ЕГЭ

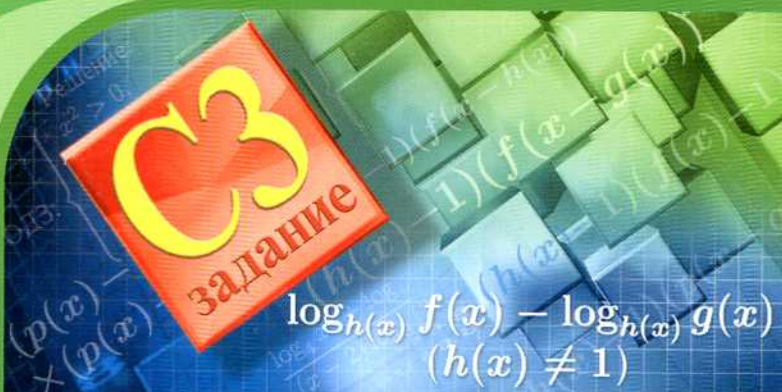
Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

готовимся к ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

Подготовка к ЕГЭ-2014:

Решаем задание С3 методом рационализации



ЛЕГИОН™

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2014

Решаем задание С3 методом рационализации

Учебно-методическое пособие

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2013

ББК 22.1
И 20

Рецензенты:
Евич Л. Н. — кандидат физико-математических наук,
Войта Е. А. — аспирант кафедры алгебры и дискретной математики ЮФУ.

Авторский коллектив:
Иванов С.О., Ольховая Л.С., Ханин Д.И.

И 20 **Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014: решаем задание С3 методом рационализации** : учебно-методическое пособие / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 32 с. — (Готовимся к ЕГЭ.)

ISBN 978-5-9966-0464-7

Данная книга поможет выпускникам школ успешно решать задания типа С3 на Едином государственном экзамене. Описанный в данном пособии метод рационализации снижает риск вычислительных ошибок и облегчает процесс сдачи экзамена, учит не бояться подобных задач. Важно заметить, что предлагаемое пособие входит в учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ», выпускаемый издательством «Легион».

Продиагностировать уровень знаний и в соответствии с полученными результатами оптимально подобрать пособия, которые понадобятся в процессе подготовки, поможет брошюра **«Готовимся к ЕГЭ по математике. С чего начать?»**, содержащая всю информацию о данном учебно-методическом комплексе.

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0464-7

Оглавление

От авторов 4
Решение неравенств 5
Упражнения 23
Приложение 25
Ответы к упражнениям 28
Литература 29

От авторов

Задание типа С3 на ЕГЭ традиционно вызывает затруднения у многих учащихся, ведь при решении подобных систем необходимо уметь разбираться с разными типами неравенств: и рациональными, и логарифмическими, и показательными, и степенными, что отражено в нынешней спецификации КИМ. Необходимо владеть не только методом интервалов, но и некоторыми другими приёмами. При этом решение неравенств сопряжено со многими техническими сложностями, что чревато как логическими, так и вычислительными ошибками.

Однако существует метод, позволяющий избежать многих нежелательных осложнений и ускорить процесс решения неравенств, что может оказаться полезным не только при решении заданий типа С3, но и в отдельных редких случаях при рассмотрении заданий типа С5. Этот метод известен уже около 50 лет и в разных источниках фигурирует под названиями «метод декомпозиции», «метод замены множителей», «обобщённый метод интервалов», «метод рационализации». Мы остановимся на последнем названии.

Данное пособие призвано подробно объяснить идеи указанного метода, помочь изучить его на конкретных примерах разных уровней сложности. Бóльшую часть книги занимают как раз упражнения с подробными решениями. Также в конце пособия учащимся предложены задачи для самостоятельного решения, способные помочь школьникам закрепить разобранный материал.

Книга является важным учебно-методическим пособием как для учащихся, желающих самостоятельно усовершенствовать свои навыки по решению неравенств, так и для педагогов, осуществляющих подготовку школьников по алгебре.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно прислать почтой или на электронный адрес: `legionrus@legionrus.com`.

Обсудить пособие, оставить замечания и предложения, задать вопросы можно на официальном форуме издательства `http://forum.legionr.ru`.

Решение неравенств

Нередко в заданиях типа С3 требуется решить неравенство, которое достаточно сложно поддаётся обычному методу интервалов: корни соответствующих уравнений не всегда очевидны, а вычисление значений функции в промежуточных точках может оказаться довольно трудоёмким процессом. Однако есть способ сведения неравенств к неравенствам для рациональных функций, которые решаются, как правило, существенно проще. Речь идёт о методе рационализации. Рассмотрим, чем можно пользоваться, чтобы сэкономить время и снизить риск вычислительной ошибки при решении неравенств.

Любое неравенство приводимо к виду

$$\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_k} \vee 0, \tag{*}$$

где символу «$\vee$» соответствует один из знаков «$\leqslant$», «$\geqslant$», «$>$», «$<$» (а на самом деле ещё и знак «$=$»). Легко убедиться, что при решении неравенства в таком виде нас интересует только знак каждого множителя, а не его конкретное возможное значение. Описываемый здесь метод состоит в том, чтобы заменять такие множители на другие, «более удобные», линейные множители, совпадающие по знаку с исходными на первоначальной области определения.

Будет показано, как свести действия по замене одного выражения другим практически до автоматизма, как обойтись без лишних технических «заморочек» и детального анализа выражения при решении каждого типового задания. Для этого будут использоваться стандартные замены.

Определение. Говорят, что у двух выражений $s(x)$ и $q(x)$ совпадает знак на области определения $s(x)$, если для любого x из области определения $s(x)$ выражение $q(x)$ тоже определено и при этом если $s(x) > 0$, то и $q(x) > 0$; если $s(x) < 0$, то и $q(x) < 0$; если $s(x) = 0$, то и $q(x) = 0$. (Можно записать $sgn(s(x)) = sgn(q(x))$, однако это обозначение не понадобится здесь в дальнейшем.)

Возникает вопрос: как быть с теми множителями, которые являются знакопостоянными? Их можно заменять на $(+1)$ или на (-1), в зависимости от знака, или на 0, если вдруг какой-то множитель окажется тождественно равным нулю.

Итак, приведём возможную последовательность действий при решении неравенств.

Алгоритм метода рационализации.

1. Выписать условия, задающие ОДЗ (необязательно их преобразовывать и решать).

2. Привести исходное неравенство к виду (*), то есть справа должен стоять 0, а все возможные слагаемые в левой части необходимо привести к общему знаменателю (если среди этих слагаемых встречаются дроби).

3. Явно указать ОДЗ исходного неравенства. Для знаменателя условия $v_k \neq 0$ можно пока не преобразовывать.

4. По возможности заменить все выражения u_i и v_k на более простые, совпадающие по знаку с исходными. Каждый множитель следует заменять несколько раз — до тех пор, пока это возможно.

5. Решить полученное неравенство. Например, методом интервалов.

6. Записать ответ исходного неравенства, учитывая ОДЗ.

Комментарий. На шаге 3 алгоритма не обязательно подробно расписывать условия $v_k \neq 0$, так как на шаге 4 при замене этих множителей должно сохраняться равенство 0 исходного множителя $v_k(x)$ и получившегося в результате замены множителя $v_k^{\text{новый}}(x)$ при одних и тех же значениях x. Однако, если преобразованное $v_k^{\text{новый}}(x)$ можно сократить с одной из скобок числителя, то об ограничении $v_k^{\text{новый}}(x) \neq 0$ всё-таки стоит вспомнить. Мы покажем это в дальнейшем на примерах.

Рассмотрим часто встречающиеся замены, где $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$ — выражения, зависящие от x; $p(x)$, $q(x)$ — произвольные выражения, зависящие от x (либо константы).

Таблица часто встречающихся замен.

№	**Исходное выражение ($F(x)$)**	**Выражение после замены ($G(x)$)**
1	$\boldsymbol{\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)}$ $\boldsymbol{(h(x) \neq 1)}$	$\boldsymbol{(h(x)-1)(f(x)-g(x))}$
2	$\boldsymbol{\log_{h(x)} f(x) - 1}$ $\boldsymbol{(h(x) \neq 1)}$	$\boldsymbol{(h(x)-1)(f(x)-h(x))}$
3	$\boldsymbol{\log_{h(x)} f(x)}$ $\boldsymbol{(h(x) \neq 1)}$	$\boldsymbol{(h(x)-1)(f(x)-1)}$
4	$\log_{f(x)} h(x) - \log_{g(x)} h(x)$ $(f(x) \neq 1, g(x) \neq 1)$	$(f(x)-1)(g(x)-1)\times$ $\times(h(x)-1)(g(x)-f(x))$
5	$\boldsymbol{h(x)^{p(x)} - h(x)^{q(x)}}$	$\boldsymbol{(h(x)-1)(p(x)-q(x))}$
6	$h(x)^{p(x)} - 1$	$(h(x)-1)p(x)$
7	$f(x)^{p(x)} - g(x)^{p(x)}$	$(f(x)-g(x))p(x)$
8	$\boldsymbol{\lvert p(x)\rvert - \lvert q(x)\rvert}$	$\boldsymbol{(p(x)-q(x))\times}$ $\boldsymbol{\times(p(x)+q(x))}$
9	$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$, здесь $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$	$f(x)-g(x)$
10	$\lvert p(x)\rvert - \sqrt{g(x)}$, здесь $g(x) \geqslant 0$	$p^2(x)-g(x)$

Жирными выделены те замены, которые можно встретить чаще всего.

Также стоит заметить, что выражение $\frac{p(x)}{q(x)}$ совпадает по знаку с выражением $p(x) \cdot q(x)$ при таких x, что $q(x) \neq 0$, так как в этом случае $p(x) \cdot q(x) = q^2(x) \cdot \frac{p(x)}{q(x)}$, а $q^2(x) > 0$ (значит, если $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$, то и $p(x) \cdot q(x) > 0$; если $\frac{p(x)}{q(x)} < 0$, то и $p(x) \cdot q(x) < 0$; если $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$, то и $p(x) \cdot q(x) = 0$).

Конечно, едва ли все обозначенные замены стоит зазубривать, они легко выводятся одна из другой (можно убедиться в этом самостоятельно, а можно обратиться за доказательством к приложению, находящемуся в конце книги). Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих полезность таких замен.

Пример 1. $\sqrt{2x^2-12x+20}-\sqrt{x^2-3x}\geqslant 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2-12x+20\geqslant 0, \\ x^2-3x\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2(x-3)^2+2\geqslant 0, \\ x(x-3)\geqslant 0; \end{cases}$

$x\in(-\infty;\ 0]\cup[3;\ +\infty).$

Воспользуемся девятой строчкой таблицы замен, получим, что на ОДЗ данное неравенство можно заменить на $(2x^2-12x+20)-(x^2-3x)\geqslant 0$, то есть $x^2-9x+20\geqslant 0$. Корни уравнения $x^2-9x+20=0$ легко найти, их значения $x_1=4$ и $x_2=5$. Тогда неравенство примет вид $(x-4)(x-5)\geqslant 0$, откуда $x\in(-\infty;\ 4]\cup[5;+\infty)$. С учётом ОДЗ получим решение исходного неравенства: $x\in(-\infty;\ 0]\cup[3;4]\cup[5;+\infty)$ (см. рис. 1).

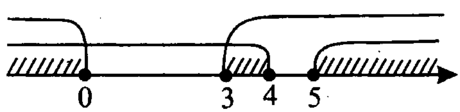


Рис. 1.

Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup[3;4]\cup[5;+\infty)$.

Этот пример ярко показывает и удобство метода рационализации, и то, что при замене какого-либо множителя его аналогом по знаку, нельзя забывать про ОДЗ исходного выражения.

Пример 2. $\log_{0,5}(x^2+2x+1)<0.$

Решение.

ОДЗ: $x^2+2x+1>0$; $(x+1)^2>0$; $x\neq -1$.

Воспользуемся третьей строчкой таблицы замен. В нашем случае $h(x)=0{,}5$; $f(x)=x^2+2x+1$. Получим, что на ОДЗ данное неравенство равносильно неравенству $(0{,}5-1)(x^2+2x+1-1)>0$, $x^2+2x<0$, $x(x+2)<0$, $x\in(-2;0)$. С учётом ОДЗ получим решение исходного неравенства: $x\in(-2;\ -1)\cup(-1;\ 0)$.

Ответ: $(-2;\ -1)\cup(-1;\ 0)$.

Пример 3. $\log_{x^2}(x^2+4) - \log_{x^2}(2x+3) \geqslant 0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \\ x^2+4>0, \\ 2x+3>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -\dfrac{3}{2}, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1; \end{cases}$

$x \in \left(-\frac{3}{2};\ -1\right) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Воспользуемся первой строчкой таблицы замен. В нашем случае $h(x) = x^2$, $f(x) = x^2+4$, $g(x) = 2x+3$. Получим, что на ОДЗ данное неравенство равносильно неравенству $(x^2-1)(x^2+4-(2x+3)) \geqslant 0$; $(x^2-1)(x^2-2x+1) \geqslant 0$; $(x-1)^3(x+1) \geqslant 0$; $x \in (-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$. С учётом ОДЗ получим решение исходного неравенства: $x \in \left(-\frac{3}{2};\ -1\right) \cup (1;\ +\infty)$ (см. рис. 2).

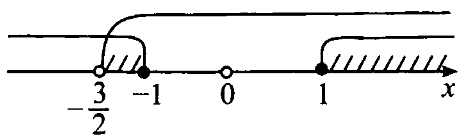


Рис. 2.

Ответ: $\left(-\frac{3}{2};\ -1\right) \cup (1;\ +\infty)$.

Пример 4. $2^{2x^2-6} > 4^{x^2-4x}$.

Решение.

Преобразуем неравенство к виду $4^{x^2-3} > 4^{x^2-4x}$. Воспользуемся пятой строчкой таблицы замен. В нашем случае $h(x) = 4$, $p(x) = x^2-3$, $q(x) = x^2-4x$. Получим, что данное неравенство можно заменить на $x^2-3 > x^2-4x$, $4x > 3$, $x \in \left(\frac{3}{4};\ +\infty\right)$.

Ответ: $\left(\frac{3}{4};\ +\infty\right)$.

Пример 5. $\dfrac{5^{x^2-4}-8^{x^2-4}}{x-2} \leqslant 0.$

Решение.

ОДЗ: $x-2\neq 0,\quad x\neq 2.$

Для преобразования числителя воспользуемся седьмой строчкой таблицы замен. В нашем случае $p(x) = x^2-4$, $f(x) = 5$, $g(x) = 8$. Получим, что на ОДЗ данное неравенство можно заменить на $\dfrac{(5-8)(x^2-4)}{x-2} \leqslant 0$, $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} \geqslant 0$. Домножим на $(x-2)^2$, получим $(x-2)^2(x+2)\geqslant 0$, $x\neq 2$, $x\in[-2;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

Ответ: $[-2;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

Пример 6. $\log_x(2x^2+5)\cdot\log_{x+2}x \geqslant 2.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$ На ОДЗ выполняется

$$\log_x(2x^2+5)\cdot\log_{x+2}x = \frac{\ln(2x^2+5)}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{\ln(x+2)} = \log_{x+2}(2x^2+5).$$

Исходное неравенство равносильно неравенству
$\log_{x+2}(2x^2+5)\geqslant\log_{x+2}(x+2)^2$, то есть
$\log_{x+2}(2x^2+5)-\log_{x+2}(x+2)^2\geqslant 0$,
$(x+2-1)(2x^2+5-(x+2)^2)\geqslant 0$,
$(x+1)(x^2-4x+1)\geqslant 0$,
$(x+1)\big(x-(2-\sqrt3)\big)\big(x-(2+\sqrt3)\big)\geqslant 0$.
Решив это неравенство методом интервалов, получим
$x\in\big[-1;\ 2-\sqrt3\big]\cup\big[2+\sqrt3;\ +\infty\big)$.

Очевидно, что $2-\sqrt3>2-\sqrt4=0$. Значит, с учётом ОДЗ получим в ответе $x\in(0;\ 2-\sqrt3]\cup[2+\sqrt3;\ +\infty)$(см. рис. 3).

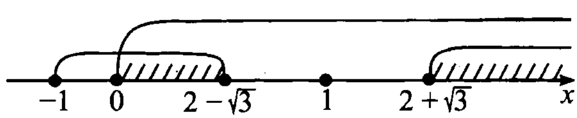


Рис. 3.

Ответ: $(0;\ 2-\sqrt3]\cup[2+\sqrt3;\ +\infty)$.

Пример 7. $125 - x^{\log_5 x} < 0$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$. На ОДЗ выполняется $125 - x^{\log_5 x} = 5^3 - 5^{\log_5^2 x}$. Воспользуемся пятой строкой таблицы замен, считая $h(x) = 5$, $p(x) = 3$ и $q(x) = \log_5^2 x$.

Таким образом, исходное неравенство на ОДЗ равносильно неравенству $(5-1)(3-\log_5^2 x) < 0$ или $\left(\sqrt{3}\right)^2 - \log_5^2 x < 0$, то есть $(\sqrt{3} - \log_5 x)(\sqrt{3} + \log_5 x) < 0$, $(\log_5 x - \sqrt{3})(\log_5 x - (-\sqrt{3})) > 0$. Продолжим преобразования этого неравенства, получим $\left(\log_5 x - \log_5 5^{\sqrt{3}}\right)\left(\log_5 x - \log_5 5^{-\sqrt{3}}\right) > 0$. Для каждой скобки воспользуемся первой строкой таблицы, придём к неравенству $\left(x - 5^{\sqrt{3}}\right)\left(x - 5^{-\sqrt{3}}\right) > 0$, откуда $x \in \left(-\infty;\ 5^{-\sqrt{3}}\right) \cup \left(5^{\sqrt{3}};\ +\infty\right)$. Учитывая ОДЗ, выпишем ответ: $\left(0;\ 5^{-\sqrt{3}}\right) \cup \left(5^{\sqrt{3}};\ +\infty\right)$.

Ответ: $\left(0;\ 5^{-\sqrt{3}}\right) \cup \left(5^{\sqrt{3}};\ +\infty\right)$.

Пример 8. $\dfrac{\log_4 x^2 + \log_4 \dfrac{1}{5x-6}}{(x-2)\log_3(2x+1)} > 0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 > 0, \\ x \neq 2, \\ 5x - 6 > 0, \\ 2x + 1 > 0, \\ \log_3(2x+1) \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > \dfrac{6}{5}, \\ x \neq 2. \end{cases}$

Преобразуем исходное выражение с учётом того, что $\log_4 \dfrac{1}{5x-6} = -\log_4(5x-6)$, получим $\dfrac{\log_4 x^2 - \log_4(5x-6)}{(x-2)\log_3(2x+1)} > 0$. Далее рассмотрим числитель. Используя замену 1 из нашей таблицы для $f(x) = x^2$, $g(x) = 5x - 6$, $h(x) = 4$, получим неравенство $\dfrac{(4-1)(x^2 - (5x-6))}{(x-2)\log_3(2x+1)} > 0$.

Преобразуем выражение $\log_3(2x+1)$ на основании строки 3 таблицы замен. Тогда $\dfrac{3(x^2 - 5x + 6)}{(x-2)(3-1)2x} > 0$. Положительные множители (3 — в числителе и 2 — в знаменателе) заменим на единицы, которые можно не записывать, получим $\dfrac{(x^2-5x+6)}{(x-2)x} > 0$. Квадратный трёхчлен в числителе разложим на множители, в результате мы уже будем иметь дело с неравенством $\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)x} > 0$. И числитель, и знаменатель сократим на $(x-2)$ (в данном случае мы выписали в ОДЗ явно, что $x \neq 2$, поэтому можно сокращать не задумываясь). Тогда $\dfrac{(x-3)}{x} > 0$. Решая это неравенство, найдём $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. С учётом ОДЗ получим $x \in (3; +\infty)$ (см. рис. 4).

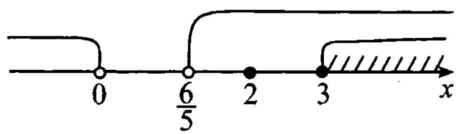


Рис. 4.

Ответ: $(3; +\infty)$.

Пример 9. $\dfrac{\log_{x-2} 7x - \log_{x^2} 7x}{(x-3)(2-14x)} < 0.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-2>0, \\ x-2\neq 1, \\ 7x>0, \\ x^2>0, \\ x^2\neq 1, \\ x-3\neq 0, \\ 2-14x\neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>2, \\ x\neq 3. \end{cases}$$

Преобразуем числитель, воспользовавшись строкой 4 из нашей таблицы, полагая $f(x) = x-2$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 7x$, получим

$$\frac{(x-3)(x^2-1)(7x-1)(x^2-x+2)}{(x-3)(2-14x)} < 0,$$

откуда с учётом ОДЗ вытекает, что

$$\frac{7(x^2-1)\left(x-\frac{1}{7}\right)(x^2-x+2)}{-14\left(x-\frac{1}{7}\right)} < 0 \text{ и } -(x-1)(x+1)(x^2-x+2) < 0.$$

Заметим, что $x^2 - x + 2 > 0$ для всех $x \in R$, так как дискриминант $D = 1 - 8 < 0$, а старший коэффициент $1 > 0$. Тогда неравенство примет вид $-(x-1)(x+1) \cdot 1 < 0$ (всегда положительный множитель мы заменяем на 1). Теперь самое время поменять знак неравенства, получим $(x-1)(x+1) > 0$, $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. С учётом ОДЗ $x \in (2; 3) \cup (3; +\infty)$ (см. рис. 5).

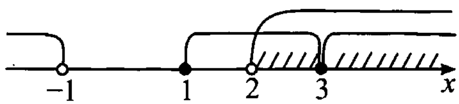


Рис. 5.

Ответ: $(2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Пример 10. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3^{x^2+4} - 9^{2x}} < \dfrac{\sqrt{x+7}}{3^{x^2+4} - 81^x}$.

Решение. Выпишем ОДЗ с учётом того, что
$3^{x^2+4} - 9^{2x} = 3^{x^2+4} - 81^x = 3^{x^2+4} - 3^{4x}$.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + 1 \geqslant 0, \\ x + 7 \geqslant 0, \\ 3^{x^2+4} - 9^{2x} \neq 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geqslant -7, \\ 3^{x^2+4} - 3^{4x} \neq 0. \end{cases}$

Обратим внимание, что условие $3^{x^2+4} - 3^{4x} \neq 0$ мы не преобразовываем на этапе нахождения ОДЗ, чтобы не терять попусту время.

Перепишем исходное неравенство в виде $\dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+7}}{3^{x^2+4} - 3^{4x}} < 0$. На ОДЗ это неравенство равносильно неравенству $\dfrac{x^2 + 1 - (x+7)}{3^{x^2+4} - 3^{4x}} < 0$ (согласно девятой строке таблицы), $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 4} < 0$ (в виду пятой строки таблицы). Квадратные трёхчлены в числителе и знаменателе разложим на множители и придём к виду $\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-2)^2} < 0$. Решим это неравенство методом интервалов (см. рис. 6), получим $x \in (-2; 2) \cup (2; 3)$.

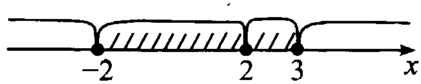


Рис. 6.

Заметим, что этот промежуток входит в ОДЗ. Действительно, $-2 > -7$, а условие $3^{x^2+4} - 3^{4x} \neq 0$ равносильно условию $(x-2)^2 \neq 0$, которое выполнено, так как мы исключили из ответа значение $x = 2$.

Ответ: $(-2; 2) \cup (2; 3)$.

Приведённые выше примеры наглядно демонстрируют удобство метода рационализации. Действительно, если бы знак выражения $(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+7})$ мы определяли, рассматривая, например, 2 случая $(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+7} < 0,\ \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+7} > 0)$ или домножая на $(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+7})$, то решение стало бы более громоздким, а это помимо напрасного расхода времени на экзамене чревато ошибками вычислений.

Пример 11. $\log_{\sqrt{x}}(3-x)^6 \leqslant 24$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{x} \neq 1, \\ 3 - x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 3. \end{cases}$

Проведём дополнительные преобразования, чтобы привести исходное неравенство к виду, необходимому для применения метода рационализации (смотрите пункт 2 алгоритма).

$\log_{\sqrt{x}} |3-x|^6 \leqslant 24$,

$6 \log_{\sqrt{x}} |3-x| \leqslant 24$,

$\log_{\sqrt{x}} |3-x| \leqslant \log_{\sqrt{x}} (\sqrt{x})^4$,

$\log_{\sqrt{x}} |3-x| - \log_{\sqrt{x}} x^2 \leqslant 0$.

Теперь можно воспользоваться методом рационализации.

$(\sqrt{x}-1)(|3-x| - x^2) \leqslant 0$,

$(\sqrt{x}-1)(3-x-x^2)(3-x+x^2) \leqslant 0$.

Заметим, что $3 - x + x^2 > 0$, так как дискриминант $D = -11 < 0$, а старший коэффициент $1 > 0$. Тогда $(\sqrt{x}-1)(3-x-x^2) \leqslant 0$,

$(x-1)(3-x-x^2) \leqslant 0$,

$$-(x-1)\left(x - \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right) \leqslant 0.$$

Тогда $(x-1)\left(x - \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right) \geqslant 0$,

$$(x-1)\left(x - \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \geqslant 0.$$

Таким образом, $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\ 1\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2};\ +\infty\right)$.

С учётом ОДЗ (см. рис. 7), получим

$x \in (0;\ 1) \cup \left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{2};\ 3\right) \cup (3;\ +\infty).$

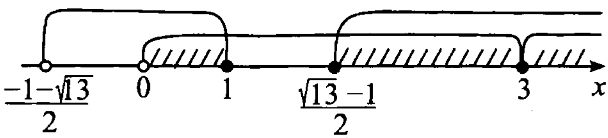


Рис. 7.

Ответ: $(0;\ 1) \cup \left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{2};\ 3\right) \cup (3;\ \infty)$.

Пример 12. $\dfrac{(|x-5|-x)(|x-2|-\sqrt{x^2+1})}{\log_x 2x - \log_x 5} \geqslant 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_x 2x - \log_x 5 \neq 0. \end{cases}$

Как и в предыдущих заданиях, мы не стали преобразовывать условие $\log_x 2x - \log_x 5 \neq 0$.

Воспользуемся методом рационализации.

$$\frac{(|x-5|-x)(|x-2|-\sqrt{x^2+1})}{(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)} \geqslant 0.$$

Преобразуем вторую скобку числителя, воспользовавшись десятой строчкой нашей таблицы, получим $\dfrac{(|x-5|-x)(|x-2|^2-(x^2+1))}{(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)} \geqslant 0,$

$$\frac{(|x-5|-x)(3-4x)}{(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)} \geqslant 0.$$

Заметим, что на ОДЗ $x = |x|$, а тогда, согласно восьмой строчке таблицы замен, $(|x-5|-x)$ имеет тот же знак, что и $(x-5-x)(x-5+x) = 5(5-2x)$ или $\left(\frac{5}{2}-x\right)$. Значит, исходное неравенство равносильно условию $\dfrac{\left(\frac{5}{2}-x\right)(3-4x)}{(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)} \geqslant 0;$

$$\frac{-\left(\frac{5}{2}-x\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)}{(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)} \geqslant 0;$$

$$\frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)}{(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)} \geqslant 0.$$

Можно было бы дробь сократить на скобку $\left(x-\frac{5}{2}\right)$, но это «скользкое» место. В знаменателе скобка $\left(x-\frac{5}{2}\right)$ соответствует скобке $(\log_x 2x - \log_x 5)$ исходной системы, и условие $\log_x 2x - \log_x 5 \neq 0$, которое мы не преобразовали в ОДЗ, соответствует условию $x-\frac{5}{2} \neq 0$ (это можно не проверять, это выполнено в силу того, что замещающее выражение сохраняет равенство нулю при тех же значениях x, что и исходное).

Перепишем ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq \frac{5}{2}. \end{cases}$

Теперь $\dfrac{\left(x-\frac{3}{4}\right)}{(x-1)} \geqslant 0$. С учётом ОДЗ $x \in \left(0;\ \frac{3}{4}\right] \cup \left(1;\ \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2};\ +\infty\right)$ (см. рис. 8).

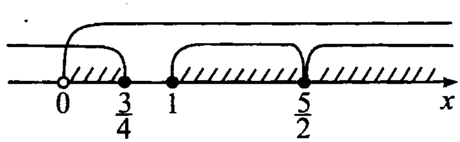


Рис. 8.

Ответ: $x \in \left(0;\ \frac{3}{4}\right] \cup \left(1;\ \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2};\ +\infty\right)$.

Пример 13. $\begin{cases} \log_{x+3}(x+8)+1 \geqslant 0, \\ 125\frac{1}{125} \cdot 5^x - 25^x - 1 > 0. \end{cases}$

Решение.

Решим по отдельности каждое неравенство системы.

1) $\log_{x+3}(x+8)+1 \geqslant 0.$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3>0, \\ x+3 \neq 1, \\ x+8>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-3, \\ x \neq -2. \end{cases}$

Перепишем неравенство в виде $\log_{x+3}(x+8)+\log_{x+3}(x+3) \geqslant 0$, откуда $\log_{x+3}(x+8) - \log_{x+3}\frac{1}{x+3} \geqslant 0$. Согласно первой строчке таблицы замен получаем, что данное неравенство на ОДЗ равносильно неравенству $(x+2)\left(x+8-\frac{1}{x+3}\right) \geqslant 0$, то есть $\frac{(x+2)(x^2+11x+23)}{x+3} \geqslant 0$. Найдём корни уравнения $x^2+11x+23=0$, этими корнями будут значения $x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{29}}{2}$.

Тогда получим $\dfrac{(x+2)\left(x-\frac{-11+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x+\frac{11+\sqrt{29}}{2}\right)}{x+3} \geqslant 0.$

Легко установить, что $\frac{-11+\sqrt{29}}{2} > \frac{-11+\sqrt{25}}{2} = -3$ и $\frac{-11+\sqrt{29}}{2} < \frac{-11+\sqrt{36}}{2} = -\frac{5}{2} < -2$. Тогда решением преобразованного неравенства будут

$x \in \left(-\infty;\ -\frac{-11-\sqrt{29}}{2}\right] \cup \left(-3;\ \frac{-11+\sqrt{29}}{2}\right] \cup [-2;\ +\infty)$ (см. рис. 9).

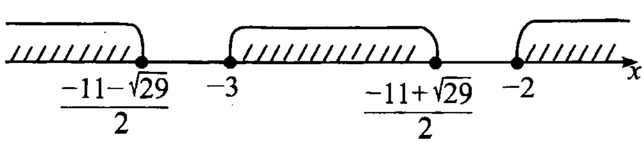


Рис. 9.

А с учётом ОДЗ первое неравенство исходной системы имеет решение $x \in \left(-3;\ \frac{-11+\sqrt{29}}{2}\right] \cup (-2;\ +\infty)$.

2) Решим отдельно второе неравенство $125\frac{1}{125} \cdot 5^x - 25^x - 1 > 0$. Сделаем замену $t = 5^x$, $t > 0$. Тогда $\left(-1 + 125\frac{1}{125}t - t^2\right) > 0$, $t^2 - 125\frac{1}{125}t + 1 < 0$. Корни уравнения $t^2 - 125\frac{1}{125}t + 1 = 0$ легко угадываются по теореме Виета, это значения $t_1 = \frac{1}{125}$, $t_2 = 125$. Тогда неравенство можно записать как $\left(t - \frac{1}{125}\right)(t - 125) < 0$ или $(5^x - \frac{1}{125})(5^x - 125) < 0$, то есть $(5^x - 5^{-3})(5^x - 5^3) < 0$, что равносильно условию $(x - (-3))(x - 3) < 0$, откуда $x \in (-3; 3)$.

3) Выпишем решения исходной системы, найдя пересечение множеств $(-3; 3)$ и $\left(-3; \frac{-11+\sqrt{29}}{2}\right] \cup \left(-2;\ +\infty\right)$, получим, что $x \in \left(-3; \frac{-11+\sqrt{29}}{2}\right] \cup \left(-2;\ 3\right)$ (см. рис. 10).

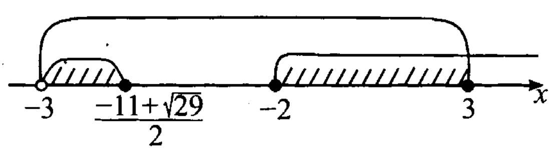


Рис. 10.

Ответ: $\left(-3; \frac{-11+\sqrt{29}}{2}\right] \cup (-2;\ 3)$.

Замечание. Справедливости ради следует признать, что в данном конкретном случае выгода от решения неравенства $\left(t - \frac{1}{125}\right)(t - 125) < 0$ при $t = 5^x$ методом рационализации представляется сомнительной. Можно было записать решение для t, то есть выписать $\frac{1}{125} < t < 125$, откуда уже получить условие $\frac{1}{125} < 5^x < 125$ и решение $x \in (-3; 3)$. Однако данный пример не теряет смысла, так как иллюстрирует идеи метода рационализации и способствует более глубокому пониманию метода.

Пример 14. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt[4]{x^2+2x+8}-\sqrt{x+8}}{\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{x-4}} \leqslant 0, \\ |\log_3(2-x)| \geqslant \left|\log_9 \dfrac{2-x}{4}\right|. \end{cases}$

Решение.

Решим по отдельности каждое неравенство системы.

1) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2+2x+8}-\sqrt{x+8}}{\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{x-4}} \leqslant 0.$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+2x+8 \geqslant 0, \\ x+8 \geqslant 0, \\ \sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{x-4} \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -8, \\ \sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{x+4} \neq 0. \end{cases}$

Преобразуем числитель дроби, учитывая, что $\sqrt[4]{x^2+2x+8}-\sqrt{x+8} = \sqrt[4]{x^2+2x+8}-\sqrt[4]{(x+8)^2}$ имеет тот же знак, что и $(x^2+2x+8)-(x^2+16x+64) = -14x-56 = -14(x+4)$, то есть совпадает по знаку с выражением $-(x+4)$. Тут мы воспользовались седьмой строчкой из нашей таблицы замен, считая $p(x) = \frac{1}{4}$. Аналогично преобразуем знаменатель дроби, выражение $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{x-4}$ имеет тот же знак, что и $2x+3-(x-4) = x+7$. Тогда для решения исходного неравенства следует рассмотреть неравенство $\dfrac{-(x+4)}{x+7} \leqslant 0$, то есть $\dfrac{x+4}{x+7} \geqslant 0$, откуда $x \in (-\infty; -7) \cup [-4; +\infty)$. Учитывая ОДЗ, первое неравенство системы будет иметь решение $x \in [-8; -7) \cup [-4; +\infty)$. (Условие $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{x-4} \neq 0$ выполнено за счёт того, что мы исключили из решения число (-7), когда рассматривали неравенство $\dfrac{x+4}{x+7} \geqslant 0$.)

2) Решим неравенство $|\log_3(2-x)| \geqslant \left|\log_9 \frac{2-x}{4}\right|$.

ОДЗ: $2-x>0$, $x<2$.

Преобразуем это неравенство к виду $|\log_3(2-x)| - \left|\log_9 \frac{2-x}{4}\right| \geqslant 0$. Используя восьмую строчку таблицы получим

$\left(\log_3(2-x) - \log_9 \frac{2-x}{4}\right)\left(\log_3(2-x) + \log_9 \frac{2-x}{4}\right) \geqslant 0$ и

$\left(\log_3(2-x) - \log_3 \sqrt{\frac{2-x}{4}}\right)\left(\log_3(2-x) + \log_3 \sqrt{\frac{2-x}{4}}\right) \geqslant 0$,

откуда $\left(\log_3(2-x) - \log_3 \frac{\sqrt{2-x}}{2}\right)\left(\log_3(2-x) - \log_3 \frac{2}{\sqrt{2-x}}\right) \geqslant 0$. Воспользовавшись первой строчкой таблицы замен, придём к неравенству $\left((3-1)\left((2-x) - \frac{\sqrt{2-x}}{2}\right)\right)\left((3-1)\left((2-x) - \frac{2}{\sqrt{2-x}}\right)\right) \geqslant 0$, затем к $\sqrt{2-x}\left(\sqrt{2-x} - \frac{1}{2}\right)\left((2-x) - \frac{2}{\sqrt{2-x}}\right) \geqslant 0$ и, учитывая, что $\sqrt{2-x} > 0$, к неравенствам $\left(\sqrt{2-x} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{(2-x)^{\frac{3}{2}} - 2}{\sqrt{2-x}}\right) \geqslant 0$ и $\left(\sqrt{2-x} - \frac{1}{2}\right)\left((2-x)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}\right) \geqslant 0$. Преобразуем первую скобку с помощью девятой строки таблицы замен, зная, что $\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}}$, получим $\left((2-x) - \frac{1}{4}\right)\left((2-x)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}\right) \geqslant 0$. Преобразуем вторую скобку с помощью седьмой строчки таблицы замен, получим $\left((2-x)-\frac{1}{4}\right)\left((2-x)-2^{\frac{2}{3}}\right)\cdot\frac{3}{2} \geqslant 0$, откуда $\left(x-\left(2-\frac{1}{4}\right)\right)\left(x-(2-\sqrt[3]{4})\right) \geqslant 0$.

Очевидно, что $2-\frac{1}{4} > 1 > 2-\sqrt[3]{4}$, поэтому решением последнего неравенства будут $x \in (-\infty;\ 2-\sqrt[3]{4}] \cup \left[\frac{7}{4};\ +\infty\right)$. Учитывая ОДЗ, второе неравенство системы в качестве решения имеет $x \in (-\infty;\ 2-\sqrt[3]{4}] \cup \left[\frac{7}{4};\ 2\right)$.

3) Выпишем неравенство всей исходной системы, получим $x \in [-8;\ -7) \cup [-4;\ 2 - \sqrt[3]{4}] \cup \left[\frac{7}{4};\ 2\right)$.

Ответ: $[-8;\ -7) \cup [-4;\ 2 - \sqrt[3]{4}] \cup \left[\frac{7}{4};\ 2\right)$.

Пример 15. $\dfrac{\log_{x+1}(x+3) - 4\log_{x+3}(x+1)}{(x+1)(\log_{17}(x+25) - 1)} < 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0, \\ x+25>0, \\ x+1\neq 1, \\ x+3 \neq 1, \\ x+1 \neq 0, \\ \log_{17}(x+25) - 1 \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ \log_{17}(x+25) - 1 \neq 0. \end{cases}$

На ОДЗ выполняется $\log_{x+1}(x+3) - 4\log_{x+3}(x+1) =$

$$= \log_{x+1}(x+3) - \frac{4}{\log_{x+1}(x+3)} = \frac{\log^2_{x+1}(x+3) - 4}{\log_{x+1}(x+3)} =$$

$$= \frac{(\log_{x+1}(x+3) - 2)(\log_{x+1}(x+3) + 2)}{\log_{x+1}(x+3)} =$$

$$= \frac{(\log_{x+1}(x+3) - \log_{x+1}(x+1)^2)(\log_{x+1}(x+3) + \log_{x+1}(x+1)^2)}{\log_{x+1}(x+3)}.$$

Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(\log_{x+1}(x+3) - \log_{x+1}(x+1)^2)(\log_{x+1}(x+3) + \log_{x+1}(x+1)^2)}{(x+1)(\log_{17}(x+25) - 1)\log_{x+1}(x+3)} < 0;$$

$$\frac{(\log_{x+1}(x+3) - \log_{x+1}(x+1)^2)(\log_{x+1}(x+3) - \log_{x+1}(x+1)^{-2})}{(x+1)(17-1)(x+25-17)\log_{x+1}(x+3)} < 0.$$

Заметим, что на ОДЗ выполняется $x+1>0$, $x+25-17 = x+8 > 0$, $17-1 = 16$. Заменяя соответствующие скобки на $+1$, получим равносильное неравенство

$$\frac{(\log_{x+1}(x+3) - \log_{x+1}(x+1)^2)(\log_{x+1}(x+3) - \log_{x+1}(x+1)^{-2})}{\log_{x+1}(x+3)} < 0;$$

$$\frac{(\log_{x+1}(x+3) - \log_{x+1}(x+1)^2)(\log_{x+1}(x+3) - \log_{x+1}(x+1)^{-2})}{(x+1-1)(x+3-1)} < 0.$$

На ОДЗ выполняется $x+2>0$, поэтому неравенство преобразуется к виду

$$\frac{(\log_{x+1}(x+3)-\log_{x+1}(x+1)^2)(\log_{x+1}(x+3)-\log_{x+1}(x+1)^{-2})}{x}<0;$$

$$\frac{(x+1-1)(x+3-(x+1)^2)(x+1-1)\left(x+3-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)}{x}<0;$$

$$x(-x^2-x+2)\frac{(x+3)(x^2+2x+1)-1}{(x+1)^2}<0;$$

$$-x(x^2+x-2)\frac{x^3+5x^2+7x+2}{(x+1)^2}<0;$$

$$x(x+2)(x-1)(x^3+5x^2+7x+2)>0;$$

$$x(x-1)(x^3+5x^2+7x+2)>0.$$

Для того, чтобы решить это неравенство, необходимо найти корни уравнения $x^3+5x^2+7x+2=0$. Подбором (перебрав целые делители свободного члена) найдём решение $x=-2$ и выделим скобку $(x+2)$: $x^3+5x^2+7x+2=x^3+2x^2+3x^2+6x+x+2=(x+2)(x^2+3x+1)=$ $=(x+2)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$. Тогда неравенство примет вид $x(x-1)(x+2)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right)>0$. Заметим, что на ОДЗ $x+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}>0$, а следовательно, должно выполняться $x(x-1)\left(x-\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right)>0$, $x\in\left(\dfrac{\sqrt{5}-3}{2};\ 0\right)\cup(1;\ +\infty)$ — это множество входит в ОДЗ (см. рис. 11). (Здесь мы учли, $\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}>\dfrac{\sqrt{4}-3}{2}=-\dfrac{1}{2}>-1$.)

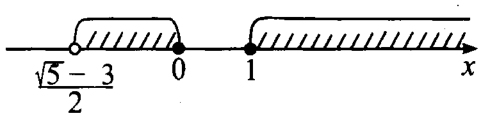


Рис. 11.

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{5}-3}{2};\ 0\right)\cup(1;\ +\infty)$.

Упражнения

Решите неравенства методом рационализации.

1. $\log_{(x+2)^2}(7x+2) \leqslant 0.$

2. $\log_5(x^2+6x+5) < 1.$

3. $\sqrt{3x^2+24x+50} - \sqrt{2x^2+12x+23} > 0.$

4. $(0{,}2)^{x^2+2x} \leqslant (0{,}2)^{x+1}.$

5. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+6x+2} - \sqrt[3]{4x+17}}{2^x-8} \geqslant 0.$

6. $\log_x(3+x) - \log_x\left(\dfrac{10}{x}\right) > 0.$

7. $(x^2-4x+6)^{x-3} - \left(\sqrt{4x-6}\right)^{2x-6} < 0.$

8. $\dfrac{|7+2x|-|x+2|}{x+3} \geqslant 0.$

9. $\dfrac{\log_{x+1}(x)-2}{x-2} < 0.$

10. $\dfrac{|x-4|-\sqrt{x^2+2}}{\log_2(x+3)} \leqslant 0.$

11. $\dfrac{5^{x^2+4}-125}{|x+2|-\sqrt{7}} \geqslant 0.$

12. $\log_{x^4}(6-8x) < 0.$

13. $|\log_5 x| < \left|\log_5 \dfrac{x}{49}\right|.$

14. $\dfrac{x^2-4x}{\log_7 x^2} \leqslant 0.$

15. $\dfrac{\left(\log_4\left(x-\frac{2}{3}\right)-1\right)\left(\log_4(4x-2)\right)}{2^{3x}-4^7} \geqslant 0.$

16. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{16-2x}}{\log_2 x+3} \geqslant 0.$

17. $\dfrac{|2x-6|-|3x+5|}{(32^x-2)(4+x)} < 0.$

18. $\log_{x+4}(x+7)-\log_{x^2+2x+1}(x+7) \leqslant 0.$

19. $\dfrac{(x^2+2x-3)^{x^2+6x+5}-1}{\ln(x^2+2x-3)} > 0.$

20. $(4x-2)\log_{\frac{3x+1}{4x-2}}(5x^2+9x-2) \leqslant 0.$

21. $\begin{cases} \dfrac{7^x-\dfrac{1}{49}}{3^x-3} \leqslant 0, \\ \log_{3+x}(x+4) > 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{|x+5|-|x+8|}{\sqrt{x+10}-\sqrt{10-x}} < 0, \\ \log_{x^2}(x+100)-\log_{x^2} 10 > 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} (\sqrt{x})^x-1 > 0, \\ \log_5(x^2)-\log_{x+1} x^2 > 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+1}-2}{3-x} < 0, \\ \log_{x+1}(x^2+6x+9) \leqslant 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{|x-3|-|x-5|}{100-x} < 0, \\ \dfrac{\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{4x+2}}{(x+3)(\log_2|x|-5)} \geqslant 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \log_{x^3}\dfrac{x-2}{x-7} \geqslant 0, \\ \dfrac{(3+x)^{-9-x^2}-\dfrac{1}{(3+x)^{10}}}{\log^3_{3+x} 5} \leqslant 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \sqrt[4]{x^2-8}-\sqrt{x+6} \leqslant 0, \\ \dfrac{3^{|x^2-4|}-81}{x-53} \leqslant 0. \end{cases}$

Приложение

Проведём обоснование корректности замен, предложенных в таблице. Ключевыми являются два следующих утверждения.

Утверждение 1. Если функция $f(x)$ строго возрастает, то для любых двух значений t_1 и t_2 знак выражения $f(t_1) - f(t_2)$ совпадает со знаком выражения $t_1 - t_2$.

Доказательство. Если $t_1 > t_2$, тогда $t_1 - t_2 > 0$, но в этом случае $f(t_1) > f(t_2)$ (то есть $f(t_1) - f(t_2) > 0$) по определению строго возрастающей функции. Если $t_1 < t_2$, тогда $t_1 - t_2 < 0$ и $f(t_1) < f(t_2)$ (то есть $f(t_1) - f(t_2) < 0$). Если же $t_1 = t_2$, то $f(t_1) = f(t_2)$ (очевидно для любой функции).

Утверждение 2. Если функция $f(x)$ строго убывает, то для любых двух значений t_1 и t_2 знак выражения $f(t_1) - f(t_2)$ совпадает со знаком выражения $t_2 - t_1$.

Доказательство. Можно доказать аналогично предыдущему утверждению, а можно получить требуемое, рассмотрев функцию $g(x) = -f(x)$, которая в этом случае является строго возрастающей.

Замечание. Естественно, что в этих утверждениях необходима именно строгая монотонность функции, а не просто монотонность. Далее мы остановимся на каждой из замен, предложенных в таблице, и дадим им краткое обоснование.

1. Рассмотрим выражение $\log_2 f(x) - \log_2 g(x)$. Функция $y = \log_2 t$ является строго возрастающей, а значит (см. утверждение 1), знак выражения $\log_2 t_1 - \log_2 t_2$ совпадает со знаком выражения $t_1 - t_2$, то есть знак выражения $\log_2 f(x) - \log_2 g(x)$ совпадает со знаком выражения $(f(x) - g(x))$.

Ясно, что $\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x) =$

$$= \frac{\log_2 f(x)}{\log_2 h(x)} - \frac{\log_2 g(x)}{\log_2 h(x)} = \frac{\log_2 f(x) - \log_2 g(x)}{\log_2 h(x)} = \frac{\log_2 f(x) - \log_2 g(x)}{\log_2 h(x) - \log_2 1}.$$

Согласно доказанному выше, знак этого выражения совпадает со знаком выражения $\dfrac{f(x) - g(x)}{h(x) - 1}$ или $(f(x) - g(x))(h(x) - 1)$.

2. Легко увидеть, что $\log_{h(x)} f(x) - 1 = \log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} h(x)$, а согласно доказанному в пункте 1 знак этого выражения совпадает со знаком $(h(x) - 1)(f(x) - h(x))$ (в данном случае $g(x) = h(x)$).

3. Заметим, что $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} 1$, и по доказанному в пункте 1 выражение $\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} 1$ имеет тот же знак, что и $(h(x)-1)(f(x)-1)$ (в данном случае $g(x) = 1$ тождественно).

4. Рассмотрим выражение вида $\log_{f(x)} h(x) - \log_{g(x)} h(x) =$

$$= \frac{\log_{g(x)} h(x)}{\log_{g(x)} f(x)} - \log_{g(x)} h(x) = \log_{g(x)} h(x)\Big(\frac{1}{\log_{g(x)} f(x)} - 1\Big) =$$

$$= \log_{g(x)} h(x)\Big(\frac{1 - \log_{g(x)} f(x)}{\log_{g(x)} f(x)}\Big) = -\log_{g(x)} h(x)\Big(\frac{\log_{g(x)} f(x) - 1}{\log_{g(x)} f(x)}\Big).$$

Используя уже рассмотренные замены, получим, что это выражение имеет такой же знак, что и $-\dfrac{(g(x)-1)(h(x)-1)(g(x)-1)(f(x)-g(x))}{(g(x)-1)(f(x)-1)}$ или $(g(x)-1)(h(x)-1)(f(x)-1)(g(x)-f(x))$.

5. Пусть $a > 1$, тогда $y = a^t$ — строго возрастающая функция, и значит, $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ имеет тот же знак, что и $f(x) - g(x)$, а значит, тот же знак, что и $(a-1)(f(x)-g(x))$. При $a < 1$ функция $y = a^t$ является строго убывающей, поэтому выражение $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ имеет тот же знак, что и $-(f(x)-g(x))$, то есть тот же знак, что и $(a-1)(f(x)-g(x))$. При $a = 1$ выполняется равенство $a^{f(x)} - a^{g(x)} = (a-1)(f(x)-g(x)) = 0$. Итак, для любого значения x знаки выражений $h^{f(x)}(x) - h^{g(x)}(x)$ и $(h(x)-1)(f(x)-g(x))$ совпадают.

6. Если в предыдущей замене взять $q(x) = 0$, то получится, что $h(x)^{p(x)} - 1$ имеет тот же знак, что и $(h(x)-1)p(x)$.

7. При $a > 0$ функция $y = t^a$ строго возрастает, поэтому $f^a(x) - g^a(x)$ имеет тот же знак, что и $f(x) - g(x)$, а значит, тот же знак, что и $a(f(x) - g(x))$. При $a < 0$ функция $y = t^a$ строго убывает, поэтому $f^a(x) - g^a(x)$ имеет тот же знак, что и $-(f(x)-g(x))$, то есть совпадает по знаку с выражением $a(f(x)-g(x))$. При $a = 0$ выполняется равенство $f^a(x) - g^a(x) = a(f(x)-g(x)) = 0$. Итак, при любом значении a знаки выражений $f^a(x) - g^a(x)$ и $a(f(x)-g(x))$ совпадают, а значит, и для любого x знаки выражений $f(x)^{p(x)} - g(x)^{p(x)}$ и $p(x)(f(x)-g(x))$ тоже совпадают.

8. Законность всех предыдущих замен мы доказывали однотипно. Теперь используем другой приём, рассмотрев сначала предполагаемую замену и функцию $y = t^2$. Эта функция строго возрастает при $t \geqslant 0$, а значит $t_1^2 - t_2^2 = |t_1|^2 - |t_2|^2$ имеет тот же знак, что и

$|t_1| - |t_2|$, то есть $p^2(x) - q^2(x)$ совпадает по знаку с $|p(x)| - |q(x)|$, но $p^2(x) - q^2(x) = (p(x) - q(x))(p(x) + q(x))$.

9. $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = f^{\frac{1}{2}}(x) - g^{\frac{1}{2}}(x)$ имеет тот же знак, что и $\frac{1}{2}(f(x) - g(x))$ (см. пункт 7) или просто $(f(x) - g(x))$.

10. $|p(x)| - \sqrt{g(x)} = \sqrt{p^2(x)} - \sqrt{g(x)}$, что совпадает по знаку с выражением $p^2(x) - g(x)$.

Упражнения

Рационализируйте следующие выражения.

1. $\operatorname{arctg} f(x) - \operatorname{arctg} g(x)$.

2. $\operatorname{arcctg} f(x) - \operatorname{arcctg} g(x)$.

3. $f(x)e^{f(x)} - g(x)e^{g(x)}$ при $f(x) \geqslant -1$, $g(x) \geqslant -1$.

4. $f(x)\ln f(x) - g(x)\ln g(x)$ при $f(x) \geqslant \frac{1}{e}$, $g(x) \geqslant \frac{1}{e}$.

5. $f(x)^{f(x)} - g(x)^{g(x)}$ при $f(x) \geqslant \frac{1}{e}$, $g(x) \geqslant \frac{1}{e}$.

Ответы к упражнениям

№	Ответ
1	$\left(-\frac{2}{7};\ -\frac{1}{7}\right]$
2	$(-6;\ -5)\cup(-1;\ 0)$
3	$(-\infty;\ -9)\cup(-3;\ +\infty)$
4	$\left(-\infty;\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$
5	$[-5;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$
6	$(0;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$
7	$(1{,}5;\ 2)\cup(3;\ 6)$
8	$[-5;\ -3)\cup(-3;\ +\infty)$
9	$(2;\ +\infty)$
10	$(-3;\ -2)\cup\left[\frac{7}{4};\ +\infty\right)$
11	$(-\infty;-2-\sqrt{7})\cup(-2+\sqrt{7};\ +\infty)$
12	$(-1;\ 0)\cup\left(0;\ \frac{5}{8}\right)$
13	$(0;\ 7)$
14	$(-1;0)\cup(1;\ 4]$
15	$\left[\frac{3}{4};\ \frac{14}{3}\right)\cup\left(\frac{14}{3};\ +\infty\right)$
16	$\left(0;\ \frac{1}{8}\right)\cup[3;\ +\infty)$
17	$(-\infty;\ -11)\cup\left(-4;\ \frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{5};\ +\infty\right)$
18	$(-4;\ -3)\cup\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\ -2\right)\cup\left(0;\ \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$
19	$(-\infty;\ -5)\cup(1;\ \sqrt{5}-1)\cup(\sqrt{5}-1;\ +\infty)$
20	$\left[\frac{-9-\sqrt{141}}{10};\ -2\right)\cup(3;\ +\infty)$
21	$(-2;\ 1)$
22	$[-10;\ -6{,}5)\cup(1;\ 10]$
23	$(4;\ +\infty)$
24	$[-0{,}5;\ 0)$
25	$(0;\ \sqrt{3}-1]\cup(100;\ +\infty)$
26	$(7;\ +\infty)$
27	$\left[-\frac{11}{3};\ -2\sqrt{2}\right]\cup[2\sqrt{2};\ 53)$

Литература

1. *Дорофеев Г.В.* Обобщение метода интервалов. // Математика в школе. — 1969. — №3.
2. *Голубев В.* Метод замены множителей. // Квант. — 2006. — №4.
3. *Корянов А.Г., Прокофьев А.А.* Математика. ЕГЭ-2012. Системы неравенств с одной переменной (типовые задания С3) [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://alexlarin.net/, свободный.
4. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2014 году единого государственного экзамена по математике [Электронный ресурс]. — Москва: ФИПИ, 2013. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
5. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для проведения в 2014 году единого государственного экзамена по математике [Электронный ресурс]. — Москва: ФИПИ, 2013. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
6. Кодификатор элементов содержания для составления контрольных измерительных материалов для проведения в 2014 году единого государственного экзамена по математике [Электронный ресурс]. — Москва: ФИПИ, 2013. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
7. Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения в 2014 году единого государственного экзамена по математике [Электронный ресурс]. — Москва: ФИПИ, 2013. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
8. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. Приказ Минобрнауки РФ от 17.12.2010 №1897. — Режим доступа: www.standart.edu.ru, свободный.
9. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Приказ Минобрнауки РФ от 17.05.2012 №413. — Режим доступа: www.standart.edu.ru, свободный.

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

Иванов Сергей Олегович,
Ольховая Людмила Сергеевна,
Ханин Дмитрий Игоревич

МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2014. РЕШАЕМ ЗАДАНИЕ С3 МЕТОДОМ РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *А. Вартанов*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *Н. Коновалова*

Подписано в печать с оригинал-макета 22.10.2013.
Формат $60x84^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,86.
Доп. тираж 5 000 экз. Заказ № 34906.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных издательством электронных носителей в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru