ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

СОЗДАНО РАЗРАБОТЧИКАМИ ЕГЭ

И.Н. СЕРГЕЕВ, В.С. ПАНФЕРОВ

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ

ПРАКТИКУМ С

2014

ПОДГОТОВКА К ВЫПОЛНЕНИЮ ЧАСТИ С

- Информация о заданиях типа С
- Уравнения, неравенства и системы
- Задачи по геометрии
- Нестандартные задачи
- Ответы

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

И.Н. Сергеев, В.С. Панферов

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Подготовка к выполнению части С

Рекомендовано ИСМО Российской Академии Образования для подготовки выпускников всех типов образовательных учреждений РФ к сдаче экзаменов в форме ЕГЭ

Информация о заданиях типа С
Уравнения, неравенства и системы
Задачи по геометрии
Нестандартные задачи
Ответы

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2014

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
С32

Сергеев, И.Н.

С32 ЕГЭ. Практикум по математике: подготовка к выполнению части С / И.Н. Сергеев, В.С. Панферов. — М. : Издательство «Экзамен», 2014. — 126, [2] с. (Серия «ЕГЭ. Практикум А, В, С»)

ISBN 978-5-377-07063-4

Книга посвящена самой сложной части Единого государственного экзамена по математике — заданиям типа С (с развернутым ответом). Она представляет собой сборник задач по всем разделам школьного курса математики, которые затрагиваются в заданиях ЕГЭ типа С. Предложенная подборка задач позволяет выпускнику полностью, причем самостоятельно, подготовиться к предстоящему экзамену по математике.

Уникальная методика подготовки, созданная разработчиками ЕГЭ, поможет учащимся, акцентировать внимание на формулировках ряда заданий и избегать ошибок, связанных с невнимательностью и рассеянностью на экзамене, а также правильно оформлять работу, выявлять критерии оценивания.

Представлена подробная информация о реальных вариантах ЕГЭ.

В конце книги приведены ответы.

Книга адресована учащимся старших классов, учителям математики и методистам.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Подписано в печать 16.07.2013. Формат 70x108/16.
Гарнитура «Школьная». Бумага газетная.
Уч.-изд. л. 3,14. Усл. печ. л. 11,2. Тираж 15 000 экз. Заказ № 2812/13.

ISBN 978-5-377-07063-4

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга посвящена наиболее трудной части Единого государственного экзамена по математике — заданиям типа С.

В настоящее время Единый государственный экзамен по математике происходит по новому регламенту. Теперь это экзамен не по алгебре и началам анализа (как было до 2009 г. включительно), а по всему курсу элементарной математики в рамках программы средней школы. Новый вариант ЕГЭ состоит из двух частей:

- первая — содержащая задачи типа В (с кратким ответом);
- вторая — содержащая задачи типа С (с развёрнутым ответом).

Гарантией успешной сдачи экзамена, содержащего как простые, так и сложные (нестандартные) задачи, является не натаскивание на экзаменационные варианты прошлых лет, а систематическое углублённое изучение школьного курса математики. Это изучение включает в себя регулярную работу, решение и обсуждение с учителями, преподавателями курсов и кружков различных математических сюжетов, приёмов, идей и подходов к решению задач.

Однако для того, чтобы успешно вести подготовку к экзамену, необходимо иметь достаточно полную и качественную подборку задач — задач, содержащих самые разные математические выражения и функции, использующих для своего решения разнообразные идеи и методы, различающихся как по сложности, так и по постановке. В принципе, в современной учебно-методической литературе, конечно же, можно обнаружить необходимый материал, но для этого:

- во-первых, придется хорошенько потрудиться над его поиском и анализом;
- во-вторых, потребуется заранее знать, что именно необходимо к данному экзамену.

Предлагаемая книга как раз и призвана помочь школьнику (или его наставнику) в указанном отношении. Она задумана, прежде всего, как сборник задач для самостоятельного решения. Кстати, с этой целью все задачи в ней снабжены ответами. Книга позволяет выпускнику полностью подготовиться к предстоящему Единому государственному экзамену по математике, особенно ко второй его части.

Нынешний вариант ЕГЭ по математике содержит 6 задач типа С (*с развернутым ответом*), среди которых:

- первые четыре задачи (С1–С4) имеют *повышенный* уровень сложности;
- последние две (С5 и С6) — *высокий*.

Основной целью этой, так сказать, «вузовской» части варианта (в отличие от его первой части, носящей характер «зачета» по курсу математики средней школы) является дифференциация выпускников по их возможностям дальнейшего обучения в вузах с различными требованиями к математической подготовке учащихся.

Задания всей части 2 в целом предназначены для проверки знаний на том уровне требований, который традиционен в вузах с профильным экзаменом по математике. Последние же два задания позволяют особенно тщательно отбирать выпускников в вузы, где требования к математической подготовке достаточно высоки.

Далее, возможные *оценки в баллах*, выставляемые за решения задач части 2, таковы:

- за задачи С1 и С2 — по 0,1 или 2 балла,
- за задачи С3 и С4 — по 0,1,2 или 3 балла,
- за задачи С5 и С6 — по 0,1,2,3 или 4 балла.

Наконец, по своей тематике все задачи типа С современного варианта ЕГЭ можно разделить условно на три группы:

- *уравнения, неравенства и системы* — сюда относятся задачи С1 и С3 (уравнение, неравенство, система);
- *задачи по геометрии* — одна планиметрическая (С4) и одна стереометрическая (С2);
- *нестандартные задачи* — а именно, С5 (с параметром) и С6 (целочисленная).

Перечисленные три группы легли в основу разбиения на главы той подборки задач, которая приведена в настоящей книге. Характеристики этих групп в точности соответствуют названиям глав II–IV.

В связи с предложенным разбиением задач на группы выскажем еще раз предостережение: весьма опасно готовиться к экзамену строго по заданным темам — это может привести к определенной однобокости или излишней односторонности в математическом развитии, а следовательно, и к возможным неожиданным сбоям при любом отклонении экзамена от заранее объявленной его версии. Учитывая сказанное, авторы сборника не ограничивались лишь тем кругом идей (достаточно узким), которые фигурируют в демоверсии ЕГЭ, а старались подбирать задачный материал гораздо шире.

Добавим, что глава I книги содержит демоверсию ЕГЭ (часть 2) по математике с подробным описанием заданий типа С, их решений, требований к ним и критериев их оценивания. Кроме того, в той же главе приведены три типовых варианта ЕГЭ: один с подробными решениями, а другие только с ответами. Ни в коем случае не следует ожидать в будущем именно этих задач на реальном экзамене!

Все ответы собраны воедино в последней главе V. При этом для удобства их поиска:

- главы II–IV разбиты на параграфы, имеющие сплошную нумерацию;
- все задачи в этих главах имеют двойную нумерацию: первая часть совпадает с номером параграфа, а вторая — обозначает номер задачи в параграфе.

Напомним, что итогом работы выпускника над каждой задачей типа С является представленные им на экзамене:

- *ответ* на поставленный в задании вопрос;
- *текст* решения задачи.

Далеко не праздным является вопрос о том, *какие способы* решения задачи и записи ее ответа допустимы на едином государственном экзамене. Главным требованием к решению была и остается его *математическая правильность*, а именно:

- в ответ необходимо включить только верные значения искомой величины, причем все;
- форма записи ответа может быть любой из употребляемых в современной учебной литературе;
- текст решения должен служить реальным обоснованием (точнее, доказательством) правильности полученного ответа;
- при решении задачи любого содержания приемлемы любые математические методы — алгебраические, функциональные, графические, геометрические, логические, комбинаторные и т.д.;
- рациональность решения, равно как и его нерациональность, на экзамене во внимание не принимается.

Не максимально возможное количество баллов за задачу ставится в том случае, если в ее решении допущены ошибки, неточности, пробелы или недостатки обоснования. Подчеркнем, что на экзамене снижение оценки за решение задачи производится в строгом соответствии с заранее утверждёнными критериями, которые основываются на следующих *принципах*, обязательных для экспертов.

- Проверяется только математическое содержание представленного решения, а погрешности его оформления не являются поводом для снижения оценки.

- Ответ может быть записан в любом виде; оценивается не форма записи ответа, а его правильность.
- Степень подробности обоснований в решении должна быть разумно достаточной. Претензии к решению, связанные с отсутствием ссылок на правомерно используемые стандартные факты и правила (как-то: равенство вертикальных углов, теорема Пифагора, формула корней квадратного уравнения, действия со степенями или логарифмами, свойства неравенств и многие-многие другие), не предъявляются.
- Решение задачи, в котором обоснованно получен правильный ответ, оценивается максимальным числом баллов.
- Наличие правильного ответа при полном отсутствии текста решения оценивается в ноль баллов.
- Некоторые погрешности решения, не оказавшие существенного влияния на его обоснованность и принципиальную правильность, могут расцениваться как описки и не приводить к снижению оценки.
- Если на каком-либо этапе решения допущена грубая ошибка, то другие его этапы, проведенные в работе правильно, могут быть, тем не менее, оценены положительно, в соответствии с критериями.
- При определении итоговой оценки решения выбирается максимально возможное число баллов, которое можно выставить за него в соответствии с утверждёнными критериями.
- При проверке оригинальных или нестандартных решений на экзамене вырабатываются частные критерии их оценки, соответствующие (аналогичные) общим.

Итак, предлагаемая ниже подборка задач для самостоятельного решения, как нам кажется, способна ликвидировать имеющиеся пробелы в знаниях школьного курса математики, устранить недостатки подготовки к стандартным экзаменационным задачам и развить навыки решения задач, необходимые для *успешного выступления на ЕГЭ* (чего мы от всей души и желаем читателям-выпускникам!).

Сергеев И.Н., Панферов В.С.

ГЛАВА I. ИНФОРМАЦИЯ О ЗАДАНИЯХ ТИПА С

Демоверсия ЕГЭ по математике

Приводим часть 2 из демоверсии ЕГЭ по математике. Она состоит из заданий типа С. Предлагаем также их решения и критерии оценивания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1. Решите уравнение

$$\frac{6\cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0.$$

С2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

С3. Решите неравенство $\log_{x+3}\left(9 - x^2\right) - \frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2 \geq 2$.

С4. На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 2 - |x| \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6. Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1) a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится десятичная запись числа, равного $\frac{b}{a}$.

Решения и критерии оценивания заданий части 2

Оценки заданий части 2 зависят от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развернутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены, из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальный балл.

Эксперты проверяют математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

В критериях оценивания конкретных заданий содержатся общие требования к выставлению баллов. Однако они не исчерпывают всех возможных ситуаций.

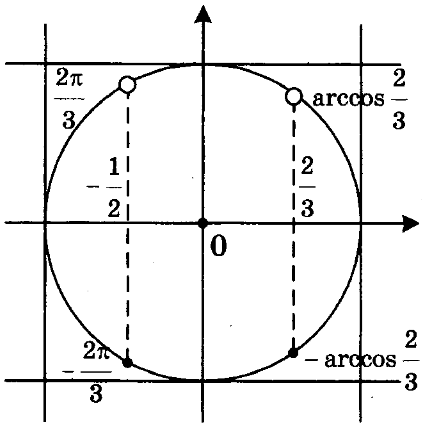
Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

При выполнении задания экзаменуемый может использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации.

C1. Решите уравнение

$$\frac{6\cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0.$$

Решение.



$$\frac{6\cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6\cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \\ -\sin x > 0 \end{cases}$$

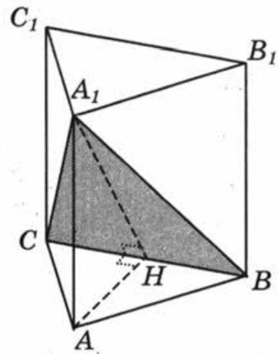
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{2}{3}\right) = 0 \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -\arccos\frac{2}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\arccos\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Ответ: $x = -\arccos\frac{2}{3} + 2\pi n,\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\quad n, k \in \mathbb{Z}$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С1
2	Обоснованно получен правильный ответ.
1	Верно найдены нули числителя, но или не произведен отбор найденных решений, или допущены ошибки в отборе.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

С2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

Решение. Обозначим H середину ребра BC (см. рисунок). Так как треугольник ABC равносторонний, а треугольник A_1BC – равнобедренный, отрезки AH и A_1H перпендикулярны BC. Следовательно, $\angle A_1HA$ – линейный угол двугранного угла с гранями BCA и BCA_1.



Из треугольника A_1AB найдем: $AA_1 = 1$.

Из треугольника AHB найдем: $AH = \sqrt{3}$.

Из треугольника HAA_1 найдем:

$$tg\angle A_1HA = \frac{AA_1}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Искомый угол равен 30°.

Ответ: 30°.

Возможны другие решения. Например, решение задачи с использованием векторов или метода координат.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания C2
2	Обоснованно получен правильный ответ.
1	Способ нахождения искомого угла правильный, но получен неверный ответ или решение не закончено.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

C3. Решите неравенство

$$\log_{x+3}\left(9-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2 \ge 2.$$

Решение.

$$\log_{x+3}\left(9-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2 \ge 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+3}(x+3)(3-x)-\frac{4}{16}\log^2_{x+3}|x-3| \ge 2 \quad (\Rightarrow 3-x>0)$$

$$\Leftrightarrow 1+\log_{x+3}(3-x)-\frac{1}{4}\log^2_{x+3}(3-x)\ge 2$$

$$\Leftrightarrow l^2-4l+4\le 0,\ \text{где}\ l=\log_{x+3}(3-x),$$

$$\Leftrightarrow (l-2)^2\le 0 \Leftrightarrow \log_{x+3}(3-x)=2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3-x=(x+3)^2\\ 1\ne x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+6)(x+1)=0\\ -2\ne x>-3\end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Ответ: $x=-1$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С3
3	Обоснованно получен правильный ответ.
2	Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом значений x.
1	Ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верной системе рациональных неравенств.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

С4. На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

Решение 1. Центр O искомой окружности принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AD. Обозначим P середину отрезка AD, Q – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BC, E – точку пересечения серединного перпендикуляра с прямой BC (см. рисунок а). Из условия касания окружности и прямой BC следует, что отрезки OA, OD и OQ равны радиусу R окружности.

Заметим, что точка O не может лежать по ту же сторону от прямой AB, что и точка E, так как в этом случае расстояние от точки O до прямой BC меньше, чем расстояние от нее до точки A.

Из прямоугольного треугольника BPE с катетом $BP = 2$ и $\angle B = 30°$ находим, что $PE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Так как $OA = R$ и $AP = 1$, получаем: $OP=\sqrt{R^2-1}$ и, следовательно, $OE=\sqrt{R^2-1}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Из прямоугольного треугольника OQE, в котором $\angle E = 60°$, находим:

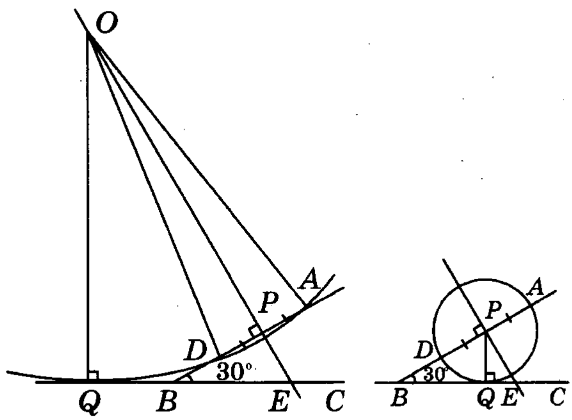
$$R = OQ = \frac{\sqrt{3}}{2} OE = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2 - 1} + 1.$$

В результате получаем уравнение для R:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2 - 1} = R - 1.$$

Возведем в квадрат обе части этого уравнения и приведем подобные члены.

Получим уравнение $R_2 - 8R + 7 = 0$, решая которое находим два корня $R_1 = 1$, $R_2 = 7$. Если радиус равен 1, то центром окружности является точка P (см. рисунок б).



а) б)

Ответ: 1 или 7.

Решение 2. Пусть точка Q касания окружности с прямой BC лежит на луче BC (см. рисунок а). По теореме о касательной и секущей

$$BQ^2 = BA \cdot BD = (BD + DA) \cdot BD = (1 + 2) \cdot 1 = 3,$$

откуда $BQ = \sqrt{3}$.

Пусть O – точка пересечения луча BA и перпендикуляра к BC, проведенного через точку Q. Из прямоугольного треугольника BQO находим:

$$BO = \frac{BQ}{\cos 30°} = 2, \text{ тогда } AO = OD = 1 \text{ и } OQ = \frac{1}{2} BO = 1.$$

Таким образом, точка O удалена от точек A, D и Q на одно и то же расстояние, равное 1. Следовательно, O – центр искомой окружности, а ее радиус равен 1.

Пусть теперь точка Q_1 касания окружности с прямой BC лежит на продолжении BC за точку B (см. рисунок б), а прямая, проходящая через точку Q_1 перпендикулярно BC, пересекает прямую AB в точке H, а окружность вторично – в точке T. Тогда

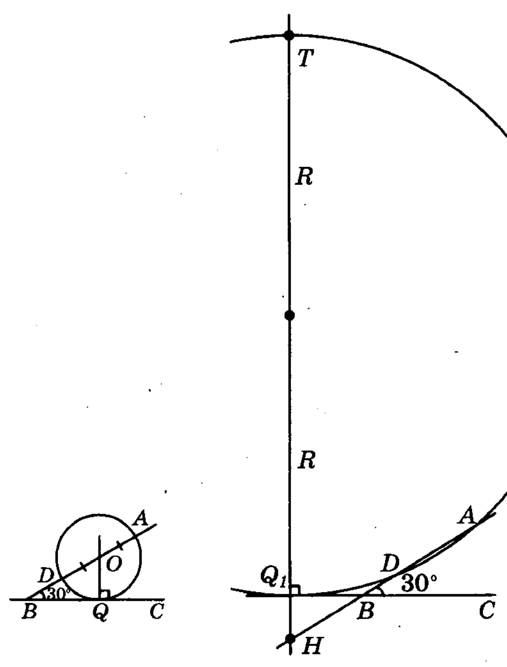
$$BQ_1 = \sqrt{BA \cdot BD} = \sqrt{3},$$

$$\angle HBQ_1 = \angle ABC = 30°,$$

$$BH = \frac{BQ_1}{\cos 30°} = 2,$$

$$HQ_1 = \frac{1}{2} BH = 1.$$

Если R – радиус окружности, то $Q_1T = 2R$. По теореме о двух секущих $HQ_1 \cdot HT = HA \cdot HD$, то есть $1 \cdot (1 + 2R) = (2 + 3) \cdot 3$, откуда находим, что $R = 7$.



а) б)

Ответ: 1 или 7.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С4
3	Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и обоснованно получен правильный ответ.
2	Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой обоснованно получено правильное значение искомой величины.
1	Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неверное из-за арифметической ошибки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

С5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} a(x^4+1) = y+2-|x| \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

1. Если пара (x, y) — решение системы, то пара $(-x, y)$ — тоже. Поэтому если система имеет единственное решение (x, y), то $x=0$, откуда

$$\begin{cases} a = y+2 \\ y^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm 2 \\ a=\pm 2+2 \end{cases} \Rightarrow a=0,\ \ 4.$$

2. При $a=0$ система принимает вид

$$\begin{cases} 0 = y+2-|x| \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

и имеет, по меньшей мере, два решения: $x=\pm 2,\ \ y=0$.

3. При $a=4$ система принимает вид

$$\begin{cases} 4(x^4+1) = y+2-|x| \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x^4+|x|+2 \\ y^2=4-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2, \end{cases}$$

поскольку если $x \neq 0$, то $\begin{cases} y=4x^4+|x|+2>2, \\ y^2=4-x^2<4, \end{cases}$ что невозможно.

Ответ: $a=4$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С5
4	Обоснованно получен правильный ответ.
3	Получен правильный ответ. Решение в целом верное, но либо недостаточно обоснованное, либо содержит вычислительные погрешности.
2	Верно получены необходимые условия на значения a, однако в проверке достаточных условий допущены ошибки.
1	Получены только необходимые условия на значения a.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

С6. Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1) a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится десятичная запись числа, равного $\dfrac{b}{a}$.

Решение. Пусть десятичная запись числа b состоит из n цифр. Тогда по условию задачи можно записать равенство

$$\frac{b}{a} = a + \frac{b}{10^n}, \text{ поэтому } 10^n(b - a^2) = ab.$$

Из этого уравнения следует, что $b > a^2 \geq a$. Так как числа a и b взаимно простые, числа $b - a^2$ и ab тоже взаимно простые. (Действительно, пусть p – общий простой делитель этих чисел. Тогда если p делитель a, то p будет делителем b. Если же p – делитель b, то p будет делителем a^2, значит, p – делитель a. Противоречие.)

Поэтому $b - a^2 = 1$ и, следовательно, $ab = 10^n$. Последнее равенство при взаимно простых a и b возможно только в двух случаях:

1) $b = 10^n$, $a = 1$, но в этом случае не выполняется равенство $b - a^2 = 1$.

2) $b = 5^n$, $a = 2^n$. В этом случае равенство $b - a^2 = 1$ принимает вид

$$5^n - 4^n = 1, \text{ откуда } \left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Функция $f(n) = (\frac{5}{4})^n$ возрастает, а функция $g(n) = 1 + (\frac{1}{4})^n$ убывает.

Поэтому уравнение $f(n) = g(n)$ имеет не более одного корня, и так как $f(1) = g(1)$, единственным корнем уравнения является $n = 1$.

Ответ: $a = 2$, $b = 5$.

Возможны другие формы записи ответа. Например:

А) (2; 5);

Б) $\frac{5}{2} = 2,5$;

В) $\begin{cases} a = 2, \\ b = 5. \end{cases}$

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С6
4	Обоснованно получен правильный ответ.
3	Получена система необходимых и достаточных условий на пару искомых чисел и найдено ее решение, но недостаточно обоснована его единственность.
2	Составлено верное уравнение в натуральных числах, из которого сделаны существенные выводы для нахождения искомой пары чисел, уравнение до конца не решено, но верный ответ приведен.
1	Составлено, но не решено верное уравнение в натуральных числах, верный ответ приведен.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Типовые варианты заданий ЕГЭ

Вариант 1

Приводим набор заданий (с решениями) типа С одного из вариантов ЕГЭ (части 2) по математике.

С1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + \sin x = 0 \\ (3\sqrt{\sin x} - 1)(2y + 6) = 0. \end{cases}$$

С2. В правильной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра $AB = 8\sqrt{3}$ и $SC = 17$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM, где M — точка пересечения медиан грани SBC.

С3. Решите неравенство

$$\log_2\left[(7^{-x^2} - 6)(7^{-x^2+9} - 1)\right] + \log_2 \frac{7^{-x^2} - 6}{7^{-x^2+9} - 1} > \log_2(7^{3-x^2} - 5)^2.$$

С4. В треугольнике ABC $AB = 12$, $BC = 5$, $AC = 10$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 4 : 9$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ABD и ACD, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

С5. Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2\left|x - a^2\right| - 8x$$

имеет более двух точек экстремума.

С6. Перед каждым из чисел 14, 15, ..., 20 и 6, 7, ..., 10 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение задачи С1.

$$\begin{cases} y+\sin x=0 \\ (3\sqrt{\sin x}-1)(2y+6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\sin x \\ \left(\sqrt{\sin x}-\dfrac{1}{3}\right)\left(y-(-3)\right)=0 \end{cases}$$

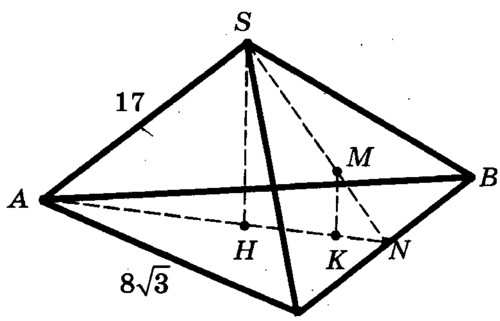
Рассмотрим два случая:

$$1)\ \begin{cases} y=-\sin x \\ \sqrt{\sin x}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=\dfrac{1}{9} \\ y=-\dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{9}+\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}, \\ y=-\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} y=-\sin x \\ y=-3 \\ \sin x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=3 \\ y=-3 \end{cases} \text{— решений нет.}$$

Ответ: $x=(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{9}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z},\quad y=-\dfrac{1}{9}$.

Решение задачи С2 (см. рис.).



Пусть SN — медиана треугольника SBC, а H и K — проекции точек S и M на основание ABC. Тогда

1) $AN, SN\perp BC$, поэтому $H, K\in AN$;

2) $AN=AB\sin 60^\circ=8\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12\Rightarrow AH=\dfrac{2}{3}AN=8$

$\Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15$ (теорема Пифагора, $\triangle ASH$);

3) $MK:SH=KN:HN=MN:SN=1:3$ (по свойству медианы и из подобия $\triangle NMK\sim\triangle NSH$)

$$\Rightarrow MK=\frac{1}{3}SH=5,\quad AK=AN-KN=\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)AN=\frac{8}{9}\cdot 12=\frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\angle MAN=\frac{MK}{AK}=\frac{5}{32/3}=\frac{15}{32}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{15}{32}$.

Решение задачи С3.

$$\log_2(7^{-x^2}-6)(7^{-x^2+9}-1)+\log_2\frac{7^{-x^2}-6}{7^{-x^2+9}-1}>\log_2(7^{3-x^2}-5)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2(7^{-x^2}-6)^2>\log_2(7^{3-x^2}-5)^2\\ (7^{-x^2}-6)(7^{9-x^2}-1)>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2\left(6-7^{-x^2}\right)>\log_2\left|7^{3-x^2}-5\right|\\ 7^{9-x^2}<1 \quad (\Rightarrow 7^{3-x^2}<7^{9-x^2}<1<5)\end{cases} \quad \text{(так как } 7^{-x^2}<7^0=1<6\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}6-7^{-x^2}>5-7^{3-x^2}\\ 9-x^2<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}7^{3-x^2}+1>7^{-x^2}\\ x^2>0\end{cases} \text{ — верно, так как } 7^{3-x^2}+1>1\geq 7^{-x^2},$$

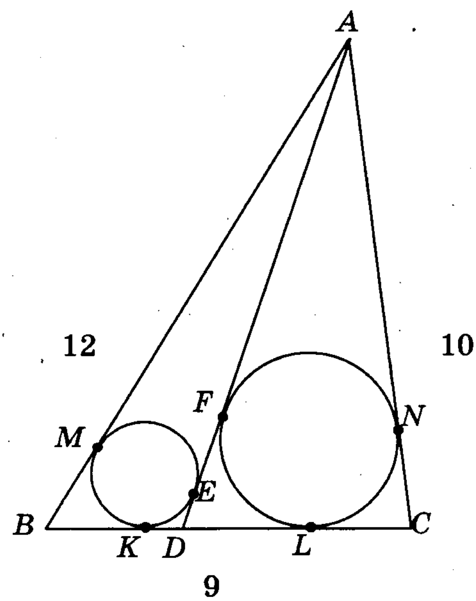
$$\Leftrightarrow |x|>3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\ x<-3.\end{array}\right.$$

Ответ: $x<-3,\ x>3$.

Решение задачи С4 (см. рис.).

1. $BD=\dfrac{4}{4+9}BC=\dfrac{20}{13}=a$, $CD=\dfrac{9}{4+9}BC=\dfrac{45}{13}=b$.

2. Обозначим $DE=x$, $DF=y$, $DA=z$. Тогда по свойств тельных имеем



$$2x = DE + DK = DA + DB - BK - AF = z + a - 12$$

и, аналогично,

$$2y = z + b - 10\,.$$

3. Поэтому

$$2(y - x) = b - a + 12 - 10 = \frac{45}{13} - \frac{20}{13} + 2 = 2 + \frac{25}{13}$$

$$\Rightarrow EF = y - x = 1\frac{25}{26}.$$

Ответ: $1\frac{25}{26}$.

Решение задачи С5.

1. При $x \geq a^2$ функция f имеет вид

$f(x) = x^2 - 2\left(x - a^2\right) - 8x = x^2 - 10x + 2a^2 = (x-5)^2 - 25 + 2a^2$,

поэтому ее график есть часть параболы с ветвями вверх и осью симметрии $x = 5$.

2. При $x \leq a^2$ функция f имеет вид

$f(x) = x^2 + 2\left(x - a^2\right) - 8x = x^2 - 6x - 2a^2 = (x-3)^2 - 9 - 2a^2$,

поэтому ее график есть часть параболы с ветвями вверх и осью симметрии $x = 3$.

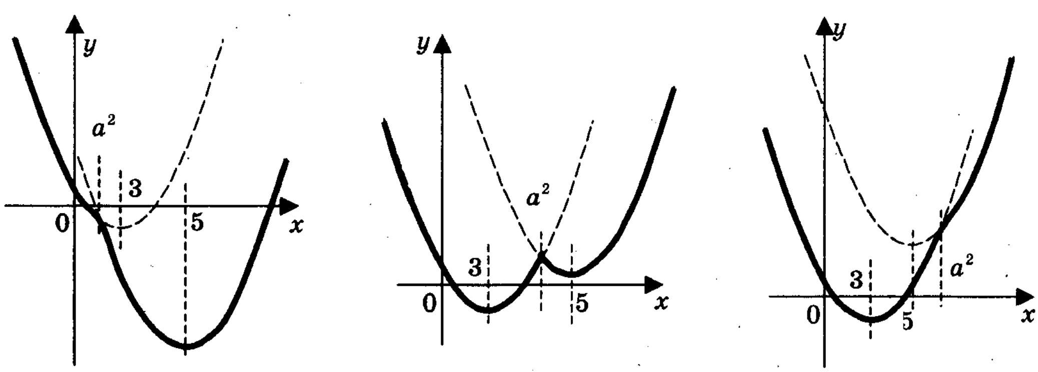


рис. а) рис. б) рис. в)

3. Каждая из парабол имеет по одной точке минимума, и обе они проходят через общую точку $\left(a^2; f(a^2)\right)$, поэтому вид графика функции f зависит от расположения точки $x = a^2$ относительно точек 3 и 5: см. схемы графиков на рис. а) (где $a^2 \leq 3$), б) (где $3 < a^2 < 5$), в) (где $a^2 \geq 5$).

4. Функция f имеет более двух точек экстремума тогда и только тогда, когда точка $x = a^2$ является ее точкой максимума (рис. б), т.е. когда

$$3 < a^2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}.$$

Ответ: $\sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}$.

Решение задачи С6.

1. Если все числа первого набора взяты с плюсами, а второго — с минусами, то сумма максимальна и равна

$$5(14 + \ldots + 20) - 7(-6 - \ldots - 10) = 5\left(\frac{14+20}{2} \cdot 7\right) + 7\left(\frac{6+10}{2} \cdot 5\right) =$$
$$= 35 \cdot 25 = 875.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней нечетно, причем это свойство суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не может быть равной 0.

3. Значение 1 сумма может принять при следующей расстановке знаков у чисел:

$$5(-14 - 15 + 16 - 17 + 18 - 19 + 20) - 7(-6 + 7 - 8 + 9 - 10) =$$
$$= -5 \cdot 11 + 7 \cdot 8 = -55 + 56 = 1.$$

Ответ: 1 и 875.

Вариант 2

Предлагаем для самостоятельного решения набор заданий типа С еще одного варианта ЕГЭ (части 2) по математике.

С1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y+\cos x=0, \\ (2\sqrt{\cos x}-1)(7y-3)=0. \end{cases}$$

С2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB=35, AD=12, CC_1=21$. Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

С3. Решите неравенство

$$\frac{\log_{9^{x+2}} 729}{\log_{9^{x+2}}(-9x)} \le \frac{1}{\log_9 \log_{\frac{1}{9}} 9^x}.$$

С4. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM:MN=3:5$. Найдите BC, если $AB=12$.

С5. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x)=2ax+|x^2-8x+15|$$

больше 1.

С6. Каждое из чисел 4,5,...,10 умножают на каждое из чисел 10,11,...,18 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 63 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Вариант 3

Следующий набор заданий типа С варианта ЕГЭ по математике — также для самостоятельного решения.

С1. Решите уравнение

$$\frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\sqrt{-\cos x}} = 0.$$

С2. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны боковое ребро $AA_1 = 5$, ребро $AB = 4$ основания ABC и угол $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите расстояние между серединой ребра AB и прямой B_1C_1.

С3. Решите неравенство

$$\log_4 (x+5)^4 \cdot \log_{16} (x+3)^2 + \log_2 \frac{(x+3)^3}{(x+5)} - 3 < 0.$$

С4. В прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12 вписана окружность. Касательная к ней делит треугольник на две части. Найдите периметр той части, которая представляет собой треугольник.

С5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-3)^2 + (y-4)^2 = 4, \\ y = 2 + ax \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

С6. На доске написано более 50, но менее 60 чисел. Все числа — целые, а их среднее арифметическое равно 2. Среднее арифметическое всех неположительных из них равно -5, а всех неотрицательных 10. Сколько чисел написано на доске? Каких чисел написано больше: неположительных или неотрицательных? Какое наименьшее количество неотрицательных чисел может быть среди них?

ГЛАВА II. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ

1. Рациональные уравнения и неравенства

Решите уравнения

1.1. $x^2 = 9$.

1.2. $(x^2 - 2x + 1)^2 = 1$.

1.3. $(x+1)^2 = (2x+5)^2$.

1.4. $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

1.5. $3x^2 - 7x + 5 = 0$.

1.6. $x^2 - 2011x + 2010 = 0$.

1.7. $x^2 - 2010x - 2011 = 0$.

1.8. $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$.

1.9. $x^4 + x^2 - 12 = 0$.

1.10. $3x^6 + 7x^3 - 6 = 0$.

1.11. $(x-1)^4 - 8(x-1)^2 - 9 = 0$.

1.12. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + x + \dfrac{1}{x} = 0$.

1.13. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6} = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6}$.

1.14. $\dfrac{x^2 + x}{2x^2 + 2x} = \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 3x}$.

1.15. $\dfrac{2x^2 + x + 2}{4x^2 + 5x - 14} = \dfrac{2x^2 + x + 6}{4x^2 + 5x - 10}$.

1.16. $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 24$.

1.17. $(x+4)(x+5)(x+6)(x+7) = 1680$.

1.18. $\dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{48}{(x-1)^2} = 10\left(\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{4}{x-1}\right)$.

Решите неравенства

1.19. $2x^2 - 7x + 5 \le 0$.

1.20. $3x^2 + 7x - 6 > 0$.

1.21. $x^2 - 2011x + 2010 < 0$.

1.22. $x^2 + 2012x + 2011 \ge 0$.

1.23. $2x^2-6x+5\ge 0$.

1.24. $3x^2-9x+7\le 0$.

1.25. $4x^2-12x+9\le 0$.

1.26. $2x^4-7x^2+5<0$.

1.27. $x^4+x^2-12\le 0$.

1.28. $3x^6+7x^3-6>0$.

1.29. $\dfrac{5x+4}{3x-1}<0$.

1.30. $\dfrac{2x+3}{3x+5}>0$.

1.31. $(x-1)(3-x)(x-2)^2>0$.

1.32. $\dfrac{(x-2)(x+1)^2}{-x}<0$.

1.33. $\dfrac{x}{x^2+3x-4}<0$.

1.34. $\dfrac{(x+1)x^2}{5x-x^2}\ge 0$.

1.35. $\dfrac{x^2+1}{x-1-x^2}<0$.

1.36. $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2+x+1}\ge 0$.

1.37. $\dfrac{3x^2+1}{x^2+5x+6}\ge 0$.

1.38. $\dfrac{2x^2+21x+40}{x^2+3}\ge 0$.

1.39. $\dfrac{x^2+14x+49}{2x^2-x-1}>0$.

1.40. $\dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30}>0$.

1.41. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-5x-6}<0$.

1.42. $\dfrac{x^2-10x+25}{5-4x-x^2}\ge 0$.

1.43. $\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-6x+9}\ge 0$.

1.44. $\dfrac{(2-(x+1)^2)(x-4)^2}{x(x^2-x-6)}\ge 0$.

1.45. $\dfrac{1}{2-x}\le 2$.

1.46. $\dfrac{x-1}{x+3}>2$.

1.47. $\dfrac{5x+1}{x^2+3}>-1$.

1.48. $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}$.

1.49. $\dfrac{1-x}{(x+1)^2}<1$.

1.50. $x+\dfrac{60}{x}\ge 17$.

1.51. $\dfrac{x^2+1}{x}<\dfrac{1}{x}+1$.

1.52. $\dfrac{x-1}{x+1}<x$.

1.53. $x \geq \dfrac{6}{x+5}$.

1.54. $\dfrac{x+6}{x-6} + \dfrac{3x-2}{2} \geq 0$.

1.55. $2 + \dfrac{3}{x} > \dfrac{2}{x-1}$.

1.56. $\dfrac{4x}{x+3} > x+1$.

1.57. $\dfrac{2x^2+3x-459}{x^2+1} > 1$.

1.58. $\dfrac{3}{2-x^2} \leq 1$.

1.59. $\dfrac{1}{x} < \dfrac{x^2+1}{x} + 1$.

1.60. $\dfrac{12}{x^2} + \dfrac{7}{x} + 1 < 0$.

1.61. $\dfrac{9}{(x+2)^2} \geq 1$.

1.62. $(x-1)^4 - 15(x-1)^2 - 16 > 0$.

1.63. $\dfrac{x^2+3x+24}{x^2+3x+3} < 4$.

1.64. $-2 < \dfrac{x^2+2}{1-x^2}$.

1.65. $\dfrac{3x-2}{x^2+6x} > \dfrac{1}{2}$.

1.66. $\dfrac{5+2x}{3x^2+2x-16} < 1$.

1.67. $\dfrac{1}{x^2+5x+6} \geq \dfrac{1}{2}$.

1.68. $\dfrac{1}{x^2-8x-9} \geq \dfrac{1}{3x^2+5x+2}$.

1.69. $\dfrac{19+33x}{7x^2+11x+4} > 2$.

1.70. $\dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{2-x} < 1$.

1.71. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x} > \dfrac{1}{x+1}$.

1.72. $\dfrac{7}{x(x+1)} + \dfrac{9}{x} + 1 < 0$.

1.73. $\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} > 1$.

1.74. $(x^2-3x+1)(x^2-3x-3) \geq 5$.

1.75. $(x^2+2x)(2x+2) - 9\dfrac{2x+2}{x^2-2} \geq 0$.

1.76. $\dfrac{1}{x+9} + \dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{1}{x}$.

1.77. $\dfrac{7}{x^2+5x+6} - \dfrac{9}{x+3} + 1 \leq 0$.

1.78. $\dfrac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{x-6}} \geq 0$.

1.79. $-2 < \dfrac{x^2+2}{1-x^2}\;\dfrac{3}{x-1} < 1$.

1.80. $(\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{8} - \dfrac{15}{88+32x})^2 \geq 1$.

2. Иррациональные уравнения и неравенства

Решите уравнения

2.1. $(x^2-1)\sqrt{5x-1}=0$.

2.2. $\sqrt{8-3x^2}=1$.

2.3. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+4}=0$.

2.4. $\sqrt{x^2-9}=\sqrt{x-3}$.

2.5. $\sqrt{12-x}=x$.

2.6. $x-\sqrt{x-1}=3$.

2.7. $\sqrt{7+x}+x+1=0$.

2.8. $\sqrt{4+4x+x^2}+x=4$.

2.9. $\sqrt{2x^2+21x+4}=2+11x$.

2.10. $\sqrt{3x^2+25x+51}=7+2x$.

2.11. $\dfrac{\sqrt{2x+1}+1}{x}=1$.

2.12. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-6=0$.

2.13. $\sqrt{3-x}+\dfrac{4}{\sqrt{3-x}+3}=2$.

2.14. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=\dfrac{3}{2}$.

2.15. $2x^2-3x-\sqrt{2x^2-3x+9}+3=0$.

2.16. $\sqrt{1-3x}-\sqrt{4-x}=1$.

2.17. $\sqrt{4+x}-\sqrt{5-x}=3$.

2.18. $\sqrt{13-4x}=\sqrt{12-3x}-\sqrt{1-x}$.

2.19. $\sqrt{x^4+2x-5}=1+x$.

2.20. $\sqrt{13-x}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x}$.

2.21. $\sqrt{x}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+7}-1}$.

2.22. $\sqrt{x-1}+\sqrt{(x-1)(x+1)}-\sqrt{x^3}=0$.

2.23. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}=x-7$.

2.24. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x+33}-\sqrt{x+6}$.

2.25. $\sqrt{3x^2-5x+8}-\sqrt{3x^2-5x+1}=1$.

2.26. $\sqrt{1-x\sqrt{x^2-24}}+x+1=0$.

2.27. $\sqrt[3]{1-x}=1-\sqrt{x}$.

2.28. $6\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-1}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-1)}$.

2.29. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

2.30. $(5x+2)\sqrt{1-x}+(5x-7)\sqrt{x}=0$.

Решите неравенства

2.31. $x\cdot\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$.

2.32. $\sqrt{\dfrac{x-3}{3-2x}}>-1$.

2.33. $\sqrt{3x-4}>\sqrt{4-x}$.

2.34. $\sqrt{x^2-2x-3}<1$.

2.35. $\sqrt{x^2}+x<1$.

2.36. $0<x+\sqrt{2-x}$.

2.37. $0<x+\sqrt{x+2}$.

2.38. $x<\sqrt{x+30}$.

2.39. $\sqrt{2x-1}<x-2$.

2.40. $\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1$.

2.41. $3+x>3\sqrt{1-x^2}$.

2.42. $\sqrt{(x+1)(x-10)}>x$.

2.43. $\sqrt{(x+5)(3x+4)}>4(x-1)$.

2.44. $\dfrac{3}{\sqrt{2+x}}<\sqrt{2+x}+2$.

2.45. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}<\dfrac{3}{2}$.

2.46. $3\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}>1$.

2.47. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}<0$.

2.48. $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}>\sqrt{x-1}$.

2.49. $\sqrt{7x-6}-\sqrt{3x-16}>\sqrt{5x-22}$.

2.50. $\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2+x+1}<1$.

2.51. $\sqrt{1+x}\le\sqrt[4]{5-x}$.

2.52. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\ge 2$.

2.53. $\sqrt{2-\sqrt{x}}<\sqrt{x+1}$.

2.54. $x+4+\dfrac{x^2}{(1+\sqrt{x-1})^2}>0$.

2.55. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{35}{12}$.

2.56. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}>2$.

2.57. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2-7x}>3$.

2.58. $x^2\ge x(2+\sqrt{12-2x-x^2})$.

2.59. $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}>\dfrac{2}{x}$.

2.60. $\sqrt{x+3}-\sqrt{-x-1}<1+\sqrt{(x+3)(-x-1)}$.

3. Уравнения и неравенства с модулем

Решите уравнения

3.1. $|x+2|=x+2$.

3.2. $|x-2|=2(3+x)$.

3.3. $|3x+2|=x+11$.

3.4. $|1-x^2|=15$.

3.5. $|2x-5|=5-2x$.

3.6. $x^2+|x|-6=0$.

3.7. $(x-5)^2-|x-5|=30$.

3.8. $x^2+6x+8+|x+4|=0$.

3.9. $3|x+2|+x^2+6x+2=0$.

3.10. $|1-5x^2|=4$.

3.11. $|x-4|=|5-2x|$.

3.12. $|x^2+13x+35|=|35-x^2|$.

3.13. $|2x-8|-|x+5|=12$.

3.14. $|x|-|x+2|=2$.

3.15. $|5x+3|+|2x+1=|7x+4|$.

3.16. $|x|-2|x-1|+3|x-2|=0$.

3.17. $2|x-6|-|x|+|x+6|=18$.

3.18. $|||x+1|+2|-1|+1|=2$.

3.19. $|2x+15|=22-|2x-7|$.

3.20. $|x^2+2x-1|=\dfrac{1-5x}{3}$.

Решите неравенства

3.21. $|2x+5|<1$.

3.22. $\left|3x+\dfrac{5}{2}\right|\geq 2$.

3.23. $|x^2+5x|<6$.

3.24. $2|x-1|\le 4-x$.

3.25. $|x+1|>\dfrac{1-x}{2}$.

3.26. $|x+2|\le|4-x|$.

3.27. $|x-1|-|x+4|>7$.

3.28. $|x-2|+x+\dfrac{3}{2}<|x+1|$.

3.29. $x^2-6|x|+8<0$.

3.30. $x^2-|x|-6\le 0$.

3.31. $|x^2+2x|+x\le 0$.

3.32. $|x+4|>x^2+7x+12$.

3.33. $x^2+5x+9\le|x+6|$.

3.34. $3x^2+9x+2\ge|x+3|$.

3.35. $|x+6|>|x^2+5x+9|$.

3.36. $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{|x|}\ge 2$.

3.37. $\dfrac{3}{|x+1|}\ge 5-2x$.

3.38. $\dfrac{|x-3|-1}{4-2|x-4|}\ge -1$.

3.39. $\dfrac{|2+x|+x}{|x+3|-1}\le 2$.

3.40. $\dfrac{|1-x|+10}{4|x-1|+3}>2$.

3.41. $\dfrac{1}{|x+1|-1}\ge\dfrac{2}{|x+1|-2}$.

3.42. $|2x+4|-|3x-9|>|x+1|-6$.

3.43. $||x+1|-|x-1||<1$.

3.44. $|x^2+2x-3|+3x+3<0$.

3.45. $x^2-|5x+3|+x<2$.

3.46. $x^2+4\ge|3x-2|+7x$.

3.47. $(|x+1|-3)(|x-2|-5)<0$.

3.48. $|x^2-x-2|+|x-4|\le x^2-2x+6$.

3.49. $|x^2+2x-8|+2x>0$.

3.50. $x^2-x-10<2|x+2|$.

3.51. $2x>\dfrac{5x+3}{|x+2|}$.

3.52. $\dfrac{|x-1|+|x+2|}{199-x}<1$.

3.53. $\dfrac{|x+2|}{|x+1|-1}\ge 1$.

3.54. $\dfrac{3}{|x-3|-1}\ge|x-2|$.

3.55. $\left|\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-x+1}\right|<3$.

3.56. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2+6x+9}<0$.

3.57. $\dfrac{|x+3|}{x^2+5x+6}\ge 2$.

3.58. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x+3}\le 2x$.

3.59. $|x^3+1|\ge 1+x$.

3.60. $\left|\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-4}\right|\le 1$.

4. Тригонометрические уравнения и неравенства

Решите уравнения

4.1. $\sqrt{3}\sin x = 2.$

4.2. $\sin x = \frac{\pi}{6}.$

4.3. $\sqrt{2}\cos^2 5x = \cos 5x.$

4.4. $(2\sin 2x - \cos 2x)(1 + \cos 2x) = \sin^2 2x.$

4.5. $\sqrt{3}\sin x - \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}x \cdot \sin x = \sqrt{3}.$

4.6. $2\cos 4x + \cos 2x = 1.$

4.7. $3\cos(\frac{\pi}{2} + x) = 2\cos^2 x.$

4.8. $\dfrac{4\sin x - 2\cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - 2} = 0.$

4.9. $\dfrac{6\sin x - 2\cos 2x - 4\cos^2 x - 3}{\sqrt{7}\sin x - 3\cos x} = 0.$

4.10. $4\sin^4 \frac{x}{2} + 12\cos^2 \frac{x}{2} = 7.$

4.11. $3tg^2 x + 7 = \dfrac{2}{\sin^2 x}.$

4.12. $\sin 3x + \sin x = \sin 2x.$

4.13. $\sin 2x + \sin 3x + \cos 5x = 1.$

4.14. $3\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 0.$

4.15. $4\sin x \cdot \cos x - 3\sin^2 x = 1.$

4.16. $\cos x - \sin x - 2\sin x \cdot \cos x = 1.$

4.17. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x.$

4.18. $6(\sin x + \cos x) - 2\sin x \cdot \cos x + 6 = 0.$

4.19. $(\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x)^2 = 5 + \cos(\frac{\pi}{2} + 2x).$

4.20. $\cos 3x - \sin(9x - 2) = 0.$

4.21. $4\cos x - 3\sin x = 5.$

4.22. $\sin x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{10} \cdot \cos x = 1.$

4.23. $2\cos 3x = \sqrt{3}\cos x + \sin x.$

4.24. $\operatorname{tg}3x = \operatorname{tg}x.$

4.25. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4) \cdot \operatorname{tg}x} = 2.$

4.26. $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg}x.$

4.27. $\dfrac{1 - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}x} = (\sin x - \cos x)^2.$

4.28. $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} + x) = 7 - 5\operatorname{tg}2x.$

4.29. $\sin^4\dfrac{2x}{3} + \cos\dfrac{2x}{3} = \dfrac{5}{8}.$

4.30. $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \dfrac{1}{2}.$

4.31. $\dfrac{2\sin^4 x - 1}{\cos^4 x} = 2.$

4.32. $\cos 2x \cdot (2\cos^2 2x - 1) = \dfrac{1}{4}.$

4.33. $2\sin^3 x - \sin^2 x + 2\sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$

4.34. $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x.$

4.35. $2\sin^8 x - 2\cos^8 x = \cos^2 2x - \cos 2x.$

4.36. $(3 - \operatorname{ctg}^2 x)\sin 2x = 2(1 + \cos 2x).$

4.37. $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x + 4\cos^2 x = 0.$

4.38. $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\cos x) + \operatorname{ctg}(\pi\sin x) = 0.$

4.39. $\operatorname{tg} 3x = (2 + \sqrt{3})\operatorname{tg} x.$

4.40. $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 7x = 1.$

4.41. $\operatorname{tg} 14x + 3\operatorname{ctg} 7x + \sin 3x - 2\sqrt{2}\sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}) = \frac{4}{\sqrt{3}+1}.$

4.42. $2\cos x - \sqrt{2}\sin 28x = 3\sqrt{2} - 2\cos 28x \cdot \sin x.$

4.43. $2\sin^2 x + \sin(x^2) = 1.$

4.44. $\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\sin x).$

4.45. $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi\operatorname{ctg}).$

4.46. $1 + \arcsin x = 0.$

4.47. $2\arccos^2 x - 3\arccos x - 2 = 0.$

4.48. $\arcsin x = \arccos x.$

4.49. $\arcsin(x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \arccos(x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{2}}).$

4.50. $\arcsin 2x = \arccos|x|.$

Решите неравенства

4.51. $\sin x > \frac{1}{2}.$

4.52. $\cos x \le -\frac{1}{2}.$

4.53. $\operatorname{tg} x < 1$.

4.54. $20\sin^2 x + 9\cos x < 21$.

4.55. $\operatorname{tg}\dfrac{1}{1+x^2} \geq 1$.

4.56. $2\cos^2 2x - (2+\sqrt{2})\cos 2x + \sqrt{2} > 0$.

4.57. $6\sin x \cdot \cos x > \sin x + \cos x + 1$.

4.58. $\sin(\sin x) + \sin x \cdot \cos(\sin x) > 0$.

4.59. $2\cos(\arcsin x) - \sin(\frac{1}{2}\arccos x) \leq 0$.

4.60. $\arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x) \geq 3x - 18$.

5. Показательные уравнения и неравенства

Решите уравнения

5.1. $5^{x^2+6x+8}=1$.

5.2. $(2/5)^{6x-7}=(5/2)^{14x-3}$.

5.3. $0,125\cdot 2^{-4x-16}=\left(\dfrac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^x$.

5.4. $2^{3+2x}=4^{1-x^2-3x}$.

5.5. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4\sqrt{x}}=(2,25)^{2\sqrt{x}-4}$.

5.6. $5\sqrt{5}(0,2)^{x+0,5}=(0,04)^x$.

5.7. $\dfrac{2^{2x-1}\cdot 4^{x+1}}{64}=8^{x-1}$.

5.8. $32^{(x+8)/(x-4)}=0,25\cdot 128^{(x+20)/x}$.

5.9. $5^{x+1}=5^{x-1}+24$.

5.10. $7^{x+1}-\dfrac{1}{7}7^x+2\cdot 7^{x-1}-14\cdot 7^{x-2}=48$.

5.11. $3^{2x-1}-9^x+27^{(2x+2)/3}=675$.

5.12. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$.

5.13. $4^{-2/x}-5\cdot 2^{-2/x}+4=0$.

5.14. $2^{2+x}+2^{2-x}=17$.

5.15. $2^{x+1}\cdot 5^x=10^{x+1}\cdot 5^{x+2}$.

5.16. $2^x\cdot 5^{x-1}=200$.

5.17. $2^{(x^2-6)}\cdot 3^{(x^2-6)}=\dfrac{(6^{-x-1})^4}{6^5}$.

5.18. $(\log_3 8)\cdot(4/9)^x\cdot(27/8)^{x-1}=\log_3 4$.

5.19. $7^{x+1}+3\cdot 7^x=3^{x+2}+3^x$.

5.20. $9^x-5^x-3^{2x}\cdot 15+5^{x+1}\cdot 3=0$.

5.21. $25^x-7^x-7\cdot 5^{2x+1}+5\cdot 7^{x+1}=0$.

5.22. $9^x+6^x-2\cdot 4^x=0$.

5.23. $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 9^x$.

5.24. $4^x = 2 \cdot 10^x + 3 \cdot 25^x$.

5.25. $64 \cdot 9^{-x} - 84 \cdot 12^{-x} + 27 \cdot 16^{-x} = 0$.

5.26. $4^{1/x} + 6^{1/x} - 9^{1/x} = 0$.

5.27. $8^x + 8 = 3 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^{x+1}$.

5.28. $3^{-12x-1} - 9^{-6x-1} - 27^{-4x-1} + 81^{1-3x} = 2192$.

5.29. $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$.

5.30. $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x + (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = 14$.

Решите неравенства

5.31. $2^{5+10x} > 1$.

5.32. $4^{2x} > 0{,}125$.

5.33. $2^{-x} > \frac{1}{128}$.

5.34. $\sqrt{27} \cdot 3^{x+1} < 9^{4x^2}$.

5.35. $3^{x-3} < 3 \cdot 27^{-\frac{1}{x}}$.

5.36. $5^{-2x-x^2/3} < 5^{2+2x}\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x^2} + 24$.

5.37. $(0{,}2)^{(2x-1)/x} > 5$.

5.38. $(0{,}1)^{(1-2x)/(x+1)} > 10^3$.

5.39. $(0{,}25)^{4x^2+2x-2} < 4^{2x+3}$.

5.40. $(0{,}3)^{2x^2+3x+6} < 0{,}00243$.

5.41. $\sqrt{16^{(2x+2)/x}} < \sqrt[3]{8^{3x-7}}$.

5.42. $2^{-x+2} - 2^{-x+1} + 2^{-x-1} - 2^{-x-2} \le 9$.

5.43. $2^{x+1} + 2^{-x} - 3 < 0$.

5.44. $5^{1-2x} > 5^{-x} + 4$.

5.45. $25^x - 5^{x+1} \ge 50$.

5.46. $4^{-x-0,5} - 7 \cdot 2^{-x-1} - 4 < 0$.

5.47. $4^{x+1} - 16^x < 2 \cdot \log_9 27$.

5.48. $2^{x-0,5} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1 + 2^{-x}$.

5.49. $4^{3x^2-x} - 8 < 2 \cdot 8^{x^2-x/3}$.

5.50. $\frac{4^x + 2x - 4}{x-1} \le 2$.

5.51. $\dfrac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1}<\dfrac{1}{2}$.

5.52. $\dfrac{2^{1+x}-2^{-x}+1}{2^{-x}-1}\le 0$.

5.53. $8\cdot\dfrac{3^{x-2}-1}{3^{x}-2^{x}}<1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}$.

5.54. $\dfrac{33\cdot 3^{x-1}-93}{12\cdot 9^{x}-11\cdot 3^{x}-15}\ge 5$.

5.55. $2^{2-x}-2^{3-x}-2^{4-x}>5^{2-x}-5^{-x}$.

5.56. $5^{x-2}+5^{x-3}+5^{x-4}>7^{\frac{x}{2}+1}+7^{\frac{x}{2}}+7^{\frac{x}{2}-1}$.

5.57. $2^{2x}-2\cdot 25^{x}-10^{x}>0$.

5.58. $2\cdot 4^{x}-25\cdot 5^{2x}-5\cdot 10^{x}>0$.

5.59. $9\cdot 4^{1/x}+5\cdot 6^{1/x}<4\cdot 9^{1/x}$.

5.60. $5^{2x+1}+6^{x+1}>30+15^{x}\cdot 10^{x}$.

6. Логарифмические уравнения и неравенства

Решите уравнения

6.1. $2\log_8 2^{4x} = 2^{\log_{\sqrt{2}} 2}$.

6.2. $10^{\lg(\lg\sqrt{x})} - \lg x + \lg x^2 - 3 = 0$.

6.3. $\log_5\left(\dfrac{x+1}{10}\right) = \log_5\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

6.4. $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 1$.

6.5. $\dfrac{\log_2 5}{\log_2 10} + \lg(x+10) = 1 + \lg(21x-20) - \lg(2x-1)$.

6.6. $2\log_4(4+x) = 4 - \log_2(x-2)$.

6.7. $\log_3((x+2)(x-2)) = 4\log_9(2x+3) - \log_{\sqrt{5}} 5$.

6.8. $2\log_8(2x) + \log_8(x^2+1-2x) = \dfrac{4}{3}$.

6.9. $\dfrac{1}{2}\lg(x+\dfrac{1}{8}) - \lg(x+\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}\lg(x-\dfrac{1}{2}) - \lg x$.

6.10. $\log_{1/2}(-x-1) + \log_{1/2}(1-x) - \log_{1/\sqrt{2}}(7+x) = 1$.

6.11. $x^{\log_{\sqrt{x}}(x^2+1)} = 25$.

6.12. $\log_{x+1} 2 = 3$.

6.13. $\log_{1-x}(x^2+3x+1) = 1$.

6.14. $\log_{1-x}(x^2-x-6)^2 = 4$.

6.15. $(\lg x)^2 - 6\lg x = \lg x^2 - 5$.

6.16. $(\log_2 x)^2 - 2\log_2\sqrt{x} = 2$.

6.17. $\lg^{-1} x + 4\lg x^2 + 9 = 0$.

6.18. $\log_2 \dfrac{x}{8} = \dfrac{15}{\log_2 \dfrac{x}{16} - 1}$.

6.19. $\dfrac{\log_{27} \dfrac{27}{x^2}}{\log_{27}^2 x} = 3$.

6.20. $\log_2 x - 4\log_{x^2} 4 = 3$.

6.21. $\log_{\sqrt{x}} 2 + 8\log_{16} x^2 + 9 = 0$.

6.22. $3 + 2\log_{x-1} 3 = 2\log_3(x-1)$.

6.23. $1 + 2\log_{(x+5)} 5 = \log_5(x+5)$.

6.24. $\frac{1}{8}(\log_2(x-2)^4)^2 = \frac{\lg(2-x)}{\lg 2}\cdot 2^{2\log_2\sqrt{3}}$.

6.25. $\log_x 9x^2 \cdot \log_9^2 x = 1$.

6.26. $\log_2\sqrt{x+1} + 3\log_2\sqrt{1-x} = \log_2\sqrt{1-x^2}$.

6.27. $\frac{3}{2}\log_{1/4}(x-2)^2 - 3 = \log_{1/4}(x+4)^3 + \log_{1/4}(6-x)^3$.

6.28. $\log_4 x - \log_{1/2}(13-x) = \log_2(10-x)^2 - 2\log_{1/4}(8-x)$.

6.29. $\log_4(\log_2 x) + 3\log_{1/8}(\log_2(2\sqrt{2}x) = 1$.

6.30. $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3(x-1)))) = \frac{1}{2}$.

Решите неравенства

6.31. $\log_{11}(3x-1) > 1$.

6.32. $\log_{1/3}(7x-1) > 0$.

6.33. $\lg(x^2+5x+7) < 0$.

6.34. $\log_{0,5}(x^2+5x+6) > -1$.

6.35. $\log_8(x^2+4x+3) \le 1$.

6.36. $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1-2x}{x}\right) \le 0$.

6.37. $2\log_{1/9}\left(\frac{2-3x}{x}\right) \ge -1$.

6.38. $\log_{1/5}(3x-4) > \log_{1/5}(x-2)$.

6.39. $\log_{0,1}(x^2-x-2) > \log_{0,1}(3-x)$.

6.40. $1 + \log_2(2-x) > \log_2(x^2+3x+2)$.

6.41. $\log_{0,1}(4-x) \ge \log_{0,1} 10 - \log_{0,1}(x-1)$.

6.42. $\lg(x+4) \ge -2\lg\dfrac{1}{2-x}$.

6.43. $\log_{1/5}(x^2+6x+18)+2\log_5(-x-4)<0$.

6.44. $2\log_2 x-\log_2(2x-2)>1$.

6.45. $2\log_3(-x)-\log_{1/3}(4+x)\le\log_3(x+1)^2+2\log_9(10+x)$.

6.46. $\log^2{}_{0,5}\, x-\log_{0,5} x\le 2$.

6.47. $\log_3 x\le\dfrac{2}{\log_3 x-1}$.

6.48. $\dfrac{1}{1+\log_2 x}+\dfrac{1}{1-\log_2 x}>2$.

6.49. $\dfrac{\lg^2 x-3\lg x+3}{\lg x-1}\le 1$.

6.50. $5+2\log_{1/3} x>2\log_x 3$.

6.51. $\log_x\left(\dfrac{6-5x}{4x+5}\right)>1$.

6.52. $\log_{(x^{-2})}(x+2)>-1$.

6.53. $\log_{\left(\frac{16}{25-x^2}\right)}\left(\dfrac{14}{24-2x-x^2}\right)>1$.

6.54. $\log_{(x/2)} 8+\log_{(x/4)} 8<\dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2-4}$.

6.55. $\log_5 x+\log_x\dfrac{x}{3}<\dfrac{2-\log_3 x}{\log_3 x}\log_5 x$.

6.56. $\log_2\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 2>1$.

6.57. $\log_5\sqrt{3x+1}\cdot\log_{x-1} 5>1$.

6.58. $\log_{1/2}(x+1)\cdot\log_2 x > \log_{(x+1)} x$.

6.59. $\log_2 x - \log_2(x+2) + \log_{(x+2)/x} 2 > 0$.

6.60. $1 + \log_{1/4}(\log_3(x+4)) > 0$.

6.61. $\log_{\sqrt[4]{9}}(\log_{1/3}(x+1)) \geq 2$.

6.62. $\log_{1/2}\log_2(x^2-2) > 0$.

6.63. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_8 \dfrac{x^2-1}{x-2}\right) < 0$.

6.64. $\log_{1/2} x^2 + \log_3 x^2 > 1$.

6.65. $\log_2\left(\log_3\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right) < \log_{1/8}\left(\log_{1/9}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\right)\right)$.

7. Комбинированные уравнения и неравенства

Решите уравнения и неравенства

7.1. $(4\,|\,x+1\,|+1/2)^2 = 11(x+1)^2 + 5/4$.

7.2. $\sqrt{|\,x-1\,|-1} \ge \sqrt{|\,x-1\,|-2011}$.

7.3. $\dfrac{x^3-8+6x(2-x)}{|\,3-4x\,|} \le \sqrt{4x-3}$.

7.4. $\sqrt{x^2-x+4} \le 2x+|\,3x+2\,|$.

7.5. $5^{72}\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{x}} > 1$.

7.6. $2^{|x-2|} - |\,2^{1-x}-1\,| = 2^{1-x}+1$.

7.7. $2^x + 2^{|x|} \ge 2\sqrt{2}$.

7.8. $\dfrac{3^x-2}{x^2-6x+5} \le 0$.

7.9. $\dfrac{\log_2(1-x)}{x+1} < 0$.

7.10. $\dfrac{1-\log_{0,5}x}{\sqrt{6x+2}} < 0$.

7.11. $\dfrac{(x+0,5)(x+3)}{\log_2|\,x+1\,|} < 0$.

7.12. $9^{\log_3(1+2x)} = 5x^2-5$.

7.13. $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\log_7(x^2-1)} > 1$.

7.14. $2^{\log_5(2/(x+2))} < 1$.

7.15. $(0,3)^{\log_5\left(\log_{1/5}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)\right)} < 1$.

7.16. $\log_{0,1}(101-5^x)+2 < 0$.

7.17. $\log_2\dfrac{1}{|\,x+1\,|-1} = 1$.

7.18. $\log_2\left|\,1-\dfrac{12}{x^2}\,\right| < 1$.

7.19. $|\log_3(2-x)| > 2$.

7.20. $2 < |\log_{1/2}(x+1)-4| \le 3$.

7.21. $\sqrt{\log_{\operatorname{tg}(3\pi/16)}(x-1)} \ge 1$.

7.22. $\sqrt{\log_2\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)} < 1$.

7.23. $x^{2\lg x} = 10x^2$.

7.24. $x\cdot x^{\lg x} = 10\cdot x$.

7.25. $x^{\lg^2 x-3\lg x+1} > 1000.$

7.26. $x^{(\lg 10x)-2} < 100.$

7.27. $\left(\frac{x+1}{10}\right)^{\lg(x+1)-2} < 100.$

7.28. $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} \geq 2.$

7.29. $3^{(\log_3 x)^2/4} \leq \frac{x^{(\log_3 x)/3}}{3}.$

7.30. $5^{\log_x 49} - 7^{\log_x 5} - 2 \geq 0.$

7.31. $3\sqrt{\lg x} + 2\lg\sqrt{x^{-1}} = 2.$

7.32. $\log_{1/3} x - 3\cdot\sqrt{\log_{1/3} x} + 2 = 0.$

7.33. $\log_{4/3}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) + \log_{4/25}(2/5) \geq 0.$

7.34. $\log_5(5^x - 20) = x - 1.$

7.35. $\log_{1/9}(2^{x+2} - 4^x) \geq -1.$

7.36. $\log_3(2^{-x} - 3) + \log_3(2^{-x} - 1) = 1.$

7.37. $2(\lg 2 - 1) + \lg(5^{\sqrt{x}} + 1) = \lg(5^{1-\sqrt{x}} + 5).$

7.38. $2\log_{\sqrt{3}} 3 + \log_{\sqrt{3}}(3^{x^2-3} - 1/9) < \log_{\sqrt{3}} 26.$

7.39. $\lg 2^{x+3} - \lg(5^x - 2) = x.$

7.40. $\frac{x+1}{3-\log_3(9-3^{-x})} \leq 1.$

7.41. $\log_{(x^2-2x-3)} \frac{|x| - |x-4|}{x+1} > 0.$

7.42. $\log_3(\log_{1/8}((3/2)^{-x} - 1/2)) \leq -1.$

7.43. $\log_{-x}(\log_9((3^{-x} - 9)) < 1.$

7.44. $\log_2(2^x - 1)\cdot\log_{1/2}(2^{x+1} - 2) > -2.$

7.45. $\log_4(\sqrt{3}^x - 1)\cdot\log_{1/4}\left(\frac{\sqrt{3}^x - 1}{16}\right) \leq \frac{3}{4}.$

7.46. $\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2}+x-1)\ge 1$.

7.47. $\log_{2x} 4x \le \sqrt{\log_{2x}(16x^3)}$.

7.48. $\sqrt{(\log_{1/2} 2x)^2+4\log_2\sqrt{2x}} < \sqrt{2}(4-\log_{16} 16x^4)$.

7.49. $\left(x+\dfrac{8}{x}\right)\cdot|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)|\ge 9\cdot|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)|$.

7.50. $|4\cos^2 x-1|+|4\cos^2 x-3|=2$.

7.51. $\left|2\sin x+2\cos x+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x+\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}\right|\le 2$.

7.52. $81^{(\sin 2x-1)\cos 3x}-9^{(\sin x-\cos x)^2}=0$.

7.53. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{\sin x}=\dfrac{10}{3}$.

7.54. $\log_{\frac{6x-x^2}{11}}(-\cos 3x-\cos x)=\log_{\frac{6x-x^2}{11}}(-\cos 2x)$.

7.55. $\sqrt{\sin x}+\cos x=0$.

7.56. $\sqrt{\operatorname{tg} x+\sin x}+\sqrt{\operatorname{tg} x-\sin x}=2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos x$.

7.57. $\sqrt{\cos 3x+\sqrt{3}\sin 3x-3\cos^2 x+\cos x+\dfrac{13}{4}}=\sqrt{3}\sin x+\dfrac{1}{2}$.

7.58. $\sqrt{5-2\sin x}\ge 6\sin x-1$.

7.59. $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>1$.

7.60. $\sqrt{2-\sin x-\sqrt{3}\cos x}>1$.

7.61. $2^{\frac{5}{2}+2\cos 2x}-(2^{\frac{3}{2}}-1)4^{\cos^2 x}=-(2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}-1)}$.

7.62. $\log_{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin^2 x-\dfrac{5}{12}}<-1$.

7.63. $\log_{(\sin x-\cos x)}(\sin x-5\cos x)\ge 1.$

7.64. $\sqrt{4\sin^2 x-1}\cdot\log_{\sin x}\dfrac{x-5}{2x-1}\ge 0.$

7.65. $\sqrt{\arcsin x}+\sqrt{\arccos x}>\sqrt{\dfrac{7\pi}{12}}.$

* * *

7.66. Сколько различных корней имеет уравнение
$\sqrt{6}x^2+2\sqrt{3}x+3=-2x$?

7.67. Сколько различных решений имеет неравенство
$\sqrt{6}(x^2+2)+2\sqrt{5}x\le\sqrt[4]{35}(x^2-2)+2\sqrt{7}x$?

7.68. Найдите наименьший положительный корень уравнения
$\cos\left(\pi x^2\right)=\cos\left(\pi\left(x^2+2x+1\right)\right)$.

7.69. Найдите все корни уравнения $\sqrt{1-\sin 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0$ на промежутке $\left[-\dfrac{3\pi}{2};-\pi\right]$.

7.70. Найдите все корни уравнения $\cos x+\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{2}}=0$ на промежутке $[3\pi;4\pi]$.

8. Системы

Решите системы

8.1. $\begin{cases} 4x+7y=5, \\ 2x+3y=-6. \end{cases}$

8.2. $\begin{cases} 2x+y=7, \\ |x-y|=2. \end{cases}$

8.3. $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5-|x-1|. \end{cases}$

8.4. $\begin{cases} y+|x+1|=1, \\ |y-x|=5. \end{cases}$

8.5. $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{x-2y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{18}. \end{cases}$

8.6. $\begin{cases} 3x+4\sin y=-11, \\ -2x+5\sin y=\dfrac{7}{2}. \end{cases}$

8.7. $\begin{cases} \sqrt{12}\operatorname{ctg} x+\sqrt{2}y=4, \\ -\sqrt{27}\operatorname{ctg} x+\sqrt{8}y=1. \end{cases}$

8.8. $\begin{cases} 6\cos x+7\log_y 3=-10, \\ -5\cos x+2\log_y 3=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

8.9. $\begin{cases} 7\cdot 2^x+6y=2, \\ 3\cdot 2^{x+1}-5y=93. \end{cases}$

8.10. $\begin{cases} \dfrac{6}{2^{1-x}}+2\cdot 3^{y+1}=21, \\ 5\cdot 2^{x+2}-\dfrac{18}{3^{2-y}}=56. \end{cases}$

8.11. $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=\dfrac{1}{9}, \\ y-2x=4. \end{cases}$

8.12. $\begin{cases} 2\log_x 8+3y=24, \\ 2\log^3{}_x 0,5+y=8. \end{cases}$

8.13. $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1. \end{cases}$

8.14. $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=5-2\sqrt{6}. \end{cases}$

8.15. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+x=-1, \\ \dfrac{x}{x+y}=-2. \end{cases}$

8.16. $\begin{cases} 6^x-2\cdot 3^y=2, \\ 6^x\cdot 3^y=12. \end{cases}$

8.17. $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=5, \\ 2\log_4 x+\log_2 y=4. \end{cases}$

8.18. $\begin{cases} \log_2(2x^2-y^2)=2, \\ 6\log_8(-x)+\log_2(y^2)=4. \end{cases}$

8.19. $\begin{cases} 2\cdot 5^{1-y} = \log_3 x^{-2}, \\ 5^y + \log_3 x = 4. \end{cases}$

8.20. $\begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y\cdot 2^y + 2^y\cdot \log_3 x = 4. \end{cases}$

8.21. $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$

8.22. $\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x. \end{cases}$

8.23. $\begin{cases} x + 2y = y^2 - x^2 + 3, \\ 2^{3x+y} = 512. \end{cases}$

8.24. $\begin{cases} 3\cdot 2^x + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35. \end{cases}$

8.25. $\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$

8.26. $\begin{cases} y^2 = 4^x + 8, \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0. \end{cases}$

8.27. $\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1, \\ 5x^6 + 8x^3\sqrt{y} + y = 1. \end{cases}$

8.28. $\begin{cases} 2^{y/x+3x/y} = 16, \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-1}. \end{cases}$

8.29. $\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 30, \\ x^2 + y^2 = 325. \end{cases}$

8.30. $\begin{cases} 3^{\log_2(2x-y)} = 1, \\ 4^{x+y} - 2^{x+y} = 12. \end{cases}$

8.31. $\begin{cases} 3\log_5 x + \log_{\sqrt[3]{5}} y = 3, \\ \log_5(y - x - 2) + \log_{125}(y - x - 2)^3 = \log_5 12. \end{cases}$

8.32. $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

8.33. $\begin{cases} x^3\sqrt{x - y} = 0, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy. \end{cases}$

8.34. $\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1, \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y + 2. \end{cases}$

8.35. $\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64, \\ y < x. \end{cases}$

8.36. $\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$

8.37. $\begin{cases} \sqrt{\sin x}\cos^2 y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$

8.38. $\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$

8.39. $\begin{cases} 2\sin 3x + 2\cos 4x = 1 + \sqrt{2}, \\ 2\sin 7x - 2\sin x = \sqrt{2}, \\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

8.40. $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \ge 0. \end{cases}$

8.41. $\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$

8.42. $\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3 - \sqrt{2})\operatorname{tg}5y = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y + (3 - \sqrt{2})\sin(-2x) = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}. \end{cases}$

8.43. $\begin{cases} 3\sin x + \cos y = 0, \\ 6\cos x - 2\sin y = 7. \end{cases}$

8.44. $\begin{cases} y - x = 5, \\ xz = (z - 4)y + 30, \\ 2xz = (2z - 4)y. \end{cases}$

8.45. $\begin{cases} x + 3^y = 2, \\ x^3 + 27^y = 26. \end{cases}$

8.46. $\begin{cases} \dfrac{xy}{2} + \dfrac{5}{2x + y - xy} = 5, \\ 2x + y + \dfrac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$

8.47. $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ 4,5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{cases}$

8.48. $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 9x - 4y + 6 = 0, \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y + 4 = 0. \end{cases}$

8.49. $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$

8.50. $\begin{cases} 2x^4 + y^2 = 10, \\ x^2 + 2y^4 = 10. \end{cases}$

8.51. $\begin{cases} \sqrt{x}(x + 3y) = 36, \\ \sqrt{y}(3x + y) = 28. \end{cases}$

8.52. $\begin{cases} 4^x + 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 2 \cdot 9^y + 2^x + 2 \cdot 3^y = 1. \end{cases}$

8.53. $\begin{cases} (1/4)^{-3x/2} + \log^3{}_3 y = 504, \\ 4^x - 2^{x-1} \log_{\sqrt{3}} y + \log^2{}_3 y = 84. \end{cases}$

8.54. $\begin{cases} \left(1 + 2\log_{|xy|} 2\right) \log_{x+y} |xy| = 1, \\ x - y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

8.55. $\begin{cases} x + \log_2 y = y \log_2 3 + \log_2 x, \\ x \log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y. \end{cases}$

8.56. $\begin{cases} \log_2 (10 - 3y) + \log_{1/2} (2y - 5x) = 0, \\ \sqrt{x + 2y + 1} - \sqrt{11 - 3y} = \sqrt{2x + 4y - 12}. \end{cases}$

8.57. $\begin{cases} xy + 3y^2 - x + 4y - 7 = 0, \\ 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$

8.58. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 1, \\ \dfrac{xz}{x+z} = 2, \\ \dfrac{yz}{y+z} = 3. \end{cases}$

8.59. $\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$

8.60. $\begin{cases} y + 2 = (3 - x)^3, \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y, \\ x^2 + z^2 = 4x, \\ z \ge 0. \end{cases}$

ГЛАВА III. ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

9. Планиметрические задачи

9.1. Найдите площадь правильного треугольника, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями 10 и 12.

9.2. Найдите периметр правильного треугольника, если центр описанной около него окружности удален от хорды, равной 2, на расстояние 3.

9.3. В треугольнике ABC основание D высоты $CD = \sqrt{3}$ лежит на стороне AB. Найдите AC, если $AB = 3$, $AD = BC$.

9.4. Найдите площадь прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен 13, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 12.

9.5. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведена медиана CM и высота CH, причем точка H лежит между A и M. Найдите отношение $AH : AM$, если $CM : CH = 5 : 4$.

9.6. Один из углов треугольника равен разности двух других, наименьшая сторона треугольника равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, вдвое больше площади описанного около треугольника круга. Найдите наибольшую сторону треугольника.

9.7. Окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с углом $\angle A = 30^\circ$, касается катета AC в точке K. Найдите BK.

9.8. Окружность радиуса 3, центр O которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника, касается катетов. Найдите площадь треугольника, если $OA = 5$.

9.9. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов AC и BC в точках E и D соответственно. Найдите $\angle B$, если $AE = 1$, $BD = 3$.

9.10. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла. Из точки D опущен перпендикуляр $DM = \sqrt{3}$ на сторону AC. Найдите BC, если $AD = 2\sqrt{3}$.

9.11. На стороне AB треугольника ABC с углами $\angle A = 30^\circ$ и $\angle B = 130^\circ$ как на диаметре построен круг. Найдите площадь части этого круга, лежащей внутри треугольника.

9.12. Две равных хорды окружности образуют вписанный угол величиной 30°. Найдите отношение площади части круга, лежащей внутри угла, к площади всего круга.

9.13. Точка пересечения двух общих касательных к двум непересекающимся окружностям, меньшая из которых имеет радиус r, лежит на линии их центров на расстоянии $6r$ от центра большей окружности и делит отрезок касательной между точками касания в отношении $1:3$. Найдите площадь фигуры, состоящей из двух частей, ограниченных касательными и большими дугами окружностей.

9.14. Найдите площадь выпуклого четырехугольника с диагоналями 3 и 4, если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, равны.

9.15. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите $AM : CM$, если площадь треугольника MCN вдвое больше площади трапеции $AMNB$.

9.16. Прямая, параллельная стороне $AB = 5$ треугольника ABC и проходящая через центр вписанной в него окружности, пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно. Найдите периметр четырехугольника $ABMN$, если $MN = 3$.

9.17. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки M и N соответственно так, что $AM : MB = 3 : 2$ и $AN : NC = 4 : 5$. В каком отношении прямая, проходящая через точку M параллельно BC, делит отрезок BN?

9.18. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках E и F, причем $EF = 8$. Найдите основания трапеции, если их отношение равно 4.

9.19. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом α и радиусом описанной окружности R.

9.20. Найдите отношение высот треугольника ABC, опущенных из вершин A и B соответственно, если $\cos\angle A = \frac{1}{5}$, $\sin\angle B = \frac{1}{2}$.

9.21. Найдите углы треугольника со сторонами 10, 24 и 26.

9.22. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и B прямые, $AB = BC = 3$ и $BD = 5$. На сторонах AD и CD взяты такие точки E и F соответственно, что $AE = 1$ и $CF = 2$. Найдите площадь пятиугольника $ABCEF$.

9.23. Одно из оснований равнобедренной трапеции равно 4. Найдите расстояние между точками касания с ее боковыми сторонами вписанной в трапецию окружности радиуса 4.

9.24. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $AD = 5$ биссектриса угла A пересекает биссектрисы углов B и D в точках K и L соответственно, а биссектриса угла C пересекает те же биссектрисы в точках N и M соответственно. Найдите отношение площади четырехугольника $KLMN$ к площади параллелограмма $ABCD$.

9.25. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит биссектрису прямого угла в отношении $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, считая от вершины.

9.26. Найдите высоту, биссектрису и медиану, проведенные из вершины одного угла треугольника, если они делят этот угол на четыре равные части, а радиус описанной около треугольника окружности равен R.

9.27. Найдите площадь треугольника со стороной a, противолежащим углом α и противолежащим углом β.

9.28. Найдите биссектрису прямого угла треугольника с гипотенузой c и острым углом α.

9.29. В окружность радиусом R вписан равнобедренный треугольник с острым углом α при основании. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

9.30. В окружность диаметром 25 вписан равнобедренный треугольник с боковой стороной 20. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

9.31. Около треугольника ABC описана окружность с диаметром $AD = 2$. Найдите BC, если $AB = 1$ и $\angle BAD : \angle CAD = 4 : 3$.

9.32. Окружность радиуса 5 с центром O, лежащим на стороне AB треугольника ABC, касается сторон AC и BC. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AO = 13$ и $BO = 7$.

9.33. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята такая точка D, что $CD = 2$ и биссектриса CL перпендикулярна прямой DL. Найдите AL.

9.34. Две окружности радиусов 2 и 8 касаются друг друга внешним образом в точке A. Общая касательная к ним, проведенная через точку A, пересекает другую общую касательную в точке B. Найдите AB.

9.35. Окружности радиусов 2 и 3 касаются друг друга внешним образом в точке A. Общая касательная к ним в точке A пересекает в точке B другую общую касательную, касающуюся в точке C меньшей окружности с центром O. Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник $OABC$.

9.36. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. Найдите KL, если $AM = 2, MC = 3$ и $\angle C = \frac{\pi}{3}$.

9.37. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон $AB = 4$ и $AC = 3$ в точках M и N соответственно. Найдите площадь треугольника AMN, если $BC = 2$.

9.38. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK, если $AC = a, \angle ABC = \alpha$, а периметр треугольника ABC равен $2p$.

9.39. Прямая, касающаяся окружности в точке K, параллельна хорде $AB = 6$. Найдите радиус окружности, если $AK = 5$.

9.40. Диагонали вписанной в окружность трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее периметр равен 18, а основания относятся, как 1:7.

9.41. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = a$ и $AD = b$ вписана в окружность. Найдите радиус окружности, если $\angle CAD = \alpha$.

9.42. Окружность, проходящая через вершины C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найдите AE, если $AD = 4$ и $CE = 5$.

9.43. Через точку K диаметра AB окружности проведена хорда MN. Найдите AB, если $\angle ABM = 30^\circ, \angle BMK = 15^\circ$ и $MK = 3$.

9.44. Медианы BM и CN треугольника ABC взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABM, если $BC = a$ и $AC = b$.

9.45. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите расстояние от точки K до прямой BC, если $BC = a, \angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$.

9.46. В треугольнике ABC проведена высота BH и медиана BM. Найдите угол $\angle MBH$, если $AB = 1, BC = 2$ и $AM = BM$.

9.47. Найдите углы треугольника ABC, если его медиана BM равна половине стороны AC, а один из углов, образованных биссектрисой BL и стороной AC, равен $55°$.

9.48. В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и на боковую сторону, равны m и n соответственно. Найдите стороны треугольника.

9.49. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CK. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $HK = 2\sqrt{2}$, а площади треугольников ABC и BHK равны 18 и 2 соответственно.

9.50. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CK. Найдите площадь круга, описанного около треугольника KBH, если $AC = 1$ и $\angle KCH = \alpha$.

9.51. Отрезок, соединяющий основания высот, проведенных к сторонам AB и AC остроугольного треугольника ABC с углом $\angle A = \alpha$, равен l. Найдите BC.

9.52. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AL. Найдите AL, если $BL = b$ и $CL = c$.

9.53. В равнобедренной трапеции с боковой стороной 5, основание высоты, проведённой из вершины верхнего основания, делит нижнее основание на отрезки 12 и 3. Найдите верхнее основание трапеции, ее площадь, высоту и диагональ.

9.54. Найдите площадь треугольника со сторонами a, b и c, его высоту, медиану и биссектрису, проведённые к стороне c, а также радиусы вписанной и описанной окружностей.

9.55. В треугольник со сторонами a, b и c вписана окружность. Найдите расстояние от противолежащей стороне c вершины треугольника до ближайшей точки касания.

9.56. Зная медианы треугольника, найдите его площадь.

9.57. Зная высоты треугольника, найдите его площадь.

9.58. Стороны треугольника равны a, b, c. В каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису, проведённую к стороне a?

9.59. Углы треугольника равны α, β, γ. В каком отношении точка пересечения высот делит высоту, проведённую из вершины угла α?

9.60. Даны две непараллельные стороны a и b параллелограмма. Найдите его диагональ d_1 по известной другой диагонали d_2.

9.61. Какова площадь треугольника со сторонами: а) 5, 9, 12; б) 2, 3, 6; в) $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$?

9.62. Найдите углы треугольника площадью 3, если две его стороны равны 3 и 4.

9.63. В треугольнике ABC со стороной $AB = 5$ и высотой $BD = 3$ найдите $\angle BAC$.

9.64. Две стороны треугольника равны 1 и 2, а синус угла между ними равен $\frac{1}{2}$. Найдите третью сторону и два других угла треугольника.

9.65. Существует ли треугольник с углами $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{7}, \arcsin\frac{\pi}{4}$?

10. Стереометрические задачи

10.1. В правильную шестиугольную пирамиду с высотой H вписан один конус, а около нее описан другой конус с радиусом основания R. Найдите разность объемов этих конусов.

10.2. Конус вписан в правильную четырехугольную пирамиду. Их общая высота равна $9/4$, а радиус вписанной в конус сферы равен 1. Найдите разность объемов пирамиды и конуса.

10.3. Через вершину S конуса проходит плоское сечение SAB площадью 42. Точки A и B делят длину окружности основания конуса в отношении $1:5$. Найдите объем конуса, если $\angle SAB = \arccos\frac{3}{\sqrt{58}}$.

10.4. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна d и образует с двумя смежными гранями углы α и β соответственно.

10.5. Найдите сторону основания правильной треугольной призмы объемом V, если угол между диагоналями двух ее боковых граней, проведенными из одной вершины, равен α.

10.6. Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды объемом 36, если ее высота вдвое больше радиуса окружности, описанной около основания.

10.7. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды со стороной основания равной a, и углом φ между боковыми ребрами.

10.8. Найдите двугранный угол при ребре основания правильной треугольной пирамиды, если угол между ее боковыми ребрами равен φ.

10.9. В правильной пирамиде $SABC$ с ребрами $AB = 1$ и $AS = 2$ проведены биссектриса AL боковой грани SAB и медиана BM основания ABC. Найдите LM.

10.10. На высоте правильной треугольной пирамиды взята точка, удаленная от бокового ребра пирамиды на расстояние $4/\sqrt{13}$

и делящая высоту в отношении $1:2$, считая от вершины. Найдите объем пирамиды, если ее боковые грани наклонены к основанию под углом $\pi/6$.

10.11. Найдите высоту пирамиды, основанием которой служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9, если ее боковые ребра наклонены к основанию под углом $60°$.

10.12. Найдите объем пирамиды, если ее основанием служит прямоугольный треугольник с гипотенузой 3 и углом $30°$, а боковые ребра наклонены к основанию под углом $60°$.

10.13. Основанием пирамиды $SABC$ с высотой SH служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, а двугранные углы при ребрах основания равны по $\arcsin\frac{5}{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $AH=1$ и $BH=3\sqrt{2}$.

10.14. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды объемом $9\sqrt{3}$ и высотой 3.

10.15. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если радиус описанной около нее сферы равен 2, а боковое ребро в $\sqrt{2}$ раз больше ребра основания.

10.16. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше ее высоты. Найдите отношение радиуса вписанной в пирамиду сферы к апофеме пирамиды.

10.17. В правильной пирамиде $SABC$ с высотой SH и ребром основания $AB=a$ угол между боковым ребром и плоскостью основания равен φ. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно ребрам SA и BC.

10.18. Плоскость, параллельная боковому ребру $AS=a\sqrt{2}$ и ребру $BC=a$ основания ABC правильной пирамиды $SABC$, проходит на расстоянии d от ребра AS. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

10.19. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с высотой H и двугранным углом α при боковом ребре.

10.20. В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной S боковое ребро равно a, а двугранный угол при этом ребре равен φ. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки B, D и середину ребра SC.

10.21. Все ребра правильной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны по 2. Плоскость, параллельная прямым AC и SB, пересекает ребра AB и BC в точках M и N. Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если $MN = \sqrt{2}$.

10.22. В правильной пирамиде $SABCD$ с высотой 4 сторона основания $SABC$ равна 6. Точки M и N — середины ребер BC и CD. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SMNC$.

10.23. На воздушном шаре, двигавшемся относительно Земли вдоль заданной параллели на постоянной высоте, было совершено кругосветное путешествие. На какой широте совершалось путешествие, если разность расстояний, пройденных верхней и нижней точками шара, оказалась равной удвоенному диаметру шара?

10.24. Какими должны быть радиусы четырех одинаковых шаров, чтобы их можно было разместить внутри данной сферы радиуса R и при этом каждый шар касался сферы и трех других шаров?

10.25. Два шара радиуса r касаются друг друга и боковой поверхности конуса, а так же его основания — в точках, симметричных относительно центра. Найдите объем конуса, если его высота в $4/3$ раза больше радиуса основания.

10.26. Площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через вершину ее основания перпендикулярно противоположному ребру, вдвое меньше площади основания пирамиды. Найдите отношение высоты пирамиды к боковому ребру.

10.27. Три параллельные прямые касаются в точках A, B и C сферы с центром O и радиусом 4. Найдите $\angle ABC$, если площадь треугольника AOC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

10.28. Вне правильного тетраэдра $ABCD$ взята такая точка M, что $MA = MB = MC = \sqrt{97}$ и $MD = \sqrt{2}$. Найдите объем тетраэдра.

10.29. Стороны $AB = 6$ и CD основания $ABCD$ пирамиды $SABCD$ параллельны, $AD = 4$, $AS = 2\sqrt{14}$ и $\angle BAD = 120°$. Найдите объем пирамиды, если через каждую из прямых AB и CD можно провести по плоскости, которые не содержат основание пирамиды и пересекают ее по равным четырехугольникам.

10.30. Основанием прямой призмы служит ромб $ABCD$ с углом $\angle A = 120°$. На боковых ребрах AA', BB' и CC' взяты такие точки K, L и M соответственно, что угол между прямыми KL и AB равен $45°$, а между прямыми LM и BC — $30°$. Найдите угол между плоскостями KLM и ABC.

10.31. Площадь сечения правильной треугольной пирамиды, проходящего через ее боковое ребро, равное $\sqrt{13}$, и высоту, вдвое больше площади ее основания. Найдите площадь ее боковой грани.

10.32. На ребре AS правильной пирамиды $SABC$ объемом V взята такая точка D, что $SD : DA = m : n$. Расстояние от центра основания ABC до плоскости BCD равно d. Найдите площадь треугольника BCD.

10.33. На боковых ребрах AA' и BB' треугольной призмы $ABCA'B'C'$ объемом V взяты такие точки D и E соответственно, что $AD = DA'$ и $BE : BE' = 1 : 2$. Найдите объем призмы, заключенной между плоскостями ABC и DEC.

10.34. Найдите площадь поверхности параллелепипеда объемом 8, вписанного в сферу радиуса $\sqrt{3}$.

10.35. На каком расстоянии от ребра SA правильной пирамиды $SABC$ с вершиной S, должна проходить плоскость, параллельная ребрам $BC = a$ и $AS = b$, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была максимальной?

10.36. Основанием пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной 15, а радиус вписанного в пирамиду шара равен 3. Найдите высоту пирамиды, если она совпадает с ребром SA.

10.37. Хорды AA', $BB' = 18$ и CC' сферы радиуса 11 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M, находящейся на расстоянии $\sqrt{59}$ от центра сферы. Найдите AA', если $CM : MC' = (8+\sqrt{2}) : (8-\sqrt{2})$.

10.38. На ребрах AB, BC и CD правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром 1 взяты такие точки K, L и M соответственно, что $AK = 1/2$ и $BL = CM = 1/3$. Плоскость KLM пересекает прямую AD в точке N. Найдите угол между прямыми NK и NL.

10.39. Точка M равноудалена от вершин A и D правильного тетраэдра $ABCD$, а от каждой из вершин B и C находится на расстоянии $\sqrt{3/2}$. Прямая MC перпендикулярна высоте DH треугольника ACD. Найдите объем тетраэдра.

10.40. В правильную пирамиду $SABCD$ вписана сфера радиуса 2. Этой сферы, граней BSC, CSD и основания $ABCD$ пирамиды касается другая сфера радиуса 1. Найдите объем пирамиды и двугранный угол при боковом ребре.

10.41. Найдите ребро основания правильной призмы $ABCA'B'C'$ с боковым ребром $AA' = 2$, если угол между скрещивающимися прямыми AC' и $A'B$ равен $\alpha < 60°$.

10.42. На ребре BD тетраэдра $ABCD$ взята такая точка E, что $DE : BE = 3 : 5$. Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через точки A и D параллельно медиане BM треугольника ABC, делит объем тетраэдра.

10.43. На ребрах AD и BD тетраэдра $ABCD$ взяты такие точки E и F соответственно, что $DE : AE = SF : BF = 1 : 2$. Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через точки E и F параллельно ребру CB, делит объем тетраэдра.

10.44. Двугранный угол при ребре AB тетраэдра $ABCD$ равен $\pi/4$. Найдите $\angle DAC$, если $\angle DAB = \pi/2$ и $\angle BAC = 3\pi/4$.

10.45. Двугранный угол при ребре AC тетраэдра $ABCD$ равен $\pi/4$. Найдите BD, если $AB = 2, AD = \sqrt{2}$, $\angle BAC = \pi/6$ и $\angle CAD = \pi/2$.

10.46. Найдите радиус сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, если $AB = BC = 2, AC = 1$, а ребро $CD = 4$ перпендикулярно ребрам AB и AC.

10.47. Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра, две вершины которого лежат на диагонали куба с ребром 2, а две другие вершины – на диагонали грани этого куба.

10.48. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а точка E не лежит в его плоскости. Найдите угол между двумя прямыми, по которым пересекаются две пары плоскостей ABE, CDE и BCE, ADE.

10.49. Дан тетраэдр $ABCD$ с углом $\angle ABC = \beta \le 90°$. Найдите угол между двумя прямыми, проходящими через две пары точек: середины ребер AC, BC и середины ребер BD, CD.

10.50. Точка A находится на расстоянии a от данной плоскости и на расстоянии b от прямой L, лежащей в этой плоскости. Найдите расстояние от проекции точки A на плоскость до прямой L.

10.51. Найдите угол между боковым ребром a правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания со стороной b.

10.52. В одной из граней двугранного угла величины α взята точка A на расстоянии d от ребра двугранного угла. Найдите расстояние от точки A до плоскости второй грани.

10.53. Пусть A' — проекция точки A на данную плоскость, $AA' = a$. Через точку A проходит другая плоскость, образующая с данной плоскостью угол α и пересекающая ее по прямой L. Найдите расстояние от точки A' до прямой L.

10.54. В пирамиде $SABC$ с углом $\angle ABC = \alpha$ точка B — проекция точки S на плоскость ABC. Найдите величину угла между гранями SAB и SBC.

10.55. На ребре $BC = 4$ куба $ABCDA'B'C'D'$ взята середина M, а на ребре $A'D'$ — такая точка N, что $A'N = 1$. Найдите длину кратчайшего пути из точки M в точку N по поверхности куба.

10.56. Найдите объем куба $ABCDA'B'C'D'$, если сфера радиуса $\sqrt{41}$ проходит через точки A, B, C и середину ребра $A'D'$.

10.57. Расстояния от концов отрезка до некоторой плоскости равны 1 и 3. Чему может быть равно расстояние от середины этого отрезка до той же плоскости?

10.58. Боковые грани пирамиды $SABC$ одинаково наклонены к основанию ABC, $AC = 3$, $BC = 4$, $SC = \sqrt{38}$ и $\angle ACB = 90°$. В пирамиду вписан цилиндр площадью боковой поверхности $8\pi/3$: нижнее его основание лежит в плоскости ABC, а верхнее имеет по одной общей точке с каждой боковой гранью. Каким может быть радиус основания этого цилиндра?

10.59. Чему может быть равна сумма углов, образуемых произвольной прямой с данной плоскостью и с перпендикуляром к ней?

10.60. Какие значения может принимать величина угла, получаемого в сечении произвольной плоскостью фиксированного двугранного угла величины α?

11. Задачи на доказательство

11.1. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

а) треугольник — правильный;

б) все медианы треугольника равны;

в) все высоты треугольника равны;

г) все биссектрисы треугольника равны.

11.2. Докажите, что из медиан любого треугольника можно сложить треугольник. Верно ли аналогичное утверждение для высот треугольника?

11.3. Докажите, что угол между секущими, выходящими из точки вне круга, измеряется полуразностью двух дуг окружности, расположенных внутри угла.

11.4. Докажите, что вертикальные углы между пересекающимися хордами измеряются полусуммой двух дуг окружности, на которые они опираются.

11.5. Докажите, что угол между касательной к окружности и хордой, выходящей из точки касания, измеряется половиной дуги, заключённой между ними.

11.6. Хорды AB и CD окружности с центром в точке O радиуса R пересекаются в точке E. Докажите, что $AE \cdot BE = CE \cdot DE = R^2 - OE^2$.

11.7. Через точку A, лежащую вне окружности с центром в точке O радиуса R, проведена секущая и касательная. Секущая пересекает окружность в точках B и C, а касательная касается окружности в точке D. Докажите, что $AD^2 = AB \cdot AC = AO^2 - R^2$.

11.8. Пусть AD — биссектриса внутреннего или внешнего (в этом случае точка D лежит на продолжении BC) угла треугольника ABC. Докажите, что $BD : CD = AB : AC$.

11.9. Докажите, что в выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.

11.10. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

11.11. Докажите, что если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то плоскость, проходящая через середины отрезков AD, BD, CD, параллельна:

а) прямой AB;

б) плоскости ABC.

11.12. Докажите, что в пространстве для любых четырех различных точек A, B, C, D середины K, L, M, N отрезков AB, BC, CD, DA соответственно служат вершинами параллелограмма $KLMN$.

11.13. Докажите, что если три прямые в пространстве не проходят через одну точку и попарно пересекаются, то они лежат в одной плоскости.

11.14. Три прямые проходят через точку A. Точки B, B' — точки одной прямой, C, C' — точки другой прямой, D, D' — точки третьей прямой. Докажите, что отношение объёмов пирамид $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равно $(AB \cdot AC \cdot AD):(AB' \cdot AC' \cdot AD')$.

11.15. Докажите, что отношение площади многоугольника, расположенного в одной плоскости, к площади его проекции на другую плоскость равно $1:\cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями.

11.16. Докажите, что если S и P — площади двух граней тетраэдра, a — их общее ребро, а α — двугранный угол между ними, то объём этого тетраэдра равен $\dfrac{2SP\sin\alpha}{3a}$.

11.17. Докажите, что если a и b — противоположные рёбра тетраэдра, d — расстояние между ними, а α — угол между ними, то объём этого тетраэдра равен $\dfrac{abd\sin\alpha}{6}$.

11.18. Докажите, что плоскость, делящая пополам двугранный угол при ребре тетраэдра, делит противоположное ребро на части, пропорциональные площадям граней, заключающих этот угол.

* * *

11.19. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух разных точек этой плоскости.

11.20. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух разных прямых этой плоскости.

11.21. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от трех попарно пересекающихся прямых этой плоскости.

11.22. Даны две разные точки A и B плоскости и число $\alpha \in [0; \pi]$. Найдите геометрическое место точек $M \neq A, B$ плоскости, для которых $\angle AMB = \alpha$.

11.23. Пусть A — фиксированная точка, не лежащая в данной плоскости, а M — произвольная точка этой плоскости. Найдите геометрическое место середин отрезков AM.

11.24. Найдите геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат в двух параллельных плоскостях.

11.25. Даны две разные точки A и B пространства. Найдите геометрическое место точек $M \neq A, B$ пространства, для которых $\angle AMB = 90°$.

ГЛАВА IV. НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

12. Подготовительные упражнения

Для каждого значения a решите уравнение или неравенство (относительно x).

12.1. $a \cdot x = 1$.

12.2. $a \cdot x < 1$.

12.3. $(a^2 - 1)x = a - 1$.

12.4. $\dfrac{x-a}{x-1} = 0$.

12.5. $\dfrac{x^2-1}{x-a} = 0$.

12.6. $\dfrac{x-1}{x^2-a^2} = 0$.

12.7. $\dfrac{a(x-1)}{x-a} = 0$.

12.8. $x^2 = a$.

12.9. $x^2 > a$.

12.10. $x^2 < a$.

12.11. $|x| = a$.

12.12. $|a| = x$.

12.13. $|x| < a$.

12.14. $|x| > a$.

12.15. $\sqrt{x} = a$.

12.16. $a\sqrt{x} = 0$.

12.17. $\sqrt{x} > a$.

12.18. $\sqrt{x} < a$.

12.19. $2^x < a$.

12.20. $2^x > a$.

12.21. $\sqrt{a}^{\,x} = 1$.

12.22. $\log_a x < 1$.

12.23. $\log_x a \le 0$.

12.24. $\cos x = a$.

12.25. $\sin x = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$.

* * *

12.26. Докажите, что если p — простое число, большее 3, то число $p^2 - 1$ делится нацело на 24.

12.27. Докажите, что если p и q — простые числа, большие 3, то число $p^2 - q^2$ делится нацело на 24.

12.28. Докажите, что число $2^{10} + 5^{12}$ — составное.

12.29. Докажите, что число $222^{333} + 333^{222}$ — составное.

12.30. Докажите, что число $2010^{2010} - 1$ делится на 2009.

12.31. Докажите, что если сумма цифр десятичной записи числа n равна сумме цифр десятичной записи числа $2n$, то число n делится на 9. Верно ли обратное утверждение?

12.32. Найдите все числа вида $\overline{34x5y}$, кратные 36.

12.33. Докажите, что для любого натурального n число $n^2 + n$ чётное.

12.34. Докажите, что для любого целого n число $n^3 + 2n$ делится на 3.

12.35. Докажите, что для любого целого n число $n^3 + 5n$ делится на 6.

12.36. Докажите, что для любого целого n число $n^5 - n$ делится на 30.

12.37. Докажите, что в последовательности 11, 111, 1111, 11111,... нет числа, являющегося квадратом натурального.

12.38. Докажите, что все числа вида 16, 1156, 111556, 11115556,... являются полными квадратами.

12.39. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 54 и 72.

12.40. Докажите, что при любом натуральном значении n числа $3n + 5$ и $5n + 8$ взаимно просты.

12.41. Докажите, что для любого натурального n наибольший общий делитель чисел $n^2+10n+21$ и $n^2+9n+18$ равен $n+3$.

12.42. Докажите, что для любого натурального n наименьшее общее кратное чисел n^2+6n+9 и $n+4$ равно $n^3+10n^2+33n+36$.

12.43. Докажите, что ни при каком целом n число $n^2+5n+16$ не делится на 169.

12.44. Запишите число 0,11(7) в виде обыкновенной дроби.

12.45. Докажите, что числа $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ — иррациональные.

12.46. Докажите, что числа $\log_2 3$ и $\log_4 6$ — иррациональные.

12.47. Решите уравнение $3x-4y=1$ в целых числах.

12.48. Докажите, что уравнение $x^2+1=3y$ не имеет решений в целых числах.

12.49. Решите уравнение $xy+x+y=0$ в целых числах.

12.50. Докажите, что если хотя бы одно из рациональных чисел p и q отлично от -2, то ни один из корней уравнения $x^2+px+q=0$ не равен $1+\sqrt{3}$.

13. Задачи с параметрами

13.1. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + y = 2a \end{cases}$ имеет решения.

13.2. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1, \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$ имеет решения.

13.3. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} ax + y = 1, \\ 4x - 2y = a \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

13.4. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1 \end{cases}$ не имеет решений.

13.5. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} ax + y = a^3, \\ x + ay = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.6. Для каждого значения a решите систему
$$\begin{cases} (a-4)x + 2y = 4, \\ (a-4)^3 x + 4ay = 16. \end{cases}$$

13.7. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ имеет решения и всякое решение удовлетворяет неравенству $x > y$.

13.8. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 3x - y = a, \\ 6x - ay = 4, \\ x > 0 > y \end{cases}$ имеет решение.

13.9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ имеет ровно два различных корня.

13.10. Найдите наименьшее целое значение a, при котором уравнение $x^2 - 2(a+2)x + 12 + a^2 = 0$ имеет ровно два различных корня.

13.11. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$ не имеет корней.

13.12. Найдите все целые значения a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$ не имеет корней.

13.13. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax^2 + 2(a+1)x + (a+3) = 0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 1.

13.14. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ имеет два корня, сумма которых равна нулю.

13.15. Найдите все значения a, при каждом из которых один корень уравнения $x^2 + (2a-1)x + a^2 + 2 = 0$ вдвое больше другого.

13.16. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов чисел, составляющих решение системы $\begin{cases} 3x - y = 2 - a, \\ x + 2y = a + 1, \end{cases}$ будет наименьшей.

13.17. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов корней квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8$ принимает наименьшее значение.

13.18. Для каждого значения a решите уравнение $4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3 = 0$.

13.19. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$ не имеет корней.

13.20. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\log_{a-6,5}(x^2+1) = \log_{a-6,5}((a-5)x)$ имеет ровно два различных корня.

13.21. Для каждого значения a решите уравнение $\log_{\sqrt{2-x}} \sqrt{2x+a} = 2$.

13.22. Для каждого значения a решите неравенство $3(2x-a)+5a\sqrt{2x-a}-2a^2>0$.

13.23. Найдите все значения a, при каждом из которых область значений функции $f(x)=\dfrac{x^2+2ax-4}{x^2-2x+3}$ содержится в интервале $(-3;\ 2)$.

13.24. Известно, что $x=1, y=-1$ — одно из решений системы

$$\begin{cases} 3ax+by=\sqrt{3}g\dfrac{1111\pi}{6}, \\ ax^2+by^2=2. \end{cases}$$

Найдите остальные решения системы.

13.25. Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\dfrac{a+2-2^{x-2}}{a+3} \geq \dfrac{5a+5}{2(2^x+3a+3)}$ содержит какой-нибудь луч на числовой прямой.

13.26. Для каждого значения a решите уравнение $|\,x+3\,|-a\,|\,x-1\,|=4$.

13.27. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\,|\,x-2\,|+a+x=4$ имеет хотя бы один корень, причем все его корни лежат на отрезке $[0;\ 4]$.

13.28. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(x^2-(a+1)x+3(a-2))\log_{a-x}(2a-x-1)=0$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1;\ 2]$, а вне этого отрезка корней не имеет.

13.29. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x-a^2\log_3 y=1, \\ x+3a\log_3 y=1 \end{cases}$ имеет решения и всякое решение удовлетворяет неравенству $y>1-x$.

13.30. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого b найдется c такое, что система $\begin{cases} 2x + by = ac^2 + c, \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases}$ имеет решения.

13.31. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого b система $\begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b-6)y - 8z = 8 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

13.32. Найдите все тройки (a, b, c) при которых уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень $x = -1$, причем $a + b + c = 1$.

13.33. Известно, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, и $a + b + c < 0$. Найдите знак c.

13.34. Числа $a < 0$ и b таковы, что $x = 7$ является корнем уравнения $ax^2 + bx + 2 = 0$. Решите неравенство $ax^4 + bx^2 + 2 > 0$.

13.35. Найдите все значения a, при каждом из которых графики функций $y = \dfrac{3x+1}{x}$ и $y = \dfrac{4x + 3a - 7}{ax - 1}$ разбивают координатную плоскость ровно на пять частей.

13.36. Для каждого значения a решите уравнение $\log_a(x^2 - 3a) = \log_a(ax^2 - 3x)$.

13.37. Найдите все значения a, при каждом из которых все корни уравнения $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$ удовлетворяют неравенству $|x| < 1$.

13.38. Для данных чисел $a = \log_y x$ и $b = \log_z x$ найдите

$$\log_{\sqrt[3]{xyz}} \left(\frac{yz}{x^3} \right)^2.$$

13.39. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\log_{\frac{2a-15}{5}} \left(\dfrac{\sin x + \sqrt{3} \cos x + a - 5}{5} \right) > 0$ выполняется для всех x.

13.40. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} a(x-4)=3(y+2), \\ y+\sqrt{x}=0 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

13.41. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 8xy-25=0, \\ x^2=y+2x, \\ x^2+y^2\le a \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.42. Для каждого значения a определите, сколько решений имеет система $\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

13.43. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} y-x^2=\left|x^2-\dfrac{3}{2}x-1\right|, \\ y+4x=a \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.44. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(x^2-x+a^2+2)^2=4a^2(2x^2-x+2)$ имеет ровно три различных корня.

13.45. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=a(2\sin x+\cos^2 x+1)$ не принимает значений, бульших 3.

13.46. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=\log_{25-a^2}(\cos x+\sqrt{8}\sin x-a)$ определена при всех x.

13.47. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $|3\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a|\le 3$ выполняется при всех x.

13.48. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $5\cos x+\sin x+\cos(x-b)=a$ имеет решение:

а) хотя бы при одном b;

б) при любом b.

13.49. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\cos^2(2^{2x-x^2})=a+\sqrt{3}\sin(2^{2x-x^2+1})$ имеет хотя бы один корень.

13.50. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+2ax+4a^2-5a+3 \le 4\sin y - 3\cos y, \\ 0 \le y \le 2\pi \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.51. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x+y+z = x^2+4y^2, \\ x+2y+3z = a \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.52. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} |x^2-5x+4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.53. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 4x = a+3-y^2+2y, \\ x^2+y^2 = 2y \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

13.54. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a < 0, \\ x^2+a^2 = 4 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

13.55. Найдите все натуральные n, при каждом из которых арифметическая прогрессия не восстанавливается однозначно по ее семнадцатому члену и сумме первых n членов.

14. Задачи с целыми числами

14.1. Первый член геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем равен 5, а разность между утроенным вторым членом и половиной третьего – больше 20. Найдите знаменатель прогрессии.

14.2. После деления двузначного числа на сумму его десятичных цифр в частном получилось 7, а в остатке 6. После деления того же числа на произведение его цифр в частном получилось 3, а в остатке 11. Найдите это число.

14.3. Ученик перемножил два данных натуральных числа и допустил ошибку, увеличив произведение на 372. Поделив для проверки полученный результат на меньшее из данных чисел, ученик правильно получил в частном 90 и в остатке 29. Найдите данные числа.

14.4. Мастер делает в час целое число деталей, большее 5, а каждый из его учеников – на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе на 1 ч быстрее. Из какого числа деталей состоит заказ?

14.5. На факультет подано от немедалистов на 600 заявлений больше, чем от медалистов. Девушек среди немедалистов больше, чем среди медалистов, в 5 раз, а юношей среди немедалистов больше, чем среди медалистов, в n раз, где n — натуральное число и $6 \le n \le 13$. Найдите общее число заявлений, если среди медалистов юношей на 20 больше, чем девушек.

14.6. Имеется два проекта застройки микрорайона. По первому проекту предполагается построить несколько одинаковых домов, содержащих в общей сложности 12096 квартир. По второму проекту предполагается построить на 8 домов больше, причем домов также одинаковых, но с большим числом квартир в каждом и содержащих в общей сложности 23625 квартир. Сколько домов предполагается построить по первому проекту?

14.7. Авиалинию, связывающую два города, обслуживают самолеты только трех типов. Каждый самолет первого, второго и третьего типа может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найдите число действующих на линии самолетов каждого типа, если их общее число не превосходит 8.

14.8. На клетчатой бумаге выделен прямоугольник размером $m \times n$ клеток, причем числа m и n взаимно простые и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все возможные значения m и n при данных условиях.

14.9. А, И, Б сидели на трубе в указанном порядке. К ним стали подсаживаться другие буквы так, что порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр порядковых номеров двух предыдущих букв. С некоторого момента буквы стали циклически повторяться.

1) Какая буква в циклически повторяющемся наборе встречалась наиболее часто?

2) Может ли циклически повторяющийся набор при каких-либо других начальных буквах состоять из одной буквы? Если да, то из какой?

14.10. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < 15/2. \end{cases}$$

14.11. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 7875x^2 = 567y^3, \\ |\, x \,| \le 25. \end{cases}$$

14.12. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$3(x-3)^2+6y^2+2z^2+3y^2z^2=33.$$

14.13. Найдите все целочисленные решения уравнения $3x=5y^2+4y-1$ и докажите, что для любого такого решения (x, y) число x^3+y^3 — нечетное.

14.14. Найдите наименьшее нечетное натуральное число, кратное 9 и дающее остаток 7 при делении на 13.

14.15. Первая бригада изготовила деталей на 15% больше, чем вторая. Все детали уложили в два ящика: в первый ящик – менее 1000 деталей, а во второй – более 1000. Сколько деталей положили в первый ящик, если в нем оказалось 2/3 деталей, изготовленных первой бригадой, и 1/7 изготовленных второй?

14.16. Найдите число студентов, сдавших экзамен, если шестая их часть получила оценку «удовлетворительно», 56% — «хорошо», а 14 человек — «отлично», причем отличники составили более 4%, но менее 9% от общего числа экзаменовавшихся студентов.

14.17. Абитуриенты сдавали экзамены в два потока в нескольких аудиториях. В каждом потоке число абитуриентов, экзаменовавшихся в каждой аудитории, было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их пришлось бы провести в три потока, причем в каждом потоке в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу аудиторий. Какое наименьшее число абитуриентов могло быть проэкзаменовано при этих условиях?

14.18. В двух коробках лежали карандаши: в первой – красные, во второй – синие, причем красных было меньше, чем синих. Сначала 40% карандашей, из первой коробки переложили во вторую. Затем 20% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причем половину из переложенных карандашей составляли синие. В итоге красных карандашей в первой коробке оказалось на 46 больше, чем во второй. Найдите общее количество синих карандашей.

14.19. Найдите все пары целых чисел a и b, для каждой из которых уравнение $\arcsin\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} - a\cdot 2^{\sin\pi ax} - \left|\arcsin\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + a\cdot 2^{\sin\pi ax}\right| = 2ab$ имеет не менее 10 различных корней.

14.20. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $a^3|y| \le \sqrt{2}(a^2-x^2)$ имеет наименьшее количество целочисленных решений.

14.21. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2-3x+3|x+a|+a \le 0$ имеет наибольшее количество целочисленных решений.

14.22. Найдите все целочисленные решения неравенства
$\sqrt{x^3-5x-3} \le 6-x$.

14.23. Найдите все целочисленные решения уравнения
$(x^2+y^2)(x+y-3) = 2xy$.

14.24. Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие системе $\begin{cases} 2x+47 < 22y-2y^2, \\ 7x+14 \le 4y. \end{cases}$

14.25. Найдите все целочисленные решения системы
$\begin{cases} x^2+y^2 < 16x-22y-171, \\ 30x-y^2 > 252+x^2+14y. \end{cases}$

14.26. Найдите все целые a, при каждом из которых графики функций $y=\log_{1/\sqrt{2}}(x-2a)$ и $y=\log_2(x-2a^3-3a^2)$ пересекаются в точке с целочисленными координатами.

14.27. Найдите все a, при каждом из которых уравнение

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{a-x}-\frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{a}-\frac{5}{8}\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-2x-3}-4\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5}+2\right)=0$$

имеет хотя бы один корень и все его корни – целочисленные.

14.28. Первые 80 км пути из одного пункта в другой автобус идет по шоссе, а оставшиеся 120 км – по грунтовой дороге, на два часа дольше. Совершив более четырех рейсов по маршруту туда и обратно, он затратил менее 168 ч, включая стоянки в конечных пунктах. Найдите скорости движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге, если за время, которое автобус провел в движении, он со скоростью, равной среднему арифметическому этих двух скоростей, проехал бы 2100 км.

14.29. Когда груз разложили в вагоны по 80 т, один вагон оказался недогружен. Если бы груз разложили в вагоны по 60 т, то понадобилось на 8 вагонов больше, причем один вагон опять оказался недогруженным. Если же груз разложили в вагоны по 50 т, то понадобилось еще на 5 вагонов больше, причем все вагоны оказались полными. Найдите вес груза.

14.30. В саду было подготовлено четное число ям для посадки деревьев. После посадки яблонь, груш и слив, оказалось, что использовано менее трети ям, груш посажено на 6 больше, чем яблонь, а свободных ям оказалось втрое больше, чем посажено слив. Если бы яблонь посадили втрое больше, то свободных осталось бы 59 ям. Сколько ям для посадки было подготовлено?

14.31. Какое наибольшее число членов может содержать конечная арифметическая прогрессия с разностью 4 при условии, что квадрат ее первого члена в сумме с остальными членами не превосходит 100?

14.32. В двух ящиках содержится в общей сложности более 29 деталей. Число деталей, содержащихся в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем втрое превышает число деталей, содержащихся во втором ящике. Утроенное число деталей, содержащихся в первом ящике, превышает удвоенное число деталей, содержащихся во втором ящике, но менее чем на 60. Сколько деталей содержится в каждом ящике?

14.33. Три мальчика хотели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все имеющиеся у них деньги, они не смогли купить даже одну игрушку. Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку двух игрушек не хватило бы 34 коп. Когда третьему мальчику добавили вдвое больше денег, чем у него было, после покупки двух игрушек у них еще осталось 6 коп. Сколько стоили игрушки, если первоначально у второго мальчика было на 9 коп. больше, чем у первого?

14.34. Число двухкомнатных квартир в доме вчетверо больше числа однокомнатных, а число трехкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных квартир увеличить впятеро, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если их не меньше 100?

14.35. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$9x^2y^2 + 9xy^2 + 6x^2y + x^2 + 2y^2 + 18xy + 5x + 7y + 6 = 0.$$

14.36. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 - 125x^2 + 82y^2 + 51 = 0.$$

14.37. Найдите все целочисленные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right)\right) = 1.$$

14.38. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 4^{x^2+2xy+1} = 7^{|y|-1}(z+2), \\ \sin\dfrac{3\pi z}{2} = 1. \end{cases}$$

14.39. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ axy + ayz + azx > xyz \end{cases}$ имеет ровно пять различных решений в натуральных числах.

14.40. Решите уравнение $\cos(\pi(x+7\sqrt{x}))\sin(\frac{\pi}{2}(4x+\sqrt{x}))=1$.

14.41. Найдите все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{3x^2-2z^2+2y^2+2z-6y+\frac{\sqrt{2}}{4}x-41}+$$
$$+\sqrt{2x^2-4\sqrt{2}(\cos\pi y+\cos\pi z)}=0.$$

14.42. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2+1953^{100}xy-1995^{100}y^2=0$.

14.43. В ящике находится 13 черных шаров и 17 белых. Разрешается:

а) увеличить на 1 число черных шаров и одновременно увеличить на 4 число белых;

б) увеличить на 2 число черных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых;

в) уменьшить на 4 число черных шаров и одновременно увеличить на 5 число белых;

г) уменьшить на 5 число черных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых.

Можно ли, совершая в каком-либо порядке и количестве описанные действия, добиться, чтобы в ящике оказалось 37 черных шаров и 43 белых?

14.44. Две бригады землекопов одинаковой производительности каждый вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она закончила бы работу на 2 ч раньше. Найдите число землекопов в каждой бригаде.

14.45. Рота солдат прибыла на парад прямоугольным строем по 24 человека в ряд, однако не все прибывшие солдаты смогли участвовать в параде. Оставшийся для парада состав перестроили так, что число рядов уменьшилось на 2, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы построить в виде квадрата. Сколько солдат было в роте?

14.46. Три фермера привели баранов для продажи на ярмарке: первый — 10, второй — 16, третий — 26. В первый день они установили одинаковую цену (в целое число рублей), и каждый продал не менее одного барана, но не всех. Во второй день они продали остальных баранов, опять же по одинаковой, но более низкой цене. По какой цене продавались бараны в первый и во второй день, если каждый фермер выручил от продажи по 3500 руб.?

14.47. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала по 5%, затем по $11\frac{1}{9}\%$, по $7\frac{1}{7}\%$ и, наконец, по 12%. Под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определите срок хранения вклада.

14.48. Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, где m и n — натуральные числа. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

14.49. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Каково наименьшее число учеников в классе?

14.50. Из строительных деталей двух видов можно собирать дома трех типов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого вида и 100 второго, для сборки 16-квартирного дома — 110 деталей первого типа и 150 второго, а для сборки 21-квартирного дома — 150 деталей первого типа и 200 второго. Всего имеется 900 деталей первого вида и 1300 второго. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

14.51. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 19 т. Масса маленького блока 0,2 т, большого — 3,6 т, большой блок занимает место 14 маленьких. Найдите наименьшее число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

14.52. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства $4 \cdot 3^{2x+1} + 3^x < 1$.

14.53. В магазине продаются гвоздики и розы. Гвоздика стоит 1,5 у.е., роза — 2 у.е. На покупку гвоздик и роз можно затратить не более 30,5 у.е. При этом число гвоздик не должно отличаться от числа роз более чем на 6. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество цветов, при этом гвоздик нужно купить как можно меньше. Сколько гвоздик и сколько роз можно купить при указанных условиях?

14.54. Множество состоит из более семи различных натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 210, а произведение — делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа, причем наибольший общий делитель любых двух из них больше единицы. Найдите все числа, составляющие это множество.

14.55. Сколько точек с целочисленными координатами находится строго внутри криволинейной трапеции, образованной осью абсцисс, прямыми $x = \frac{3}{2}$, $x = 129$ и графиком функции $y = \log_2 x$.

14.56. Найдите все целые значения n, для каждого из которых число $\log_{2n-1}(n^2 + 2)$ является рациональным.

14.57. Сократите дробь $\dfrac{1234567\overbrace{88\ldots87}^{2000}7654321}{12345678\underbrace{99\ldots9}_{1999}87654321}$ до несократимой.

14.58. Сколькими способами можно разбить на две команды группу из 7 мальчиков и 8 девочек так, чтобы в одной из команд было ровно 4 мальчика и 3 девочки?

14.59. Билеты имеют номера от 000001 до 999999. Билет считается «счастливым», если первые три его цифры нечетны и различны, а вторые – четны, причем цифры 7 и 8 не стоят рядом. Сколько существует различных номеров «счастливых» билетов?

14.60. Имеются 12 карандашей попарно различной длины. Сколькими способами можно уложить их в коробку в два слоя по шесть карандашей так, чтобы в каждом слое карандаши были упорядочены по возрастанию длины (слева направо), а каждый карандаш верхнего слоя лежал строго над карандашом нижнего слоя и был короче его?

ГЛАВА V. ОТВЕТЫ

Ответы к главе I

Ответы к демоверсии

С1. $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \ x = -\arccos\dfrac{2}{3} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$

С2. $30°$.

С3. -1.

С4. 1 или 7.

С5. $a = 4$.

С6. $a = 2,\ \ b = 5$.

Ответы к варианту 1

С1. $x = (-1)^n \arcsin\dfrac{1}{9} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z},\quad y = -\dfrac{1}{9}$.

С2. $\operatorname{arctg}\dfrac{15}{32}$.

С3. $x < -3,\ \ x > 3$.

С4. $1\dfrac{25}{26}$.

С5. $\sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}$.

С6. 1 и 875.

Ответы к варианту 2

С1. $(x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n; y = -\frac{1}{4}), n \in \mathbb{Z}.$

С2. $\operatorname{arctg}\frac{37}{20}$.

С3. $[-3;-2)\cup(-2;-1)\cup(-\frac{1}{9};0).$

С4. $44,\ \frac{33}{2}$.

С5. $\frac{1}{6} < a < 4 + \sqrt{14}$.

С6. 1 и 6174.

Ответы к варианту 3

С1. $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

С2. $2\sqrt{7}$.

С3. $\left(-5\frac{1}{8};-5\right)\cup(-3;-1)$.

С4. 20, 6 или 4.

С5. $\pm 12/5$.

С6. 55, неположительных, 26.

Ответы к главам II–IV

1.1. $x = \pm 3$.

1.2. $x = 0, x = 2$.

1.3. $x = -4, x = -2$.

1.4. $x = 1, x = \frac{5}{3}$.

1.5. решений нет.

1.6. $x = 1$, $x = 2010$.

1.7. $x = -1, x = 2011$.

1.8. $x = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}, x = \pm 1$.

1.9. $x = \pm\sqrt{3}$.

1.10. $x = -\sqrt[3]{3}, x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

1.11. $x = -2$, $x = 4$.

1.12. $x = -1$.

1.13. $x = 3$.

1.14. $x = -1$, $x = 1$.

1.15. $x = -4$, $x = 2$.

1.16. $x = 1$, $x = 6$.

1.17. $x = 1$, $x = 12$.

1.18. $x = -1, x = 5, x = 2 \pm \sqrt{21}$.

1.19. $1 \le x \le \frac{5}{3}$.

1.20. $x < -3, x > \frac{2}{3}$.

1.21. $1 < x < 2010$.

1.22. $x \le -2011$, $x \ge -1$.

1.23. x — любое.

1.24. решений нет.

1.25. $x = 3/2$.

1.26. $-\frac{5\sqrt{2}}{2} < x < -1$, $1 < x < \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

1.27. $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$.

1.28. $x < -\sqrt[3]{3}, x > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

1.29. $-\frac{4}{5} < x < \frac{1}{3}$.

1.30. $x < -\frac{5}{3}$, $x > -\frac{3}{2}$.

1.31. $(1;2)\cup(2;3)$.

1.32. $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(2;+\infty)$.

1.33. $x<-4,\quad 0<x<1$.

1.34. $(-\infty;-1)\cup(0;5)$.

1.35. x — любое.

1.36. $x\le 3,\ x\ge 5$.

1.37. $-3<x<-2$.

1.38. $-8\le x\le -\frac{5}{2}$.

1.39. $(-\infty;-7)\cup(-7;-\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)$.

1.40. $(-\infty;-5)\cup(1;2)\cup(6;+\infty)$.

1.41. $-1<x<6$.

1.42. $(-5;1)\cup\{5\}$.

1.43. $[1;3)\cup(3;4]$.

1.44. $(-1-\sqrt{2};-2)\cup(-2;-1+\sqrt{2})\cup(2;3)$.

1.45. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]\cup(2;+\infty)$.

1.46. $-7<x<-3$.

1.47. $(-\infty;-4)\cup(-1;+\infty)$.

1.48. $(-\frac{9}{2};-2)\cup(3;+\infty)$.

1.49. $(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$.

1.50. $0<x\le 5;\quad x\ge 12$.

1.51. $x<0,\ 0<x<1$.

1.52. $-1<x$.

1.53. $-6\le x<-5,\ x\ge 1$.

1.54. $[2;4]\cup(6;+\infty)$.

1.55. $(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(\frac{3}{2};+\infty)$.

1.56. $x<-3$.

1.57. $(-\infty;-23)\cup(20;+\infty)$.

1.58. $x<-\sqrt{2},\ x>\sqrt{2}$.

1.59. $-1<x<0,\ x>0$.

1.60. $-4<x<-3$.

1.61. $-5\le x<-2,\ -2<x\le 1$.

1.62. $x<-3,\ x>5$.

1.63. $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$.

1.64. $(-1;0)\cup(0;1)$.

1.65. $(-6;0)$.

1.66. $(-\infty;-\frac{8}{3})\cup(-\sqrt{7};2)\cup(\sqrt{7};+\infty)$.

1.67. $[-4;-3)\cup(-2;1]$.

1.68. $x\le-\frac{11}{2},\ -1<x<-\frac{2}{3},\ x>9$.

1.69. $(-1;-\frac{\sqrt{737}-11}{28})\cup(-\frac{4}{7};\frac{11+\sqrt{737}}{28})$.

1.70. $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

1.71. $(-1-\sqrt{2};-1)\cup(0;\sqrt{2}-1)\cup(1;+\infty)$.

1.72. $(-8;-2)\cup(-1;0)$.

1.73. $(1;2)\cup(3;+\infty)$.

1.74. $(-\infty;-1]\cup[1;2]\cup[4;+\infty)$.

1.75. $[-3;-2)\cup[-1;0)\cup[1;+\infty)$.

1.76. $-9<x\le-3,\ -1<x<0,\ x\ge3$.

1.77. $-3<x<-2,\ -1\le x\le5$.

1.78. $0<x\le1,\ 6<x<7$.

1.79. $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

1.80. $x\le-4,\ -3\le x<-\frac{11}{4},\ -\frac{11}{4}<x\le-2,\ x\ge1$.

2.1. $x=\frac{1}{5},\ x=1$.

2.2. $x=-\sqrt{\frac{7}{3}},\ x=\sqrt{\frac{7}{3}}$.

2.3. $x=5$.

2.4. $x=3$.

2.5. $x = 3$.

2.6. $x = 5$.

2.7. $x = -3$.

2.8. $x = 1$.

2.9. $x = 0$.

2.10. $x = \dfrac{\sqrt{17} - 3}{2}$.

2.11. $x = 4$.

2.12. $x = -27, x = 8$.

2.13. $x = 2$.

2.14. $x = -\dfrac{5}{3}$.

2.15. $x = 0, x = \dfrac{3}{2}$.

2.16. $x = -5$.

2.17. $x = 5$.

2.18. $x = 1$.

2.19. $x = \sqrt{3}$.

2.20. $x = 4$.

2.21. $x = 9$.

2.22. $x = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

2.23. $x = 8$.

2.24. $x = 3$.

2.25. $x = -1, x = \dfrac{8}{3}$.

2.26. $x = -7$.

2.27. $x = 0, x = 1, x = 9$.

2.28. $x = 2\dfrac{1}{63}, x = 2\dfrac{1}{728}$.

2.29. $5 \le x \le 10$.

2.30. $x = \dfrac{1}{2}, x = \dfrac{1}{5}, x = \dfrac{4}{5}$.

2.31. $x = -1, x \ge 2$.

2.32. $\dfrac{3}{2} < x \le 3$.

2.33. $2 < x \le 4$.

2.34. $1 - \sqrt{5} < x \le -1, \quad 3 \le x < 1 + \sqrt{5}$.

2.35. $x < \dfrac{1}{2}$.

2.36. $-2 < x \le 2$.

2.37. $x > -1$.

2.38. $-30 \le x < 6$.

2.39. $5 < x$.

2.40. $\frac{5}{2} \le x < 3$.

2.41. $-1 \le x < -\frac{3}{5}$, $0 < x \le 1$.

2.42. $x \le -1$.

2.43. $x \le -5$, $-\frac{4}{3} \le x < 4$.

2.44. $x > -1$.

2.45. $x < -\frac{5}{3}$, $x > 1$.

2.46. $3 < x$.

2.47. $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \le x < -1$.

2.48. $1 \le x < \frac{3}{2}$.

2.49. $\frac{16}{3} \le x < 8$.

2.50. $-\frac{\sqrt{13}-1}{6} < x \le 1$, $x \ge 2$.

2.51. $-1 \le x \le 1$.

2.52. $1 \le x$.

2.53. $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x \le 4$.

2.54. $-8 < x \le 1$.

2.55. $1 < x < \frac{5}{4}$, $\frac{5}{3} < x$.

2.56. $1 < x < 2$, $2 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

2.57. $-5 \le x \le 0$.

2.58. $-1-\sqrt{13} \le x \le 0$, $\frac{1+\sqrt{17}}{2} \le x \le \sqrt{13}-1$.

2.59. $x > \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$.

2.60. $-3 \le x < 2\sqrt{\sqrt{5}-2}-2$.

3.1. $x \ge -2$.

3.2. $x = -\frac{4}{3}$.

3.3. $x = -\frac{13}{4}$, $x = \frac{9}{2}$.

3.4. $x = -4$, $x = 4$.

3.5. $x \le \frac{5}{2}$.

3.6. $x = -2, x = 2$.

3.7. $x = -1, x = 11$.

3.8. $x = -3, x = -4$.

3.9. $x = -4, x = -1$.

3.10. $x = -1, x = 1$.

3.11. $x = 1, x = 3$.

3.12. $x = -\frac{70}{13}, x = -\frac{13}{2}, x = 0$.

3.13. $x = -3, x = 25$.

3.14. $x \le -2$.

3.15. $-\frac{4}{7} \le x$.

3.16. $x = 2$.

3.17. $-6 \le x \le 0, x = 12$.

3.18. $x = -1$.

3.19. $-\frac{15}{2} \le x \le \frac{7}{2}$.

3.20. $x = -4, x = -1$.

3.21. $-3 < x < -2$.

3.22. $x \le -\frac{3}{2}, x \ge -\frac{1}{6}$.

3.23. $-6 < x < -3,\ -2 < x < 1$.

3.24. $x \le -2, x \ge 2$.

3.25. $x < -3, x > -\frac{1}{3}$.

3.26. $x \le 1$.

3.27. $x < -5, x > 2$.

3.28. $x < -\frac{9}{2}$.

3.29. $-4 < x < -2,\ 2 < x < 4$.

3.30. $-3 \le x \le 3$.

3.31. $-3 \le x \le -1$.

3.32. $-4 < x < -2$.

3.33. $-3 \le x \le -1$.

3.34. $x \le -\frac{4+\sqrt{19}}{3}, x \ge \frac{\sqrt{19}-4}{3}$.

3.35. $-3 < x < -1$.

3.36. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x < 0,\ 0 < x < 1$.

3.37. $\frac{3-\sqrt{73}}{4} \le x < -1,\ -1 < x \le -\frac{1}{2},\ x \ge 2$.

3.38. $x < 2,\ 2 < x < 6,\ x \ge 8$.

3.39. $x < -4,\ x = -3,\ x > -2$.

3.40. $\frac{3}{7} < x < \frac{11}{7}$.

3.41. $-27 < x < -1,\ x = -1,\ 0 < x < 1$.

3.42. $0 < x < -9$.

3.43. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

3.44. $-5 < x < -2$.

3.45. $-3 - 2\sqrt{2} < x < 5$.

3.46. $x \le 2 - \sqrt{2},\ x \ge 5 + \sqrt{19}$.

3.47. $-4 < x < -3,\ 2 < x < 7$.

3.48. $x \le 0,\ 1 \le x \le 6$.

3.49. $x < -2 - 2\sqrt{3},\ x > -2\sqrt{2}$.

3.50. $-3 < x < \frac{3+\sqrt{65}}{2}$.

3.51. $-\frac{9+\sqrt{57}}{4} < x < -2,\ -2 < x < -1,\ x > \frac{3}{2}$.

3.52. $-200 < x < 66,\ x > 199$.

3.53. $x < -2,\ x > 0$.

3.54. $2 - \sqrt{3} \le x < 2,\ 4 < x \le 5$.

3.55. $x < 1,\ x > 2$.

3.56. $-5 < x < -3,\ -3 < x < -2,\ 2 < x < 5$.

3.57. $-2 < x \le -\frac{3}{2}$.

3.58. $x > -3$.

3.59. $x \le 0,\ x \ge 1$.

3.60. $x \le -\frac{5}{2},\ -\frac{8}{5} \le x \le 0$.

4.1. $x \in \varnothing$.

4.2. $x = (-1)^n \arcsin\frac{\pi}{6} + n\pi; n \in \mathbb{Z}$ $\quad (\arcsin\frac{\pi}{6} \neq \frac{1}{2}!)$.

4.3. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$, $x = \pm\frac{\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5}$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

4.4. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

4.5. $x = -\frac{\pi}{3} + n\pi$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

4.6. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4} + n\pi$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

4.7. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$.

4.8. $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.9. $x = \pi - \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.10. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

4.11. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

4.12. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{n\pi}{2}$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

4.13. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $\quad x = \frac{2\pi}{5}n$, $\quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}m$, $\qquad k, n, m \in \mathbb{Z}$.

4.14. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = arctg3 + \pi n$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

4.15. $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.16. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x = 2n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.17. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x = 2n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.18. $x = (2k+1)\pi,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.19. $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

4.20. $x = \frac{1}{3} + \frac{4k+1}{12}\pi,\ x = \frac{1}{6} + \frac{2n+1}{24};\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.21. $x = -\arccos\frac{4}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.22. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \frac{7\pi}{10} + 2n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.23. $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2},\ x = -\frac{\pi}{12} + n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.24. $x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

4.25. $x = -arctg(2 \pm \sqrt{3}) + k\pi = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2};\ k,\ n \in \mathbb{Z}.$

4.26. $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

4.27. $x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi,\ x = n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.28. $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi,\ x = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.29. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}.$

4.30. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4};\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.31. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

4.32. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ x = \pm\frac{\pi}{10} + n\pi,\ x = \pm\frac{3\pi}{10} + m\pi;\ k, n, m \in \mathbb{Z}.$

4.33. $x = -arctg\,\frac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.34. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.35. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\quad k, n \in \mathbb{Z}.$

4.36. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ x = -arctg\,\frac{1}{3} + m\pi;\ k, n, m \in \mathbb{Z}.$

4.37. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2};\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.38. $x = -2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.39. $x = k\pi,\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3};\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.40. $x = \frac{2n+1}{18}\pi;\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 9k + 4,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.41. $x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi,\ x = \frac{\pi}{3} + 4n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.42. $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

4.43. $x = \pm 1 \pm \sqrt{1 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi};\ k = 0, 1, 2, \ldots$

4.44. $x = \pm\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

4.45. $x = \operatorname{arctg}\dfrac{2k+1 \pm \sqrt{4k^2+4k-15}}{4} + n\pi,$

$x = \pm\operatorname{arctg} 2 + m\pi;\ k = 3, \pm 4, \pm 5, \ldots,\ n, m \in \mathbb{Z}.$

4.46. $x = -\sin 1.$

4.47. $x = \cos 2.$

4.48. $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

4.49. $x = 1,\ x = 0.$

4.50. $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

4.51. $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.52. $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.53. $-\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.54. $2k\pi \le x < \arccos\dfrac{1}{4} + 2k\pi,$

$\arccos\dfrac{1}{5} + 2n\pi < x < -\arccos\dfrac{1}{5} + 2(n+1)\pi,$

$-\arccos\dfrac{1}{4} + 2(m+1)\pi < x \le 2(m+1)\pi;\ k, n, m \in \mathbb{Z}.$

4.55. $-\sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}} \le x \le \sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}}.$

4.56. $\dfrac{\pi}{8} + k\pi < x < -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{(2k+1)\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}.$

4.57. $(2k+1)\pi x < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi,$

$\arccos(\dfrac{2}{3} + \sqrt{2}) + 2n\pi < x < \arccos(\dfrac{2}{3} - \sqrt{2}) + 2n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.58. $2k\pi < x < (2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

4.59. $-1 \le x \le -\dfrac{7}{8},\ x = 1.$

4.60. $x \le \dfrac{4\pi + 18}{5},\ \ 8\pi - 18 \le x \le 18 - 3\pi.$

5.1. $x = -4$, $x = -2$.

5.2. $x = \frac{1}{2}$.

5.3. $x = -\frac{38}{3}$.

5.4. $x = -2 \pm \sqrt{7/2}$.

5.5. $x = 1$.

5.6. $x = -1$.

5.7. $x = 2$.

5.8. $x = 7$.

5.9. $x = 1$.

5.10. $x = 1$.

5.11. $x = 2$.

5.12. $x = 2$.

5.13. $x = -1$.

5.14. $x = -2$, $x = 2$.

5.15. $x = -3$.

5.16. $x = 3$.

5.17. $x = -3$, $x = -1$.

5.18. $x = 2$.

5.19. $x = 0$.

5.20. $x = 0$.

5.21. $x = 0$.

5.22. $x = 0$.

5.23. $x = -2$.

5.24. $x = \log_{2/5} 3$.

5.25. $x = -2$, $x = -1$.

5.26. $x = \log_{(\sqrt{5}-1)/2}(2/3)$.

5.27. $x = 0$, $x = 2$.

5.28. $x = -\frac{1}{4}$.

5.29. $x = -1$, $x = 1$.

5.30. $x = -2$, $x = 2$.

5.31. $-\frac{1}{2} < x$.

5.32. $x > -\frac{3}{4}$.

5.33. $x < 7$.

5.34. $x < -\frac{1}{2}$, $x > \frac{5}{8}$.

5.35. $x < 0, 1 < x < 3$.

5.36. $x < -3 - \sqrt{3}$, $x > -3 + \sqrt{3}$.

5.37. $-\frac{1}{3} < x < 0$.

5.38. $-4 < x < -1$.

5.39. $x \neq -\frac{1}{2}$.

5.40. $x < -1,\ x > -\frac{1}{2}$.

5.41. $x < -\frac{1}{3},\ x > 4$.

5.42. $x \geq -2$.

5.43. $-1 < x < 0$.

5.44. $x < 0$.

5.45. $x > -\frac{1}{\lg 5}$.

5.46. $x > -3$.

5.47. $x < 0,\ x > \log_4 3$.

5.48. $x > \frac{1}{2}$.

5.49. $-\frac{2}{3} < x < 1$.

5.50. $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

5.51. $x \in \mathbb{R}$.

5.52. $x \leq -1,\ x > 0$.

5.53. $0 < x < \log_{2/3}(1/3)$.

5.54. $x \leq \log_3(1/2),\ \log_3(3/5) \leq x < \log_3(5/3)$.

5.55. $x < 0$.

5.56. $x > 4 + \frac{\lg 14}{\lg 5 - \lg\sqrt{7}}$.

5.57. $x < \log_{0,4} 2$.

5.58. $x < \log_{2/5} 5$.

5.59. $0 < x < \frac{1}{2}$.

5.60. $\frac{1}{2}\log_5 6 < x < \log_6 5$.

6.1. $x = 2$.

6.2. $x = 100$.

6.3. $x = 4$.

6.4. $x = 2$.

6.5. $x = \frac{3}{2},\ x = 10$.

6.6. $x = 4$.

6.7. $x = \frac{3 + 3\sqrt{141}}{10}$.

6.8. $x = 2$.

6.9. $x = 1$.

6.10. $x = -3$.

6.11. $x = 2$.

6.12. $x = \sqrt[3]{2} - 1$.

6.13. $x = -4$.

6.14. $x = -1$.

6.15. $x = 10,\ x = 100000$.

6.16. $x = \frac{1}{2},\ x = 4$.

6.17. $x = 10^{-1},\ x = 10^{-1/8}$.

6.18. $x = 1,\ x = 256$.

6.19. $x = \frac{1}{27},\ x = 3$.

6.20. $x = \frac{1}{2},\ x = 16$.

6.21. $x = 2^{-2},\ x = 2^{-1/4}$.

6.22. $x = \frac{3 + \sqrt{3}}{3},\ x = 10$.

6.23. $x = -\frac{24}{5},\ x = 20$.

6.24. $x = 1,\ x = 2 - 2\sqrt{2}$.

6.25. $x = \frac{1}{9},\ x = 3$.

6.26. $x = 0$.

6.27. $x = -2,\ x = \sqrt{33} - 1$.

6.28. $x = 4$.

6.29. $x = 8$.

6.30. $x = 4$.

6.31. $x > 4$.

6.32. $\frac{1}{7} < x < \frac{2}{7}$.

6.33. $-3 < x < -2$.

6.34. $-4 < x < -3,\ -2 < x < -1$.

6.35. $-5 \le x < -3,\ -1 < x \le 1$.

6.36. $\frac{1}{3} \le x < \frac{1}{2}$.

6.37. $\frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3}$.

6.38. $x \in \varnothing$.

6.39. $-\sqrt{5} < x < -1,\ 2 < x < \sqrt{5}$.

6.40. $-3 < x < -2$.

6.41. $1 < x \le 2,\ 3 \le x < 4$.

6.42. $0 \le x < 2$.

6.43. $x < -4$.

6.44. $1 < x < 2,\ x > 2$.

6.45. $-4 < x \le -2,\ -\frac{5}{8} \le x < 0$.

6.46. $\frac{1}{4} \le x \le 2$.

6.47. $0 < x \le \frac{1}{3},\ 3 < x \le 9$.

6.48. $\frac{1}{2} < x < 1,\ 1 < x < 2$.

6.49. $0 < x < 10,\ x = 100$.

6.50. $0 < x < 1,\ \sqrt{3} < x < 9$.

6.51. $\frac{1}{2} \le x < 1$.

6.52. $-2 < x < -1,\ -1 < x < 0,\ 0 < x < 1,\ x > 2$.

6.53. $-3 < x < 1,\ 3 < x < 4$.

6.54. $0 < x < 2,\ x > 4$.

6.55. $0 < x < \frac{2}{\sqrt{5}},\ 1 < x < 3$.

6.56. $1 < x < 4$.

6.57. $2 < x < 5$.

6.58. $0 < x < 1$.

6.59. $x > 2$.

6.60. $-3 < x < 77$.

6.61. $-1 < x \le -\frac{26}{27}$.

6.62. $-2 < x < -\sqrt{3},\ \sqrt{3} < x < 2$.

6.63. $4 < x < 5,\ x > 7$.

6.64. $-10^{(\lg 0,5 \cdot \lg 3)/\lg 1,5} < x < 0,\ 0 < x < 10^{(\lg 0,5 \cdot \lg 3)/\lg 1,5}$.

6.65. $x > 2$.

7.1. $x = -\frac{4}{5},\ x = -\frac{6}{5}$.

7.2. $x \le -2010,\ x \ge 2011$.

7.3. $\frac{3}{4} < x \le 7$.

7.4. $x \le -\frac{7}{8},\ x \ge 0$.

7.5. $0 \le x < 64$.

7.6. $x \le 1,\ x = 3$.

7.7. $x \le \log_2(\sqrt{2}-1),\ x > \dfrac{1}{2}$.

7.8. $x \le \log_3 2, 1 < x < 5$.

7.9. $x < -1,\ 0 < x < 1$.

7.10. $0 < x < \dfrac{1}{2}$.

7.11. $-3 < x < -2,\ -\dfrac{1}{2} < x < 0$.

7.12. $x = 2 + \sqrt{10}$.

7.13. $-\sqrt{2} < x < -1,\ 1 < x < \sqrt{2}$.

7.14. $x > 0$.

7.15. $-1 < x < -\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} < x < 1$.

7.16. $x < 0$.

7.17. $x = -\dfrac{5}{2},\ x = \dfrac{1}{2}$.

7.18. $x < -3,\ x > 3$.

7.19. $x < -7,\ \dfrac{17}{9} < x < 2$.

7.20. $-\dfrac{127}{128} \le x < -\dfrac{63}{64},\ -\dfrac{3}{4} < x \le -\dfrac{1}{2}$.

7.21. $1 < x \le 1 + \operatorname{tg}(3\pi/16)$.

7.22. $x < -2$.

7.23. $x = \sqrt{10^{1-\sqrt{3}}},\ x = \sqrt{10^{1+\sqrt{3}}}$.

7.24. $x = \dfrac{1}{10},\ x = 10$.

7.25. $x > 1000$.

7.26. $\dfrac{1}{10} < x < 100$.

7.27. $0 < x < 999$.

7.28. $0 < x \le \dfrac{1}{4},\ x \ge 4$.

7.29. $0 < x \le 3^{-2\sqrt{3}},\ x \ge 3^{2\sqrt{3}}$.

7.30. $1 < x \le 5^{\log_2 7} = 7^{\log_2 5}$.

7.31. $x = 10,\ x = 10^4$.

7.32. $x = \dfrac{1}{81},\ x = \dfrac{1}{3}$.

7.33. $0 \le x \le \dfrac{27}{16}$.

7.34. $x = 2$.

7.35. $x < 2$.

7.36. $x = -2$.

7.37. $x = 9$.

7.38. $-2 < x < -1,\ 1 < x < 2$.

7.39. $x = \log_5 4$.

7.40. $-2 < x \le -\log_3 \dfrac{9}{10}$.

7.41. $-5 < x < 1 - \sqrt{5},\ 3 < x < \sqrt{5} + 1$.

7.42. $-1 < x \le 0$.

7.43. $x < -\log_3 10$.

7.44. $\log_2(5/4) < x < \log_2 3$.

7.45. $0 < x < 2,\ x \ge 4$.

7.46. $\dfrac{1-\sqrt{41}}{5} \le x < -1,\ 1 < x \le 2\sqrt{2}$.

7.47. $0 < x \le \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}},\ x > 1$.

7.48. $0 < x \le \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{2} \le x < 2$.

7.49. $x = 3,\ x \ge 8$.

7.50. $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$.

7.51. $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

7.52. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ x = \pm\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2n\pi}{3};\ k, n \in \mathbb{Z}$.

7.53. $x = \pm \arcsin \dfrac{\lg 3}{\lg(\sqrt{2} + \sqrt{3})} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

7.54. $x = \dfrac{\pi}{3},\ x = \dfrac{5\pi}{3}$.

7.55. $x = \pi - \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

7.56. $x = k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

7.57. $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2m\pi;\ k, n, m \in \mathbb{Z}.$

7.58. $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{6} + 2(k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.59. $2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.60. $-\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.61. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

7.62. $\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.63. $\operatorname{arctg} 5 + 2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

7.64. $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \le x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi < x \le \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ \ k, n \in \mathbb{Z},$

$-\dfrac{11\pi}{6} \le x < -\dfrac{3\pi}{2},\ -\dfrac{3\pi}{2} < x \le -4,\ x = -\dfrac{7\pi}{6}.$

7.65. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}(1 - \dfrac{\sqrt{35}}{6})\right) < x < \sin\left(\dfrac{\pi}{4}(1 - \dfrac{\sqrt{35}}{6})\right).$

7.66. 2.

7.67. 1.

7.68. $x = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}.$

7.69. $x = -\dfrac{21\pi}{16},\ x = -\dfrac{11\pi}{8}.$

7.70. $x = \dfrac{19\pi}{6}.$

8.1. $x = -\frac{57}{2}$, $y = 17$.

8.2. $x = 3$, $y = 1$; $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{11}{3}$.

8.3. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{9}{2}$; $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{9}{2}$.

8.4. $x = \frac{5}{2}$, $y = -\frac{5}{2}$.

8.5. $x = 5$, $y = -2$.

8.6. $x = -3$, $y = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

8.7. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $y = \sqrt{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

8.8. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $y = \frac{1}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

8.9. $x = 3$, $y = -9$.

8.10. $x = \log_2 3$, $y = \log_3 2$.

8.11. $x = -2$, $y = 0$.

8.12. $x = 2$, $y = 6$; $x = \frac{1}{2}$, $y = 10$.

8.13. $x = \pi n$, $y = \frac{\pi}{4} - \pi n$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $y = -\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

8.14. $x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{12} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{8} \mp \frac{\pi}{12} - \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

8.15. $x = 1$, $y = -\frac{3}{2}$; $x = -2$, $y = 3$.

8.16. $x = 1$, $y = \log_3 2$.

8.17. $x = 4$, $y = 4$.

8.18. $x = -2$, $y = -2$; $x = -2$, $y = 2$.

8.19. $x = \frac{1}{3}$, $y = 1$.

8.20. $x = 81,\ y = 0.$

8.21. $x = 4,\ y = 1;\ x = -\dfrac{2}{3},\ y = \dfrac{10}{3}.$

8.22. $x = 1,\ y = 2;\ x = 1,\ x = \dfrac{44}{25},\ y = -\dfrac{28}{5},\ z = -\dfrac{108}{25}.$

8.23. $x = 2,\ y = 3;\ x = \dfrac{33}{8},\ y = -\dfrac{27}{8}.$

8.24. $x = 2,\ y = 1;\ x = -1,\ y = \dfrac{23}{2}.$

8.25. $x = 1 - \log_2 3,\ y = \dfrac{1}{6}.$

8.26. $x = 0,\ y = -3.$

8.27. $x = \sqrt[3]{3},\ y = 4.$

8.28. $x = 1,\ y = 3.$

8.29. $x = 10,\ y = 15;\ x = 15,\ y = 10.$

8.30. $x = 1,\ y = 1.$

8.31. $x = 1,\ y = 5.$

8.32. $x = 4,\ y = 2;\quad x = 4/3,\ y = -2/3.$

8.33. $x = 0,\ y = -7/2;\quad x = y = 21.$

8.34. $x = 1/2,\ y = 3/2.$

8.35. $x = 32,\ y = 2.$

8.36. $x = -1,\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}};\ x = \dfrac{3}{2},\ y = 9.$

8.37. $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\quad y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\quad n, k \in \mathbb{Z}.$

8.38. $x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ y = (-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}.$

8.39. $x = \dfrac{\pi}{12},\ y = \dfrac{11\pi}{12}.$

8.40. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ y = (-1)^k\dfrac{\pi}{4} + \pi k;$

$x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi m,\ y = (-1)^k\dfrac{\pi}{3} + \pi l;\ n, m, k, l \in \mathbb{Z}.$

8.41. $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n + \dfrac{\pi}{2}k,\quad y = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n - \dfrac{\pi}{2}k,\qquad n, k \in \mathbb{Z}.$

8.42. $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2},\ y = -\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\pi k}{5};\ n, k \in \mathbb{Z}.$

8.43. $x = \arccos\dfrac{27}{28} + 2\pi k, y = \pi + \arcsin\dfrac{17}{28} + 2\pi n;\qquad x = -\arccos\dfrac{27}{28} +$

$y = -\arcsin\dfrac{17}{28} + 2\pi n,\qquad k, n \in \mathbb{Z}.$

8.44. $x = 10,\ y = 15,\ z = 6.$

8.45. $x = -1,\ y = 1.$

8.46. $x = 1,\ y = 5;\ x = \dfrac{5}{2},\ y = 2.$

8.47. $x = 2,\ y = -1;\ x = \dfrac{12}{7},\ y = -\dfrac{1}{7}.$

8.48. $x = -\dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{9}{4};\ x = 2,\ y \in \mathbb{R}.$

8.49. $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

8.50. $x = \sqrt{2},\ y = \pm\sqrt{2};\ x = -\sqrt{2},\ y = \pm\sqrt{2}.$

8.51. $x = 9,\ y = 1.$

8.52. $x = \log_2(\sqrt{6} - 2)$, $y = \log_3 \dfrac{\sqrt{6} - 2}{2}$.

8.53. $x = 3$, $y = \dfrac{1}{9}$.

8.54. $x = \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2}$, $y = \dfrac{3 - 2\sqrt{3}}{2}$.

8.55. $x = \dfrac{1}{2\log_2 3 - 1}$, $y = \dfrac{2}{2\log_2 3 - 1}$.

8.56. $x = 1$, $y = 3$.

8.57. $x = 2$, $y = -3$; $x \in \mathbb{R}$, $y = 1$.

8.58. $x = \dfrac{12}{7}$, $y = \dfrac{12}{5}$, $z = -12$.

8.59. $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$.

8.60. $x = 4$, $y = -3$, $z = 0$; $x = 2$, $y = -1$, $z = 2$.

9.1. $\dfrac{61\sqrt{3}}{4}$.

9.2. $3\sqrt{30}$.

9.3. $\sqrt{7}$.

9.4. $202{,}8$.

9.5. $2:5$.

9.6. $\sqrt{\dfrac{2}{4 - \pi}}$.

9.7. $\sqrt{15 + 6\sqrt{3}}$.

9.8. $\dfrac{147}{8}$.

9.9. $\dfrac{\pi}{6}$.

9.10. $\sqrt{3} + 1$.

9.11. $\sqrt{3} + \dfrac{2\pi}{3}$.

9.12. $\dfrac{\pi + 3}{6\pi}$.

9.13. $10r^2(\sqrt{3} + \dfrac{2\pi}{3})$.

9.14. 6.

9.15. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

9.16. 11.

9.17. 18 : 7.

9.18. 5, 20.

9.19. $R\sin 2\alpha$.

9.20. $\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

9.21. $\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\frac{5}{13}$, $\arcsin\frac{12}{13}$.

9.22. $\frac{228}{25}$.

9.23. $\frac{32}{5}$.

9.24. 9 : 20.

9.25. $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.

9.26. $\frac{R\sqrt{2}}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2\cos(\pi/8)}, R$.

9.27. $\frac{a^2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$.

9.28. $\frac{c\sin 2\alpha}{2\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}$.

9.29. $R\cdot\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

9.30. 6.

9.31. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

9.32. $\frac{91}{6+\sqrt{6}}$.

9.33. 1.

9.34. 4.

9.35. $6-2\sqrt{6}$.

9.36. $\frac{5\sqrt{21}}{7}$.

9.37. $\frac{25\sqrt{15}}{64}$.

9.38. $\frac{(p-a)^2}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

9.39. $\frac{25}{8}$.

9.40. 16.

9.41. $\frac{\sqrt{(b-a)^2+(b+a)^2\operatorname{tg}^2\alpha}}{4\sin\alpha}$.

9.42. $\frac{16}{5}$.

9.43. $2\sqrt{6}$.

9.44. $\dfrac{\sqrt{(4b^2 - a^2)(a^2 - b^2)}}{4}$.

9.45. $\dfrac{a \sin\beta \sin\gamma}{3\sin(\beta + \gamma)}$.

9.46. $\arccos\dfrac{4}{5}$.

9.47. $90^\circ, 10^\circ, 80^\circ$.

9.48. $\dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}, \dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}, \dfrac{2mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$.

9.49. $\dfrac{9}{2}$.

9.50. $\pi \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{4}$.

9.51. $\dfrac{l}{\cos\alpha}$.

9.52. $\dfrac{c\sqrt{2b^2 + bc}}{b}$.

9.53. $9, 48, 4$ и $4\sqrt{10}$.

9.54. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$,

$h_c = \dfrac{2S}{c}$, $m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, $l_c = \sqrt{ab\left(1 - \dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right)}$,

$r = \dfrac{S}{p} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, $R = \dfrac{abc}{4S}$.

9.55. $\dfrac{a+b-c}{2}$.

9.56. $S = \dfrac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$, где $m = \dfrac{m_a + m_b + m_c}{2}$.

9.57. $S = \left(4\sqrt{H(H - h_a^{-1})(H - h_b^{-1})(H - h_c^{-1})}\right)^{-1}$, где $H = \dfrac{h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}}{2}$.

9.58. $\dfrac{b+c}{a}$.

9.59. $\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}$.

9.60. $d_1^2 = 2(a^2 + b^2) - d_2^2$, если $a - b < d_2 < a + b$ (иначе параллелограмма нет).

9.61. а) $4\sqrt{26}$, б) такого треугольника нет, в) $\frac{7}{2}$.

9.62. $30°, 75°, 75°$ или $150°, 15°, 15°$.

9.63. $\arcsin\frac{3}{5}$ или $\pi - \arcsin\frac{3}{5}$.

9.64. $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$, $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$, $\pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$

или $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$, $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$, $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$.

9.65. нет, т.к. $\arcsin\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4} > \frac{5\pi}{21}$, откуда $\frac{7\pi}{21} + \frac{9\pi}{21} + \arcsin\frac{\pi}{4} > \pi$.

10.1. $\frac{\pi H R^2}{12}$.

10.2. $\frac{27(4-\pi)}{4}$.

10.3. $48\pi\sqrt{11}$.

10.4. $d^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

10.5. $\sqrt[3]{8V \sin\frac{\alpha}{2} \Big/ \sqrt{3(2\cos\alpha - 1)}}$.

10.6. 6.

10.7. $a \Big/ \left(4\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right)$.

10.8. $\arccos\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}}$.

10.9. $\frac{\sqrt{31}}{6}$.

10.10. 216.

10.11. $\frac{21\sqrt{15}}{10}$.

10.12. $\frac{27}{16}$.

10.13. $\frac{91}{25}$.

10.14. $\frac{7}{2}$.

10.15. 6.

10.16. $\frac{\sqrt{6}(5-\sqrt{15})}{10}$.

10.17. $\frac{2a^2}{9\sqrt{3\cos\varphi}}$.

10.18. $\frac{4\sqrt{5}ad-8\sqrt{2}d^2}{5}$.

10.19. $\frac{2H^3}{3}\left(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)$.

10.20. $\frac{a^2}{2}\sqrt{1-\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$.

10.21. $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

10.22. $\frac{12}{13+\sqrt{41}}$.

10.23. $\left(\frac{180}{\pi}\arccos\frac{1}{\pi}\right)^\circ$.

10.24. $\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

10.25. $12\pi r^3$.

10.26. $\left(1+\sqrt{33}\right):8$.

10.27. $\frac{5\pi}{12}$.

10.28. $\frac{125\sqrt{6}}{4}$.

10.29. $28\sqrt{3}$.

10.30. $\arccos\left(\frac{9}{\sqrt{150\pm 24\sqrt{3}}}\right)$.

10.31. $\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

10.32. $\frac{n}{n+m}\cdot\frac{V}{d}$.

10.33. $\frac{5V}{18}$.

10.34. 24.

10.35. $\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$.

10.36. 8.

10.37. 20.

10.38. $\arccos\left(46/\sqrt{2641}\right)$.

10.39. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

10.40. $1024/9$, $2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{34}/4\right)$.

10.41. $\dfrac{3\sqrt{41}}{2}$.

10.42. $9:95$.

10.43. $7:20$.

10.44. $\pi/3$.

10.45. 2.

10.46. $\dfrac{2\sqrt{19}}{\sqrt{15}}$.

10.47. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

10.48. 90°.

10.49. β.

10.50. $\sqrt{b^2-a^2}$.

10.51. $\arccos\dfrac{b}{a\sqrt{3}}$.

10.52. $d\sin\alpha$.

10.53. $a\operatorname{ctg}\alpha$.

10.54. α.

10.55. $\sqrt{61}$.

10.56. 512.

10.57. 2 или 1.

10.58. $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}$.

10.59. 90°.

10.60. Все: от 0° до 180° (не включительно).

11.2. Не верно.

11.19. Это — серединный перпендикуляр к отрезку с концами в этих точках

11.20. Если данные прямые параллельны, то это — прямая, параллельная им и проходящая между ними на равном расстоянии от них; если же данные прямые пересекаются, образуя две пары вертикальных углов, то это — две прямые, служащие биссектрисами этих углов.

11.21. Это — четыре точки: одна из них есть центр окружности, вписанной в треугольник, образованный данными прямыми, а остальные — центры вневписанных окружностей.

11.22. 1. Если $\alpha = 0$, то это — два луча прямой AB;
2. Если $\alpha = \pi$, то это — интервал AB;
3. Если $0 < \alpha < \pi$, то это — две дуги AB, симметричные относительно прямой AB, каждая — мерой $2\pi - 2\alpha$.

11.23. Это плоскость, проходящая через середину одного из отрезков AM параллельно данной плоскости.

11.24. Это плоскость, проходящая через середину одного из указанных отрезков параллельно данным прямым.

11.25. Это — сфера (с выколотыми точками A и B), построенная на отрезке AB как на диаметре.

12.1. $a = 0, x \in \varnothing; a \neq 0, x = \dfrac{1}{a}$.

12.2. $a = 0, x \in \mathbb{R}; a > 0, x < \dfrac{1}{a}; a < 0, x > \dfrac{1}{a}$.

12.3. $a = 1, x \in \mathbb{R};\ a = -1, x \in \varnothing;\ a \neq \pm 1, x = \dfrac{1}{a+1}$.

12.4. $a = 1, x \in \varnothing; a \neq 1, x = a$.

12.5. $a = 1, x = -1;\ a = -1, x = 1;\ a \neq \pm 1, x = \pm 1$.

12.6. $a = \pm 1, x \in \varnothing;\ a \neq \pm 1, x = 1$.

12.7. $a = 0, x \neq 0;\ a = 1, x \in \varnothing;\ a \neq 0, 1, x = 1$.

12.8. $a < 0, x \in \varnothing;\ a \geq 0, x = \pm\sqrt{a}$.

12.9. $a < 0, x \in \mathbb{R};\ a \geq 0, x > \sqrt{a}, x < -\sqrt{a}$.

12.10. $a \leq 0, x \in \varnothing;\ a > 0, -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$.

12.11. $a < 0, x \in \varnothing;\ a \geq 0, x = \pm a$.

12.12. $x = |a|$.

12.13. $a \le 0,\ x \in \varnothing;\ \ a > 0,\ -a < x < a.$

12.14. $a < 0,\ x \in \mathbb{R};\ \ a \ge 0, \left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a \end{array}\right..$

12.15. $a < 0, x \in \varnothing; a \ge 0, x = a^2.$

12.16. $a = 0,\ x \ge 0;\ \ a \ne 0,\ x = 0.$

12.17. $a < 0,\ x \ge 0;\ \ a \ge 0,\ x > a^2.$

12.18. $a \le 0,\ x \in \varnothing;\ \ a > 0,\ 0 \le x < a^2.$

12.19. $a \le 0,\ x \in \varnothing;\ \ a > 0,\ x < \log_2 a.$

12.20. $a \le 0,\ x \in \mathbb{R};\ \ a > 0,\ x > \log_2 a.$

12.21. $a \le 0,\ x \in \varnothing;\ \ 0 < a \ne 1,\ x = 0;\ \ a = 1,\ x \in \mathbb{R}.$

12.22. $a > 1,\ 0 < x < a;\ \ 0 < a < 1,\ x > a;\ \ a \le 0,\ a = 1,\ x \in \varnothing.$

12.23. $a \le 0,\ x \in \varnothing;\ \ a = 1,\ 0 < x \ne 1;$
$0 < a < 1,\ x > 1;\ \ a > 1,\ 0 < x < 1.$

12.24. $|a| > 1, x \in \varnothing; |a| \le 1, x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

12.25. $a = \pm 1, x = a\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;\ a \ne \pm 1, x \in \varnothing.$

12.26. $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ оба множителя чётные и один из них делится на 3.

12.27. $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1).$

12.28. $2^{10} + 5^{12} = \left(2^5 + 5^6\right)^2 - \left(2^3 \cdot 5^3\right)^2.$

12.29. $222^{333} + 333^{222} = (222^{111})^3 + (333^{74})^3.$

12.30. $\dfrac{2010^{2010} - 1}{2010 - 1} = 1 + 2010 + 2010^2 + \ldots + 2010^{2009}.$

12.31. Нет: например, $n = 333$.

12.32. 34452, 34056, 34956.

12.33. $n^2 + n = n(n+1)$ — один из множителей чётный.

12.34. Рассмотреть остатки от деления числа n на 3:
$n = 3k + r, r = 0, 1, 2 (r = -1, 0, 1)$.

12.35. $n^3 + 5n = 6n + (n-1)n(n+1)$.

12.36. $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$.

12.37. Каждое число, начиная с третьего, имеет вид:
$n = 100k + 11 = 4(25k + 2) + 3$.

12.38. $\overbrace{111\ldots1}^{n}\overbrace{555\ldots5}^{n-1}6 = (\overbrace{333\ldots3}^{n-1}4)^2$.

12.39. 18, 216.

12.40. Любой общий делитель этих чисел является делителем числа $5(3n + 5) - 3(5n + 8) = 1$.

12.41. $n^2 + 10n + 21 = (n+3)(n+7)$,
$n^2 + 9n + 18 = (n+3)(n+6)$, $n + 6$ и $n + 7$ — взаимно простые.

12.42. $n^2 + 6n + 9 = (n+3)^2$, $n + 3$ и $n + 4$ — взаимно простые.

12.43. $n^2 + 5n + 16 = (n+9)(n-4) + 13 \cdot 4$, $(n+9) - (n-4) = 13$.

12.44. $\dfrac{53}{450}$.

12.47. $x = 4n - 1$, $y = 3n - 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

12.48. Рассмотреть остатки от деления левой и правой части на 3.

12.49. $(x+1)(y+1) = 1$.

13.1. $a \neq \pm 1$.

13.2. $a \neq 0$.

13.3. $a = -2$.

13.4. $a = -1$.

13.5. $a \neq \pm 1$.

13.6. $a \neq 2, a \neq 4, a \neq 8$ $x = -\dfrac{8}{(a-4)(a-8)}, y = \dfrac{2(a-6)}{a-8}$;
$a = 2$ $x \in \mathbb{R}, y = x + 2$; $a = 4, a = 8$ решений нет.

13.7. $a < 6$.

13.8. $a = 2$.

13.9. $a \neq 1$.

13.10. $a = 3$.

13.11. $2 < a < 4$.

13.12. $a = 13$.

13.13. $-2 - 2\sqrt{2} < a < 0; 0 < a < -2 + 2\sqrt{2}$.

13.14. $a = -2$, $a = 1$.

13.15. $a = -4$.

13.16. $a = \dfrac{1}{17}$.

13.17. $a = 2$.

13.18. $a < 0$ $x = \log_2 a^2$; $a > 0$ $x = \log_2 a^2, x = \log_2 a$; $a = 0$ — решений нет.

13.19. $a < -2$, $a > 2$.

13.20. $7 < a \neq 7{,}5$.

13.21. $-4 < a \neq -1$ $x = 3 - \sqrt{a+5}$; при остальных a корней нет.

13.22. $a < 0$ $x > \dfrac{4a^2 + a}{2}$; $a \geq 0$ $x > \dfrac{a^2 + 9a}{2}$.

13.23. $3 - 2\sqrt{5} < a < \sqrt{10} - 2$.

13.24. $x = -\dfrac{1}{4}, y = \dfrac{5}{4}$.

13.25. $a < -3$, $a = -1$, $a \geq 3$.

13.26. $|a| > 1, x = 1; a = -1, -3 \leq x \leq 1; |a| < 1, x = 1, x = \dfrac{a+7}{a-1}; a = 1, x \geq 1$.

13.27. $\dfrac{4}{3} \leq a \leq 2$.

13.28. $1 \le a \le 3, a = 4$.

13.29. $a \ne 3$.

13.30. $-1 \le a < 0$.

13.31. $-\frac{1}{2} \le a \le \frac{2}{3}$.

13.32. $a = c = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}; a = 0, b = c = \frac{1}{2}$.

13.33. $c < 0$.

13.34. $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$.

13.35. $0 \le a \le 1$.

13.36. $0 < a < 1, 1 < a \le 3, x = -a - 3; a > 3, x = a, x = -a - 3;$ при остальных a решений нет.

13.37. $a = 0,\ 2 + \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{5}$.

13.38. $6\frac{a + b - 3ab}{a + b + ab}$ при $a \ne 0; 6$ при $a = 0$.

13.39. $\frac{15}{2} < a < 8, a > 12$.

13.40. $-\frac{3}{2} \le a < -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4} < a < 0$.

13.41. $a \le -\frac{5\sqrt{5}}{4}, a \ge \frac{5\sqrt{5}}{4}$.

13.42. при $a < 1$ и $a > \sqrt{2}$ решений нет; при $a = 1$ и $a = \sqrt{2}$ — четыре решения; при $1 < a < \sqrt{2}$ — восемь решений.

13.43. $a = -\frac{57}{32}, x = -\frac{5}{8}$.

13.44. $a = \pm\sqrt{2}, a = \pm\frac{\sqrt{15} + 1}{4}$.

13.45. $-3 \le a \le 1$.

13.46. $-5 < a < -\sqrt{24}, -\sqrt{24} < a < -3$.

13.47. $-\frac{12}{5} \le a \le 0$.

13.48. а) $-\sqrt{26} - 1 \le a \le \sqrt{26} - 1$; б) $-\sqrt{26} + 1 \le a \le \sqrt{26} - 1$.

13.49. $-1 \le a < 2$.

13.50. $a = -\frac{1}{3}$, $a = 2$.

13.51. $a = -\frac{17}{48}$.

13.52. $a = -1$, $1 < a < 3$, $4 < a \le 6$.

13.53. $-8 < a < 0$.

13.54. $-\sqrt{2} < a < -\frac{16}{17}, 0 < a < \sqrt{2}$.

13.55. $n = 33$.

14.1. 3.

14.2. 83.

14.3. 49, 83.

14.4. 24.

14.5. 832.

14.6. 27.

14.7. 2, 2, 2.

14.8. $m = 2, n = 117; m = 3, n = 59$.

14.9. 1) *И*; 2) *Р*.

14.10. $x = -7, y = 7; x = -6, y = 6$.

14.11. $x = y = 0; x = \pm 3, y = 5; x = \pm 24, y = 20$.

14.12. $x = 6, y = \pm 1, z = 0; x = 0, y = \pm 1, z = 0$.

14.13. $x = 15n^2 - 6n, y = 3n - 1; n \in \mathbb{Z}$.

14.14. 189.

14.15. 764.

14.16. 300.

14.17. 648.

14.18. 160.

14.19. $a = 4, 5, \ldots,\ b = -2;\ a = 3, 4, \ldots,\ b = -1$.

14.20. $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1, \sqrt{2} < a < 2$.

14.21. $a = -4, -\frac{5}{2} \le a \le -\frac{9}{4}$.

14.22. $x = -1, x = 3$.

14.23. $x = y = 0; x = y = 2; x = 0, y = 3; x = 3, y = 0$.

14.24. $x = 1, y = 6; x = 1, y = 7; x = 2, y = 7$.

14.25. $x = 11,\ y = -9$.

14.26. $a = -2,\ a = 0$.

14.27. $a = 1,\ a = \frac{5}{2}$.

14.28. 40, 30.

14.29. 1750 m.

14.30. 94.

14.31. 8.

14.32. 24, 7.

14.33. 70.

14.34. 132.

14.35. $x = -2, y = 0; x = 0, y = -2; x = -3, y = 0; x = -1, y = 2$.

14.36. $x = 2, y = \pm 3; x = -2, y = \pm 3$.

14.37. $x = -31,\ x = -7$.

14.38. $x = \pm 1, y = \mp 1, z = -1$.

14.39. $\frac{5}{11} < a \le \frac{6}{13}$.

14.40. $x=(4n-3)^2, n=1,2,\ldots$

14.41. $(2\sqrt{2},-4,-4);(2\sqrt{2},-2,2)$.

14.42. $x=y=0$.

14.43. нет.

14.44. 6,25.

14.45. 144.

14.46. $375, 125$.

14.47. 12 месяцев.

14.48. 11.

14.49. 33.

14.50. один 16-квартирный и одиннадцать 12-квартирных.

14.51. 20.

14.52. $x=-2$.

14.53. 11 гвоздик и 7 роз.

14.54. $A=\{6,10,14,30,42,70,105,210\}$.

14.55. 642.

14.56. $n=5$.

14.57. $\dfrac{11111111}{111111111}$.

14.58. 1960.

14.59. 7200.

14.60. 132.

Справочное издание

Сергеев Игорь Николаевич
Панферов Валерий Семенович

ЕГЭ

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Подготовка к выполнению части С

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. АЕ51. Н 16466 от 25.03.2013 г.

Главный редактор *Л.Д. Лаппо*
Редактор *И.М. Бокова*
Технический редактор *Л.В. Павлова*
Корректор *О.Ю. Казанаева*
Дизайн обложки *Л.В. Демьянова*
Компьютерная верстка *И.Ю. Иванова, Н.М. Судакова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь, www.pareto-print.ru

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).