная, проведенная к окружности в точке C, пересекает прямую AB в точке D, $CD = 10$. Из вершины прямого угла проведена высота CH, которая равна 6. Определите отрезок секущей вне окружности DA.

4. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса прямого угла C делит гипотенузу на отрезки 3 и 4. Найдите площадь треугольника ABC.

5. В прямоугольном треугольнике ABC сумма катетов равна 14, а разность описанной и вписанной окружностей равна 3. Определите все стороны треугольника ABC.

6. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CH, равная 6, отрезок AH равен 3. В треугольнике AHC проведена биссектриса HE, а в треугольнике CHB проведена биссектриса угла H — HD. Определите длину ED.

7. В прямоугольном треугольнике ABC угол $C = 90^\circ$, угол $A = 60^\circ$. Из вершины прямого угла проведена медиана CM. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O. Найдите угол между OM и CO.

8. В прямоугольном треугольнике ABC угол $C = 90^\circ$, $AC = 6$, $CB = 8$. Из вершины прямого угла проведена медиана CM. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O. Найдите площадь треугольника COM.

9. В прямоугольном треугольнике ABC угол $C = 90^\circ$, $AC = 6$, $CB = 8$. Из вершины прямого угла проведена высота CH. В треугольнике AHC проведена биссектриса угла C — CD. Найдите длину отрезка DH.

10. В прямоугольном треугольнике ABC угол $C = 90^\circ$, $AC = 6$, $CB = 8$. Из вершины прямого угла проведена высота CH. В треугольнике AHC проведена биссектриса угла C — CD, а в треугольнике HBC проведена биссектриса угла C — CE. Найдите длину отрезка DE.

11. В прямоугольном треугольнике ABC угол $C = 90^\circ$, угол $A = 60^\circ$. Из вершины прямого угла проведена медиана CM. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O. Найдите угол между OM и OB.

12. В равнобедренный треугольник ($AB = BC$) вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки длиной 4 и 6, считая от вершины. Определите радиус вписанной окружности.

13. В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны равны 10. Основание AC равно 12. Определите радиус круга, касающегося боковой стороны в точке основания высоты, проведенной к этой боковой стороне, и проходящего через середину AC.

14. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает сторону AB в точке K и сторону BC в точке P. Отрезок $KB = \sqrt{5}$, $AK = 2\sqrt{5}$. Найдите отрезок BP, если угол $PAC = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{15}$, а угол $KCA = \arcsin\frac{1}{3}$.

15. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает сторону AB в точке M и сторону BC в точке N. Отрезок $MB = 1$, $BN = \frac{5}{4}$. Найдите отрезок AM, если угол $NAC = \arcsin\frac{1}{3}$, а угол $MCA = \arcsin\frac{1}{2}$.

16. В треугольник ABC вписана окружность. Точки касания делят сторону CB на отрезки 3 и 5, считая от вершины C. Угол A равен $\arccos\frac{3}{5}$. Определите площадь треугольника ABC.

17. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Точки A_2 и B_2 являются точками пересечения продолжения высот с описанной около треугольника ABC окружностью. Высоты пересекаются в точке H. Отрезок $AH = 9$, $HA_1 = 2$, $BH = 6$. Найдите радиус вписанной в треугольник AHB_2 окружности.

18. Центр вписанной в треугольник ABC окружности делит биссектрису угла B на части 10 и 5, считая от вершины B, а биссектрису угла A на отрезки 3 и 1. Периметр треугольника ABC равен 36. Определите стороны треугольника.

19. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Точки A_2 и B_2 являются точками пересечения продолжения высот с описанной около треугольника ABC окружностью. Высоты пересекаются в точке H. Отрезок $AH = 9$, $HA_1 = 2$, $BH = 6$. Найдите отношение площади треугольника AHB_2 к площади треугольника BHA_2.

20. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H так, что $C_1H : HC = 1 : 2$, $\operatorname{tg} A = 2$. Найдите $\operatorname{tg} B$.

21. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H так, что $AH = 6$, $HA_1 = 3$, $AC = 10$. Найдите радиус описанной около треугольника C_1BA_1 окружности.

22. Центр вписанной в треугольник ABC окружности делит биссектрису угла B на части 9 и 5, считая от вершины B. Сторона AC равна 15, а разность двух других сторон равна 1. Определите радиус вписанной в треугольник окружности.

23. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Угол между высотой AA_1 и стороной AB равен $\arcsin\frac{3}{5}$. Отрезок, соединяющий основания высот $A_1C_1 = \frac{24}{5}$. Определите площадь круга, описанного около треугольника ABC.

24. Дан треугольник ABC, AM – биссектриса угла A. Стороны $AB = 18$, $AC = 15$. Около треугольника AMC проведена окружность, которая пересекает AB в точке L так, что $LB = 11$. Определите сторону треугольника BC.

25. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Точки A_2 и B_2 являются точками пересечения продолжения высот с описанной около треугольника ABC окружностью. Найдите длину A_2B_2, если $AB = 10$, угол $C = \arcsin\frac{3}{5}$.

26. В остроугольном треугольнике ABC, сторона AB которого равна 5, проведены высоты AA_1 и BB_1. Определите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $A_1B_1 = 3$.

27. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Точки A_2 и B_2 являются точками пересечения продолжения высот с описанной около треугольника ABC окружностью. Высоты пересекаются в точке H. Отрезок $AH = 9$, $HA_1 = 2$, $BH = 6$. Найдите площадь треугольника AHB_2.

28. В остроугольном треугольнике ABC со сторонами $AB = 18$, $BC = 12$, $AC = 15$ проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, которые пересекаются в точке H. Найдите отношение $\frac{HF}{FC}$, если точка F является точкой пересечения A_1B_1 с CC_1.

29. В остроугольном треугольнике ABC со сторонами $AB = 18$, $BC = 12$, $AC = 15$ проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, которые пересекаются в точке H. Найдите отношение $\frac{A_1F}{FB_1}$, если точка F является точкой пересечения A_1B_1 с CC_1.

День 23

Задание C4 (окончание)

2. Четырехугольники

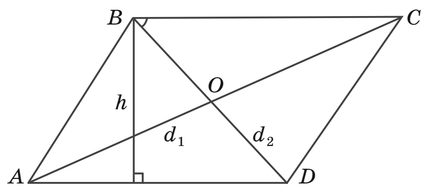
2.1. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, противолежащие стороны которого попарно параллельны.

Признаки параллелограмма:

четырехугольник является параллелограммом, если противоположные стороны попарно равны, или противоположные углы попарно равны, или диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, или две противоположные стороны равны и параллельны.

Прямоугольник — параллелограмм с прямыми углами. У прямоугольника диагонали равны.



Площадь параллелограмма: $S = a \cdot h = ab\sin BAD = \frac{1}{2}d_1d_2\sin AOB$, где a, h — основание и высота параллелограмма, d_1 и d_2 — диагонали.

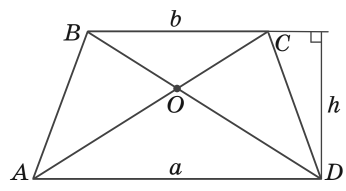
У параллелограмма сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.

Ромб — параллелограмм с равными сторонами. У ромба диагонали перпендикулярны и являются биссектрисами углов. Площадь ромба: $S = \frac{1}{2}d_1d_2$, где d_1, d_2 — диагонали ромба.

Квадрат — параллелограмм с прямыми углами и равными сторонами (частный случай прямоугольника и ромба).

2.2.Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны. Параллельные стороны называются основаниями трапеции, две другие — боковыми сторонами. Если боковые стороны равны, то трапеция называется *равнобедренной* (равнобокой).



Для трапеции верно: средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме.

Площадь трапеции равна $S = \frac{1}{2}(a + b)h$.

У равнобедренной трапеции углы при основании равны и диагонали равны.

Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника, два из которых подобны (AOD и COB), а два других имеют одинаковую площадь ($S_{AOB} = S_{COD}$).

Замечательное свойство трапеции: точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой. Если через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям, то отрезок прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции, равен $\frac{2ab}{a+b}$.

Если трапеция разделена прямой, параллельной ее основаниям, равным a и b, на две равновеликие трапеции, то отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами, равен $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Если трапеция вписана в окружность, то она равнобокая.

Если равнобокая трапеция описана около окружности, то ее средняя линия равна боковой стороне.

Для любого *выпуклого четырехугольника* верно.

Середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма, причем площадь параллелограмма вдвое меньше площади четырехугольника.

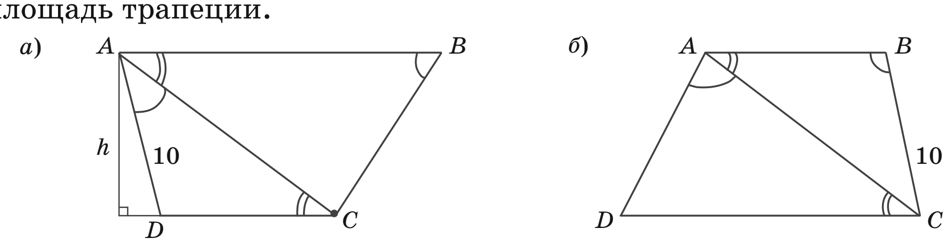
Середины двух противоположных сторон любого четырехугольника и середины его диагоналей либо являются вершинами параллелограмма, либо лежат на одной прямой.

Площадь выпуклого четырехугольника $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где α — угол между диагоналями d_1 и d_2.

Теорема Птолемея. Сумма произведений противоположных сторон вписанного четырехугольника равна произведению его диагоналей.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 9. В трапеции с основаниями AB и CD боковые стороны равны 10 и 15, угол ABC равен углу DAC. Площадь треугольника ABC равна 36. Найдите площадь трапеции.



Решение. а) Треугольник ABC подобен треугольнику CAD по двум углам $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AD} = \frac{AC}{CD} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$. Пусть $CD = 2x$, $AC = 3x$, $AB = 4{,}5x$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4{,}5x \cdot h = \frac{9}{4}xh = 36 \Rightarrow xh = 16.$$

$$\mathrm{S}_{\text{трап}} = \frac{1}{2}(|DC| + |AB|) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (2x + 4{,}5x) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2}xh = 13 \cdot 4 = 52.$$

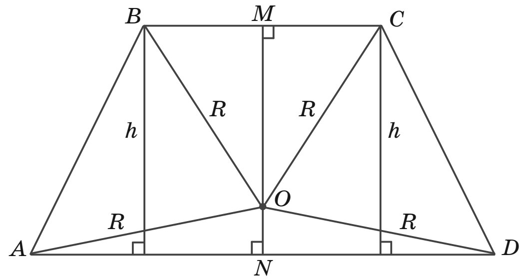
б) Треугольник ABC подобен треугольнику CAD по двум углам $\frac{DA}{BC} = \frac{AC}{BA} =$ $= \frac{DC}{AC} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$. Пусть $CD = 3x$, $AC = 2x$, $AB = \frac{4}{3}x$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot h = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot x \cdot h = 36 \Rightarrow xh = 54.$

$S_{\text{трап}} = \frac{1}{2} \cdot (3x + \frac{4}{3}x) \cdot h = \frac{1}{2}\frac{13}{3}xh = \frac{13}{3} \cdot 27 = 117.$

Ответ: 52 и 117.

Пример 10. Трапеция с основаниями a и b вписана в окружность радиуса R. Найдите высоту трапеции.

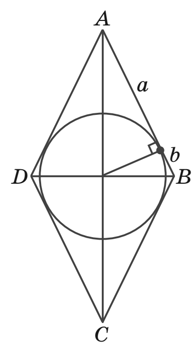


Решение. Если трапеция вписана в окружность, то она равнобокая. Пусть основание $BC = b$, $AD = a$, O — центр описанной окружности. M и N — середины оснований.

Треугольники OMC и OND — прямоугольные, поэтому по теореме Пифагора $OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}}$, $ON = \sqrt{OD^2 - ND^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$. Высота трапеции $MN = OM + ON =$ $= \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Ответ: $\sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Пример 11. В ромб вписан круг. Каждая сторона ромба точкой касания делится на отрезки, длины которых равны a и b. Найдите отношение площади круга к площади ромба.



Решение. Вычислим радиус вписанной в ромб окружности как высоту прямоугольного треугольника ACO: $r = \sqrt{ab}$. Высота ромба $h = 2r = 2\sqrt{ab}$. $S_{\text{ромба}} = S = (a + b)h = (a + b) \cdot 2\sqrt{ab}$, $S_{\text{круга}} = \pi r^2 = \pi ab$. $\frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{ромба}}} = \frac{\pi ab}{(a + b) \cdot 2\sqrt{ab}} = \frac{\pi\sqrt{ab}}{2(a + b)}$.

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{ab}}{2(a + b)}$.

Пример 12. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ $AC =$ $= 12$ является биссектрисой угла A. Площадь треугольника ABC равна $\frac{9\sqrt{55}}{4}$, площадь треугольника ACD равна $\frac{9\sqrt{55}}{2}$. Найдите площадь треугольника ABD.

Решение. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$, $S_{ACD} = 2 \cdot S_{ABC}$ или $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin\alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$, где α — угол равный углам BAC и CAD.

Из последнего равенства следует, что $AD = 2 \cdot AB$.

Обозначим переменной b сторону AB. $AB = b$, $AD = 2b$.

Хорды BC и CD равны, так как на них опираются равные вписанные углы. Обозначим $BC = CD = a$. Тогда по теореме косинусов для треугольников ABC и ACD выполняются равенства:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + 144 - 2 \cdot b \cdot 12 \cdot \cos\alpha, \\ a^2 = 4b^2 + 144 - 2 \cdot 2 \cdot b \cdot 12 \cdot \cos\alpha. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $\cos\alpha = \frac{b}{8}$. Проведем высоту BP в треугольнике ABC, $BP = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{2 \cdot 9 \cdot \sqrt{55}}{4 \cdot 12} = \frac{9 \cdot \sqrt{55}}{24}$, $AP = AB\cos\alpha = \frac{b^2}{8}$.

Из прямоугольного треугольника ABP по теореме Пифагора получаем уравнение: $AB^2 = AP^2 + BP^2$, $b^2 = \frac{b^4}{64} + \frac{81 \cdot 55}{24^2} \Rightarrow b = \sqrt{55}$ или 3.

При $b = \sqrt{55}$ $S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot b^2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{55}}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{b^2 \cdot 3\sqrt{55}}{32} = \frac{165\sqrt{55}}{32}$.

При $b = 3$ $S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot b^2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{55}}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{b^2 \cdot 3\sqrt{55}}{32} = \frac{27\sqrt{55}}{32}$.

Ответ: $\frac{27\sqrt{55}}{32}$ или $\frac{165\sqrt{55}}{32}$.

3. Окружность

Теорема о вписанном угле. Вписанный угол измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается. Так как дуга измеряется величиной соответствующего центрального угла, то вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Следствие. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу или на равные дуги равны.

Следствие. Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым.

Следствие. Сумма противолежащих углов вписанного в окружность четырехугольника равна 180°.

Теорема о касательных. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Отрезки касательных, проведенных из одной точки к одной окружности, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Следствие. В любом описанном около окружности четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны.

Верны утверждения об углах в окружностях:

1) угол между хордами равен полусумме мер дуг окружности, которые отсекают на окружности эти хорды;

2) угол между секущими, выходящими из одной точки, равен полуразности мер дуг, заключенных между ними;

3) угол между хордой и касательной измеряется половиной меры заключенной внутри него дуги окружности.

Теорема о касательной и секущей. Квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину ее внешней части.

Теорема о хордах. Произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны.

Следствие. Произведение длины отрезка секущей на длину ее внешней части есть величина постоянная для всех секущих, проведенных из одной точки к данной окружности.

Формулы для определения длины окружности и площади круга: $l = 2\pi R$, $S = \pi R^2$.

Взаимное расположение двух окружностей:

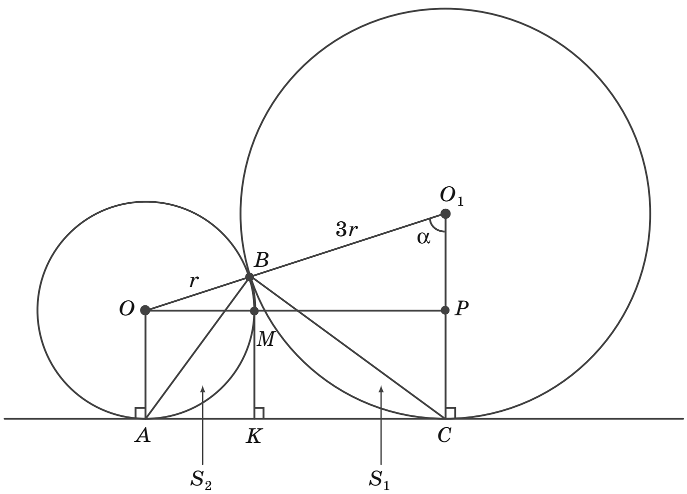
1) точка касания двух окружностей лежит на линии центров этих окружностей;

2) общая касательная, проходящая через точку касания двух окружностей, перпендикулярна линии центров;

3) общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров.

Рассмотрим примеры.

Пример 13. Две окружности радиусов r и $3r$ касаются внешним образом. Найдите площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей касательной.



Решение. Длина общей касательной $AC = OP = \sqrt{OO_1^2 - O_1P^2} = \sqrt{(r+3r)^2 - (3r-r)^2} = 2\sqrt{3}\,r$, $\operatorname{tg} OO_1C = \dfrac{OP}{PO_1} = \sqrt{3}$, угол OO_1C равен 60°, угол AOO_1 равен 120°.

Площадь сегмента S_1 равна разности площадей сектора BO_1C и равностороннего треугольника BO_1C: $S_1 = \frac{\pi \cdot 9r^2}{6} - \frac{9\sqrt{3}r^2}{4}$.

Площадь сегмента S_2 равна разности площадей сектора BO_1A и треугольника BO_1A: $S_2 = \frac{\pi \cdot r^2}{3} - \frac{\sqrt{3}r^2}{4}$.

Вычислим высоту BK треугольника ABC:

$BK = BM + MK = \frac{1}{4}O_1P + MK = \frac{1}{4} \cdot 2r + r = \frac{3}{2}r$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot r \cdot \frac{3}{2}r = \frac{3\sqrt{3}r^2}{2}$.

Вычислим площадь искомой фигуры: $S_ф = S_{ABC} - S_1 - S_2 = \frac{3\sqrt{3}r^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot 9r^2}{6} - \frac{9\sqrt{3}r^2}{4}\right) - \left(\frac{\pi \cdot r^2}{3} - \frac{\sqrt{3}r^2}{4}\right) = \frac{(24\sqrt{3} - 11\pi)}{6}r^2$.

Ответ: $\frac{(24\sqrt{3} - 11\pi)}{6}r^2$.

Дополнительные задания

30. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, которые пересекаются в точке O. Основания высот образуют треугольник $A_1B_1C_1$ со сторонами $A_1B_1 = 9$, $A_1C_1 = 12$, $B_1C_1 = 15$. Определите радиус окружности, описанной около четырехугольника B_1OA_1C.

31. В остроугольном треугольнике ABC со сторонами $AB = 15$, $BC = 12$, $AC = 18$ проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Определите периметр треугольника $A_1B_1C_1$.

32. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Точки A_2 и B_2 являются точками пересечения продолжения высот с описанной около треугольника ABC окружностью. Высоты пересекаются в точке H. Отрезок $AH = 9$, $A_1H = 2$, $BH = 6$. Найдите разность площадей треугольников AHB_2 и BHA_2.

33. В треугольник ABC вписана окружность. Точки касания делят CB на отрезки 4 и 8, считая от вершины C. Угол A равен $\arccos\frac{4}{5}$. Определите площадь треугольника ABC.

34. В треугольник ABC вписана окружность. Точки касания делят CB на отрезки 3 и 7, считая от вершины C. Угол A равен $\arcsin\frac{12}{13}$. Определите площадь треугольника ABC.

35. В трапеции заданы основания $BC = 2$ и $AD = 6$. На боковой стороне AB взята точка M, такая что $AM : MB = 3 : 1$. Проведена прямая MN, параллельная основаниям трапеции. Определите площадь трапеции $ABCD$, если площадь трапеции $MBCN$ равна 10.

36. В параллелограмме $ABCD$ острый угол при вершине A равен 30°, сторона CD касается окружности радиуса 6, описанной около треугольника ABD. Определите площадь параллелограмма.

37. В параллелограмме $ABCD$ острый угол при вершине A равен 30°, сторона CD касается окружности, описанной около треугольника ABD. Определите радиус окружности, если площадь параллелограмма равна $32\sqrt{3}$.

38. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Стороны $AB = 18$, $BC = 15$. Диагональ $AC = 22$. Диагональ BD является биссектрисой угла B. Определите сторону CD.

39. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Отрезки $AB = 18$, $BO = 12$, $AO = 15$, $CD = 24$. Определите AD.

40. Дана трапеция $ABCD$, у которой основание $BC = 6$. Углы при основании трапеции $BAD = 60^\circ$, $CDA = 30^\circ$. Точка N принадлежит стороне BC, так что $BN : NC = 2 : 1$. Точка M принадлежит стороне AD. Отрезок MN перпендикулярен AD. Площадь $ABMN$ равняется площади $MNCD$. Определите площадь треугольника MCD.

41. Дан параллелограмм $ABCD$, сторона которого $AB = 13$. Из углов A и B проведены биссектрисы, которые пересекаются в точке O. Расстояние от точки O до отрезка AB равно $\frac{60}{13}$. Определите отрезки BO и OA.

42. В трапеции заданы основания $BC = 4$ и $AD = 9$. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке E. Через E параллельно основаниям трапеции проведена прямая, пересекающая продолжение диагонали AC в точке F. Площадь треугольника $FCE = 36$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

43. В трапеции задано основание $BC = 2$, а основание AD в три раза больше. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке E. Через точку E параллельно основаниям трапеции проведена прямая, пересекающая продолжение диагонали AC в точке F. Площадь трапеции $ABCD$ равна 32. Определите площадь треугольника ECF.

44. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Отрезки $AB = 18$, $BO = 12$, $AO = 15$, $CD = 24$. Определите BC.

45. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD относятся как $1 : 3$. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Площадь треугольника $BOC = 3$. Определите площадь трапеции.

46. В трапеции $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A. Нижнее основание $AD = 6$. Точка O является точкой пересечения диагоналей AC и BD. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника ABD, если отрезки $AO = \frac{\sqrt{117}}{4}$, $OD = \frac{15}{4}$.

47. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $\frac{65}{2}$, а AB является диаметром этой окружности. Расстояние от точки B до прямой CD равно 20, а расстояние от точки A до прямой CD равно 36. Определите длину отрезка CD, если сторона $BC = 25$.

День 24

Задание C5

На задания C5 отведено 2 занятия из-за трудностей, которые вызывают решения задач с параметрами. Сложность состоит в индивидуальном подходе к решению такого рода задач и требовании знаний практически всего материала школьной программы. Рассмотрим примеры решения типичных заданий, которые встречались на ЕГЭ в последние годы.

Пример 1. Найдите все такие целые a и b, для которых один из корней уравнения $ax^2 + bx + 16 = 0$ равен $1 + \sqrt{5}$.

Решение. Так как число $1 + \sqrt{5}$ является корнем исходного уравнения, то, подставляя это число в приведенное выше уравнение, мы должны получить тождество: $a(1 + 2\sqrt{5} + 5) + b + b\sqrt{5} + 16 = 0$. Поскольку a и b должны быть целыми, то полученное равенство выполняется при условии: $\begin{cases} 6a + b + 16 = 0, \\ 2a + b = 0. \end{cases}$ Решая данную систему, получим $a = -4$, $b = 8$. Подставляя значения параметров в исходное уравнение, получаем $-4x^2 + 8x + 16 = 0$, решением которого будут $x_1 = 1 + \sqrt{5}$; $x_2 = 1 - \sqrt{5}$.

Ответ: $a = -4$, $b = 8$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a + 1)x^2 + (|a + 2| - |a + 10|)x + a = 5$ имеет два различных положительных корня. (ЕГЭ, 2010).

Решение. Существование двух положительных различных корней равносильно выполнению следующих условий: $\begin{cases} (a + 1) \cdot f(0) > 0, \\ x_B > 0, \\ D > 0, \end{cases}$ (1), где $f(x) = (a + 1)x^2 + (|a + 2| - |a + 10|)x + a - 5$, x_B — абсцисса вершины параболы $f(x)$, D — дискриминант исходного квадратного уравнения. Систему (1) перепишем как

$$\begin{cases} (a + 1)(a - 5) > 0, \\ -\dfrac{(|a + 2| - |a + 10|)}{2(a + 1)} > 0, \\ (|a + 2| - |a + 10|)^2 - 4(a + 1)(a - 5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty), \\ a \in (-\infty; -6) \cup (-1; \infty), \\ (|a + 2| - |a + 10|)^2 - 4(a + 1)(a - 5) > 0. \end{cases}$$

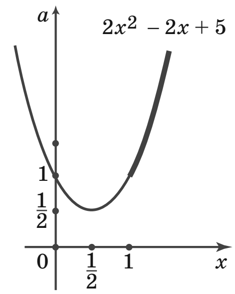
При $a \in (5; \infty)$ $D = (a + 2 - a - 10)^2 - 4(a + 1)(a - 5) > 0$, $a^2 - 4a - 21 < 0$, $a \in (-3; 7)$. Таким образом, получаем решение $a \in (5; 7)$. При $a \in (-\infty; -10)$

решений нет, так как $D = -a^2 + 4a + 21 > 0$ при $a \in (-3; 7)$. При a $(-10; -6)$ $D = 16a + 41 > 0$, также решений нет.

Ответ: $a \in (5; 7)$.

Пример 3. При всех a решите уравнение $x - \sqrt{a - x^2} = 1$. (ЕГЭ, 2010).

Решение. $x - \sqrt{a - x^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x^2 - 2x + 1 = a - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ 2x^2 - 2x + 1 = a. \end{cases}$

На координатной плоскости $a0x$ множество точек $(a; x)$, удовлетворяющих рассматриваемой системе изображены на рис.

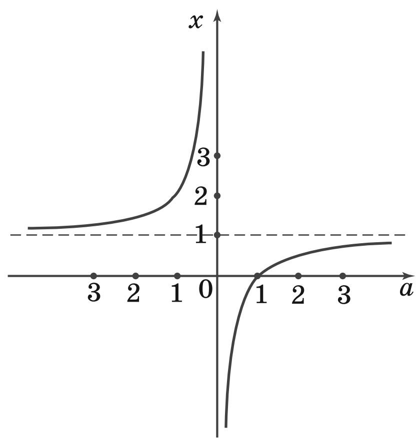
Таким образом, из рисунка видно, что при $a < 1$ решений нет, при $a = 1$ $x = 1$, при $a > 1$ $x = \dfrac{1 + \sqrt{2a - 1}}{2}$.

Ответ: при $a < 1$ решений нет, при $a = 1$ $x = 1$, при $a > 1$ $x = \dfrac{1 + \sqrt{2a - 1}}{2}$.

Пример 4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|1 - ax| = 1 + (1 - 2a)x + ax^2$ имеет единственный корень.

Решение. $|1 - ax| = 1 + (1 - 2a)x + ax^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + (1 - 2a)x + ax^2 \geqslant 0, & (1) \\ \left[\begin{array}{l} 1 - ax = 1 + (1 - 2a)x + ax^2, \\ 1 - ax = -1 - (1 - 2a)x + ax^2. \end{array}\right. & (2) \end{cases}$$



На координатной плоскости $x0a$ множество точек $(x; a)$, удовлетворяющих первому уравнению совокупности (2) полученной системы: $x(ax - a + 1) = 0$ изображены на рис. Из рисунка и полученного уравнения видно, что одно решение получается при $a = 0$ и при $a = 1$ имеем два совпадающих решения. Оба полученные значения параметра удовлетворяют неравенству из системы. Таким образом, мы получили, что только для двух значений параметра имеем по одному решению, а для всех остальных значений получаем по два решения. Поэтому для второго уравнения совокупности мы должны проверить, что найденные значения параметра входят в промежуток для a, при котором это уравнение решений не имеет. Второе уравнение (2) записываем в виде $ax^2 + (1 - 3a)x + 2 = 0$, $D = 9a^2 - 14a + 1 < 0$ при $a \in \left(\dfrac{7 - \sqrt{13}}{9}; \dfrac{7 + \sqrt{13}}{9}\right)$, оба значения параметра $a = 0$ и $a = 1$ входят в указанный промежуток.

Ответ: $a = 0$; $a = 1$.

Пример 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполняется неравенство $\left|-\sqrt{3}(\cos x)^2 + \sqrt{3}(\sin x)^2 + 2a\sin x\cos x + a\right| \leqslant 2$.

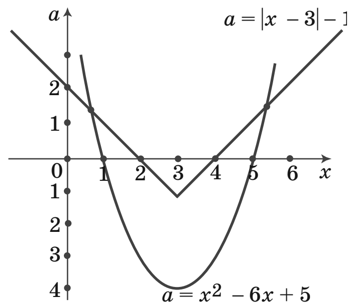
Решение. Преобразуем левую часть неравенства: $f(x) = -\sqrt{3}(\cos x)^2 + \sqrt{3}(\sin x)^2 + 2a\sin x\cos x + a = -\sqrt{3}\cos 2x + a\sin 2x + a = \sqrt{3+a^2}\sin(2x-\varphi) + a$, где $\varphi = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{3+a^2}}$. По условию задачи $|f(x)| \leqslant 2$, $\begin{cases} f(x) \leqslant 2, \\ f(x) \geqslant -2 \end{cases}$ или наименьшее значение $f(x)$ должно быть больше или равно -2, а наибольшее значение $f(x)$ должно быть меньше или 2. Учитывая, что $\sin(2x-\varphi) \in [-1;\ 1]$,

получаем $\begin{cases} \sqrt{3+a^2} + a \leqslant 2, \\ -\sqrt{3+a^2} + a \geqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3+a^2} \leqslant 2 - a, \\ 2 + a \geqslant \sqrt{3+a^2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2 - a \geqslant 0, \\ 3 + a^2 \leqslant 4 - 4a + a^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 + a \geqslant 0, \\ 3 + a^2 \leqslant 4 + 4a + a^2, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ a \geqslant -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{4}\right]$.

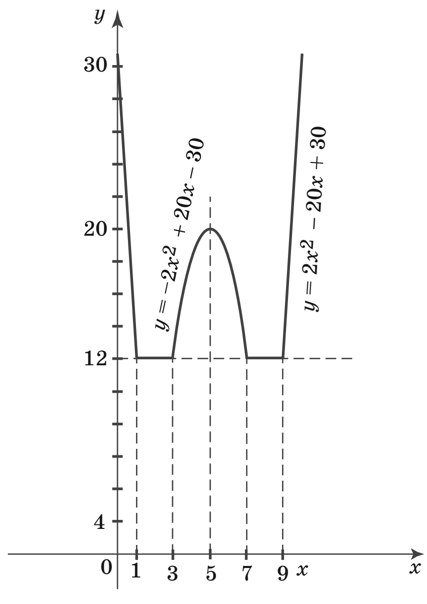
Пример 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a + 6x - x^2 - 5)(a + 1 - |x - 3|) = 0$ имеет ровно три различных корня.



Решение. На координатной плоскости $a0x$ множество точек $(a; x)$, удовлетворяющих рассматриваемому уравнению, изображены на рис. Из рисунка видно, что три решения получаются при $a = -1$.

Ответ: $a = -1$.

Пример 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x^2 - 10x + 21| + |x^2 - 10x + 9| = a$ имеет ровно три различных корня.

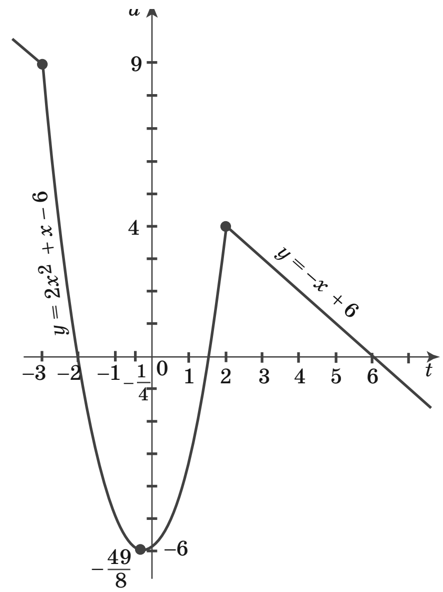


Решение. На координатной плоскости $a0x$ множество точек $(a; x)$, удовлетворяющих рассматриваемому уравнению, изображены на рис. Из рисунка видно, что три решения получаются при $x = 5$ или $a = 20$.

Ответ: $a = 20$.

Пример 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - |x^2 + x - 6|$ пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Решение. На координатной плоскости $a0x$ множество точек $(a; x)$, удовлетворяющих рассматриваемому уравнению $f(x) = 0$, изображены на рис. Из рисунка видно, что три решения получаются при $a \in \left(-\dfrac{49}{8}; 4\right)$.



Ответ: $\left(-\dfrac{49}{8}; 4\right)$.

Пример 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|\dfrac{x^2 - ax - 4}{x^2 + 2x + 2}\right| < 4$ выполняется для всех x.

Решение. Исходное неравенство равносильно системе $\begin{cases} \dfrac{x^2 - ax - 4}{x^2 + 2x + 2} < 4, \\ \dfrac{x^2 - ax - 4}{x^2 + 2x + 2} > -4, \end{cases}$

так как в знаменателе $x^2 + 2x + 2 > 0$ для всех x, то систему можно привести к виду $\begin{cases} x^2 - ax - 4 < 4x^2 + 8x + 8, \\ x^2 - ax - 4 > -4x^2 - 8x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + (8 + a)x + 12 > 0, \\ 5x^2 + (8 - a)x + 4 > 0. \end{cases}$ Так как полученные неравенства должны выполняться для всех x, то дискриминанты у обоих неравенств должны быть меньше нуля. Поэтому справедливо следующая система: $\begin{cases} (8 + a)^2 - 144 < 0, \\ (8 - a)^2 - 80 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |8 + a| < 12, \\ |8 - a| < 4\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -20 < a < 4, \\ 8 - 4\sqrt{5} < a < 4\sqrt{5} + 8 \end{cases} \Leftrightarrow 8 - 4\sqrt{5} < a < 4.$

Ответ: $8 - 4\sqrt{5} < a < 4$.

Дополнительные задания

1. Найдите все такие целые a и b, для которых один из корней уравнения $ax^2 + bx + 16 = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполняется неравенство $|(\cos x)^2 + 3(\sin x)^2 + 2a\sin x\cos x + a| \leqslant 3$.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$ имеет ровно три различных корня.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$ имеет ровно три различных корня.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$ пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

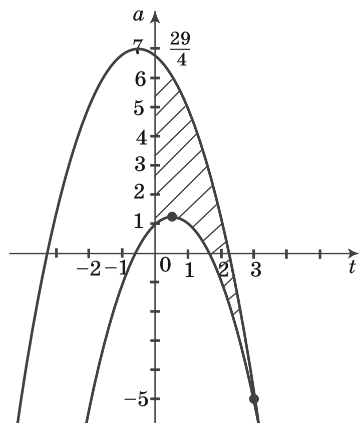
6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|\dfrac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$ выполняется для всех x.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{3 - x} + |x - a| \leqslant 2$ является отрезок.

День 25

Задание С5 (продолжение)

Пример 10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{4-x}+|x-a|\leqslant 3$ является отрезок.



Решение. Пусть $t=\sqrt{4-x}\geqslant 0$. Тогда $t^2=4-x$, $x=4-t^2$. Исходное неравенство перепишется как

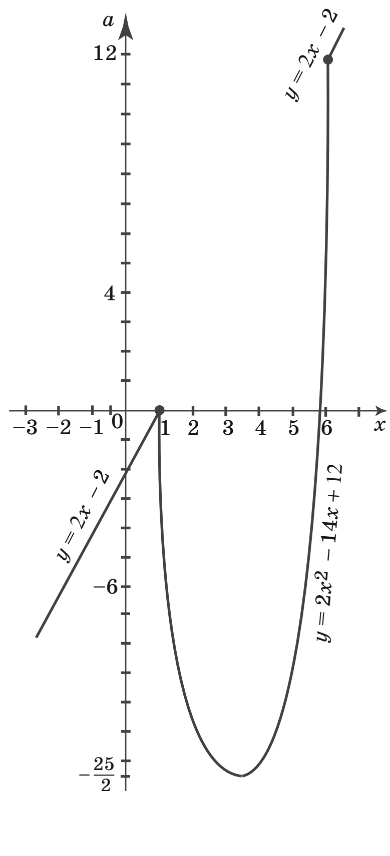
$t+|4\ -t^2-a|\leqslant 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t\geqslant 0, \\ a\geqslant -t^2+t+1, \\ a\leqslant -t^2-t+7. \end{cases}$ На рисунке

на координатной плоскости $a0t$ представлены обе параболы полученной системы. Из рисунка видно, что множество решений является отрезком при $a\in\ (-5;\,1)\cup\left[\dfrac{5}{4};\,7\right)$.

Ответ: $(-5;\,1)\cup\left[\dfrac{5}{4};\,7\right)$.

Пример 11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых график функции $f(x)=x^2-6x+5-|x^2-8x+7|-a$ пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

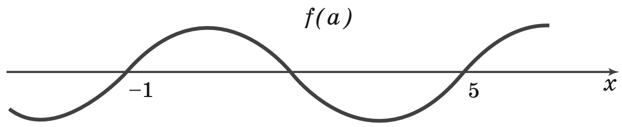
Решение. На координатной плоскости $a0x$ множество точек $(a;\,x)$, удовлетворяющих рассматриваемому уравнению $f(x)$, изображены на рисунке. Из рисунка видно, что менее трех решений получаются при $a\in\ \left(-\infty;\,\dfrac{-25}{2}\right]\cup[0;\,\infty)$.



Ответ: $\left(-\infty;\,\dfrac{-25}{2}\right]\cup[0;\,\infty)$.

Пример 12. Решите неравенство $\dfrac{x^2-4x-5}{x-(4-2^{1-a^2})} \leqslant 0$ для всех значений параметра a.

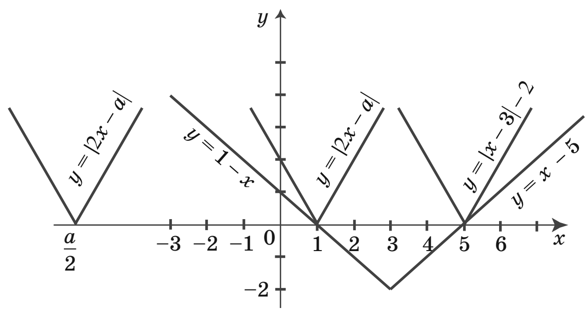
Решение. Пусть $f(a) = 4 - 2^{1-a^2}$, тогда множеством значений $f(a)$ будет отрезок $[2; 4]$. Будем решать методом интервалов. Перепишем исходное неравенство в виде: $\dfrac{(x+1)(x-5)}{x-f(a)} \leqslant 0$. Нанесем на числовую ось точки изменения знака как показано на рисунке.



Из рассмотрения рисунка получаем *ответ:* $x \in (-\infty; 1] \cup (4 - 2^{1-a^2}; 5]$.

Пример 13. Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|2x-a| + 2 \leqslant |x-3|$ образуют отрезок длиной 1.

Решение. На рисунке представлены графики функций $y = |2x-a|$ и $y = |x-3| - 2$. Функция $|2x-a|$ движется вдоль оси $0x$ в зависимости от значения параметра. Из рисунка видно, что $|2x-a| \leqslant |x-3| - 2$ только при $\dfrac{a}{2} \geqslant 5$ и при $\dfrac{a}{2} \leqslant 1$. Поэтому исходное неравенство равносильно



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \geqslant 10, \\ |2x-a| \leqslant x-5, \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 2, \\ |2x-a| \leqslant 1-x \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \geqslant 10, \\ 2x-a \leqslant x-5, \\ 2x-a \geqslant 5-x, \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 2, \\ 2x-a \leqslant 1-x, \\ 2x-a \geqslant x-1 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \geqslant 10, \\ x \leqslant a-5, \\ 3x \geqslant 5+a, \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 2, \\ 3x \leqslant 1+a, \\ x \geqslant a-1 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \geqslant 10, \\ x \leqslant a-5, \\ x \geqslant \dfrac{5+a}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 2, \\ x \leqslant \dfrac{1+a}{3}, \\ x \geqslant a-1. \end{cases}\end{array}\right.$$

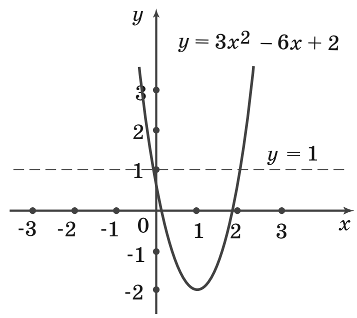
Теперь, учитывая, что решения должны образовывать отрезок длиной, равной единице, получим совокупность: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \geqslant 10, \\ a-5-\dfrac{5+a}{3} = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 2, \\ \dfrac{1+a}{3} - a - 1 = 1. \end{cases}\end{array}\right.$ Решением первой системы будет $a = \dfrac{23}{2}$, а решением второй системы — $a = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{23}{2}\right\}$.

Пример 14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos\sqrt{a - x^2 + 1} = -1$ имеет ровно 8 решений.

Решение. Исходное уравнение имеет решение $\sqrt{a - x^2 + 1} = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a - x^2 + 1 = (\pi + 2\pi k)^2, \\ k \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{a + 1 - (\pi + 2\pi k)^2}, \\ k \geqslant 0. \end{cases}$ Поскольку по условию задачи требуется ровно 8 решений, то подкоренное выражение должно быть положительным при $k = 0, 1, 2, 3$ и отрицательным при $k = 4$, $5, \ldots$. Таким образом, $\begin{cases} a + 1 - (\pi + 2\pi 3)^2 > 0, \\ a + 1 - (\pi + 2\pi 4)^2 < 0. \end{cases}$ Решая полученную систему, получаем *ответ*: $49\pi^2 - 1 < a < 81\pi^2 - 1$.

Пример 15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left||x^2 - 2x - 3| - x^2 + 2x - 5\right| \leqslant \frac{1}{3}((\log_2 a) - x^2 + 2x + 1)$ имеет единственное целое решение. (Диагностическая работа, 11класс, 2010.)

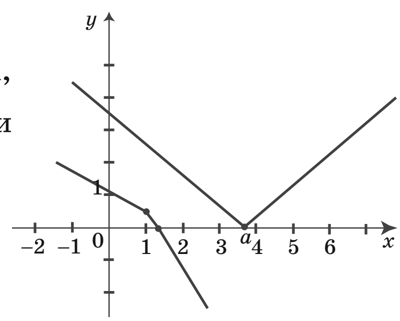


Решение. На координатной плоскости $y0x$ множество точек $(y;\ x)$, удовлетворяющих рассматриваемой функции $y = \left||x^2 - 2x - 3| - x^2 + 2x - 5\right| + x^2 - 2x - 1$, изображены на рисунке. Из рисунка видно, что одно целое решение $x = 1$ может быть при $x \in (0;\ 2)$, $y \in [-2;\ 1)$. Таким образом, функция $g(a) = \frac{1}{3}((\log_2 a) - \log_4 a)$ должна быть меньше единицы. Пусть $t = \log_2 a$, тогда $g(a) = \frac{1}{6}(2t^2 - t) < 1$, решением полученного неравенства является $t \in \left(\frac{-3}{2};\ 2\right)$. Возвращаясь к параметру a, получаем, что $a \in \left(\frac{1}{2\sqrt{2}};\ 4\right)$, что и будет ответом.

Ответ: $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};\ 4\right)$.

Пример 16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $2x + 2|x + a| + |x - 1| > 3$ выполняется для любого x. (ЕГЭ, 2010)

Решение. Перепишем исходное неравенство в виде $|x + a| > \frac{3}{2} - x - \frac{|x - 1|}{2}$. На координатной плоскости $y0x$ изобразим графики функций $y = |x + a|$ и $y = \frac{3}{2} - x - \frac{|x - 1|}{2}$.



Из рисунка видно, что значения параметра, удовлетворяющие условиям задачи $-a > \frac{3}{2}$ или $a \in \left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right)$.

Дополнительные задания

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$ пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

9. Найдите все значения x, каждое из которых хотя бы при одном значении параметра a удовлетворяет неравенству $\dfrac{x - (3 + 2^{1 - a^2})}{x^2 - 7x + 6} \geqslant 0$.

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \leqslant |x + 3|$ образуют отрезок длиной 1.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos\sqrt{a^2 - x^2} = 1$ имеет ровно 12 решений.

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left||x^2 - 2x - 3| - x^2 + 2x - 5\right| \leqslant \dfrac{1}{3}\left(a^2 - \dfrac{a}{2}\right) - x^2 + 2x + 1$ имеет единственное целое решение. (Диагностическая работа, 11класс, 2010.)

13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $2x + 2|x - a| + |x - 1| > 3$ выполняется для любого x.

День 26

Задание С6

Задания С6 являются наиболее трудными, поэтому посвятим этим задачам три занятия. На первом из них рассмотрим решение уравнений в целых числах. Теория решений таких уравнений является классическим разделом элементарной математики. Конкретные задачи такого рода решались уже около 4 тысяч лет тому назад. В школьной программе эта тема затрагивается вскользь в восьмом классе (можно сказать, что вообще не проходится). В последний год она введена и на ЕГЭ по математике в задачах С6.

Связанной с решением уравнений в целых числах темой является тема делимости чисел. Без знания основных принципов и теорем этой темы невозможно решение задач по исследуемой проблеме.

Признаки делимости натуральных чисел на 3, 4, 8, 9, 11

Число $n \vdots 3$ ("⋮" знак читается как делится) тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 3.

Например, число 674 523 делится на 3, так как сумма его цифр равна $6 + 7 + 4 + 5 + 2 + 3 = 27$.

Число $n \vdots 4$ тогда и только тогда, когда число, составленное из двух последних цифр, делится на 4. Например, 47 816 делится на 4, так как 16 делится на 4.

Число $n \vdots 8$ тогда и только тогда, когда число, составленное из трех последних цифр, делится на 8. Например, 35 128 делится на 8. Так как 128 делится на 8.

Число $n \vdots 9$ тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 9. Например, 148 671 делится на 9, поскольку сумма цифр числа равна $1 + 4 + 8 + 6 + 7 + 1 = 27$.

Число $n \vdots 11$ когда сумма цифр, стоящих в четных разрядах, либо равна сумме цифр, стоящих в нечетных разрядах, либо отличается от нее на число, кратное 11. Например, число 1474 делится на 11, поскольку сумма цифр, стоящих в четных разрядах равно 8, сумма цифр, стоящих в нечетных разрядах равна 8. Таким образом, эти суммы равны.

Любое число n представимо в десятичной системе счисления в виде $n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ могут принимать значения 0, 1, 2 , ..., 9, а число a_k может принимать значения от 1 до 9. Число n записывают в виде: $n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_2 a_1 a_0}$

Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное

Если каждое из натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ делится нацело на натуральное число b, то говорят, что число b является их общим делителем, а наибольший из общих делителей называется наибольшим общим делителем и обозначается НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ или $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Если натуральное число b является кратным для каждого из чисел a_1, a_2, ..., a_n, то b называется общим кратным чисел a_1, a_2, ..., a_n, наименьшее из кратных называется наименьшим общим кратным и обозначается НОК (a_1, a_2, ..., a_n) или [a_1, a_2, ..., a_n].

Числа называются взаимно простыми, если НОД (a_1, a_2, ..., a_n) = 1.

— Для нахождения НОД удобно использовать алгоритм Евклида: если при делении a на b получается остаток r, т. е. $a = bq + r$, то $(a, b) = (a, r) = (b, r)$.

— Если $b > a$, то $(a, b) = (a, b - a)$.

— Два или три последовательных числа взаимно простые, т.е. НОД$(n, n + 1, n + 2) = 1$.

— НОД(a, b) $\cdot$ НОК$(a, b) = ab$.

— Если $(a, b) = 1$, то для любых n и $k \in$ $\boldsymbol{N}$ $(a^n, b^k) = 1$, где N — множество натуральных чисел.

— Если целое число c делит произведение ab и при этом $(a, c) = 1$, то c делит b.

— Если целые числа a, b, c, k связаны соотношением $a = bk + c$, то $(a, b) = (b, c)$.

— Если $(a, b) = d$, то существуют целые числа x и y, такие что $d = ax + by$.

— Если остаток от деления a_1 на b равен r_1, а остаток от деления a_2 на b равен r_2, то остаток от деления $a_1 + a_2$ на b равен остатку от деления $r_1 + r_2$ на b.

Рассмотрим вспомогательную задачу, результатом которой мы будем пользоваться в дальнейшем.

Пример 1. Доказать, что любое целое число представимо в виде:

1) $3t$ или $3t \pm 1$; 2) $4t$, $4t \pm 1$, $4t \pm 2$; 3) $5t$, $5t \pm 1$, $5t \pm 2$; 4) $7t$, $7t \pm 1$,$7t \pm 2$, $7t \pm 3$, где $t \in$ $\boldsymbol{Z}$ (коэффициент при t может быть любым целым числом). $\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел.

Решение. Докажем 1). Пусть произвольное целое число n делится на 3, тогда получим $n = 3t + r$, где остаток $r = 0, 1, 2$. Если $r = 0$, то $n = 3t$; если $r = 1$, то $n = 3t + 1$, если $r = 2$, то $n = 3t + 2$ или $n = 3t + 3 - 1 = 3t + 2$.

Пример 2. Найти наибольший общий делитель двух чисел при любом натуральном n.

1) НОД$(9n + 17, 7n + 11) = (2n + 6, 7n + 11) = (5n + 5, 2n + 6) = (3n = 1, 2n + 6) = (n = 7, 2n + 6) = (n + 13 , n - 7) = (20, n - 7)$.

Ответ получаем, представляя $n = 20t + r$, $r = 0, 1, ..., 19$. Подставляя различные значения для r, получаем, что остаток равен 7.

Ответ: $n = 20t + 7$, $t \in N$.

2) Найти НОД$(3, 3n + 2)$.

Решение. $(3n + 2)$ должно делиться на 3, поэтому пусть $n = 3t + r$, где $r = 0, 1, 2$. Подставляя различные значения для r, получаем, что никакие из полученных чисел не делятся на 3. Таким образом, получаем НОД$(3, 3n + 2) = 1$.

3) НОД$(2n + 3, n + 7) = (n - 4, n + 7) = (n - 4, 11)$; пусть $n = 11t + r$. Подставляя различные значения для r, получим, что подходит $r = 4$.

Ответ: $n = 11t + 4$.

4) НОД$(2^{30} - 1, 2^{40} - 1) = (2^{10} - 1, 2^{30} - 1) = (2^{10} - 1, 2^{20} - 1) = (2^{10} - 1, 2^{10} - 1) = 2^{10} - 1$.

5) Докажите, что НОД$\left(\underbrace{11\ldots1}_{8}, \underbrace{11\ldots1}_{100}\right) = \underbrace{1111}_{4}$.

Доказательство: НОД$\left(\underbrace{11\ldots1}_{8}, \underbrace{11\ldots1}_{100}\right) = \left(\underbrace{11\ldots1}_{4}, \underbrace{11\ldots1}_{8}\right) = \underbrace{1111}_{4}$

Пример 3. Доказать, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

Решение. НОД$(12n + 1, 30n + 2) = (18n + 1, 12n + 1) = (6n, 6n + 1) =$
$= (6n, 1) = 1$.

Пример 4. Сократима ли дробь $\frac{20n^3 - 19n^2 + 3n + 3}{20n + 1}$, если сократима, то при каких n?

Решение. $\frac{20n^3 - 19n^2 + 3n + 3}{20n + 1} = n^2 - n + \frac{4n+3}{20n+1}$. НОД$(n + 3, 20n + 1) =$
$= (16n - 2, 4n + 3) = (12n - 5, 4n + 3) = 8(n - 8, 4n + 3) = (4n - 11, 4n + 3) =$
$= (14, 4n - 11)$. Так как число $4n - 11$ нечетное, проверим, делится ли оно на 7. Пусть $n = 7t = r$, где $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Проверяя для различных значений r, получаем, что $4n - 11$ делится на 7 при $r = 1$.

Ответ: сократима для $n = 7t + 1$.

Пример 5. Найти все натуральные n, при которых сократима дробь $\frac{7n^2 + 11n + 4}{6n^2 + 5n}$.

Решение. Представим исходную дробь в виде: $\frac{7n^2 + 11n + 4}{6n^2 + 5n} =$
$= \frac{(7n+4)(n+1)}{(6n+5)(n)}$. Так как НОД$(n + 1, n) = 1$, а также НОД$(6n + 5, n + 1) = 1$, попробуем найти наибольший общий делитель $(7n + 4, n)$ и $(7n +4, 6n + 5)$.

НОД$(7n + 4, n) = (n, 4) \Rightarrow n = 2t$; НОД $(7n + 4, n + 5) =$ НОД $(n - 1, n + 5)$, таким образом получим, что $6n + 5 = 6(n - 1) + 11$, откуда следует, что НОД$(7n + 4, 6n + 5) =$ НОД$(n - 11, 11)$, получаем $n = 11t + 1$.

Ответ: $n = 2t$, $n = 11t + 1$.

Пример 6. Найти все натуральные n, при которых сократима дробь $\frac{3n^3 - 8^2 + 14n - 8}{3n - 5}$.

Решение. $\frac{3n^3 - 8^2 + 14n - 8}{3n - 5} = n^2 - n + \frac{9n-8}{3n-5} \Rightarrow (3n - 5, 9n - 8) = (3n - 5, 7) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = 7t + r$, где $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Перебор всех остатков, дает ответ $r = 4$.

Ответ: $n = 7t + 4$.

Пример 7. Найти все натуральные n, при которых сократима дробь $\frac{5n^3 + 2n^2 - 4n + 2}{5n + 7}$.

Решение. $\frac{5n^3 + 2n^2 - 4n + 2}{5n + 7} = n^2 - n + \frac{3n+2}{5n+7} \Rightarrow (5n - 7, 3n + 2) = (2n + 5,$
$3n + 2) = (n - 3, 2n + 5) = (n + 8, n - 3) = (11, n - 3)$.

Ответ: $n = 11t + 3$.

Пример 8. Найти все натуральные n, при которых сократима дробь $\frac{20n^3 - 19n^2 + 3n + 3}{20n + 1}$.

Решение. $\frac{20n^3 - 19n^2 + 3n + 3}{20n + 1} = n^2 - n + \frac{4n + 3}{20n + 1} \Rightarrow$ НОД$(20n + 1, 4n + 3) =$ $= (4n + 3, - 14)$.

Ответ: $n = 7t + 1$.

Пример 9. Найти натуральные m и n, которые удовлетворяют системе $\begin{cases} m + n = 20, \\ \text{НОД}(m, n) = 5. \end{cases}$

Решение. Пусть $m = 5t$, тогда при $t = 1$, $m = 5$, $n = 15$.

Ответ: $m = 5$, $n = 15$.

Пример 10. Найти НОК$[7n + 3, 5n + 2]$.

Решение. НОК$[7n + 3, 5n + 2] = \frac{(7n + 3)(5n + 2)}{(7n + 3{,}5n + 2)} = (7n + 3)(5n + 2)$, учитывая, что $(7n + 3, 5n + 2) = (n, 1) = 1$.

Ответ: $(7n + 3)(5n + 2)$.

Пример 11. Найти наименьшее натуральное число, делящееся на 7 и дающее остаток, равный 1, при делении на каждое из чисел 2, 3, 4, 5, 6.

Решение. Найдем наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4, 5, 6, оно равно 60. Тогда, исходя из условия задачи, получаем $7n = 60m + 1$, если левая часть делится на 7, то и правая часть полученного уравнения тоже должна делиться на 7. Представив $m = 7t \pm r$ и подставляя различные значения r, получим $m = 5$, таким образом, ответ равен 301.

Ответ: 301.

Пример 12. Одна гирлянда из лампочек на елке зажигается через каждые 15 с, а другая гирлянда через каждые 12 с. В определенный момент времени гирлянды зажглись одновременно. Через сколько времени лампочки вновь зажгутся одновременно?

Решение. Ответом будет наименьшее общее кратное чисел 12 и 15, $[12, 15] =$ $= 60$ (с).

Ответ: 60.

Пример 13. Два зубчатых колеса, одно из которых имеет 30 зубцов, а другое 40 зубцов, до начала вращения соприкасаются зубцами. Через сколько оборотов каждого колеса они будут в том же положении, как до начала вращения?

Решение. $[30, 40] = 120$ (оборотов).

Ответ: 120.

Пример 14. Из одного парка утром на линию вышли три автобуса. Первый возвращается из маршрута через 90 мин; второй через 50 мин; а третий через 70 мин. Через сколько времени после выхода автобусов из парка все три автобуса опять соберутся в парке?

Решение. $[90, 50, 70] = 3150$ (мин).

Ответ: 3150.

Пример 15. Каким может быть наибольший общий делитель натуральных чисел m и n, если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 9 раз?

Решение. Пусть $d = \text{НОД}(m, n)$, тогда $\text{НОД}(m + 6, n) = 9d$. Отсюда следует, что m и n делятся на d, поэтому и $m + 6$ тоже делится на d, таким образом 6 должно делится на d. Делители числа 6 — 2, 3, 6. Проверкой убеждаемся, что 2 не подходит. Остается 3 или 6.

Ответ: 3 или 6.

Пример 16. Укажите наименьшее натуральное число, отличное от 1, которое при делении на каждое из чисел 2, 3, 5 и 9 дает в остатке 1.

Решение. Пусть n искомое натуральное число, тогда $n = 2a + 1 = 3b + 1 = 5c + 1 = 9d + 1$. Откуда следует, что число $n - 1$ должно одновременно делиться на 2, 5 и 9, $n = [2, 5, 9] + 1 = 91$.

Ответ: 91.

Пример 17. Найти хотя бы одну пару целых чисел x и y таких, что $ax + by = d$, где $d = (a, b)$.

1) Если $a = 7$, $b = 5$, $d(7, 5) = 1$; $-2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 1$. *Ответ:* $x = -2$; $y = 3$.

2) Если $a = 15$, $b = 25$, $d(25, 15) = 5$; $-3 \cdot 15 + 2 \cdot 25 = 5$.

Ответ: $x = -3$; $y = 2$.

Пример 18. Доказать, что если дробь $\dfrac{al + b}{ck + d}$ сократима на k, то $ad - bc$ делится на k.

Доказательство. Из условия задачи $al + b = kn$; $cl + d = km$. Умножим первое уравнение на d, а второе на b, получим $\begin{cases} dab + db = knd, \\ bcl + bd = bkm \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ad + \dfrac{db}{l} = \dfrac{knd}{l}, \\ bc + \dfrac{db}{l} = \dfrac{bkm}{l}. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получим доказательство.

Пример 19. Найти натуральные числа a и b, такие, что их разность равна 18, а наименьшее общее кратное равно 165.

Решение. Из условия задачи имеем $a - b = 18$, $\dfrac{165}{a} = n$, $\dfrac{165}{n} = a$, $\dfrac{165}{b} = m$, $\dfrac{165}{m} = b$. Тогда $\dfrac{165}{n} - \dfrac{165}{m} = 18$, $55(m - n) = 6mn$, $m - n = 6$; $mn = 55$, $m = 11$, $n = 5$; $a = \dfrac{165}{5} = 33$; $b = \dfrac{165}{11} = 15$.

Ответ: $a = 33$, $b = 15$.

Пример 20. Найти натуральные числа a и b, такие, что сумма их квадратов равна 13, а наименьшее общее кратное равно 6.

Решение. Из условия задачи имеем $a^2 + b^2 = 13$, $\dfrac{6}{a} = n$, $\dfrac{6}{n} = a$, $\dfrac{6}{b} = m$, $\dfrac{6}{m} = b$. Тогда $\dfrac{36}{n^2} + \dfrac{36}{m^2} = 13$, $36(m^2 + n^2) = 13n^2 \cdot m^2$. Откуда получаем, что $n = 3$, $m = 2$ и $a = \dfrac{6}{3} = 2$, $b = \dfrac{6}{2} = 3$.

Ответ: $a = 2$, $b = 3$.

Пример 21. Доказать, что число $\overline{ab} - \overline{ba}$ делится на 9.

Решение. Эти два числа имеют одинаковую сумму цифр и, следовательно, одинаковые остатки от деления на 9. Поэтому эти остатки при вычитании уничтожатся. Вообще справедливо утверждение: если записать в обратном порядке цифры любого натурального числа, то разность исходного и нового числа будет делиться на 9.

Пример 22. Доказать, что число $\overline{ab} - \overline{ba}$ делится на 11.

Решение. Запишем сумму в виде $a10 + b + b10 + a = 11a + 11b$, что и требовалось доказать.

Пример 23. Найти цифру X, при которой число $\overline{36X847X}$ делится на 3.

Решение. Так как число делится на 3 при условии, что сумма цифр этого числа делится на 3, то найдем сумму цифр: $3 + 6 + X + 8 + 4 + 7 + X = 28 + 2X$. Получим, что при $X = 1, 4, 7$ сумма цифр делится на 3.

Ответ: 1, 4, 7.

Пример 24. Доказать, что сумма квадратов двух нечетных чисел не является квадратом целого числа.

Доказательство. Запишем сумму двух нечетных чисел как $(2n + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4mn^2 + 4m + 1 = 4q + 2$, т.е. при делении на 4 получившееся число дает в остатке 2, чего быть не может, так как остаток от деления квадрата целого числа на 4 дает в остатке 0 или 1. (Докажем это: пусть некоторое целое число $k = 4t + r$, где $r = 0, 1, 2, 3$. Остаток от деления k^2 на 4 будет равен остатку от деления r^2 на это число, а $r^2 = 0, 1, 4, 9$; таким образом, при делении на 4 получаем в остатке 0 или 1.

Пример 25. Доказать, что $10^n - 1 + 18n$ делится на 27.

Доказательство. Запишем исходное число в виде: $9 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n} + 18n = 9\left(\underbrace{11\ldots1}_{n} + 2n\right)$. Докажем теперь, что число $\underbrace{11\ldots1}_{n} + 2n$ делится на три. Будем доказывать методом математической индукции: 1) для $n = 1$ получаем $1 + 2 = 3$. 2) Предположим теперь, что наше утверждение справедливо для $n = k$, т.е. $\underbrace{11\ldots1}_{k} + 2k$ делится на 3, тогда и число $10\left(\underbrace{11\ldots1}_{k} + 2k\right)$ тоже будет делиться на три. 3) Докажем, что наше утверждение справедливо и для $n = k + 1$. При этом значении n получаем $\underbrace{11\ldots1}_{k} + 2(k + 1) = \underbrace{11\ldots10}_{k} + 1 + 2k + 2 = \underbrace{11\ldots10}_{k} + 20k - 20k + 3 + 2k = \left(10\left(\underbrace{11\ldots1}_{k} + 2k\right) - 20k + 3 + 2k = 10\left(\underbrace{11\ldots1}_{k} + 2k\right) - 18k + 3.$

Что и требовалось доказать.

Дополнительные задания

1. Сократима ли дробь $\dfrac{5n^3 + 2n^2 - 4n + 2}{5n + 7}$, если сократима, то при каких n?

2. Сократима ли дробь $\dfrac{3n^3 - 8n^2 + 14n - 8}{3n - 5}$, если сократима, то при каких n?

3. Найдите НОД$(4, 2n + 1)$.

4. Найдите НОД$(n^6 - n^2, 10)$.

5. Найдите натуральные m и n, для которых выполняется система $\begin{cases} m \cdot n = 6, \\ \text{НОД}(m, n) = 1. \end{cases}$

6. Найдите НОК$[3n + 1, 5n + 2]$.

7. Из одного порта курсируют три парохода. Первый пароход совершает рейс (доходит до порта назначения и возвращается обратно в порт) за 6 суток, второй – за 9 суток, третий – за 4 суток. Через сколько суток после начала навигации все три парохода вновь соберутся в порту?

8. Отец и сын измеряли шагами расстояние между деревьями. Длина шага отца 70 см, длина шага сына 50 см. Каково расстояние между деревьями, если след отца и сына совпал десять раз, включая начальный и конечный?

9. Найдите наименьшее четырехзначное число, которое делится на 9, а при делении на 4 дает в остатке 3.

10. Интервалы движения маршрутных такси по трем маршрутам, начинающихся у станции метро, составляют 10, 12 и 15 минут соответственно. Сколько раз с 10 час. 40 мин. до 14 час. 20 мин. того же дня у этой станции метро одновременно встречаются такси всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 13 час. 05 мин.

День 27

Задание С6 (продолжение)

Диофантовы уравнения

1. Простейшие диофантовы уравнения

Александрийский математик Диофант, живший около 2 тысяч лет тому назад, в своей книге «Арифметика» решил большое число уравнений в целых числах и, в сущности, описал общие методы их решения. Поэтому уравнения в целых числах называют диофантовыми уравнениями. Простейшим примером диофантового уравнения является уравнение вида:

$$ax + by = 0, \tag{1}$$

которые называются **однородными линейными уравнениями.** Такие уравнения имеют бесконечно много решений в целых числах и они описываются формулой: $x_n = bn$, $y_n = -an$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 26. На кольцевой дороге проводилась эстафета велосипедистов. Старт и финиш находились в одном и том же месте. Длина кольцевой трассы 55 км, а длина каждого этапа — 25 км (движение одностороннее). Сколько было пунктов, в которых передавалась эстафета, место старта тоже считать за пункт. Каково расстояние между соседними пунктами?

Решение. Спортсмены проходят путь, равный $25 \cdot k$, где k — целое, этот путь должен равняться целому числу кругов или $55 \cdot n$ или $25 \cdot k = 25 \cdot n$, $n = 5$, $k = 11$.

Ответ: число пунктов равно 11, расстояние между пунктами равно $\frac{55}{11} =$ $= 5$ (км).

2. Неоднородные линейные уравнения

Рассмотрим неоднородные линейные уравнения вида $ax + by = c$ (2), которые решаются в целых числах, коэффициенты a, b, c — естественно, целые числа. При решении таких уравнений следует иметь в виду **теорему 1:** если число c не делится на НОД(a, b), то уравнение (2) не имеет решений; и **теорему 2:** если (x_0, y_0) — какое-либо целочисленное решение уравнения (2), то любые числа вида $\begin{cases} x = x_0 - bt, \\ y = y_0 - at, \end{cases}$ где t — произвольное целое число, также являются решениями уравнения (2).

Пример 27. На станцию привезли 420 т угля в вагонах вместимостью по 15 т, по 20 т и по 25 т. Сколько таких вагонов было использовано, если известно, что всего было 27 вагонов?

Решение. Пусть было использовано x, y, z — вагонов вместимостью по 15 т, по 20 т, по 25 т. Тогда условие задачи будет удовлетворять системе:
$\begin{cases} 15x + 20y + 25z = 420, \\ x + y + z = 27, \end{cases}$ решая эту систему, получаем $15(27 - y - z) + 20y + 25z = 420$, $y = 2z = 3$, $y = z = 1$, $x = 25$.

Ответ: было использовано 25 вагонов по 15 т, 1 вагон вместимостью 20 т и 1 вагон вместимостью 25 т.

Пример 28. Найдите все целые решения уравнения $113x + 179y = 17$, удовлетворяющие неравенствам $x > 0$, $y + 100 > 0$. (ЕГЭ, 2010).

Решение. Выразим неизвестную с меньшим коэффициентом, т.е. x из исходного уравнения, получим $x = \dfrac{-179y + 17}{113} = -y + \dfrac{-66y + 17}{113}$. Введем новую переменную $x_1 = x + y$, тогда полученное уравнение запишется как $113x_1 = -66y + 17$. Вновь выразим неизвестную с меньшим коэффициентом, в данном случае y из последнего уравнения: $y = \dfrac{-113x_1 + 17}{66} = -x_1 + \dfrac{-47x_1 + 17}{66}$. Опять введем новую переменную $y_1 = y + x_1$ тогда полученное уравнение запишется как $66y_1 = -47x_1 + 17$; выразим неизвестную с меньшим коэффициентом, т.е. $x_1 = \dfrac{-66y_1 + 17}{47} = -y_1 + \dfrac{-19y_1 + 17}{47}$. Опять введем новую переменную $x_2 = y_1 + x_1$, уравнение будет иметь вид: $47x_2 = -19y_1 + 17$. Выразим неизвестную с меньшим коэффициентом, т.е. $y_1 = \dfrac{-47x_2 + 17}{19} = -2x_2 + \dfrac{-9x_2 + 17}{19}$. И вновь введем новую переменную $y_2 = y_1 + 2x_2$, которую подставим в наше уравнение: $19y = -9x_2 + 17$, и вновь повторяем алгоритм: $x_2 = \dfrac{-19y_2 + 17}{9} = -2y_2 + \dfrac{-y_2 + 17}{9}$. Обозначим новую переменную как $x_3 = x_2 + 2y_2$, тогда уравнение запишется в виде: $9x_3 = -y_2 + 17$. Общее решение этого уравнения будет $\begin{cases} x_3 = t, \\ y_2 = -9t + 17, \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{Z}$. Возвращаясь к исходным переменным, получим $x_3 = x_2 + 2y_2 = 5x_2 + 2y_1 = 5x_1 + 7y_1 = 12x + 19y = t$, $y_2 = y_1 + 2x_2 = 3y_1 + 2x_1 = 3y + 5x_1 = 8y + 5 = -9t + 17$. Решая полученную систему, запишем общее решение для исходного уравнения: $\begin{cases} x = 179t - 323, \\ y = -113t + 204, \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{Z}$. Принимая во внимание условия $x > 0$, $y + 100 > 0$, находим $t = 2$, $x = 35$, $y = -22$. При решении этой задачи использовался вариант алгоритма Евклида.

Ответ: $x = 35$, $y = -22$.

Пример 29. Решите в целых числах уравнение $25x - 18y + 1 = 0$.

Решение. Найти наибольший общий делитель попробуем с помощью цепных дробей — варианта алгоритма Евклида. Выделим целую часть дроби
$$\frac{25}{18} = 1 + \frac{7}{18} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{18}{7}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{7}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3}}}} =$$

$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$ (на каждом шаге мы выделяли целую часть неправильной дроби). Полученное выражение называется цепной дробью. Числа 1, 2, 1, 1 являются последовательными частными алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя пары чисел 25 и 18. Отбросим 1/3 и свернем получившуюся цепную дробь в обыкновенную: $1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$. Вычтем полученную дробь из исходной дроби $\frac{25}{18} - \frac{7}{5} = \frac{125 - 126}{18 \cdot 5} = -\frac{1}{18 \cdot 5}$, приведем к общему знаменателю, $25 \cdot 5 - 18 \cdot 7 + 1 = 0$, откуда $x = 5 + 18t$; $y = 7 + 25t$.

Ответ: $x = 5 + 18t$; $y = 7 + 25t$, $t \in \mathbf{Z}$.

Дополнительные задания

11. На кольцевой дороге проводилась эстафета мотоциклистов. Старт и финиш находились в одном и том же месте. Длина кольцевой трассы 176 км, а длина каждого этапа — 80 км (движение одностороннее). Сколько было пунктов, в которых передавалась эстафета, место старта тоже считать за пункт. Каково расстояние между соседними пунктами?

12. Трамвай курсирует по кольцевой трассе длиной, равной 5 км. Начало и конец маршрута не совпадают. Сколько остановок находится на маршруте трамвая, если расстояние между остановками равно 3 км. Найдите также длину маршрута трамвая.

13. Родительский комитет закупил на 750 руб. тетради по цене 35 руб. и ручки по цене 25 руб. Сколько было куплено тетрадей и ручек, если ручек было куплено больше, чем тетрадей, а разница между количеством ручек и тетрадей наименьшая.

14. На празднике всем ребятам раздали подарки, в которые был положены 350 мандаринов по 3 мандарина или по 4 мандарина в подарок. Сколько было подарков, если подарков, в которых находятся 3 мандарина больше 47 и меньше 53.

15. Можно ли набрать 25 рублей монетами по 5 рублей и по 2 рубля?

16. Конфеты массой 13 кг распределили в коробки по 3 кг и по 5 кг. Какое наименьшее количество таких коробок понадобится?

3. Дробно–рациональные уравнения

Решение уравнений $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ (1) в целых числах.

Избавляясь от знаменателя, получаем уравнение $zy + zx = xy$. Прибавляя к обеим частям уравнения z^2, получим $xy - zy - zx + z^2 = z^2$, $y(x - z) - z(x - z) = z^2$, $(x - z)(y - z) = z^2$ (2).

Полученное уравнение имеет столько решений в целых числах, сколько существует делителей у z^2 минус единица.

Пусть d — делитель z^2, тогда решения (2) получаются из совокупности систем

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x - z = d,\\ y - z = \dfrac{z^2}{d},\end{cases}\\ &\begin{cases}x - z = -d,\\ y - z = -\dfrac{z^2}{d}.\end{cases}\end{aligned}\right.$$

Но одна система с делителем $d = -z$, $\begin{cases}x - z = -z,\\ y - z = -z,\end{cases}$ дает решение $x = 0$; $y = 0$, которое не имеет смысла.

Ответ: нет решения.

Пример 30. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$; $x \geqslant y$.

Решение. $xy - 8x - 8y + 64 = 64$, $(x - 8)(y - 8) = 64$, $x - 8 = d$, $y - 8 = 64/d$.

d	1	2	4	8	16	32	64
x	9	10	12	16	24	40	72
y	72	40	24	16	12	10	9

Ответ: (16; 16), (24; 12), (40; 10), (72; 9).

Пример 31. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$.

Решение. $xy - 3x - 3y + 9$, $(x - y)(y - 3) = 9$,

d	1	3	9
x	4	6	12
y	12	6	4

Ответ: (4; 12); (6; 6); (12; 4).

Пример 32. Решите в целых числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{9}$; $x > y$.

Решение. $(x - 9)(y - 9) = 81$.

d	1	3	9	27	81	−1	−3	−9	−27	−81
x	10	12	18	36	90	8	6	0	−18	−72
y	90	36	18	12	10	−72	−18	0	6	8

Ответ: (36; 12); (90; 10); (8; −72); (6; −18).

Дополнительные задания

17. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{25}$, где $x > y$.

18. Найдите все пары натуральных чисел различной четности, удовлетворяющие уравнению $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$.

4. Нелинейные уравнения

При решении подобных уравнений, как правило, необходимо ограничить перебор различных вариантов. Для этого используются различные методы.

1. Задачи, в которых применяется разложение на множители

Пример 33. Решите в натуральных числах уравнение $xy - 7y + 3x = 39$.

Решение. $(x - 7)(y + 3) = 18$; полученное уравнение распадается на несколько систем: $\begin{cases} x - 7 = 2, \\ y + 3 = 9, \end{cases}$ решение — $(9; 6)$; $\begin{cases} x - 7 = 9, \\ y + 3 = 2, \end{cases}$ решение — $(2; -1)$; $\begin{cases} x - 7 = 3, \\ y + 3 = 6, \end{cases}$ решение — $(10; 3)$; $\begin{cases} x - 7 = 6, \\ y + 3 = 3, \end{cases}$ решение — $(13; 0)$; $\begin{cases} x - 7 = 1, \\ y + 3 = 18, \end{cases}$ решение — $(8; 15)$. Выбирая подходящие решения, получаем ответ.

Ответ: $(10; 3)$, $(9; 6)$, $(8; 15)$.

Пример 34. Решите в целых числах уравнение $x^2 = y^2 + 6y + 21$.

Решение. $(x - y - 3)(x + y + 3) = 12$; полученное уравнение распадается на несколько систем: $\begin{cases} x - y - 3 = 3, \\ x + y + 3 = 4, \end{cases}$ решение — $(7/2;\ 5/2)$; $\begin{cases} x - y - 3 = 4, \\ x + y + 3 = 3, \end{cases}$ решение — $(7/2; -7/2)$; $\begin{cases} x - y - 3 = 2, \\ x + y + 3 = 6, \end{cases}$ решение — $(4; -1)$; $\begin{cases} x - y - 3 = 6, \\ x + y + 3 = 2, \end{cases}$ решение — $(4; -5)$; $\begin{cases} x - y - 3 = -2, \\ x + y + 3 = -6, \end{cases}$ решение — $(-4; -5)$; $\begin{cases} x - y - 3 = -6, \\ x + y + 3 = -2, \end{cases}$ решение — $(-4; -1)$. Выбирая подходящие решения, получаем ответ.

Ответ: $(4; -1)$, $(4; -5)$, $(-4; -5)$, $(-4; -1)$.

Пример 35. Автоколонне поручили перевезти некоторый груз. В автоколонне имеются три машины разной грузоподъемности. Машина наименьшей грузоподъемности может перевезти весь груз за 32 рейса, а две другие машины — за 5 совместных рейса. Сколько рейсов сделает машина наибольшей грузоподъемности, чтобы перевезти весь груз?

Решение. Пусть Q — груз, k, m, n — число рейсов для каждой из машин разной грузоподъемности, $32 > k > m > n > 5$. Тогда $5\left(\dfrac{Q}{m} + \dfrac{Q}{n}\right) = Q$, $5(m + n) = mn$, $(m - 5)(n - 5) = 25$, $m = 30$, $n = 6$.

Ответ: 6.

Пример 36. Решите в натуральных числах уравнение $xy = 2011(x + y)$.

Решение. $(x - 2011)(y - 2011) = 2011^2$, $x = 4022$, $y = 4022$; (2011 — число простое).

Ответ: (2012, 4 046 132); (4 046 132, 2012).

Пример 37. Решите в целых числах уравнение $2xy - 8y + x - 9 = 0$.

Решение. Приведем исходное уравнение к виду: $2xy - 8y + x - 4 - 5 = 0$, $2y(x - 4) + (x - 4) = 5$. Разложив на множители, получим: $(2y + 1)((x - 4) = 5$.

Возможны варианты: $\begin{cases} 2y + 1 = 1, \\ x - 4 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y + 1 = -1, \\ x - 4 = -5; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y + 1 = 5, \\ x - 4 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y + 1 = -5, \\ x - 4 = -1. \end{cases}$

Решив соответствующие системы уравнений и объединяя решения, получим ответ.

Ответ: $(5; 2)$, $(3; -3)$, $(9; 0)$, $(-1; 1)$.

Пример 38. Найдите все целые решения уравнения $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$.

Решение. Разложим на множители: $3x^2 + 4xy - 7y^2$, $x_1 = \dfrac{-2y + \sqrt{4y^2 + 21y^2}}{3} =$ $= y$; $x_2 = \dfrac{-2y - \sqrt{4y^2 + 21y^2}}{3} = \dfrac{-7y}{3}$, т.е. $(x - y)(3x + 7y) = 13$, где $x - y$ и $3x + 7y$ целые числа. Возможны варианты: $\begin{cases} x - y = 1, \\ 3x + 7y = 13; \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = -1, \\ 3x + 7y = -13; \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 13, \\ 3x + 7y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = -13, \\ 3x + 7y = -1. \end{cases}$

Решив соответствующие системы, получим, что x и y целые лишь при $x - y = 1$, $3x + 7y = 13$ и при $3x + 7y = -13$, $x - y = -1$.

Следовательно, получаем, что $x = \{2; -2\}$, $y = \{1; -1\}$.

Ответ: $x = \{2; -2\}$, $y = \{1; -1\}$.

Пример 39. Решите в целых числах уравнение $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде: $2x^2 - x - 2xy + 10x + y =$ $= 2$, $(1 - 2x)(x - y + 5) = 3$. Число 3 простое, поэтому рассмотрим четыре системы: $\begin{cases} 1 - 2x = 1, \\ -y + x + 5 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 - 2x = 3, \\ -y + x + 5 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 - 2x = -1, \\ -y + x + 5 = -3; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 - 2x = -3, \\ -y + x + 5 = -1. \end{cases}$

Целочисленные решения получаются во всех четырех системах: (0; 2), (–1; 3), (1; 9), (2; 8).

Ответ: (0; 2), (–1; 3), (1; 9), (2; 8).

Дополнительные задания

19. Решите уравнение в целых числах $5x^2 + 6xy + y^2 = -7$.

20. Решите уравнение в целых числах $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7$.

21. Решите уравнение в целых числах $xy = x + y + 3$.

22. Решите уравнение в целых числах $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

23. Решите уравнение в целых числах $xy + x - 3y = -4$.

24. Решите уравнение в целых числах $x^2 - 3xy + 2y^2 = 7$.

25. Решите уравнение в натуральных числах $x^2 - y^2 = 69$.

2. Задачи, в которых проводится сравнение левой и правой частей уравнения по какому-нибудь модулю

Пример 40. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 7y^2 = 5$.

Решение. Представим исходное уравнение в виде $x^2 - 5 = 7y^2$. Правая часть делится на 7, следовательно, и левая часть полученного уравнения должна делиться на 7. Пусть $x = 7t + r$, где остаток $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Подставляя в уравнение выражение для x с различными значениями r, получаем, что ни одно значение для остатка не подходит. Таким образом, решений нет.

Ответ: решений нет.

Пример 41. Решите в целых числах уравнение $4x + 6y = 9$.

Решение. Левая часть исходного уравнения четное число, а правая нечетна, поэтому уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Пример 42. Решите в целых числах уравнение $15x - 12y = 7$.

Решение. Левая часть исходного уравнения делится на 3, а правая не делится на 3, следовательно, уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Пример 43. Решите в целых числах уравнение $2x^2 - 1 = 2xy$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде $2x^2 - 2xy = 1$, левая часть уравнения четна, а правая нечетна, следовательно, уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Пример 44. Решите в натуральных числах уравнение $2^n + 7 = k^2$.

Решение. При k четном, т.е. $k = 2t$, и при $n > 1$ при делении правой части на 4, получаем остаток, равный 0, а при делении на 4 левой части уравнения получаем остаток, равный 3, следовательно, решений нет. При k нечетном, т.е. $k = 2t + 1$, и при $n > 1$ при делении правой части на 4 получаем остаток, равный 1, а при делении на 4 левой части получаем остаток, равный 3, следовательно, решений нет. Проверяем при $n = 1$, получаем $k = 3$.

Ответ: $n = 1$, $k = 3$.

Пример 45. Существует леи целое число такое, что $x^3 - 3x^2 + 2x + 2011 = 0$?

Решение. Преобразуем левую часть уравнения $x(x - 1)(x - 2) = -2011$, левая часть полученного уравнения делится на 6 как произведение трех последовательных чисел, а 2011 не делится на 6.

Ответ: не существует.

Пример 46. Решить в целых числах $21x + 35y = 17$.

Решение. Вынесем из левой части уравнения число 7, получим: $7(3x + 5y) = 17$. Очевидно, что левая часть уравнения кратна 7, а правая — нет. Следовательно, такое уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: решений нет.

Пример 47. Решите в натуральных числах уравнение $2x - 15 = y^2$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $2x = 15 + y^2$. Если есть решение, то правая часть должна делиться на 2. Пусть $y = 2t + r$, где $r = 0, 1$. Решение получаем при $r = 1$, т.е. $y = 2t + 1$. При $t = 0$ получаем $x = 4$, $y = 1$, $y = -1$.

Ответ: $x = 4$, $y = 1$, $y = -1$.

Пример 48. Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$. (ЕГЭ, 2010).

Решение. Пусть n – четное число, т.е. $n = 2k$. Тогда $2^m = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Правая часть представляет произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью двойки. Отсюда получаем, что $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$, таким образом, находим, что $k = 1$ и $n = 2$, а $m = 3$.

Пусть n — нечетное число. Нечетная степень тройки при делении на 4 дает остаток 3. Значит, $3^n - 1$ делится на 4 с остатком 2. Так как при $m \geqslant 2$

число 2^m делится на 4 без остатка, то равенство $2^m = 3^n - 1$ возможно в случае $m = 1$ и $n = 1$.

Ответ: $m = 1$, $n = 1$ или $n = 2$, $m = 3$.

Пример 49. Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$. (ЕГЭ, 2010).

Решение. Пусть n — четное число, т.е. $n = 2k$, тогда при любом k число $3^{2k} + 1$ при делении на 8 дает остаток 2, а при n — нечетном, т.е. $n = 2k + 1$ число $3^{2k+1} + 1$ при делении на 8 дает остаток 4. Так как при $m \geqslant 2$ число 2^m делится на 8 без остатка, то равенство $2^m = 3^n + 1$ возможно в случае $m = 1$ или $m = 2$. Если $m = 1$, то получаем $n = 0$. Если $m = 2$, то получаем $n = 1$.

Ответ: $m = 2$, $n = 1$.

Пример 50. Решите в натуральных числах уравнение $2^x - 15 = y^2$.

Решение. Пусть x — нечетное число, тогда $x = 2k + 1$; $2^{2k} = 4^k = (3 + 1)^k$ при делении на 3 дает в остатке 1, а $2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k}$ дает в остатке 2. Правая часть исходного уравнения y^2 дает при делении на 3 в остатке 0 или 1. Докажем это утверждение. Пусть $y = 3t + r$, где $r^2 = 0, 1, 2$; $y^2 = 3q + r^2$. Остатки при делении y^2 на 3 будут такими же, как и при делении r^2 на 3. Учитывая все возможные значения r, получаем, что остатки могут быть либо 0 либо 1. Число 15 делится на 3 без остатка, поэтому получаем, что исходное уравнение при $x = 2k + 1$ решений не имеет.

Пусть $x = 2k$ — четное число. Тогда $2^{2k} - y^2 = 15$, откуда $(2^k - y)(2^k + y) = 15$. Так как $(2^k + y)$ положителен, то и $(2^k - y)$ положителен. Возможны два варианта: $\begin{cases}(2^k - y) = 1,\\(2^k + y) = 15\end{cases}$ и $\begin{cases}(2^k - y) = 3,\\(2^k + y) = 5.\end{cases}$ Решая эти системы, получаем ответ.

Ответ: (4; 1), (6; 7).

Пример 51. Решите в целых числах уравнение $3^m + 7 = 2^n$.

Решение. Левая часть при делении на 3 дает в остатке 1. Степени 2 оканчиваются на 2, 4, 8, 6, поэтому при делении на 3 остаток, равный 1, дают только четные степени 2 (т. е. $n = 2k$). Тогда $3^m = 2^{2k} - 7 = 4^k - 7$. Но $4^k - 7$ при делении на 4 дает остаток 1. Остаток 1 дают только четные степени тройки. Значит и m четное ($m = 2p$). Таким образом, имеем, что $3^{2p} = 2^{2k} - 7$, $7 = (2^k - 3^p)(2^k + 3^p)$. Учитывая, что оба множители положительны, получаем $2^k + 3^p = 7$, $2^k - 3^p = 1$, т.е. $m = 2$, $n = 4$. При $m = 0$ получаем $n = 3$.

Ответ: $m = 2$, $n = 4$; $m = 0$, $n = 3$.

Пример 52. Решите уравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$ в целых числах.

Решение. Представим исходное уравнение в виде $(x^5 - 1)/(x - 1) = y^2$, из которого легко подбирается решение. Докажем, что других решений нет. Исходное уравнение представим в виде $(x)(x + 1)(x^2 + 1) = y^2 - 1$. Справа стоит разность квадратов нечетных чисел, которая всегда делится на 8, а слева выражение не делится на 8.

Ответ: $x = 3$; $y = 11$.

Пример 53. Решите в целых числах уравнение $3^n + 8 = x^2$ (ЕГЭ, 2010).

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде $x^2 = 3^n + 6 + 2 = 3q + 2$, а квадрат целого числа не может равняться такому числу. Раз квадрат целого числа k при делении на 3 дает остаток 0 или 1 (докажем это утверждение: пусть $k = 3t + r$, где $r = 0, 1, 2$. Тогда $k^2 = 9t^2 + 6tr + r^2$, т.е. k^2 и r^2 дают один и тот же остаток, поскольку $r^2 = 0, 1, 4$, то остатки при делении на 3 будут 0 или 1, то $k^2 = 3t$ или $k^2 = 3q + 2$, откуда следует, что квадрат целого числа не может равняться $3q + 2$). Решения подбираем при $n = 0$, $x = \pm 3$.

Ответ: $x = 3$; $n = 0$, $x = -3$; $n = 0$.

Пример 54. Решите уравнение $3^m + 4^n = 5^k$ в натуральных числах.

Решение. Правая часть уравнения должна давать один и тот же остаток при делении на 3. При делении 5^k на 3 остаток равен 1, если k четно, и остаток равен 2, если k нечетно. Докажем это утверждение: пусть $k = 2^t$, тогда $(3 + 2)^{2t} = 3q + 2^{2t}$, а двойка в четной степени дает остаток единица (пусть $2 = 3 - 1$, $2^{2t} = (3 - 1)^{2t} = 3q_1 + 1$). Пусть $k = 2t + 1$, тогда $(3 + 2)^{2t+1} = 3s + 2^{2t+1}$, а двойка в нечетной степени дает остаток два: $2^{2t+1} = (3 - 1)^{2t+1} = 3s_1 + (-1)^{2t+1} = 3s_1 - 1 = 3s_1 + 2 - 3$. А так как левая часть уравнения дает остаток 1, то k должно быть четным. Левая часть уравнения делится на 4 с остатком 1, поэтому число m тоже четное. Поэтому $4^n = 5^k - 3^m = 5^{2k_0} - 3^{2m_0}$, $2^{2n} = (5^{k_0} - 3^{m_0})(5^{k_0} + 3^{m_0})$. Поэтому $5^{k_0} - 3^{m_0} = 2^p$ и $5^{k_0} + 3^{m_0} = 2^q$, где p и q целые неотрицательные числа и $p + q = 2n$. Таким образом, $5^{k_0} = \frac{1}{2}(2^p + 2^q)$ и $3^{m_0} = \frac{1}{2}(2^p + 2^q) = 2^{p-1} - 2^{q-1}$. Значит, число $2^{p-1} - 2^{q-1}$ нечетно, поэтому $p = 1$. Значит, $2^p = 2$ и $3^{m_0} = 2^{q-1} - 1$. Следовательно, число $q - 1$ четно, $q - 1 = 2s$ (чтобы левая часть делилась на 3). Тогда $3^{m_0} = (2^s - 1)(2^s + 1)$ — произведение двух множителей, отличающихся на 2 и являющиеся степенями тройки. Эти множители могут равняться только 1 и 3. Тогда $s = 1$, $2s + 1 = 3$. Таким образом, получаем $m = n = k = 2$.

Ответ: $m = n = k = 2$.

День 28

Задание С6 (окончание)

4.3. Можно рассматривать окончание частей уравнения на одну и ту же цифру

Основной принцип при решении: левая и правая части уравнения в целых числах должны оканчиваться на одну и ту же цифру.

Пример 55. Решите в целых числах уравнение $x^2 = 5y^2 + 3$.

Решение. Очевидно, что $5y^2$ оканчивается на 0 либо на 5, а $5y^2 + 3$ соответственно оканчивается на 3 либо на 8. Нетрудно убедиться, что x^2 может оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6, 9. Значит, левая и правая части исходного уравнения оканчиваются на разные цифры. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: решений нет.

В этом можно убедиться, используя предыдущий метод решения и проверив кратность частей уравнения на 5.

4.4. Метод оценки

Основной принцип: сведение уравнения в целых числах к уравнению с очевидной оценкой. В большинстве случаев представляет собой сведение к неотрицательному выражению или к их сумме.

Пример 56. Решите в целых числах уравнение $5x^4 - 40x^2 + 2y^6 - 32y^3 = -208$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение $5(x^4 - 8x^2 + 16) + 2(y^6 - 16y^3 + 64) = 0$. Воспользовавшись формулами сокращенного умножения, получим: $5(x^2 - 4)^2 + 2(y^3 - 8)^2 = 0$. Так как $5(x^2 - 4)^2 \geqslant 0$ и $2(y^3 - 8)^2 \geqslant 0$, следовательно, решение возможно лишь при $5(x^2 - 4)^2 = 0$ и $2(y^3 - 8)^2 = 0$, или $x^2 - 4 = 0$, $y^3 - 8 = 0$, т.е. $x = \pm 2$; $y = 2$.

Ответ: $x = \{-2;\ 2\}$, $y = \{2\}$.

4.5. Решение уравнений как квадратное относительно одной из переменных (соответственно, для квадратных и сходных с ними уравнений).

Пример 57. Решите в натуральных числах уравнение

$$2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36.$$

Решение: Решим квадратное уравнение относительно k: $2k^2 + (7 - 2m)k - 3m - 36 = 0$, $D = 49 - 28m + 4m^2 + 24m + 288 = 4m^2 - 4m + 337$; $k_1 = \dfrac{-2m - 7 \pm \sqrt{4m^2 - 4m + 337}}{4}$, но так как k, $2m - 7$ — целые числа (k, m — натуральные по условию) $\Rightarrow \sqrt{4m^2 - 4m + 337}$ — является целым числом.

Пусть $L = \sqrt{4m^2 - 4m + 337}$, $L > 0$, L — целое. Тогда $L^2 = 4m^2 - 4m + 337$.

Решим квадратное уравнение относительно m: $4m^2 - 4m + 337 - L^2 = 0$, $D = 4 + 4L^2 - 1348 = 4L^2 - 1344$, $4m_1 = 2 + \sqrt{L^2 - 336}$; $4m_2 = 2 - \sqrt{L^2 - 336}$, но так как $4m$ — натуральное число (m — натуральное по условию) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{L^2 - 336}$ — является целым числом. Пусть $N = \sqrt{L^2 - 336}$, $N > 0$, N — целое. Тогда $N^2 = L^2 - 336$. И получаем выражение $(L - N)(L + N) = 336$, решаем это уравнение в натуральных числах и с помощью L и N находим k и m — получаем: $k = 9$, $m = 9$.

Ответ: $k = 9$, $m = 9$.

5. Разные задачи на нелинейные уравнения в целых числах

Пример 58. Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа A за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа B за несколько рейсов, причем в этом случае число рейсов каждого автобуса типа B будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа A. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа B входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа A? (ЕГЭ, 2010).

Решение. Пусть в автобус типа B входит k человек, а в автобус типа A входит $k + 7$ человек, и пусть каждый из трех автобусов типа B сделает по m рейсов, а каждый из двух автобусов типа A по $m + 1$ рейсов. Так как в обоих случаях автобусы перевезут одно и то же количество детей, получаем уравнение: $3km = 2(k + 7)(m + 1)$; $km = 14m + 2k + 14$; $(m - 2)(k - 14) = 42$. Делители числа 42 — 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. Перебор всех делителей дает восемь систем, решая которые получаем все возможные решения для k и m: (15, 44), (16, 23), (17, 16), (20, 9), (21, 8), (28, 5), (35, 4), (56, 3). Для каждой пары находим количество перевозимых детей, равные $3km$: 1980, 1104, 816, 540, 420, 420, 504. Из них наибольшее — 1980 детей.

Ответ: 1980.

Пример 59. Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 шарика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

Решение. Пусть в каждой коробке лежит по 3 пакетика, и таких коробок пусть будет x, а в каждом пакетике находится по n шариков. Во втором случае коробок будет $x + 2$, пакетиков в коробке 2, а шариков в пакетике $n + 3$. Из условия задачи получаем $3nx = 2(n + 3)(x + 2)$, $n = \dfrac{6x + 12}{x - 4} = 6 + \dfrac{36}{x - 4}$. Числа x, n натуральные, поэтому 36 должно делиться на $x - 4$. Перебор делителей числа 36 — 1, 2, 3, 6, 12, 18, 36 дает решение $x = 40$, $3nx = 840$.

Ответ: 840.

Пример 60. Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 2 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 5 шариков меньше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 3 пакетика, а коробок потребуется на 2 меньше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

Решение. Пусть в каждой коробке лежит по 2 пакетика и таких коробок пусть будет x, а в каждом пакетике находится по n шариков. Во втором случае коробок будет $x - 2$, пакетиков в коробке 3, а шариков в пакетике $n - 5$. Из условия задачи получаем $2nx = 3(n - 5)(x - 2)$, $n = \dfrac{15x - 30}{x - 6} = 15 + \dfrac{60}{x - 6}$.

Числа x, n натуральные, поэтому 60 должно делиться на $x - 6$. Перебор делителей числа 60 — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 20, 30 дает решение $x = 36$, $2nx = 1224$.

Ответ: 1224.

Пример 61. Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 1000 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное при указанных условиях значение b.

Решение. Пусть $a = (\alpha)^2$, $b = (\beta)^2$, $c = (\gamma)^2$, $\alpha < \beta < \gamma$, $\alpha \geqslant 32$. Пусть также $\beta = \alpha + d$, где d — некоторое число, $d \in \boldsymbol{Z}$. Из свойства арифметической прогрессии $2b = a + c$, $2(\alpha + d)^2 = (\alpha)^2 + (\gamma)^2$, $(\alpha)^2 + 4\alpha d + 4d^2 - (\gamma)^2 = 2d^2$, $(\alpha + \gamma + 2d)(\alpha - \gamma + 2d) = 2d^2$. Пусть $\alpha + \gamma + 2d = p$, $\alpha - \gamma + 2d = q$. Так как разность $p - q = 2\gamma$, а произведение $pq = 2d^2$, то p и q числа не только одинаковой четности, но оба — четные. Пусть $p = 2n$, $q = 2m;$ $n, m \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $d = 2t$, $t \in \boldsymbol{Z}$.

Таким образом, имеем $\begin{cases} \alpha + 2d = \dfrac{p+q}{2} = m + n, \\ \gamma = \dfrac{p-q}{2} = n - m, \\ nm = 2t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = m + n - 4t \geqslant 32, \\ \gamma = n - m \geqslant 34, \\ nm = 2t^2. \end{cases}$ По условию задачи надо найти наименьшее значение $\beta = n + m - 2t$. Так как $m \geqslant 1$, $n \geqslant 35$, то $2t^2 = nm \geqslant 35$. Отсюда, $t \geqslant 5$. Так как $\beta = \alpha + 2t \geqslant 32 + 2t$. Рассматриваем случаи:

1) $t = 5$. Тогда $\begin{cases} nm = 50,\ n + m \geqslant 52, \\ n - m \geqslant 34,\ n \geqslant 35,\ m \geqslant 1. \end{cases}$ Отсюда $n = 50$, $m = 1$, $\beta = 51 - 10 = 41 \Rightarrow \varnothing$, так как $\beta \geqslant 32 + 2t$.

2) $t = 6$. Тогда $\begin{cases} nm = 72,\ n + m \geqslant 56, \\ n - m \geqslant 34,\ n \geqslant 35,\ m \geqslant 1. \end{cases}$ Отсюда $n = 72$, $m = 1$, $\beta = 73 - 12 = 61$. Или $n = 36$, $m = 2$, $\beta = 38 - 12 = 26 \Rightarrow \varnothing$.

3) $t = 7$. Тогда $\begin{cases} nm = 98,\ n + m \geqslant 60, \\ n - m \geqslant 34,\ n \geqslant 35,\ m \geqslant 1. \end{cases}$ Отсюда $n = 98$, $m = 1$, $\beta = 99 - 14 = 85$. Или $n = 49$, $m = 2$, $\beta = 51 - 14 = 37 \Rightarrow \varnothing$.

4) $t = 8$. Тогда $\begin{cases} nm = 128,\ n + m \geqslant 64, \\ n - m \geqslant 34,\ n \geqslant 35,\ m \geqslant 1. \end{cases}$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} n = 128,\ m = 1, \\ n = 64,\ m = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \beta = 113, \\ \beta = 50. \end{array}\right.$

5) $t = 9$. Тогда $\begin{cases} nm = 162,\ n + m \geqslant 68, \\ n - m \geqslant 34,\ n \geqslant 35,\ m \geqslant 1. \end{cases}$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} n = 162,\ m = 1, \\ n = 81,\ m = 2 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \beta = 145, \\ \beta = 65. \end{array}\right.$ Значит, наименьшее значение $b = (\beta)^2 = (50)^2 = 2500$, при этом $a = 32^2$; $c = 62^2$.

Ответ: 2500.

Пример 62. Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное при указанных условиях значение b.

Решение. Пусть $a = (\alpha)^2$, $b = (\beta)^2$, $c = (\gamma)^2$, $\alpha < \beta < \gamma$, $\alpha \geqslant 23$. Пусть $\beta = a + d$, где d — некоторое число, $d \in \boldsymbol{Z}$. Из свойства арифметической прогрессии $2b = a + c$, $2(\alpha + d)^2 = (\alpha)^2 + (\gamma)^2$, $(\alpha)^2 + 4\alpha d + 4d^2 - (\gamma)^2 = 2d^2$, $(\alpha + \gamma + 2d)(\alpha - \gamma + 2d) = 2d^2$. Пусть $\alpha + \gamma + 2d = p$, $\alpha - \gamma + 2d = q$. Так как разность $p - q = 2\gamma$, а произведение $pq = 2d^2$, то p и q числа не только одинаковой четности, но оба — четные. Пусть $p = 2n$, $q = 2m$; $n, m \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $d = 2t$, $t \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, имеем $\begin{cases} \alpha + 2d = \dfrac{p+q}{2} = m + n, \\ \gamma = \dfrac{p-q}{2} = n - m, \\ nm = 2t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = m + n - 4t \geqslant 23, \\ \gamma = n - m \geqslant 25, \\ nm = 2t^2. \end{cases}$ По условию задачи надо найти наименьшее значение $\beta = n + m - 2t$. Так как $m \geqslant 1$, $n \geqslant 26$, то $2t^2 = nm \geqslant 26$. Отсюда, $t \geqslant 4$. Так как $\beta = \alpha + 2t \geqslant 23 + 2t$. Рассматриваем случаи:

1) $t = 4$. Тогда $\begin{cases} nm = 32,\ n + m \geqslant 39, \\ n - m \geqslant 25,\ n \geqslant 26,\ m \geqslant 1. \end{cases}$ Отсюда $n = 32$, $m = 1$, $\beta = 33 - 8 = 25 \Rightarrow \varnothing$.

2) $t = 5$. Тогда $\begin{cases} nm = 50,\ n + m \geqslant 43, \\ n - m \geqslant 25,\ n \geqslant 26,\ m \geqslant 1. \end{cases}$ Отсюда $n = 50$, $m = 1$, $\beta = 41$.

3) $t = 6$. Тогда $\begin{cases} nm = 72,\ n + m \geqslant 47, \\ n - m \geqslant 25,\ n \geqslant 26,\ m \geqslant 1. \end{cases}$ Отсюда $\beta = 61$.

4) $t = 7$. Тогда $\begin{cases} nm = 98,\ n + m \geqslant 51, \\ n - m \geqslant 25,\ n \geqslant 26,\ m \geqslant 1. \end{cases}$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} n = 98,\ m = 1, \\ n = 49,\ m = 2 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \beta = 85, \\ \beta = 37. \end{array}\right.$

5) $t = 8$. Тогда $\beta \geqslant 23 + 2t \geqslant 23 + 16 = 39$. Значит, наименьшее значение $b = (\beta)^2 = (37)^2 = 1369$, при этом $a = 23^2$; $c = 47^2$.

Ответ: 1369.

Пример 63. Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, ... , a_N и $b_1 = 9$, $b_2 = 14$, ... , b_M совпадают, а сумма всех совпадающих, (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Решение. Пусть $a_m = 5 + 3(m - 1)$, $m = 1, ..., N$ и $b_k = 9 + 5(k - 1)$, $k = 1, ... , M$.

Общие члены прогрессий удовлетворяют уравнению $5 + 3(m - 1) = 9 + 5 \times (k - 1) \Leftrightarrow 3m = 5k + 2$. Так как левая часть полученного уравнения делится на 3, то правая часть тоже должна делится на 3. Поэтому пусть $k = 3t \pm 1$, подставляя эти значения, получаем, что $k = 3t - 1$, $3m = 5(3t - 1) + 2$, $3m = 15t - 3$, где $1 \leqslant t \leqslant L$. Общие члены двух прогрессий сами составляют арифметическую прогрессию с первым членом, равным 14, разностью, равной 15, а сумма всех членов этой прогрессии равна 815. $815 = \dfrac{(28 + 15(L-1))L}{2}$, $15L^2 + 13L - 1630 = 0$, $L = 10$. Таким образом, получаем, что $M = 3L - 1 = 29$; $N = 5L - 1 = 49$.

Ответ: 49 и 29.

Пример 64. Решить в целых числах уравнение $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.

Решение. Пусть $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$, где x, y, z — целые числа. Тогда число x четно. После замены $x = 2x_1$ получаем уравнение $8(x_1)^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$. Сократим на 2: $4(x_1)^3 - y^3 - 2z^3 = 0$. Значит, число y четно. После замены $y = 2y_1$ получаем уравнение $4x^3 - 8y^3 - 2z^3 = 0$. Снова сократим на 2: $2x^3 - 4y^3 - z^3 = 0$. Значит z четно. После замены $z = 2z_1$ получаем уравнение $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$, которое имеет такой же вид, как и исходное уравнение. Поэтому снова можно доказать, что числа x_1, y_1, z_1 четны и т. д. Но это возможно лишь в случае, когда $x = y = z = 0$.

Ответ: $x = y = z = 0$.

Пример 65. Решить в целых числах $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$. (ЕГЭ, 2010).

Решение. Преобразуем исходное уравнение $y(2x - 1) = 2x^2 + 9x - 2$, так как x — целое, то $2x - 1$ не равно 0, поэтому выразим y через x: $y = (2x^2 + 9x - 2)/(2x - 1) = x + 5 + 3/(2x - 1)$. Поскольку x и y — целые числа, то $3/(2x - 1)$ тоже целое. Значит $2x - 1$ — делитель 3, т. е. получаем 1) $2x - 1 = 1$, $x = 1$; 2) $2x - 1 = -1$, $x = 0$; 3) $2x - 1 = 3$, $x = 2$; 4) $2x - 1 = -3$, $x = -1$.

Ответ: (1; 9), (2; 8), (0; 2), (−1; 3).

Пример 66. Решите в целых числах уравнение $1 + 2^k + 2^{2k+1} = n^2$.

Решение. При $k = 1$ получаем уравнение $n^2 = 11$, которое не имеет решений в целых числах.

Если $k = 0$, то $n = \pm 2$.

При $k = -1$ уравнение не имеет решений в целых числах.

При $k < -1$ уравнение не имеет решений в целых числах, так как левая часть данного уравнения принимает значения из промежутка (1; 2).

Пусть $k \geqslant 2$. Четные степени двойки при делении на 3 дают остаток 1, нечетные степени дают остаток 2. Отсюда следует, что $1 + 2^{2k+1}$ делится на 3 без остатка, а число $1 + 2^k + 2^{2k+1}$ при делении на 3 дает такой же остаток, как и 2^k. С другой стороны, квадраты целых чисел не могут давать при делении на 3 остаток 2. Таким образом, k — четное. Положим $k = 2d$, $d \in N$ и перепишем уравнение в виде $1 + 4^d + 2 \cdot 4^{2d} = n^2$. Отсюда следует, что n нечетное, т. е. $n = 2x + 1$, $x \in N$, Получаем уравнение $1 + 4^d + 2 \cdot 4^{2d} = 4x^2 + 4x + 1$; $4^d(1 + 2 \cdot 4^d) = 4(x^2 + x)$; $4^y(1 + 8 \cdot 4^y) = x(1 + x)$, где $y = d - 1$, причем $y > 0$, так как при $d = 1$, т.е. $y = 0$, последнее уравнение не имеет решений.

Из чисел x и $1 + x$ только одно четное, и оно делится на 4^y.

Если $x = m4^y$ (причем m — нечетное, $m \in N$), то имеем $4^y(1 + 8 \cdot 4^y) = m \cdot 4^y(m4^y + 1)$; $1 + 8 \cdot 4^y = m^2 4^y + m$; $(8 - m^2)4^y = m - 1$. Сравнивая знаки левой и правой частей последнего уравнения, получаем одно нечетное $m = 1$, которое не является решением.

Если $x + 1 = m \cdot 4^y$ (причем m — нечетное, $m \in N$), то имеем $4^y(1 + 8 \cdot 4^y) = (m \cdot 4^y - 1)m \cdot 4^y$; $1 + 8 \cdot 4^y = m^2 4^y - m$; $(m^2 - 8)4^y = m + 1$. Выражение $m^2 - 8$ неотрицательно при натуральных $m \geqslant 3$. Если $m = 3$, то $y = 1$ (что приводит к решению исходного уравнения $k = 4$; $n = \pm 23$). При натуральных $m \geqslant 4$ будет $m^2 - 8 > m + 1$ и решений нет.

Ответ: $k = 0$; $n = \pm 2$ или $k = 4$; $n = \pm 23$.

Пример 67. Каждый из двух различных корней квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + (3a + 10)x + 5b - 14$ и его значение при $x = 1$ являются простыми числами. Найдите a, b и корни трехчлена $f(x)$. (ЕГЭ, 2010).

Решение. Обозначим $3a + 10 = p$, $5b - 14 = q$. Тогда значение трехчлена при $x = 1$ есть $f(1) = 1 + p + q$. Пусть x_1 и x_2 — корни трехчлена, $x_1 < x_2$. Воспользовавшись формулами Виета $x_1 \cdot x_2 = q$, $x_2 + x_1 = -p$, запишем выражение $f(1)$ в виде $f(1) = 1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2$ и преобразуем его. Разложив правую часть на множители: $f(1) = 1 - x_1 + x_2(x_1 - 1) = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$.

Так как $f(1)$, x_1, x_2 по условию являются простыми числами, то числа $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$ — натуральные и меньшее из них должно быть равным 1. Следовательно, $x_1 - 1 = 1$, откуда $x_1 = 2$. Тогда $f(1) = x_2 - 1$, т.е. $x_2 - 1 - 1$ и x_2 — два последовательных простых числа, что возможно только, если этими числами являются 2 и 3. Итак, $x_2 = 3$, поэтому $p = 3a + 10 = -5$, $q = 5b - 14 = 6$. Из двух последних равенств находим $a = -5$, $b = 4$.

Ответ: $a = -5$, $b = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Пример 68. Найдите все такие целые a и b, что корни уравнения $x^3 + (2a + 9)x + 3b + 5 = 0$ являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a + 9$ и $3b + 5$ — простыми числами. (ЕГЭ, 2010).

Решение. Обозначим корни квадратного уравнения через x_1 и x_2. По теореме Виета $x_1x_2 = 3b + 5$ — простое число, поэтому $x_1 = \pm 1$, $x_2 = \pm(3b + 5)$. Тогда $2a + 9 = \pm(3b + 6) = \pm 3(b + 2)$. Так как $2a + 9$ — простое число, то $2a + 9 = 3$, $a = -3$. Тогда $b + 2 = 1$, $b = -1$.

Ответ: $a = -5$, $b = 4$.

Пример 69. Найдите все пары натуральных k и n таких, что $k < n$ и $\left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{k}\right)^n$. (ЕГЭ, 2010).

Решение. Исходное уравнение приводится к виду $(n)^k = (k)^n$, и таким образом, мы получаем условие предыдущей задачи.

Ответ: $k = 2$, $n = 4$.

Пример 70. Найдите все значения параметра, при каждом из которых среди значений функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$ есть ровно одно целое число.

Решение. Функция определена и непрерывна для всех действительных x. Если выделим целую часть $y = 1 - \dfrac{2x + 6 - a}{6 + x^2}$, то видно, что для любого значения параметра единица входит в множество значений y. Чтобы единица была ровно одним целым числом, нужно, чтобы $y \in (0; 2)$. Таким образом получаем, что $0 < 1 - \dfrac{2x + 6 - a}{6 + x^2} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + a > 0, \\ x^2 + 2x + 12 - a > 0. \end{cases}$ Поскольку эти неравенства должны выполняться при всех значениях x, то дискриминанты у этих неравенств должна быть одновременно меньше нуля. Дискриминант первого неравенства $1 - a < 0$ и дискриминант второго неравенства $1 - 12 + a < 0$, решая систему из полученных неравенств получаем $1 < a < 11$.

Ответ: $1 < a < 11$.

Пример 71. Найдите все пары (x, y) целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств: $\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$ (ЕГЭ, 2010).

Решение. Выделяя полные квадраты, получим

$\begin{cases} (x - 9)^2 + (y + 10)^2 < 15, \\ (x - 16)^2 + (y + 6)^2 < 21, \\ x, y \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$ Из первого уравнения получаем, что $(x - 9)^2 < 15$, x, удовлетворяющие этому неравенству, могут быть равны 8, 10, 11, 7, 6, 12, т. е. $6 \leqslant x \leqslant 12$. Аналогично из второго неравенства получаем $(x - 16)^2 < 21$, ($x = 15, 17, 18, 14, 13, 19, 12, 20$) или $12 \leqslant x \leqslant 20$, откуда $x = 12$. Теперь подставляя полученное значение x в систему, получим $\begin{cases} (y + 10)^2 < 6, \\ (y + 6)^2 < 5, \\ y \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$ Из первого неравенства получаем, что y, удовлетворяющие этому неравенству, могут быть равны -7, -8; из второго неравенства получаем возможные значения $y = -5, -8$; откуда $y = -8$.

Ответ: $(-12; -8)$.

Пример 72. Найдите все пары (x, y) целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств: $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < \dfrac{15}{2}. \end{cases}$ (ЕГЭ, 2010).

Решение. Выделим полные квадраты $\begin{cases} (x + 6)^2 + (y - 7)^2 < \dfrac{3}{2}, \\ x + 2y < \dfrac{15}{2}, \\ x, y \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$ Учитывая, что оба слагаемых первого неравенства могут быть равны нулю или один нулю, а второй равен единице, подбираем возможные решения: $(-6; 7)$, $(-5; 7)$, $(-7; 7)$, $(-6; 6)$, $(-6; 8)$. Но, учитывая второе неравенство, получаем решение: $(-7; 7)$, $(-6; 6)$.

Ответ: $(-7; 7)$, $(-6; 6)$.

6. Задачи с факториалами

Пример 73. Решить в натуральных числах уравнение $n! + 4n - 9 = k^2$. (1)

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде $n! + 4n = k^2 + 9$. Правая часть полученного уравнения представляет собой сумму квадратов двух чисел (одно из которых нечетное — 3^2), которая при делении на 4 дает остатки 1 или 2. Левая часть уравнения делится на 4 при $n \geqslant 4$, а правая дает остаток. Следовательно, уравнение (1) при $n \geqslant 4$ решений не имеет. Проверка справедливости уравнения (1) для $n < 4$, дает решения.

Ответ: $n = 2$; $k = 1$, $n = 3$; $k = 3$.

Пример 74. Решить в натуральных числах уравнение $n! - 3n + 29 = k^2$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде $n! - 3n + 30 = k^2 + 1$.

Левая часть делится на 3, а правая часть нет (остаток равен 1, 2).

Ответ: $n = 2$; $k = \pm 5$.

Пример 75. Решить в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 3 = k^2$.

Решение. В этой задаче учитываем, что квадрат целого числа не может равняться числу $5t \pm 2$. Докажем это: пусть целое число $m = 5t + r$, где $r = 0$, 1, 2, 3, 4. Тогда $m^2 = 25t^2 + 10t + r^2 = 5q + r^2$, где $r^2 = 0$, 1, 4, 9, 16, откуда получаем наше утверждение.

Ответ: $n = 1$; $k = 3$.

В следующих задачах учитывается то, что квадрат целого числа не может оканчиваться на 2, 3, 7, 8. Факториал числа большего или равного пяти оканчивается на нуль.

Пример 76. Решить в целых числах уравнение $12 \cdot n! + 11^n + 2 = k^2$.

Решение. При $n \geqslant 5$, факториал оканчивается на нуль, а любая степень 11 оканчивается на единицу, получаем, таким образом, что левая часть исходного уравнения оканчивается на 3, чего быть не может. Проверка при всех $n < 5$ дает ответ: при $n = 1$ левая часть исходного уравнения равна 25, откуда получаем ответ, при $n = 2$ получаем 147, при $n = 3$, 1405; при $n = 4$, 14931.

Ответ: $n = 1$, $k = \pm 5$.

Дополнительные задания

26. Решите в целых числах уравнение $n! + 6^n + 11 = k^2$.

27. Решите в целых числах уравнение $n! + 6^n + 2 = k^2$.

28. Решите в натуральных числах уравнение $n! + 5^n + 13 = k^2$.

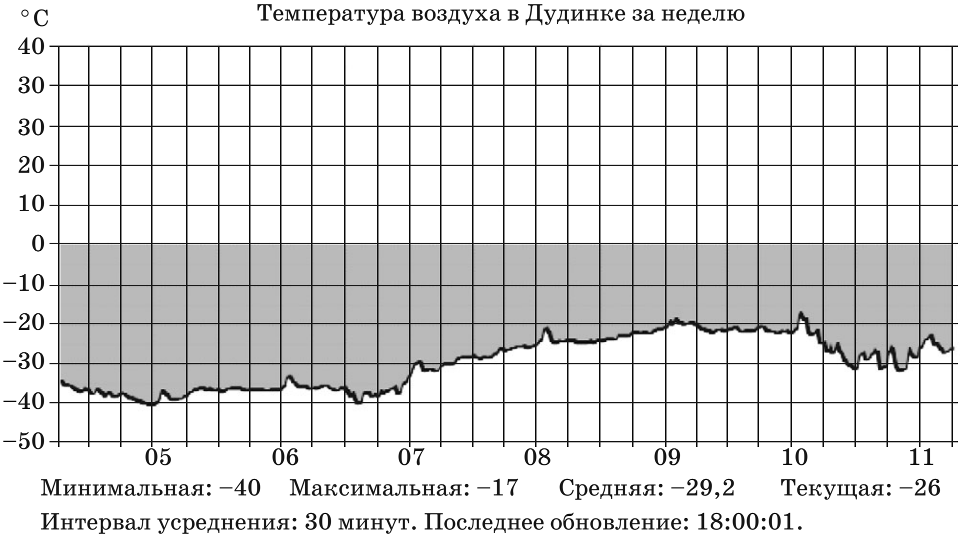
День 29

Контрольная работа № 2

Часть 1

B1. До повышения цены на 100 рублей можно было купить 5 тетрадей. А после повышения цены только 4 тетради. На сколько процентов повысились цены? (Ответ дайте в процентах.)

B2. Какого числа была минимальная температура воздуха в Дудинке?



B3. Решите уравнение $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3}$.

B4. Острые углы прямоугольного треугольника ABC равны 15° и 75°. Определите острый угол между гипотенузой AB и медианой CM, проведенной из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

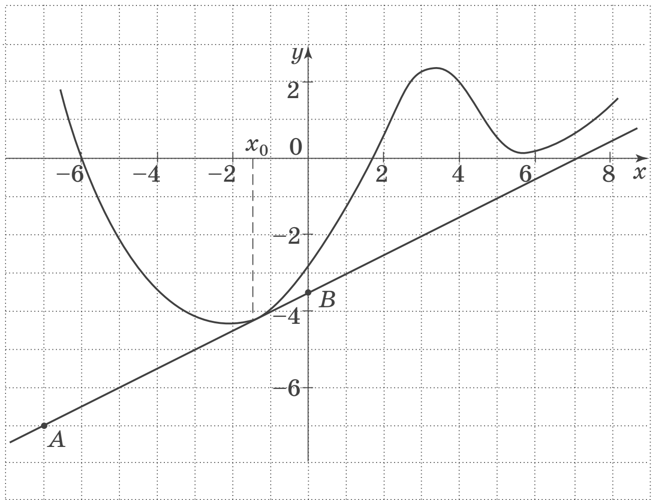
B5. Для проведения корпоративного мероприятия на 55 человек менеджеру требуется выбрать один из ресторанов. Возможны три варианта. В каком ресторане стоимость мероприятия наименьшая?

Ресторан	Стоимость меню на 1 человека	Стоимость обслуживания в % от стоимости меню	Дополнительные условия
1	3200 руб.	8%	
2	3250 руб.	5%	
3	3550 руб.	10%	При стоимости меню более 190 тыс. обслуживание бесплатное

B6. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты: (2; 1), (6; 1), (5; 5), (6; 5).

B7. Найдите значение выражения $2\log_3 162 - \log_3 4$.

B8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



B9. В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 7 и отстоит от других боковых ребер на 5 и 12. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.

B10. Как нужно изменить напряжение U в свинцовом проводнике длиной $l = 2$м, чтобы сила тока I в нем изменилась на 2А? Зависимость напряжения U и силы тока в проводнике выражается формулой $U = \frac{I \cdot \rho \cdot l}{S}$. Удельное сопротивление свинца $\rho = 0{,}21\ \frac{\text{ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$; площадь поперечного сечения $S = 0{,}3$ мм^2.

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{4}$ на отрезке [2; 5].

B12. За 15 мин на одном станке можно изготовить на 1 деталь больше, чем на другом, поэтому при изготовлении на нем партии из 120 деталей времени затрачивается на 2 часа меньше. Сколько деталей за 1 час можно изготовить на станке с меньшей производительностью?

Часть 2

C1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{(y-2)\left(\cos 3x - \cos x - \sqrt{3}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)}{\sqrt{\sin x}} = 0, \\ y + \sqrt{3}\ \sin 2x = 0. \end{cases}$

C2. Сторона основания треугольной пирамиды $ABCT$ равна $\frac{18}{\sqrt{3}}$. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $45°$. Найдите расстояние между ребрами CB и AT.

C3. Решите неравенство $\dfrac{\log_4(7-x)-\log_{14}(7-x)}{\log_{14}(x-5)-\log_{49}(x-5)} \leqslant \log_{49}4$.

Ответы к контрольной работе

Номера заданий	B1	B2	B3	B4
	25	5	−2	30

Номера заданий	B5	B6	B7	B8
	2	10	8	0,5

Номера заданий	B9	B10	B11	B12
	210	2,8	2,5	6

Номера заданий	C1	C2	C3
	$\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z};\ \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};\ \frac{3}{2}\right)$	$\frac{9}{\sqrt{2}}$	$(5;\ 6)\cup(6;\ 7)$

День 30

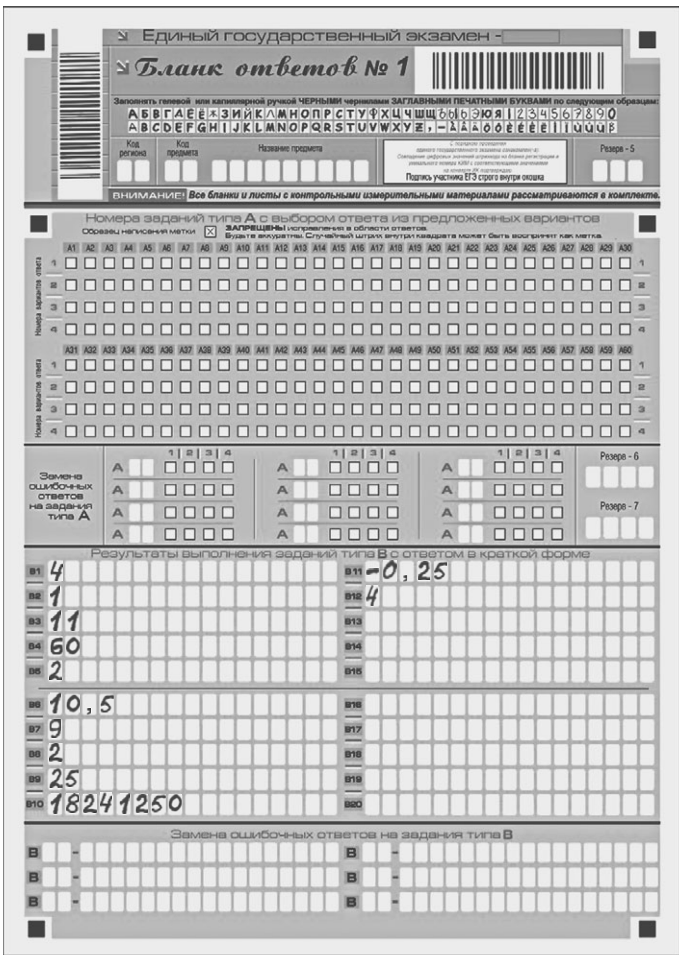
Оформление решений и заполнений экзаменационных бланков

Первая часть работы содержит 12 заданий части В (В1-В12). Ответом на задание должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не надо.

Во второй части представлены 6 заданий (С1-С6), в которых требуется записать полное решение задачи. Задания этой части относятся к заданиям повышенного и высокого уровня сложности. Выполнение заданий части С оценивается экспертами.

Приведем вариант заполнения бланка на примере контрольной работы №1. Впишем в бланк №1 ответы на задания части 1.

В бланк №2 запишем типовое оформление заданий части 2.


Единый государственный экзамен -

Бланк ответов № 1

ВНИМАНИЕ! Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.

Номера заданий типа А с выбором ответа из предложенных вариантов

Замена ошибочных ответов на задания типа А

Результаты выполнения заданий типа В с ответом в краткой форме

B1	4	B11	-0,25
B2	1	B12	4
B3	11	B13	
B4	60	B14	
B5	2	B15	
B6	10,5	B16	
B7	9	B17	
B8	2	B18	
B9	25	B19	
B10	18241250	B20	

Замена ошибочных ответов на задания типа В

Единый государственный экзамен -

Бланк ответов № 2

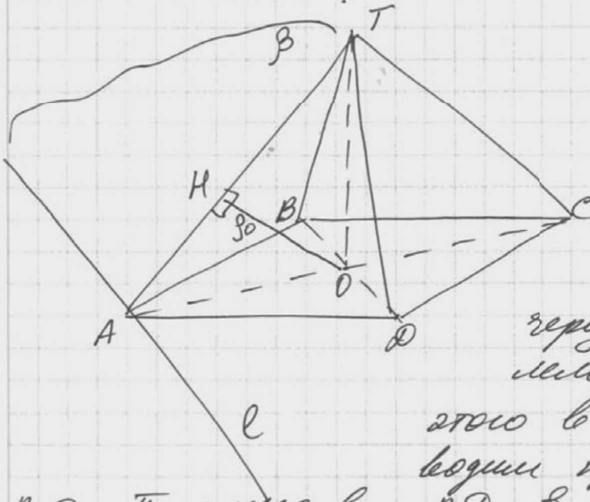
Код региона | Код предмета | Название предмета

Дополнительный бланк ответов № 2 | Лист № 1 | Резерв - 8

Перепишите значения полей "Код региона", "Код предмета", "Название предмета" из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задания типа С, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, С1.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! *Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.*

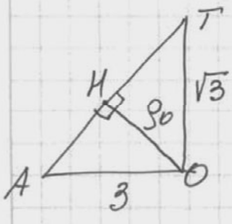
С2. Решение



1) Найдем диагональ квадрата ABCD. AC = 6

2) Из треугольника OTC $OT = \sqrt{3}$. (высота пирамиды.

3) Проведем плоскость через прямую AT параллельно прямой BD. Для этого в плоскости (ABC) проводим прямую l параллельную BD. Прямые l и BD образуют плоскость β (как две пересекающиеся прямые), которая будет параллельна BD (по признаку параллельности прямой и плоскости). $(ABC) \cap \beta = l$. Построим плоскость, перпендикулярную к (ABC) и β. Для этого из т. T опустим перпендикуляр на (ABC); это будет высота пирамиды TO. Затем из т. O проводим перпендикуляр к прямой l. По теореме о $3^х$ перпендикулярах прямые l, AT и AO (проекция AT на (ABC)) будут перпендикулярны друг другу. Из треугольника TOA находим расстояние от т. A до плоскости β. Это будет перпендикуляр из вершины прямого угла треугольника TOA. $\rho_0 = \dfrac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{9+3}} = \dfrac{3}{2}$. Ответ: $\dfrac{3}{2}$.



При недостатке места для ответа используйте оборотную сторону бланка

Единый государственный экзамен -

Бланк ответов № 2

Код региона	Код предмета	Название предмета

Резерв - 8

Дополнительный бланк ответов № 2 | Лист № 1

Перепишите значения полей "Код региона", "Код предмета", "Название предмета" из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задания типа С, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, **С1**.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! *Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.*

С3. Решите неравенство $11^{\log_{\frac{1}{11}}(\log_7 x^2)} < 7^{\log_{\frac{1}{7}}(\log_{11} x^2)}$

Решение: обе части неравенства определены, если $x \neq 0$; $\log_7 x^2 > 0$; $x \neq \pm 1$;
Запишем исходное неравенство в виде
$11^{-\log_{11}(\log_7 x^2)} < 7^{-\log_7(\log_{11} x^2)}$, $11^{\log_{11}(\log_7 x^2)^{-1}} < 7^{\log_7(\log_{11} x^2)^{-1}}$, используя основное логарифмическое тождество, получаем
$\frac{1}{\log_7 x^2} < \frac{1}{\log_{11} x^2}$, перейдем к одному основанию (например к натуральному логарифму) $\frac{\ln 7}{\ln x^2} < \frac{\ln 11}{\ln x^2}$, $\frac{1}{\ln x^2}(\ln 7 - \ln 11) < 0$,
Так как $\ln 7 - \ln 11 < 0$, то $\frac{1}{\ln x^2} > 0$; Ответ:
$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

При недостатке места для ответа используйте оборотную сторону бланка

Единый государственный экзамен -

Бланк ответов № 2

Код региона | Код предмета | Название предмета

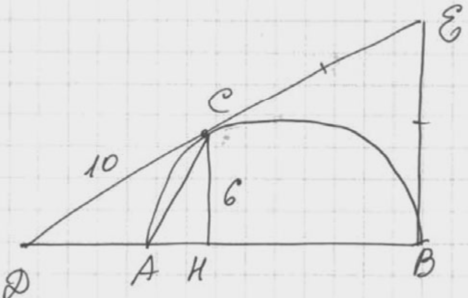
Резерв - 8

Дополнительный бланк ответов № 2 | Лист № 1

Перепишите значения полей "Код региона", "Код предмета", "Название предмета" из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задания типа С, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, С1.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! *Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.*

С4. Решение.



I Из прямоугольного треугольника DCH получим $DH=8$.

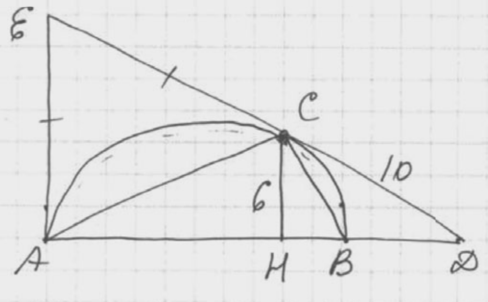
Проведем касательную к окружности в т. B, которая пересекает прямую DC в т. E. $BE \perp AB$; $CE=EB$ (как касательные к окружности, проведенные из одной точки.)

$\triangle DCH \sim \triangle DEB$. $\frac{DC}{DE}=\frac{CH}{EB}$, $\frac{10}{10+CE}=\frac{6}{CE}$, $CE=15$.

$\frac{DC}{DE}=\frac{DH}{DB}$; $\frac{10}{10+CE}=\frac{8}{8+HB}$, $\frac{5}{25}=\frac{4}{8+HB}$, $HB=12$.

Ответ 12.

II



В треугольнике CHD, $HD=8$.; $AE \perp AB$, $AE=EC$

$\triangle CHD \sim \triangle AED$

$\frac{10+CE}{CE}=\frac{10}{6}$, $CE=15$.

$\frac{ED}{AD}=\frac{CE+10}{AH+8}=\frac{10}{8}$,

$AH=12$. В треугольнике ACB $CH^2=AH\cdot HB$,

$HB=3$. Ответ 3.

При недостатке места для ответа используйте оборотную сторону бланка

Ответы к дополнительным заданиям

Задание B1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
	255,3	120	3,75	21	6	4	7,10

Задание B2

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
	4	8	90	–4	3	5	3

Задание B3

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	6	0	–3	5	2	2	7	0	0

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	3	1	2	2	3	–4	5	0,75	–5

Задание B4

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	16	3,5	50	7	64	18	80	0,8	0,75	0,8

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	0,5	3,6	6,4	0,8	0,8	0,2	4,5	5	3,2	1

Номер задания	21	22	23	24
	36	5	2	18

Задание B5

Номер задания	1	2	3	4	5	6
	900	2,5	67,5	9120	2	1800

Задание B6

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	7,5	8	6	18	29	8	16	17,5	12

Задание B7

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
	23	5	8	−2	3	−3	0,6	2

Задание B8

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
	0,5	−1,4	−0,5	0,5	3	2	6	8

Задание B9

Номера заданий	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	21	6,25	7	210	10	45	38	2,25	12	120

Номера заданий	11	12	13	14	15	16	17	18
	336	2	500	6,25	7	294	368	400

Задание B10

Номер задания	1	2	3	4	5	6
	99,2	0,5	6	42	40	45 000

Задание B11

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
	−6	19	1	−7	1,75	4	1	−10

Задание B12

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	80	60	50	300	40	3	96	15	0,05	39

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	18	80	3,2	23,5	56	25	2	34	56

Задание С1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
	$[-4; 2]$	$\frac{1}{4}; 3$	$\{1; 5\}$	$\frac{5}{3}$	74	25	$\left\{\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$	$\left\{\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$

Номер задания	9	10	11	12	13	14
	3	$\{-3; 1\}$	$\{1; 5\}$	$8/3$	$[49; 98]$	$x \in [32; \infty)$

Номер задания	15	16	17
	$x \in \left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \boldsymbol{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$	$x \in \left\{0; \frac{\pi}{3}\right\}$	$x \in \left\{-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right\}$

Номер задания	18	19
	$x \in \left\{\frac{\pi}{8}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right\}$	$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}\right)^2, \\ \left(\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}\right)^2, \\ \left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi m}{2}\right)^2, \end{array}\right. \quad k, n, m \in \boldsymbol{Z}; k, n, m \geqslant 0$

Номер задания	20	21	22	23	24
	$\{3\}$	$\{-3; 1\}$	$\{1\}$	$\left\{-1; \frac{7}{2}\right\}$	$\{0; 10\}$

Номер задания	25	26
	$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n; n \in \boldsymbol{Z}$	$\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}\right\}, k, n \in \boldsymbol{Z}; \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right\}$

Номер задания	27	28	29
	$\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right\} \cup \left\{(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}\right\},$ $k, n \in \boldsymbol{Z}$	$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ \frac{-\pi}{3} - 2\pi m, \\ \frac{-2\pi}{3} + 2\pi l, \end{array}\right. \quad k, n, l, m \in \boldsymbol{Z}; k, n, l, m \geqslant 0$	$\{6\}$

Номер задания	30	31
	$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}\right)^2, \\ \left(\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}\right)^2, \\ \left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi m}{2}\right)^2,\end{array}\right.$ $k, n, m \in \boldsymbol{Z}; k, n, m \geqslant 0$	$\left[\begin{array}{l}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+k}, \\ \pm\sqrt{2n}, \\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}+2m},\end{array}\right.$ $k, n, m \in \boldsymbol{Z}; k, n, m \geqslant 0$

Номер задания	32	33	34
	$(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n; n \in \boldsymbol{Z}$	$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n \in \boldsymbol{Z}$	$\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}\right\} \cup \left\{\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right\}$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$

Номер задания	35	36	37
	$(1; 1) \cup (1; -1)$	$x = 6; y = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$	$(x = 1; y = 3/2)$; $(x = -5; y = 15/2)$

Номер задания	38	39	40
	$(3; 5) \cup \left(\frac{-9}{2}; \frac{15}{2}\right)$	$(5;5); (-14;4)$	$(2; 6) \cup \left(\frac{5}{2}; \frac{79}{4}\right)$

Номер задания	41	42
	$\left(\frac{2\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right), n \in \boldsymbol{Z}$	$x = \pi + 2\pi k, y = -2; x = -\frac{\pi}{3}+2\pi n, y = 1; k, n \in \boldsymbol{Z}$

Номер задания	43	44	45
	$\left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n; 2\right), n \in \boldsymbol{Z}$	$\left(\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k; -3\right), k \in \boldsymbol{Z}$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; 1\right)$

Задание С2

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	60	$\sqrt{3}$	18	$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$	1 : 5	1	60°	9	30°

Номер задания	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	1:1:1	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	1	4	2	6	3	$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$	3	$\frac{3}{2}$	5	$\frac{\pi}{3}$

Задание C3

Номер задания	1	2	3	4	5
	$[-3; 5]$	$(-\infty; -4) \cup \left(-3; -\frac{7}{3}\right)$	$(-1; 2) \cup \left[\frac{17}{7}; 3\right)$	$(-3; +\infty)\setminus\{3\}$	$[2; 3)$

Номер задания	6	7	8	9	10
	$[0; 2) \cup$ $\cup (2; +\infty)$	$[-3; 5) \cup$ $\cup (5; +\infty)$	$(-\infty; -3) \cup [-2; 0) \cup$ $\cup (0; +\infty)$	$[-2; 2]$	$[2; 3) \cup \{-1\}$

Номер задания	11	12	13	14	15
	$(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup$ $\cup (6; +\infty)$	$(-\infty; -5) \cup$ $\cup (-5; -2) \cup$ $\cup (1; +\infty)$	$(-\infty; -5) \cup$ $\cup (-5; +\infty)$	$(-3; -1)$	$[-3; 3) \cup$ $\cup (3; 5]$

Номер задания	16	17	18	19	20
	$(-\infty; -5) \cup$ $\cup (-5; -2) \cup [1; 5]$	$[-2; 2) \cup$ $\cup (2; +\infty)$	$(-\infty; 2) \cup \{4\}$	$\left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup$ $\cup (2; 3)$	$(\log_4 3; 1) \cup$ $\cup (1; +\infty)$

Номер задания	21	22	23	24	25
	$\left(1; \frac{7}{6}\right)$	$\{2\} \cup [3; 5]$	$\{6\} \cup (-\infty; 5]$	$(-\infty; -3] \cup$ $\cup [6; 7)$	$(0; 1] \cup [9; 12) \cup$ $\cup (12; 13] \cup \{5\} \cup \{3\}$

Номер задания	26	27	28	29	30
	$[1; +\infty)$	$[2; 3) \cup \left(\frac{33}{4}; +\infty\right)$	$\left(-3; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup$ $\cup [1; +\infty)$	$[-3; 0] \cup$ $\cup [3; 6]$	$[-1; 4]$

Номер задания	31	32	33	34	35
	$(-3; 1) \cup$ $\cup [2; +\infty)$	$(-2; -1]$	$(-\infty; -4] \cup$ $\cup (-3; -2]$	$[0; +\infty)$	$\left(-\infty; \frac{5}{3}\right] \cup [3; +\infty)$

Задание C4

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	8/5, 6/5	12 или 3	5	294/25	6, 8, 10	$2\sqrt{10}$	150	1	8/5	4

Продолжение

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	30	3	$\frac{15}{4}$	3	$\frac{27}{8}$	30	$3\frac{\sqrt{2}}{2}$	9, 12, 15	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{\sqrt{3}}$	4	25π

Номер задания	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
	$11\sqrt{3}$	16	$\frac{25}{8}$	$18\sqrt{2}$	$\frac{27}{35}$	$\frac{15}{16}$	$30\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\frac{315}{16}$	$10\sqrt{2}$	96	$\frac{63}{2}$	64

Номер задания	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
	$18\sqrt{3}$	8	$6\sqrt{6}$	$10\sqrt{7}$	$8\sqrt{3}$	12; 5	$\frac{325}{4}$	6	$8\sqrt{7}$	48	1 : 3	33

Задание С5

Номер задания	1	2	3	4	5
	$a = -8$, $b = 16$	$[-2{,}4; 0]$	$a = -1$	$a = 5$	$\left(-\frac{7}{2}; 1\right)$

Номер задания	6	7	8	9
	$-5 < a < 1$	$(-1; 1) \cup \left[\frac{5}{4}; 5\right)$	$(-\infty; -2] \cup [0; \infty)$	$(1; 5] \cup (6; \infty)$

Номер задания	10	11	12
	$\left\{-\frac{5}{2}; -\frac{19}{2}\right\}$	$a \in (-12\pi; -10\pi) \cup (10\pi; 12\pi)$	$\left(\frac{-3}{2}; 2\right)$

Номер задания	13
	$\left(\frac{3}{2}; \infty\right)$

Задание С6

Номер задания	1	2	3	4	5
	сократима для $n = 11t + 3$	сократима для $n = 7t + 4$	1	10	$3m = 2$, $n = 3$

Окончание

Номер задания	6	7	8	9	10
	$(3n+1)(5n+2)$	36	31,5	1027	4

Номер задания	11	12	13	14	15
	11; 16	5; 15	16 руч., 10 тетрадей	100	можно, 1монета 5руб. и 10 монет по 2 рубля

Номер задания	16	17	18
	1 коробка по 3кг и 2 коробки по 5кг	(150; 30); (650; 26)	(13; 156); (15; 60); (21; 28); (156; 13); (60; 15); (28; 21)

Номер задания	19	20	21
	(2; –9), (–2; 3), (–2; 9), (2; –3)	(5; –4), (–13; 20), (–5; 4), (13; 20)	(2; 5), (0; –3), (3; 3), (–1; –1), (5; 2), (–3;0)

Номер задания	22	23	24
	(4; 1), (4; –3), (–4;–3), (–4; 1)	(–4; 0), (2; 6), (4; –8), (10; –2)	(5; 6), (13; 6), (–5; –6), (–13; –6)

Номер задания	25	26	27	28
	(35; 34), (13; 10)	$n=2,\ k=\pm7$	$n=2,\ k=\pm3$	$n=2,\ k=5$

КАЧЕСТВЕННАЯ ПОДГОТОВКА К ЕГЭ — ЗА 30 ДНЕЙ!

В пособии, адресованном выпускникам школы, абитуриентам и учителям, системно представлен материал курса математики в том объеме, в котором он проверяется на едином государственном экзамене.

Экспресс-курс подготовки к экзамену рассчитан на 30 занятий. Каждое занятие — полтора-два часа.

Последовательно рассматриваются задания частей В и С. Каждое занятие строится по следующему плану: *теоретический материал, примеры решения тестовых задач, дополнительные задания для самостоятельного решения.*

Теоретический материал дается в виде формул, которые необходимы для решения заданий. Ответы даются ко всем дополнительным заданиям.

В начале и конце пособия предлагаются два *контрольных теста*. Сравнив результаты их выполнения, учащиеся смогут оценить уровень своей подготовленности к ЕГЭ до и после прохождения экспресс-курса.

ISBN 978-5-17-073145-9

9 785170 731459

www.ast.ru
www.elkniga.ru