И. В. Ященко
С. А. Шестаков
А. С. Трепалин
П. И. Захаров

Подготовка к ЕГЭ по математике

Методические указания

2014

ФГОС

И. В. Ященко, С. А. Шестаков, А. С. Трепалин,
П. И. Захаров

Подготовка к ЕГЭ по математике в 2014 году

Методические указания

Издание соответствует Федеральному государственному общеобразовательному стандарту (ФГОС)

Издательство МЦНМО
2014

УДК 373.167.1
ББК 22.141я721
Я97

Ященко И. В. и др.

Я97 Подготовка к ЕГЭ по математике в 2014 году. Методические указания / Ященко И. В., Шестаков С. А., Трепалин А. С., Захаров П. И. — М.: МЦНМО, 2014. — 240 с.

ISBN 978-5-4439-0578-5

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для подготовки к Единому государственному экзамену по математике, для организации и проведения итогового повторения, диагностики проблемных зон в знаниях старшеклассников и их последующей коррекции.

Пособие написано в соответствии с утвержденными демоверсией и спецификацией ЕГЭ по математике 2014 года. Оно содержит подробный разбор структуры экзамена, позадачные комментарии и тренинги, диагностические работы в формате ЕГЭ. Материалы пособия апробированы в сотнях школ различных регионов России при организации подготовки к Единому государственному экзамену. Пособие позволяет проверить навыки решения задач, качество усвоения материала, выстроить индивидуальные траектории повторения и эффективно подготовиться к сдаче ЕГЭ.

Пособие адресовано учащимся старших классов и их родителям, учителям математики и методистам.

Издание соответствует Федеральному государственному общеобразовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.141я721

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включен в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

ISBN 978-5-4439-0578-5

ВВЕДЕНИЕ

Итоги ЕГЭ-2013 по математике (разбор реального варианта, типовые ошибки, статистика)

В 2013 году Единый государственный экзамен по математике состоял из 20 заданий: 14 заданий B1–B14 с кратким ответом (часть 1) и 6 заданий C1–C6 с полным решением (часть 2). Июньский экзамен («основная волна ЕГЭ») сдавали 778 648 человек. Минимальный порог из пяти правильно решенных задач (более 4 первичных баллов, более 20 баллов по стобалльной шкале) не преодолели 9,6% выпускников, не менее 14 первичных баллов (не менее 60 по стобалльной шкале) получили 25,7% выпускников, не менее 18 первичных баллов (не менее 70 по стобалльной шкале) получили 8% выпускников, не менее 23 первичных баллов (не менее 80 по стобалльной шкале) получили 2,2% выпускников, не менее 27 первичных баллов (не менее 90 по стобалльной шкале) получили 0,65% выпускников. Приведем разбор одного из открытых (реальных) вариантов ЕГЭ-2013 (вариант 106) с краткими статистическими сведениями и указанием типичных ошибок.

Часть 1

Задание B1

Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 9% активного вещества. Ребенку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,35 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребенку в возрасте четырех месяцев и весом 8 кг в течение суток?

РЕШЕНИЕ. Поскольку процент — это одна сотая часть числа, активного вещества в каждой таблетке содержится $20 \cdot 0{,}09 = 1{,}8$ мг. Ребенку указанного в условии задачи возраста и весом 8 кг требуется $8 \cdot 1{,}35 = 10{,}8$ мг активного вещества в сутки. Искомое число таблеток будет равно $10{,}8 : 1{,}8 = 6$.

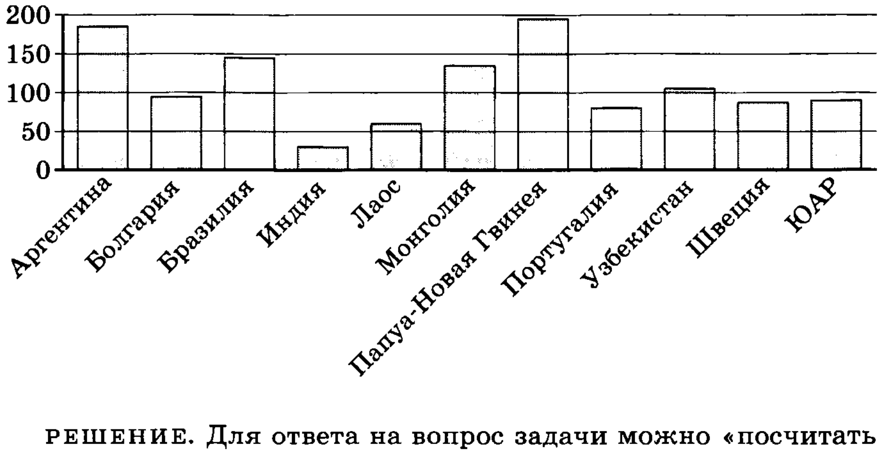
ОТВЕТ. 6.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году

Средний процент правильных ответов — 81,4%. Статистика подтверждает, что среди арифметических текстовых задач наибольшие трудности вызывают задачи на проценты, даже в простейших вариантах. Поэтому особое внимание следует уделить повторению темы «Проценты» и арифметическим вычислениям, в том числе устному счету, навыки которого у части выпускников либо частично утрачены, либо недостаточно сформированы. Часть ошибочных ответов обусловлена невнимательностью и неумением выполнять арифметические действия без калькулятора.

Задание B2

На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа-Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимал Лаос?



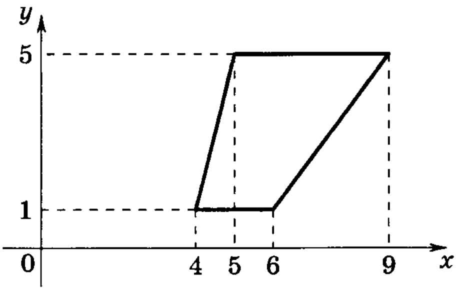
РЕШЕНИЕ. Для ответа на вопрос задачи можно «посчитать столбики», которые выше столбика, соответствующего показателю Лаоса. Но проще посчитать столбики, которые ниже: такой столбик всего 1 (Индия). Следовательно, Лаос занимает 10-е место.

ОТВЕТ. 10.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент правильных ответов — 97,3%. Около трех процентов выпускников не смогли правильно ответить на этот вопрос.

Задание B3

Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



РЕШЕНИЕ. Основания трапеции равны 2 и 4, а высота равна 4. Поэтому искомая площадь равна $\frac{1}{2}(2+4)\cdot 4 = 12$.

ОТВЕТ. 12.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент правильных ответов — 85,6%. Наибольшие трудности вызывают задачи на вычисление площади тупоугольного треугольника в случае, когда основание направлено по вертикальной линии сетки, а основание высоты лежит на продолжении основания. Для трапеций результаты примерно одинаковые. Часть неправильных ответов связана с недостаточным знанием формул площадей плоских фигур (в ответах приведены удвоенные значения площадей), часть — с неверной прикидкой. Если площадь выражается дробным числом, результаты хуже по сравнению с задачами, ответы в которых являются целыми числами.

Задание B4

Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей вафельниц. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей вафельниц.

Модель вафельницы	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4100	3	2	4
Б	4700	0	2	2
В	5500	3	1	1
Г	5400	0	2	0

РЕШЕНИЕ. Задачу можно решить двумя способами, первый из которых состоит в прямом подсчете рейтингов:

рейтинг модели А равен $R_{\text{А}} = 4(2\cdot 3 + 2\cdot 2 + 4) - 0{,}01\cdot 4100 = 15$;

рейтинг модели Б равен $R_{\text{Б}} = 4(2\cdot 0 + 2\cdot 2 + 2) - 0{,}01\cdot 4700 = -23$;

рейтинг модели В равен $R_{\text{В}} = 4(2\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1) - 0{,}01\cdot 5500 = -19$;

рейтинг модели Г равен $R_{\text{Г}} = 4(2\cdot 0 + 2\cdot 2 + 0) - 0{,}01\cdot 5400 = -38$.

Второй способ основан на оценке и прикидке: очевидно, что при данных в таблице значениях в выражении для R уменьшаемое $4(2F + 2Q + D)$ максимально, а вычитаемое $0{,}01P$ минимально именно для модели А. При таком решении считать придется только один — наилучший — рейтинг, т. е. рейтинг модели А.

ОТВЕТ. 15.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году

Средний процент правильных ответов — 86,8%. Значительная часть неправильных ответов обусловлена арифметическими ошибками. Вообще, процент верных ответов уменьшался во всех случаях, когда требовалось проводить вычисления с дробями. Эта задача, как и предыдущие, позволяет сделать общий вывод о недостаточных навыках решения задач на арифметические действия с дробями у примерно 13% выпускников.

Задание B5

Найдите корень уравнения $4^{-5+x} = 64$.

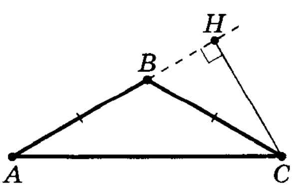
РЕШЕНИЕ. Для решения уравнения достаточно знания того, что $64 = 4^3$. Тогда $-5 + x = 3$, откуда $x = 8$.

ОТВЕТ. 8.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент правильных ответов — 92%. Наибольшие трудности — в уравнениях, правая часть которых является относительно высокой степенью двойки (пятой или шестой), тройки (третьей или четвертой), четверки (третьей) и пятерки (третьей). Часть ошибочных ответов обусловлена неумением выполнять действия с дробями и степенями, в частности переходить к степеням с отрицательным показателем, а также ошибками решения линейных уравнений. Для того чтобы исключить возможность арифметической ошибки, в этой задаче обязательно следует делать проверку полученного ответа путем его подстановки в данное уравнение.

Задание B6

В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 14$, высота CH равна 7. Найдите синус угла ACB.



РЕШЕНИЕ. Поскольку $\angle ACB = \angle CAB$, синусы этих углов тоже равны: $\sin\angle ACB = \sin\angle CAB = \dfrac{CH}{AC} = \dfrac{7}{14} = 0{,}5$.

ОТВЕТ. 0,5.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент правильных ответов — 79%. Ошибки связаны с плохим знанием простейших геометрических фактов и определений тригонометрических функций.

Задание B7

Найдите значение выражения $\log_6 135 - \log_6 3{,}75$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку основания логарифмов одинаковы, данное выражение приводится к логарифму частного:

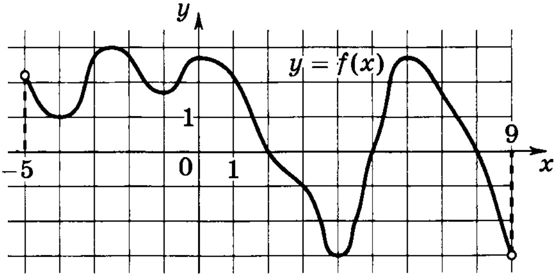
$$\log_6 135 - \log_6 3{,}75 = \log_6 \frac{135}{3{,}75} = \log_6 36 = 2.$$

ОТВЕТ. 2.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент правильных ответов — 80,5%. Наибольшие проблемы — в незнании или недостаточном знании свойств основных свойств логарифмов. Еще раз отметим плохие навыки арифметических вычислений без применения калькулятора.

Задание B8

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



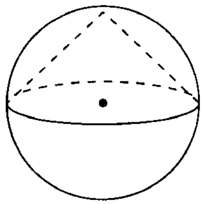
РЕШЕНИЕ. Условие задачи предполагает подсчет точек экстремума, т. е. общего числа точек максимума и точек минимума данной непрерывной функции. Таких точек в данном случае ровно 6.

ОТВЕТ. 6.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент правильных ответов — 74,8%. Ошибки связаны с плохим или формальным усвоением темы, не позволяющим делать правильные выводы и использовать графические интерпретации.

Задание B9

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $51\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



РЕШЕНИЕ. Из условия следует, что осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, основание которого равно диаметру сферы, а высота, проведенная к основанию, равна радиусу сферы. Поэтому искомая образующая равна $51\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=102$.

ОТВЕТ. 102.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент правильных ответов — 80,4%. Ошибки связаны с недостаточным знанием основных фактов и формул стереометрии и планиметрии, а также плохими вычислительными навыками.

Задание B10

Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Георгий Бочкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Георгий Бочкин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

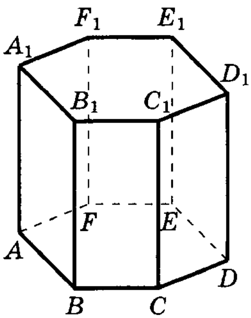
РЕШЕНИЕ. Поскольку искомая вероятность P равна отношению числа $n=6$ благоприятных для данного события исходов к числу $N=25$ всех равновозможных исходов, находим $P=\frac{6}{25}=0{,}24$.

ОТВЕТ. 0,24.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент правильных ответов — 73,4%. Высокий процент тех, кто даже не приступал к решению, т. е. не может найти вероятность элементарного события даже в простейшем случае.

Задание B11

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, D_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 8, а боковое ребро равно 6.



РЕШЕНИЕ. Многогранник, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, D_1, представляет собой пирамиду с основанием $ABCDEF$ и высотой D_1D. Объем пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту, т. е. $\frac{1}{3}\cdot 8\cdot 6=16$.

ОТВЕТ. 16.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент правильных ответов — 60,4%. Ошибки связаны с недостаточным знанием основных фактов и формул стереометрии, неумением сделать вывод о совпадении высот пирамиды и призмы.

Задание B12

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 558 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отраженного сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с. Ответ выразите в МГц.

РЕШЕНИЕ. Из условия задачи следует, что $1500 \cdot \frac{f - 558}{f + 558} \leqslant$ $\leqslant 12$, откуда $125(f - 558) \leqslant f + 558$, и, далее, $f \leqslant \frac{126 \cdot 558}{124}$, т. е. $f \leqslant 567$.

ОТВЕТ. 567.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент правильных ответов — 62,5%. Наибольшие трудности связаны с неумением оптимизировать вычисления. Высокий процент тех, кто даже не приступал к решению.

Задание B13

Байдарка в 10 : 00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт A в 18 : 00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 3 км/ч.

РЕШЕНИЕ. Пусть собственная скорость байдарки равна x км/ч ($x > 3$). Тогда время (в часах) ее движения по течению реки равно $\frac{15}{x+3}$, а время ее движения против течения реки равно $\frac{15}{x-3}$. Составим по условию задачи уравнение:

$$\frac{15}{x+3}+\frac{15}{x-3}+1\frac{1}{3}=8,$$

откуда

$$\frac{15}{x+3}+\frac{15}{x-3}=\frac{20}{3} \quad \text{или} \quad \frac{3}{x+3}+\frac{3}{x-3}=\frac{4}{3}.$$

Умножив обе части последнего уравнения на $3(x-3)(x+3)$, приходим к уравнению $18x=4(x^2-9)$, откуда $2x^2-9x-18=0$. Корнями уравнения являются числа $-1{,}5$ и 6, из которых только второе больше 3.

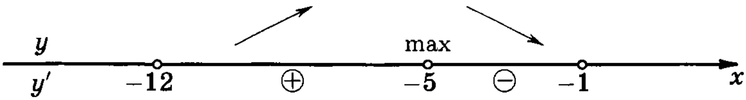
ОТВЕТ. 6.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент правильных ответов — 69,2%. Наибольшие трудности — в составлении уравнения по условию задачи и его решении; неумении записывать время, данное в часах и минутах, в виде обыкновенной дроби; неумении решать дробно-рациональные уравнения, неумении оптимизировать вычислительные сложности при решении уравнения, деля обе части уравнения на общий множитель его коэффициентов. Высокий процент тех, кто даже не приступал к решению.

Задание B14

Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{x^2+25}{x}$ на отрезке $[-12; -1]$.

РЕШЕНИЕ. Традиционное для школьника решение предполагает вычисление наибольшего значения данной функции с помощью производной. Найдем производную данной функции, считая, что $x<0$, и воспользовавшись формулой производной частного: $y'=\frac{2x\cdot x-(x^2+25)}{x^2}$, откуда $y'=\frac{(x-5)(x+5)}{x^2}$. При $x<0$ производная обращается в нуль, если $x=-5$, причем $y'>0$ при $x\in(-12; -5)$ и $y'<0$ при $x\in(-5; -1)$. Таким образом, непрерывная при $x<0$ функция $y=\frac{x^2+25}{x}$ возрастает на отрезке $[-12; -5]$ и убывает на отрезке $[-5; -1]$. Значит, $\max\limits_{[-12;-1]} y(x) = y(-5) = -10$.



ОТВЕТ. -10.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент правильных ответов — 62,5%. Высокий процент тех, кто даже не приступал к решению. Ошибки связаны с арифметическими действиями, неуверенным владением алгоритмом вычисления наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции (как в случае знакопостоянства производной на данном отрезке, так и в случае принадлежности точки экстремума данному отрезку).

Часть 2

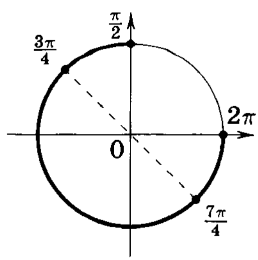
Задание C1

а) Решите уравнение $14^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

РЕШЕНИЕ.

а) Представим левую часть уравнения, используя свойства степеней, в виде произведения: $2^{\cos x} \cdot 7^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x}$. Поскольку $2^{\cos x} \neq 0$, получаем уравнение $7^{\cos x} = 7^{-\sin x}$. Таким образом, $\cos x = -\sin x$, откуда $\operatorname{tg} x = -1$ и $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$. Это числа $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

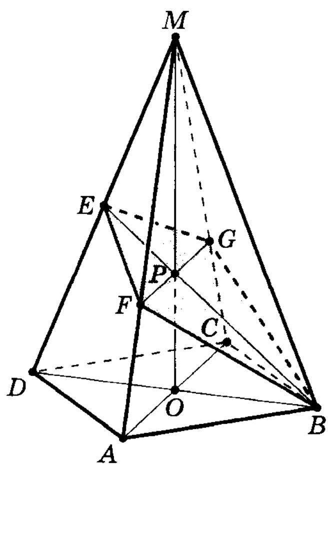
ОТВЕТ. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент решений, оцененных максимальным числом баллов, — 31,7%. Положительный результат (не менее одного балла за решение) –10,7%. Основные проблемы: неумение решать простейшие тригонометрические уравнения, незнание свойств ограниченности синуса и косинуса, неумение отбирать решения с помощью тригонометрической окружности или неравенств.

Задание С2

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 4, а боковые ребра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

РЕШЕНИЕ. Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP : PO = 2 : 1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка P принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда $MF : FA = MG : GC = MP : PO = 2 : 1$; $FG = \frac{2}{3}AC = \frac{2\sqrt{2} \cdot AB}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$.



Четырехугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE = \frac{\sqrt{2BD^2 + 2MB^2 - MD^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MB^2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырехугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{BFEG} = \frac{BE \cdot FG}{2} = \frac{32}{3}.$$

ОТВЕТ. $\frac{32}{3}$.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент решений, оцененных максимальным числом баллов, — 5,1%. Положительный результат (не менее одного балла за решение) –4,8%. Основные проблемы в зависимости от варианта: неумение анализировать пространственные конфигурации, использовать факты и теоремы, связанные с перпендикулярностью прямых и плоскостей, неумение строить простейшие линейные углы и проекции, ошибки в определении вида сечения, вычислительные ошибки.

Задание C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{7-x} \dfrac{x+3}{(x-7)^8} \geqslant -8, \\ x^3 + 6x^2 + \dfrac{40x^2 + 3x - 24}{x-8} \leqslant 3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. 1. Решим первое неравенство системы, представив его левую часть в виде разности логарифмов:

$$\log_{7-x} x + 3 - \log_{7-x}(x-7) \geqslant -8.$$

Далее, используя свойства четной степени, получим

$$\log_{7-x}(x+3) - \log_{7-x}(7-x)^8 \geqslant -8,$$

откуда

$$\log_{7-x}(x+3)-8 \geqslant -8 \quad \text{и} \quad \log_{7-x}(x+3) \geqslant 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<7-x<1$. В этом случае получим систему

$$\begin{cases} 0 < x+3 \leqslant 1, \\ 0 < 7-x < 1, \end{cases}$$

которая не имеет решений.

Второй случай: $7-x>1$. В этом случае получим систему

$$\begin{cases} x+3 \geqslant 1, \\ 7-x > 1, \end{cases}$$

откуда $-2 \leqslant x < 6$.

Таким образом, решением первого неравенства данной системы является $[-2; 6)$.

2. Решим второе неравенство системы, перенеся число 3 из правой части неравенства в левую и вычтя его из дроби:

$$x^3+6x^2+\frac{40x^2}{x-8} \leqslant 0,$$

откуда

$$\frac{x^4-2x^3-8x^2}{x-9} \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{x^2(x-4)(x+2)}{x-8}.$$

Решение второго неравенства данной системы (его можно найти, например, с помощью метода интервалов): $(-\infty; -2] \cup \cup \{0\} \cup [4; 8)$.

3. Решение данной системы неравенств: $\{-2; 0\} \cup [4; 6)$.

ОТВЕТ. $\{-2; 0\} \cup [4; 6)$.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент решений, оцененных максимальным числом баллов, — 6,1%. Положительный результат (не менее одного балла за решение) — 11,8%. Основные проблемы: неумение решать логарифмические неравенства, арифметические ошибки, плохое знание свойств логарифмов и свойств неравенств.

Задание С4

Окружности радиусов 5 и 8 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 15°$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку касания, точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные (их боковые стороны равны радиусам), находим, что

$$\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 15°,$$

откуда

$$AB = 2O_1A \cdot \cos 15° = 10 \cdot \cos 15°,$$
$$AC = 2O_2A \cdot \cos 15° = 16 \cdot \cos 15°.$$

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 6 \cdot \cos 15°$. Следовательно,

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 24 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 6.$$

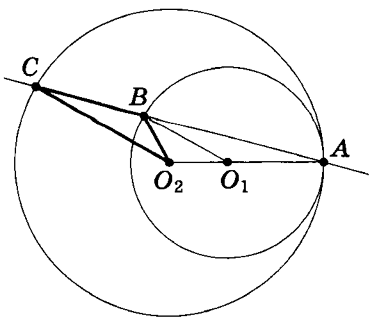


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C,

$$BC = AC + AB = 26 \cdot \cos 15^\circ.$$

Поэтому

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 104 \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = 26.$$

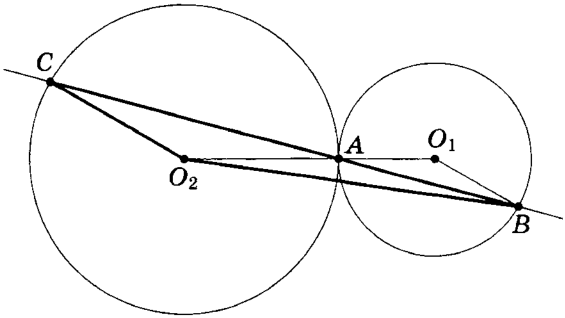


Рис. 2

ОТВЕТ. 6 или 26.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент решений, оцененных максимальным числом баллов, — 3,5%. Положительный результат (не менее одного балла за решение) — 4,7%. Наибольшие проблемы связаны с анализом геометрической конфигурации, незнанием свойств окружностей и касательных, рассмотрением одного случая вместо двух.

Задание С5

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-3 - 4x - x^2} = 3a + 1$$

имеет единственный корень.

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

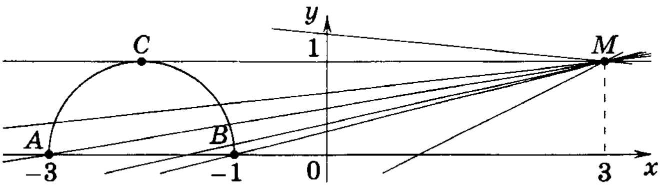
$$\sqrt{-3 - 4x - x^2} = -ax + 3a_1.$$

Рассмотрим две функции:

$$f(x) = \sqrt{-3-4x-x^2} \quad \text{и} \quad g(x) = -ax+3a+1.$$

Графиком функции $f(x)=\sqrt{1^2-(x+2)^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(-2;\ 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(3;\ 1)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает ее в единственной точке.



Касательная MC, проведенная из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, т. е. при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, проходит через точки $M(3;\ 1)$ и $A(-3;\ 0)$, следовательно, ее угловой коэффициент $-a=\frac{1}{6}$. При $0<-a\leqslant\frac{1}{6}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением

$$y=-ax+3a+1,$$

проходит через точки $M(3;\ 1)$ и $B(-1;\ 0)$, следовательно, ее угловой коэффициент $-a=\frac{1}{4}$. При $\frac{1}{6}<-a\leqslant\frac{1}{4}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{4}\leqslant a<-\frac{1}{6}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a > \frac{1}{4}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

ОТВЕТ. $\left[-\frac{1}{4}; -\frac{1}{6}\right)$; 0.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году Средний процент решений, оцененных максимальным числом баллов, — 1,3%. Положительный результат (не менее одного балла за решение) — 6,2%. Наибольшие проблемы: понимание логики задачи и анализ условия, неумение искать ключевые факты и делать необходимые обоснования, строить графики, использовать геометрические интерпретации.

Задание С6

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 29.

РЕШЕНИЕ. а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, т. е. $22 - 1 = 21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которых на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 5 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части числа $\frac{29}{5}$, т. е. 5. Кроме того, числа 6 и 8 меньше, чем сумма двух чисел 5, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $29 - 5 - 6 - 8 = 10$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 5, оставшиеся задуманные числа — это 5 и 5 или 10. Для задуманных чисел 5, 5, 5, 6, 8 и 5, 6, 8, 10 на доске будет записан набор, данный в условии.

ОТВЕТ. а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 5, 5, 5, 6, 8 или 5, 6, 8, 10.

Краткий анализ выполнения задания в 2013 году

Средний процент решений, оцененных максимальным числом баллов, — 0,7%. Положительный результат (не менее одного балла за решение) — 7,3%. Наибольшие проблемы: понимание логики задачи и анализ условия, неумение использовать свойства целых чисел, делать необходимые обоснования и выводы. Значительный процент участников экзамена не приступил к решению задачи.

ЕГЭ-2014 по математике и как к нему готовиться (методические рекомендации с разбором задач)

В 2014 году Единый государственный экзамен по математике будет проводиться в той же форме, что и в 2013 году. Таким образом, в 2014 году вариант Единого государственного экзамена по математике будет состоять из 20 заданий, разделенных на две части: 14 задач B1–B14 с кратким ответом (часть 1) и 6 задач C1–C6 с полным решением (часть 2).

Форма и содержание экзамена требуют, как представляется очевидным, более полного описания типов и особенностей заданий демоверсии и открытого банка задач (именно из него берутся задания для формирования части 1 экзамена, т. е. задачи B1–B14), которые целесообразно проиллюстрировать примерами решения. Такому описанию, снабженному примерами решения задач, аналогичных задачам демоверсии, и посвящена эта часть пособия. Надеемся, что она окажется полезной как выпускникам, так и учителям старшей школы, позволив им лучше ориентироваться в предстоящей итоговой аттестации.

Настоящее пособие предназначено для организации итогового повторения (в том числе с начала учебного года) и завершающего этапа подготовки к экзамену и включает как задания, которые несколько проще возможных задач ЕГЭ, так и задания, которые несколько сложнее этих задач. Все задания сгруппированы в 20 диагностических работ и 20 тематических тренингов (по одному тренингу на каждую задачу варианта).

Тренинги состоят из 20 заданий каждый: 10 подготовительных и 10 зачетных заданий. Уровень сложности подготовительных задач увеличивается от задачи к задаче, пока в последних заданиях не достигает уровня сложности реальных заданий экзамена; уровень сложности зачетных заданий в целом соответствует уровню сложности реальных заданий ЕГЭ.

Первые две диагностические работы предназначены для завершающего этапа традиционного осеннего повторения материала 10 класса. Они составлены по образцу демоверсии и состоят из 20 задач каждая. При этом одна из работ не содержит задач с логарифмами, другая — задач с производной, что позволяет выбрать работу в соответствии с используемым учебником.

Следующие 4 диагностические работы содержат по 14 задач, аналогичных заданиям части 1 ЕГЭ; за ними следуют 4 диагностические работы, содержащие по 6 заданий части 2 ЕГЭ; завершают пособие диагностические работы, составленные в соответствии со спецификацией и демоверсией ЕГЭ по математике 2014 года (тренировочные варианты). При подготовке к решению заданий части B следует вначале решить первые диагностические работы соответствующего раздела для выявления проблемных зон в знаниях и навыках решения задач, затем повторить вызвавший затруднения материал по учебнику, решить последовательно соответствующие тренинги (подготовительные и зачетные) и перейти к следующим диагностическим работам для оценки успешности повторения и закрепления навыков решения задач части 1 экзаменационной работы. Аналогичный алгоритм можно рекомендовать и для подготовки к решению задач части 2 экзамена, но при этом необходимо наряду с данным пособием использовать учебники для специализированных классов, учебники профильного уровня и проверенные временем пособия для поступающих в вузы.

Часть 1

Общие рекомендации

При решении задач части 1 Единого государственного экзамена и проверке решений важно помнить следующее.

- Проверка ответов осуществляется компьютером после сканирования бланка ответов и сопоставления результатов сканирования с правильными ответами. Поэтому цифры в бланке ответов следует писать разборчиво и строго в соответствии с инструкцией по заполнению бланка (с тем чтобы, например, 1 и 7 или 8 и В распознавались корректно). К сожалению, ошибки сканирования полностью исключить нельзя, поэтому если выпускник уверен в задаче, за которую получил минус, ему нужно идти на апелляцию.
- Ответом к задаче может быть только целое число или конечная десятичная дробь. Ответ, зафиксированный в иной форме, будет распознан как неправильный. Поэтому если результатом решения задачи явилась обыкновенная дробь, например $\frac{3}{4}$, перед записью ответа в бланк ее нужно обратить в десятичную, т. е. в ответе написать 0,75.
- Единицы измерения (в каких именно единицах должен быть дан ответ, указывается в условии задачи) в бланке ответов писать не нужно, в противном случае сканер, вероятно, распознает ответ как неправильный.

Задание B1

Тип задания по кодификатору требований Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: анализ реальных числовых данных; осуществление практических расчетов по формулам, использование оценки и прикидки при практических расчетах.

Характеристика задания Задача на вычисление, моделирующая реальную или близкую к реальной ситуацию.

Комментарий Для решения задачи достаточно уметь выполнять арифметические действия с целыми числами и дробями, делать прикидку и оценку, знать, что процент — это одна сотая часть числа.

Пример задания Конфета стоит 4 руб. 30 коп. Какое наибольшее число конфет можно купить на 50 рублей?

РЕШЕНИЕ. Решать задачу можно по-разному, например, поделив 50 на 4,3 с остатком и получив в качестве целой части 11. Можно сделать прикидку, сообразив, что 10 конфет стоят 43 рубля и, чтобы при покупке не выйти за пределы 50 рублей, добавить к этим 10 конфетам можно еще только одну.

ОТВЕТ. 11.

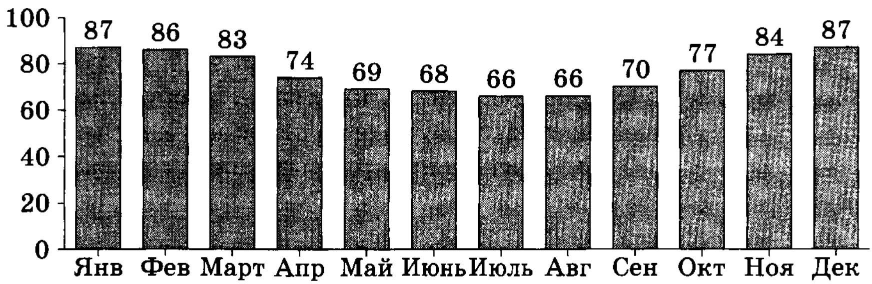
Задание B2

Тип задания по кодификатору требований Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: описание с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков; извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках.

Характеристика задания Задание на чтение графика функции (диаграммы), моделирующее реальную или близкую к реальной ситуацию. График (диаграмма) характеризует изменение в зависимости от времени некоторой величины (температуры, стоимости акций и т. д.). Как правило, в задании требуется найти наибольшее (наименьшее) значение этой величины, разность между наибольшим и наименьшим значением (возможно, за определенный период времени), время, когда величина достигает данного значения, вычислить среднее значение величины.

Комментарий Простейшее задание на считывание информации, представленной в виде диаграммы или графика, возможно, требующее незначительных вычислений, например нахождения среднего значения некоторой величины.

Пример задания На диаграмме показано распределение относительной влажности воздуха (в процентах) в городе Ейске по месяцам года. Определите среднюю относительную влажность воздуха (в процентах) в Ейске осенью.



РЕШЕНИЕ. Средняя относительная влажность воздуха в Ейске осенью равна среднему арифметическому значений относительной влажности (в процентах) в сентябре, октябре и ноябре, т. е. $\frac{70+77+84}{3}=77.$

ОТВЕТ. 77.

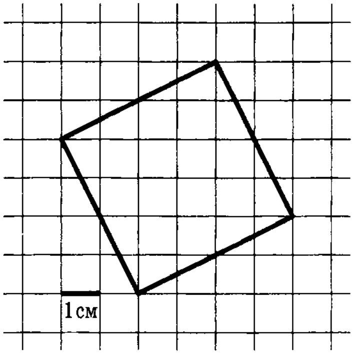
Задание B3

Тип задания по кодификатору требований Планиметрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).

Характеристика задания Задание на вычисление площади треугольника, четырехугольника, круга и его частей, в том числе по данным рисунка, представляющего собой изображение фигуры, площадь которой требуется найти, на координатной плоскости или клетчатой бумаге (сетке) со стороной клетки 1×1.

Комментарий Площадь искомой фигуры может быть найдена по известной формуле. Например, для треугольника или параллелограмма во многих случаях достаточно провести мысленно высоту к одной из сторон. Выбирать в качестве стороны и высоты нужно те, длины которых выражаются целым числом делений сетки, либо те, которые параллельны осям координат. В некоторых случаях для вычисления недостающих элементов можно использовать теорему Пифагора. Ряд задач можно решить, разбив фигуру на части, вычисление площадей которых не представляет труда, или заметив, что фигура сама является частью другой фигуры, а площадь последней можно найти почти сразу.

Пример задания Найдите площадь квадрата, изображенного на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



РЕШЕНИЕ. Площадь квадрата равна квадрату его стороны, а квадрат стороны в данном случае можно найти по теореме Пифагора, он будет равен $4^2 + 2^2$, т. е. 20.

ОТВЕТ. 20.

Задание B4

Тип задания по кодификатору требований Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: описание с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков; извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках; решение прикладных задач, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.

Характеристика задания Несложная текстовая задача (возможно, с табличными данными) на оптимальное решение, связанная с анализом практической деятельности и моделирующая реальную или близкую к реальной ситуацию.

Комментарий Чтобы решить задачу, достаточно вычислить стоимость товара с транспортировкой для каждой из трех указанных в условии фирм (поставщиков, провайдеров и т. п.) и в ответе указать наименьшую из них. Требуется аккуратность при записи ответа, поскольку числа могут оказаться довольно большими и неправильная запись одной разрядной единицы приведет к неправильному ответу. Ни в коем случае не следует записывать ответ, просто выбрав поставщика с меньшей ценой: нужно обязательно найти стоимость товара для каждого поставщика с учетом всех условий задачи.

Пример задания Для ремонта квартиры нужно приобрести 73 квадратных метра паркетной доски. В таблице указаны цены за квадратный метр, условия доставки и специальные предложения (при их наличии) каждой из трех фирм, работающих в городе. У какой из них покупка с доставкой окажется наиболее выгодной? В ответе укажите, сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой.

Поставщик	Стоимость паркетной доски (руб. за м^2)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные предложения
А	2850	4600	
Б	3000	4400	При заказе на сумму более 200 000 руб. доставка бесплатно
В	2900	4500	При заказе на сумму более 210 000 руб. доставка бесплатно

РЕШЕНИЕ. Стоимость покупки у фирмы А складывается из стоимости самой паркетной доски, равной $2850 \cdot 73 = 208\,050$ руб., и стоимости доставки, равной 4600 руб., т. е. составляет 212 650 руб. Стоимость покупки у фирмы Б совпадает со стоимостью самой паркетной доски, равной $3000 \cdot 73 = 219\,000$ руб. (доставка в этом случае бесплатна). Стоимость покупки у фирмы В также совпадает со стоимостью самой паркетной доски, равной $2900 \cdot 73 = 211\,700$ руб. Таким образом, наиболее выгодна для покупателя покупка у фирмы В.

ОТВЕТ. 211700.

Задание В5

Тип задания по кодификатору требований — Уравнение или система уравнений.

Характеристика задания — Несложное рациональное, показательное, логарифмическое, тригонометрическое или иррациональное уравнение.

Комментарий — Уравнение сводится в одно действие к линейному или квадратному (в последнем случае в зависимости от условия в ответе нужно указать только один из корней — меньший или больший).

Пример задания Решите уравнение $\left(\frac{1}{6}\right)^{12-7x} = 36$.

РЕШЕНИЕ. Приведя левую и правую части уравнения к степеням числа 6, получим уравнение $6^{7x-12} = 6^2$, откуда $7x - 12 = 2$, и, значит, $x = 2$.

ОТВЕТ. 2.

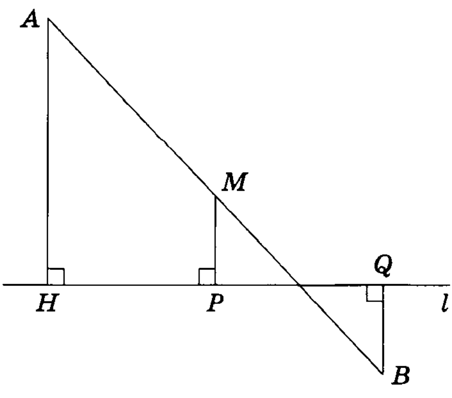
Задание B6

Тип задания по кодификатору требований Планиметрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей); моделирование реальных ситуаций на языке геометрии, исследование построенных моделей с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; практическая задача, связанная с нахождением геометрических величин.

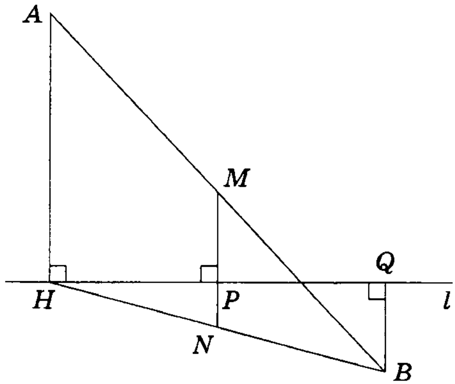
Характеристика задания Несложная планиметрическая задача, в том числе по готовому чертежу.

Комментарий Для решения задачи достаточно знать основные формулы и теоремы планиметрии.

Пример задания Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l. Расстояние AH от точки A до прямой l равно 12 см, а расстояние BQ от точки B до прямой l равно 4 см. Найдите расстояние MP от середины M отрезка AB до прямой l. Ответ дайте в сантиметрах. Единицу измерения в ответе не пишите.



РЕШЕНИЕ. Продолжим отрезок MP до пересечения с отрезком BH в точке N. Тогда $MN = \frac{1}{2}AH = 6$ (как средняя линия треугольника ABH), $PN = \frac{1}{2}BQ = 2$ (как средняя линия треугольника BQH). Следовательно, $MP = MN - PN = 6 - 2 = 4$.



ОТВЕТ. 4.

Задание B7

Тип задания по кодификатору требований	Задание на выполнение вычислений и преобразований.
Характеристика задания	Задача на вычисление значения числового или буквенного выражения.

Комментарий Для решения задачи достаточно уметь выполнять действия с числами, знать определение и простейшие свойства степеней, корней, логарифмов, синуса, косинуса, тангенса.

Пример задания Найдите значение выражения

$$(7^{\log_5 75})^{\log_7 5}.$$

РЕШЕНИЕ. Поскольку $(a^b)^c = (a^c)^b$, данное выражение можно преобразовать так:

$$(7^{\log_5 75})^{\log_7 5} = (7^{\log_7 5})^{\log_5 75} = 5^{\log_5 75} = 75.$$

ОТВЕТ. 75.

Задание B8

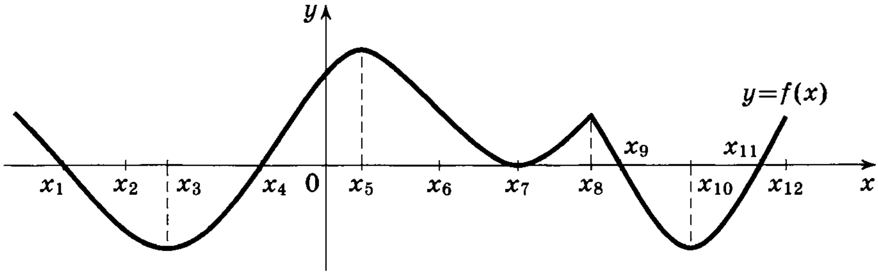
Тип задания по кодификатору требований Задание на выполнение действий с функциями и производными функций, исследование функций.

Характеристика задания Ставшая традиционной для ЕГЭ по математике задача на чтение графика функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств производной этой функции либо на чтение графика производной функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств самой функции.

Комментарий Для решения задачи достаточно знать, что в каждой точке интервала возрастания дифференцируемой на этом интервале функции ее производная положительна; в каждой точке интервала убывания дифференцируемой на этом интервале функции ее производная отрицательна; в каждой точке экстремума непрерывной функции производная либо равна нулю, либо не существует («угол» на графике функции). Обратно, если дан график производной функции, то на тех интервалах, где он расположен выше оси абсцисс (т. е. производная положительна), функция возрастает; на тех интервалах, где он расположен ниже оси абсцисс (т. е. производная отрицательна), функция убывает; общие точки графика производной и оси абсцисс (т. е. точки, в которых производная равна нулю) либо являются точками максимума, если график производной пересекает ось абсцисс «сверху вниз» (т. е. производная меняет знак с плюса на минус: возрастание функции сменяется убыванием), либо являются точками минимума, если график производной пересекает ось абсцисс «снизу ввверх» (т. е. производная меняет знак с минуса на плюс: убывание функции сменяется возрастанием), либо не являются точками экстремума (график производной не пересекает ось абсцисс, а лишь касается ее: в этом случае не происходит смены знака производной и характер монотонности функции не меняется).

Пример задания На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек x_1, x_2, x_3, …, x_{12}

оси абсцисс (точки x_3, x_5, x_7, x_8, x_{10} являются точками экстремума). В скольких из этих двенадцати точек производная $f'(x)$ положительна, если известно, что функция $y=f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой за исключением, быть может, некоторых точек экстремума?



РЕШЕНИЕ. По условию точки x_3, x_5, x_7, x_8, x_{10} являются точками экстремума функции, поэтому в этих точках производная либо равна нулю (точки x_3, x_5, x_7, x_{10}), либо не существует (точка x_8). Каждая из оставшихся точек принадлежит либо интервалу убывания функции (точки x_1, x_2, x_6, x_9), либо интервалу возрастания функции (точки x_4, x_{11}, x_{12}). Поскольку на каждом из этих интервалов функция $y=f(x)$ дифференцируема, то положительные значения ее производная принимает в точках x_4, x_{11}, x_{12}.

ОТВЕТ. 3.

Задание B9

Тип задания по кодификатору требований — Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

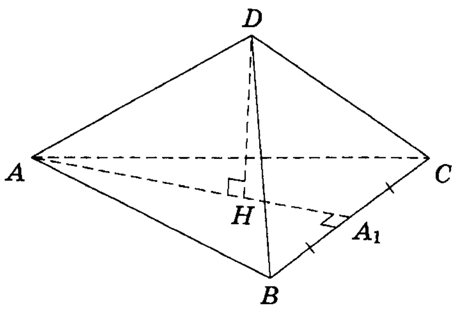
Характеристика задания — Несложное задание на вычисление элементов, площадей поверхностей или объемов многогранников или тел вращения.

Комментарий — Для решения задачи достаточно знать свойства правильных пирамид и призм, формулы площадей поверхности и объемов пирамиды, призмы, цилиндра, конуса и шара.

Пример задания Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 15, а одна из высот основания равна 18. Найдите высоту пирамиды.

РЕШЕНИЕ. Пусть $DABC$ — данная правильная треугольная пирамида с вершиной D. Поскольку пирамида правильная, ее основанием является правильный треугольник ABC, все высоты которого равны и совпадают с медианами треугольника. Основанием высоты правильной пирамиды является центр вписанной и описанной окружностей ее основания. Для правильной треугольной пирамиды это точка пересечения медиан основания. Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC, точка H — основание высоты пирамиды. Тогда $AH = \frac{2}{3}AA_1 = = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12$ (точка H является точкой пересечения медиан треугольника ABC и, значит, делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины). Высоту DH находим как катет прямоугольного треугольника DAH, применив теорему Пифагора:

$$DH = \sqrt{DA^2 - AH^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$$



ОТВЕТ. 9.

Задание B10

Тип задания по кодификатору требований Задание на построение и исследование простейших математических моделей: моделирование реальных ситуаций с использованием статистических и вероятностных методов, решение простейших комбинаторных задач методом перебора, а также с использованием известных формул; вычисление в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов.

Характеристика задания Несложная задача по теории вероятностей или статистике.

Комментарий Для решения задачи достаточно уметь находить отношение числа благоприятных для наступления некоторого события исходов к числу всех равновозможных исходов.

Пример задания В коробке лежит 10 одинаковых по внешнему виду конфет, в трех из которых нет фруктовой начинки. Ваня берет одну конфету. Найдите вероятность того, что в этой конфете будет фруктовая начинка.

РЕШЕНИЕ. Число конфет с фруктовой начинкой равно 7, число всех конфет равно 10. Поэтому искомая вероятность равна 0,7.

ОТВЕТ. 0,7.

Задание B11

Тип задания по кодификатору требований Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Характеристика задания Несложное задание по стереометрии на применение основных формул, связанных с вычислением площадей поверхностей или объемов многогранников (пирамид и призм) или тел вращения (цилиндров, конусов, шаров), в том числе вписанных или описанных около других многогранников или тел вращения.

Комментарий Для решения задачи достаточно знать формулы площадей поверхности и объемов пирамиды, призмы, цилиндра, конуса и шара.

Пример задания В цилиндрический стакан налили 1 литр воды. После того как в стакан положили камень, уровень воды повысился на $\frac{1}{4}$ по сравнению с тем, который был до этого. Найдите объем камня, если известно, что он погрузился в воду полностью. Ответ дайте в кубических сантиметрах (1 литр равен 1000 $см^3$).

РЕШЕНИЕ. Объем камня равен объему вытесненной воды, т. е. объему цилиндра, высота которого в четыре раза меньше высоты данного цилиндра (т. е. цилиндра объемом 1000 $см^3$), а радиус основания — тот же. Поэтому искомый объем равен $\frac{1}{4}\cdot 1000$, т. е. 250 $см^3$.

ОТВЕТ. 250.

Задание B12

Тип задания по кодификатору требований Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: описание с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков; извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках; решение прикладных задач, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.

Характеристика задания Текстовое задание на анализ практической ситуации, моделирующее реальную или близкую к реальной ситуацию (например, экономические, физические, химические и др. процессы).

Комментарий По условию задачи требуется составить уравнение или неравенство, сводимое к линейному или квадратному, решением которого и является искомая величина.

Пример задания Высота h отскочившего от земли мяча меняется по закону $h(t) = 12{,}5t - 5t^2$ (высота измеряется в метрах, время t — в секундах). Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее пяти метров от поверхности земли?

РЕШЕНИЕ. Составим по условию задачи неравенство и решим его: $12{,}5t - 5t^2 \geqslant 5$, откуда $5t^2 - 12{,}5t + 5 \leqslant 0$. Корнями квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства являются числа 0,5 и 2, и, значит, решение неравенства — отрезок [0,5; 2]. Таким образом, мяч находился на высоте не менее пяти метров от поверхности земли с момента времени $t_1 = 0{,}5$ (сек) до момента времени $t_2 = 2$ (сек) включительно, т. е. всего $2 - 0{,}5 = 1{,}5$ секунды.

ОТВЕТ. 1,5.

Задание B13

Тип задания по кодификатору требований Построение и исследование простейших математических моделей: моделирование реальной ситуации на языке алгебры, составление уравнения или неравенства по условию задачи; исследование построенной модели с использованием аппарата алгебры.

Характеристика задания Традиционная «текстовая» задача (на движение, работу и т. п.), сводящаяся к составлению и решению уравнения.

Комментарий В качестве неизвестной, как правило, лучше выбирать искомую величину. Составленное уравнение является рациональным и сводится в большинстве случаев к квадратному или линейному.

Пример задания Моторная лодка прошла 80 км от пункта А до пункта В и после трехчасовой стоянки вернулась обратно, затратив на весь путь 12 часов. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

РЕШЕНИЕ. Обозначим скорость лодки в неподвижной воде через x (км/ч). Очевидно, что $x > 2$. Тогда время, затраченное лодкой на путь по течению, равно $\frac{80}{x+2}$, а время, затраченное на путь против течения, равно $\frac{80}{x-2}$. Составим по условию задачи уравнение $\frac{80}{x+2} + \frac{80}{x-2} + 3 = 12$, откуда $\frac{80}{x+2} + \frac{80}{x-2} = 9$.

Умножив обе части последнего уравнения на $(x-2)(x+2)$, получим $80(x-2)+80(x+2)=9(x^2-4)$. Раскроем скобки, перенесем все слагаемые в правую часть, приведем подобные слагаемые и запишем полученное квадратное уравнение $9x^2-160x-36=0$. Корнями уравнения являются числа $-\frac{2}{9}$ и 18, из которых только второе больше 2.

ОТВЕТ. 18.

Задание B14

Тип задания по кодификатору требований Задание на выполнение действий с функциями и производными функций, исследование функций.

Характеристика задания Задание на вычисление с помощью производной точек экстремума данной функции или наибольшего (наименьшего) значения данной функции на данном отрезке. Производная в некоторых задачах может быть задана графиком.

Комментарий Решение задания связано с нахождением при помощи производной точек минимума (максимума) заданной функции или ее наименьшего (наибольшего) значения на отрезке. При этом возможны два основных случая: либо производная задана графиком, либо функция задана формулой. Если производная задана графиком, то на тех промежутках, где он расположен выше оси абсцисс (т. е. производная положительна), функция возрастает; на тех промежутках, где он расположен ниже оси абсцисс (т. е. производная отрицательна), функция убывает. Точки, в которых график производной пересекает ось абсцисс (т. е. точки, в которых производная меняет знак), являются точками экстремума. Если функция задана формулой, то при нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке можно использовать стандартный алгоритм.

Пример задания Найдите наибольшее значение функции $y=19-2\cos x-\frac{18}{\pi}x$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$.

РЕШЕНИЕ. Найдем производную данной функции: $y' = 2\sin x - \frac{18}{\pi}$. Поскольку $\frac{18}{\pi} > 3$, а $2\sin x < 3$, то значение производной отрицательно при любом значении x. Поэтому функция $y = 19 - 2\cos x - \frac{18}{\pi}x$ убывает на всей числовой оси и, значит, достигает своего наибольшего значения на отрезке в левом конце отрезка, т. е. в точке $-\frac{2\pi}{3}$. Найдем это наибольшее значение: $y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 19 - 2\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{18}{\pi}\cdot\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 19 + 1 + 12 = 32$.

ОТВЕТ. 32.

Часть 2

Общие рекомендации

- Каждая из задач С1–С6 оценивается 2, 3 или 4 баллами. Максимальный балл выставляется за полное обоснованное решение. При этом можно использовать любые утверждения и факты из школьных учебников без дополнительных обоснований или пояснений. Нужно постараться оформить решение так, чтобы оно было понятно не только его автору, но и любому другому компетентному человеку, в частности проверяющему.
- Даже если полностью решить задачу не удается, нужно постараться продвинуться в ее решении, сделать хотя бы часть задачи: вполне вероятно, что потраченные усилия окажутся оцененными — разумеется, не максимальным числом баллов, но на Едином экзамене и один балл за задачу будет далеко не лишним.

Задание С1

Тип задания по кодификатору требований Уравнение или система уравнений.

Характеристика задания Относительно несложное уравнение или система уравнений с отбором корней. Может содержать тригонометрические функции, логарифмы, степени, корни.

Комментарий Как правило, решение задачи требует замены переменной, позволяющей свести уравнение к квадратному, и отбора корней, связанного с условием задачи или с ограниченностью новой переменной, наличием выражений с переменной в знаменателях алгебраических дробей, под знаками корней четной степени и логарифмов.

Пример задания Решите уравнение $2\operatorname{tg}^2 x - \frac{7}{\cos x} + 8 = 0$ и укажите те из его корней, которые принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Поэтому уравнение можно переписать в виде

$$\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{7}{\cos x} + 6 = 0.$$

Решив уравнение как квадратное относительно $\frac{1}{\cos x}$, получим, что $\frac{1}{\cos x} = 2$ или $\frac{1}{\cos x} = \frac{3}{2}$, откуда $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = \frac{2}{3}$. Таким образом, решениями данного уравнения являются все числа вида $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и $x = \pm \arccos\frac{2}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Из чисел вида $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, данному отрезку принадлежит лишь $x = \frac{\pi}{3}$ $(k = 0)$, так как при $k \geqslant 1$ получим, что $x > 2\pi$, а при $k \leqslant -1$ получим, что $x < -\pi$.

Из чисел вида $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, данному отрезку принадлежит лишь $x = -\frac{\pi}{3}$ $(k = 0)$, так как при $k \geqslant 1$ получим, что $x > \pi$, а при $k \leqslant -1$ получим, что $x < -2\pi$.

Из чисел вида $x = \arccos\frac{2}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, данному отрезку принадлежит лишь $x = \arccos\frac{2}{3}$ $(m = 0)$, так как при $m \geqslant 1$ получим, что $x > 2\pi$, а при $m \leqslant -1$ получим, что $x < -\pi$.

Из чисел вида $x = -\arccos\frac{2}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, данному отрезку принадлежит лишь $x = -\arccos\frac{2}{3}$ $(m = 0)$, т.к. при $m \geqslant 1$ получим, что $x > \pi$, а при $m \leqslant -1$ получим, что $x < -2\pi$.

ОТВЕТ. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $x = \pm\arccos\frac{2}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. $-\frac{\pi}{3}$; $-\arccos\frac{2}{3}$; $\arccos\frac{2}{3}$; $\frac{\pi}{3}$.

Задание С2

Тип задания по кодификатору требований Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Характеристика задания Задание на вычисление отрезков, площадей, углов, связанных с многогранниками и телами вращения.

Комментарий Задача по стереометрии, доступная любому успевающему ученику. Как правило, в задаче нужно найти длину отрезка, площадь, угол (между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями), связанные с призмой, пирамидой, цилиндром, конусом или шаром. Дополнительные построения минимальны (например, построение линейного угла «хорошего» двугранного угла и т. д.).

Пример задания В правильной четырехугольной призме $A\ldots D_1$ сторона основания равна 10, а боковое ребро $AA_1 = 2$. Точка O принадлежит ребру A_1B_1 и делит его в отношении $4:1$, считая от вершины A_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и O.

РЕШЕНИЕ. Поскольку две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью по параллельным прямым, для построения сечения достаточно провести в плоскости верхнего основания призмы прямую, параллельную AC, до пересечения с ребром B_1C_1 в точке P Искомое сечение — трапеция $ACPO$ (рис. 1). Поскольку прямая AC параллельна A_1C_1, прямая OP параллельна прямой A_1C_1. Отсюда следует, что треугольники PB_1O и $C_1B_1A_1$ подобны, причем

$B_1P : B_1C = B_1O : B_1A_1 = OP : A_1C_1 = 1:5$. Значит, $AC = A_1C_1 = 10\sqrt{2}$, $OP = 2\sqrt{2}$.

В равных прямоугольных треугольниках CC_1P и AA_1O $CP = AO = \sqrt{AA_1^2 + A_1O^2} = \sqrt{68}$, значит, трапеция $ACPO$ равнобедренная.

Пусть PH — высота трапеции $ACPO$, проведенная к основанию AC (рис. 2), тогда:

$$CH = \frac{AC - OP}{2} = 4\sqrt{2}, \quad PH = \sqrt{CP^2 - CH^2} = 6,$$

$$S_{ACPO} = \frac{AC + OP}{2} \cdot PH = 36\sqrt{2}.$$

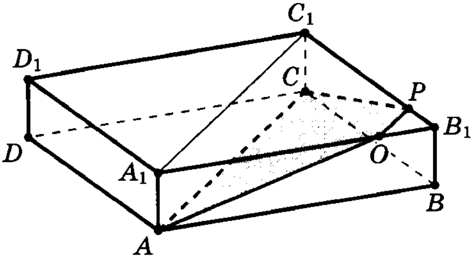


Рис. 1

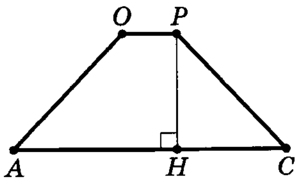


Рис. 2

ОТВЕТ. $36\sqrt{2}$.

Задание С3

Тип задания по кодификатору требований	Неравенство или система неравенств.
Характеристика задания	Неравенство или система неравенств, содержащих степени, дроби, корни, логарифмы (в том числе с переменным основанием).
Комментарий	Обратим внимание на преобразования, с которыми связана значительная часть ошибочных

решений задания С3. При решении неравенств, содержащих сумму двух и более логарифмов, следует помнить о том, что равенство $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)g(x))$ выполняется не при любых значениях переменной, поскольку области определения его левой и правой частей различны. Левая часть определена при $f(x)>0$, $g(x)>0$ (каждое из выражений положительно). Правая часть определена при $f(x)\cdot g(x)>0$ (каждое из выражений положительно либо каждое из выражений отрицательно). Таким образом, область определения правой части равенства $\log_a f(x)+\log_a g(x)=\log_a(f(x)g(x))$ шире области определения его левой части. Поэтому переход от суммы логарифмов к логарифму произведения может привести к приобретению посторонних решений. Чтобы этого не случилось, нужно в самом начале решения выписать необходимые ограничения (как иногда говорят, найти ОДЗ неравенства). Преобразование же логарифма произведения в сумму логарифмов (т. е. переход от $\log_a(f(x)g(x))$ к $\log_a f(x)+\log_a g(x)$) таит еще больше опасностей: в этом случае область допустимых значений переменной сужается, и можно просто потерять решения неравенства. Поэтому если такое преобразование все-таки необходимо, часто приходится рассматривать два случая:

а) $f(x)>0$, $g(x)>0$ (в этом случае $\log_a(f(x)g(x))=\log_a f(x)+$ $+\log_a g(x)$);

б) $f(x)<0$, $g(x)<0$ (при этом $\log_a(f(x)g(x))=\log_a(-f(x))+$ $+\log_a(-g(x))$).

Сделанные рекомендации остаются в силе и для случая преобразования разности логарифмов в логарифм частного и наоборот. Если есть выбор, лучше преобразовывать сумму (разность) логарифмов в логарифм произведения (частного), выписав необходимые ограничения (это позволит исключить посторонние решения), а не наоборот (при таком преобразовании решения будут потеряны). Так, при упрощении левой части неравенства $\log_a(f(x)\cdot g(x))+\log_a\dfrac{f(x)}{g(x)}<p(x)$ переход к логарифму произведения с последующим сокращением алгебраической дроби, т. е. переход к системе $\begin{cases}\log_a f^2(x)<p(x),\\ f(x)g(x)>0\end{cases}$ будет равносильным, а упрощение путем преобразования логарифмов произведения и частного в сумму и разность логарифмов соответственно может привести к потере решений.

При решении неравенств, содержащих выражения вида $\log_a f^{2n}(x)$, следует использовать формулу $\log_a f^{2n}(x)=$

$=2n\cdot\log_a|f(x)|$. Если не поставить знак модуля, то получится равенство, в котором левая часть определена при всех x, для которых $f(x)\neq 0$, а правая часть — при всех x, для которых $f(x)>0$, т. е. область определения левой части окажется шире, что может привести к потере решений соответствующего неравенства. Так, например, при решении неравенства $\log_5 f^2(x)>2$ переход к неравенству $2\log_5 f(x)>2$ будет означать потерю решений; правильным в этом случае будет переход к неравенству $2\log_5|f(x)|>2$ или сразу к неравенству $f^2(x)>5^2$.

Особое внимание следует также уделить применению метода интервалов и методов решения логарифмических неравенств. Логарифмические неравенства с переменным основанием можно решать «традиционным» способом, рассматривая два случая (основание больше 1, основание положительно и меньше 1). Второй способ — применение метода интервалов. Третий способ основан на следующих простых утверждениях.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если числа p и q одного знака (т. е. $pq>0$), то и числа pr и qr $(r\neq 0)$ одного знака; обратно, если числа pr и qr одного знака, то и числа p и q одного знака.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если $a>0$, $b>1$, то числа $\log_b a$ и $a-1$ одного знака.

Утверждение 1 означает, что если числа p и q одного знака, то неравенства $pr>0$ и $qr>0$ равносильны. Вместе с утверждением 2 это позволяет при решении логарифмических неравенств вида $r(x)\log_{c(x)} a(x)>0$ переходить (разумеется, записав необходимые ограничения) сначала к неравенству $r(x)\dfrac{\log_b a(x)}{\log_b c(x)}>0$ (где b — любое число, большее 1), а затем к неравенству $r(x)\dfrac{a(x)-1}{c(x)-1}>0$. Таким образом, неравенство $r(x)\dfrac{\log_b a(x)}{\log_b c(x)}>0$ равносильно системе $\begin{cases} r(x)\dfrac{a(x)-1}{c(x)-1}>0,\\ a(x)>0,\\ c(x)>0.\end{cases}$ При необходимости такой переход можно сделать несколько раз. Описанный алгоритм справедлив и для неравенств противоположного знака и нестрогих неравенств. Кроме того, при решении логарифмических неравенств часто оказывается полезным и следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если $a>0$, $b>0$, $c>1$, то числа $\log_c a - \log_c b$ и $a-b$ одного знака.

Сформулированные утверждения применимы к неравенствам, правая часть которых равна нулю, а левая представляет собой произведение или частное нескольких алгебраических множителей. В некоторых случаях такие множители можно заменить более простыми, имеющими те же знаки (точнее, те же промежутки знакопостоянства), что и заменяемые. Кроме указанных выше, к таким парам можно отнести следующие: $|a|-|b|$ и a^2-b^2, $\sqrt[2n]{a}-\sqrt[2n]{b}$ и $a-b$ (при условиях $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$), $\sqrt[2n+1]{a}-\sqrt[2n+1]{b}$ и $a-b$, $\sqrt[2n+1]{a}+\sqrt[2n+1]{b}$ и $a+b$, l^a-l^b и $a-b$ (при условии $l>1$).

Пример задания Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^{x+1}-244\cdot 3^x+27\leqslant 0,\\ 2\log_2\dfrac{x-1}{10x+11}+\log_2(10x+11)^2\geqslant 2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Решим первое неравенство системы, приведя его к виду $9\cdot(3^x)^2-244\cdot 3^x+27\leqslant 0$ и сделав замену переменной $t=3^x$, $t>0$. Получим квадратное неравенство $9t^2-244t+27\leqslant 0$, решив которое, найдем $\dfrac{1}{9}\leqslant t\leqslant 27$. Значит, $\dfrac{1}{9}\leqslant 3^x\leqslant 27$, или $3^{-2}\leqslant 3^x\leqslant 3^3$, откуда $x\in[-2;\,3]$. Решим второе неравенство системы, перейдя сначала к равносильной системе

$$\begin{cases} \log_2\left(\dfrac{x-1}{10x+11}\right)^2+\log_2(10x+11)^2\geqslant 2,\\ (x-1)(10x+11)>0, \end{cases}$$

а затем, преобразовав сумму логарифмов в логарифм произведения и сократив дробь, к системе

$$\begin{cases} \log_2(x-1)^2\geqslant 2,\\ (x-1)(10x+11)>0. \end{cases}$$

Неравенство $\log_2(x-1)^2 \geqslant 2$ равносильно неравенству $(x-1)^2 \geqslant$ $\geqslant 4$, решив которое, получим $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. Решение второго неравенства последней системы: $(-\infty; -1{,}1) \cup (1; +\infty)$. Решение последней системы: $(-\infty; -1{,}1) \cup [3; +\infty)$. Поэтому решение данной системы: $[-2; -1{,}1) \cup \{3\}$.

ОТВЕТ. $[-2; -1{,}1) \cup \{3\}$.

Задание С4

Тип задания по кодификатору требований Планиметрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).

Характеристика задания Задача на вычисление длин, площадей, углов, связанных с плоскими фигурами.

Комментарий Довольно сложная задача, либо с двумя вопросами (один из которых — на доказательство), либо требующая рассмотрения двух случаев и приводящая к двум разным ответам.

Пример задания Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно 49 см^2 и 36 см^2.

а) Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

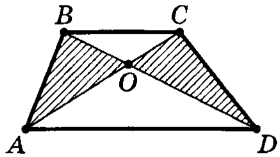
б) Найдите площадь трапеции.

РЕШЕНИЕ. а) В условии задачи не сказано, какие стороны трапеции являются ее боковыми сторонами, а какие — основаниями. Докажем вначале, что площади двух треугольников, общая вершина которых находится в точке пересечения диагоналей трапеции, а основаниями служат боковые стороны, равны (см. рис.) Площади треугольников ABD и ACD равны, поскольку эти треугольники имеют общее основание AD, и их высоты, проведенные к этому основанию, равны как высоты трапеции. Но тогда

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COD},$$

что и требовалось. По условию $S_{\triangle AOD} \neq S_{\triangle BOC}$, поэтому AD и BC являются не боковыми сторонами, а основаниями трапеции. Следовательно, треугольники AOB и COD являются треугольниками, общая вершина которых находится в точке пересечения диагоналей данной трапеции, а основаниями служат ее боковые стороны. Значит, их площади равны.

б) Треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, и отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k. Поэтому $k=\frac{7}{6}=\frac{AO}{OC}$. Поскольку треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведенную из вершины B, отношение их площадей равно отношению их оснований, т. е. $\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle CBO}}=\frac{AO}{OC}=\frac{7}{6}$. Значит, $S_{\triangle ABO}=\frac{7}{6}S_{\triangle CBO}=\frac{7}{6}\cdot 36=42$ см^2. Поэтому и $S_{\triangle COD}=42$ см^2. Но тогда $S_{ABCD}=49+36+42+42=169$ см^2.



ОТВЕТ. 169 см^2.

Задание С5

Тип задания по кодификатору требований	Уравнение или система уравнений.
Характеристика задания	Задача с параметром, требующая уверенного владения материалом и применения нескольких свойств и теорем.

Комментарий Это задание, как и следующее за ним, является одним из самых сложных заданий Единого государственного экзамена по математике. Оно рассчитано прежде всего на тех, кто собирается продолжать образование в вузах с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов (это не обязательно вузы, готовящие математиков, физиков, программистов, — к ним относится, например, и ряд экономических вузов). Если вы претендуете на высокий балл, то нужно постараться решить эту задачу или хотя бы продвинуться в ее решении как можно дальше. Для успешного решения задачи важно свободно оперировать с изученными определениями, свойствами, теоремами, применять их в различных ситуациях, анализировать условие и находить возможные пути решения. Особое внимание следует уделить задачам с параметром, решение которых основывается на таких свойствах функций, как ограниченность, монотонность, четность и нечетность, а также требует умения строить графики основных элементарных функций.

Пример задания Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b уравнение

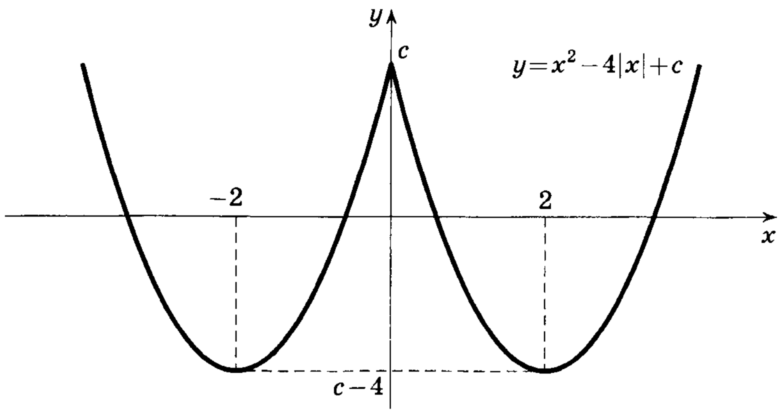
$$x^2 - 4|x| - 7|b-a| + 3|b-3| - 2b + 5a - 15 = 0$$

имеет ровно два корня.

РЕШЕНИЕ. Обозначим

$$-7|b-a| + 3|b-3| - 2b + 5a - 15$$

через c и рассмотрим график четной функции $y = x^2 - 4|x| + c$, состоящий из двух частей парабол $y = x^2 - 4x + c$ (при $x \geqslant 0$) и $y = x^2 + 4x + c$ (при $x < 0$) с вершинами в точках $(2; c-4)$ и $(-2; c-4)$ соответственно. При $c < 0$ график пересекает ось абсцисс в двух точках; при $c = 0$ — в трех точках, при $0 < c < 4$ — в четырех точках; при $c = 4$ — в двух точках; при $c > 4$ график не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки.



Данное уравнение имеет ровно два корня, если график пересекает ось абсцисс в двух точках, т. е. если $c = 4$ или $c < 0$. Рассмотрим эти два случая.

1. Пусть $c = 4$, т. е.

$$-7|b-a| + 3|b-3| - 2b + 5a - 15 = 4,$$

откуда

$$7|b-a| - 3|b-3| + 2b - 5a + 19 = 0.$$

Последнее равенство должно выполняться при любом значении b, в частности при $b = 3$. В этом случае получаем $7|3-a| + 6 - 5a + 19 = 0$, или $7|a-3| = 5a - 25$. В силу неотрицательности модуля корни последнего уравнения должны удовлетворять неравенству $5a - 25 \geqslant 0$, т. е. неравенству $a \geqslant 5$. Но тогда $7a - 21 = 5a - 25$ и $a = -2$, либо $7a - 21 = 25 - 5a$ и $a = \dfrac{23}{6}$. Ни одно из найденных значений a не удовлетворяет неравенству $a \geqslant 5$. Следовательно, в этом случае решений нет.

2. Пусть $c < 0$, т. е.

$$-7|b-a| + 3|b-3| - 2b + 5a - 15 < 0.$$

Обозначим

$$g(b) = -7|b-a| + 3|b-3| - 2b + 5a - 15.$$

График непрерывной функции $y = g(b)$ представляет собой ломаную, состоящую из отрезков прямых и лучей. При $b > a$ каждое звено ломаной является частью прямой вида $y = kb + l$, где $k < 0$ (поскольку вне зависимости от «раскрытия» второго модуля коэффициент при b будет отрицательным). Следовательно, при $b > a$ функция $y = g(b)$ убывает. Совершенно аналогично можно показать, что при $b < a$ функция $y = g(b)$ возрастает. Поэтому в точке $b = a$ эта функция достигает своего наибольшего значения, и неравенство

$$-7|b-a| + 3|b-3| - 2b + 5a - 15 < 0$$

будет выполняться при любом значении b в том и только том случае, если $\max g(b) < 0$, т. е. если $g(a) < 0$. Но $g(a) = 3|a-3| + 3a - 15$. Остается решить неравенство

$$3|a-3| + 3a - 15 < 0.$$

Преобразуем неравенство к виду $|a-3|<5-a$ и перейдем к системе

$$\begin{cases} a-3<5-a, \\ a-3>a-5. \end{cases}$$

Второе неравенство системы выполняется при любом значении a; из первого неравенства получаем $a<4$.

ОТВЕТ. $a \in (-\infty; 4)$.

Задание С6

Тип задания по кодификатору требований Уметь строить и исследовать простейшие математические модели.

Характеристика задания Задача, связанная со свойствами делимости целых чисел, логическим перебором.

Комментарий Задание олимпиадного типа, рассчитанное на сильных учащихся. Для того чтобы продвинуться в его решении, не требуется никаких специальных знаний, выходящих за рамки стандарта математического образования, однако необходимо проявить определенный уровень математической культуры, логического мышления, который формируется при решении задач профильного уровня на протяжении всего обучения в школе.

Пример задания На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -18.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

РЕШЕНИЕ. Пусть k из написанных чисел положительны, l — отрицательны и m — нули. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $9k-18l+0\cdot m=-5(k+l+m)$.

а) Каждое слагаемое в левой части полученного равенства делится на 9, поэтому и $k+l+m$ делится на 9. По условию $27 < k+l+m < 45$, поэтому $k+l+m=36$. Значит, на доске написано 36 чисел.

б) Приведем равенство $9k-18l+0\cdot m=-5(k+l+m)$ к виду $13l=14k+5m$. Так как $m\geqslant 0$, то $13l\geqslant 14k$, откуда $l>k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Поскольку $k+l+m=36$, а $9k-18l=-5(k+l+m)$, получим, что $9k-18l=-180$ и $k=2l-20$. Так как $k+l\leqslant 36$, то $3l-20\leqslant 36$ и, значит, $3l\leqslant 56$, откуда $l\leqslant 18$ (так как l — натуральное число). Но $k=2l-20$, поэтому $k\leqslant 16$. Приведем пример, когда положительных чисел ровно 16. Пусть на доске 16 раз написано число 9, 18 раз написано число -18 и два раза написан 0. Тогда $\dfrac{9\cdot 16-18\cdot 18}{36}=-5$ и указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

ОТВЕТ. а) 36; б) отрицательных; в) 16.

Диагностические работы за курс 10 класса

Ответом к заданиям части 1 (B1–B14) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

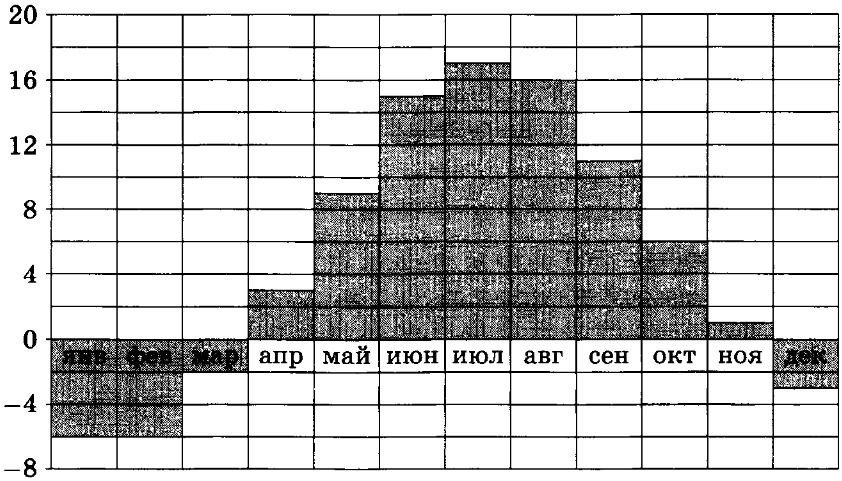
Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

Диагностическая работа №1

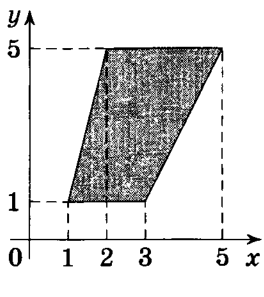
Часть 1

B1 Алиса купила проездной билет на месяц и сделала за месяц 48 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной на месяц стоит 720 рублей, а разовая поездка — 19 рублей?

B2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Хельсинки за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



B3 Найдите площадь трапеции, вершинами которой являются точки с координатами (1; 1), (2; 5), (5; 5), (3; 1).



B4 Для транспортировки 6 тонн груза на 350 км можно воспользоваться услугами одной из трех фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку?

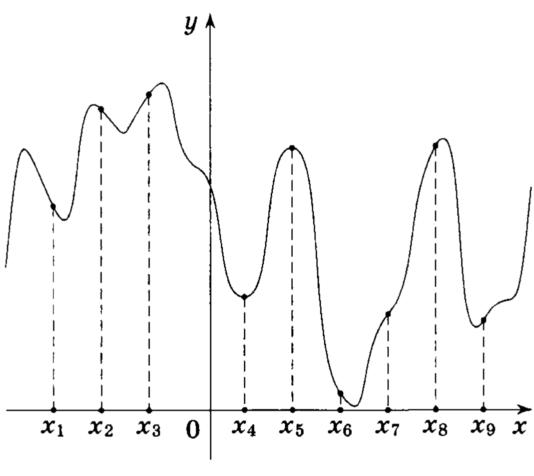
Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 10 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	80	1,6
Б	110	2,2
В	180	3,6

B5 Найдите корень уравнения $\frac{x-24}{x-3}=-2$.

B6 Даны два смежных угла. Биссектриса первого из них образует угол 43° с общей стороной этих углов. Найдите величину второго из данных смежных углов. Ответ дайте в градусах.

B7 Найдите значение выражения $\left(-1\frac{8}{9}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 8{,}64$.

B8 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_9. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



B9 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 10, а сторона основания равна $6\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.

B10 На тарелке 30 пирожков: 3 с мясом, 18 с капустой и 9 с вишней. Саша наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

B11 Площадь поверхности куба равна 50. Найдите его диагональ.

B12 Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 500$ рублей за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ рублей, постоянные расходы предприятия $f = 700\,000$ рублей в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите наименьший месячный объем производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 500 000 рублей.

B13 Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 440 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба?

B14 Найдите наименьшее значение функции $y = 28\operatorname{tg} x - 28x - 7\pi + 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $4\sin^2 x + 12\sin x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

C2 В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой A_1B_1.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{x^2 - 7x + 12} + \dfrac{x-4}{3-x}\right)\sqrt{6x - x^2} \leqslant 0, \\ x \cdot \sqrt{7} - 8x + 71 > 16\sqrt{7}. \end{cases}$$

С4 Из вершины C тупого угла треугольника ABC проведена высота CH. Точку H соединили с серединами M и N сторон AC и BC.

а) Докажите, что в четырёхугольник $CMHN$ можно вписать окружность.

б) Найдите её радиус, если сумма сторон AC и BC равна 20, а площадь треугольника ABC равна 24.

С5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - a}{6 + x^2}$ есть ровно одно целое число.

С6 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-5, -2, 1, 3, 4, 6, 9$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

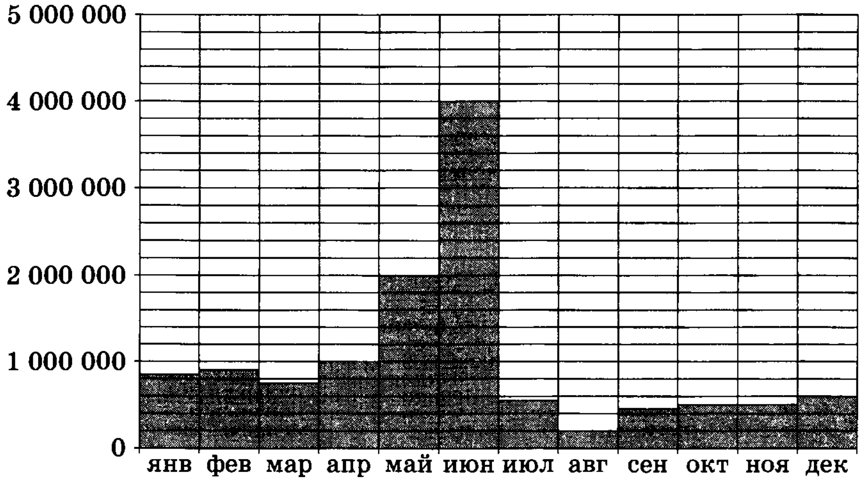
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Диагностическая работа №2

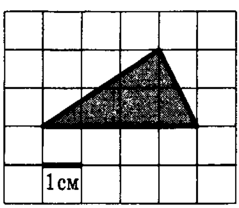
Часть 1

B1 Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 56 км/ч? (Считайте, что 1 миля равна 1,6 км.)

B2 На диаграмме показано число запросов со словом ЕГЭ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по декабрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько в 2009 году было месяцев, когда число запросов со словом ЕГЭ превышало 800 000.



B3 Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B4 От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

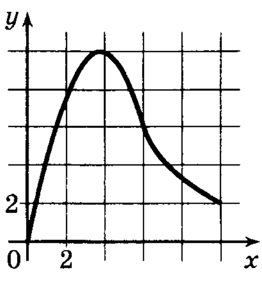
	1	2	3
Автобусом	От дома до автобусной станции — 20 мин.	Автобус в пути: 1 ч 55 мин.	От остановки автобуса до дачи пешком 10 мин.
Электричкой	От дома до станции железной дороги — 20 мин.	Электричка в пути: 1 ч 35 мин.	От станции до дачи пешком 25 мин.
Маршрутным такси	От дома до остановки маршрутного такси — 15 мин.	Маршрутное такси в дороге: 1 ч 30 мин.	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 30 мин.

B5 Найдите корень уравнения $\log_3(x+5) = \log_3(2x-17)$.

B6 В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 34, вписана окружность. Найдите среднюю линию трапеции.

B7 Найдите значение выражения $44 \log_2 \frac{\sqrt{4}}{2}$.

B8 Материальная точка движется вдоль прямой от начального до конечного положения. На рисунке изображен график ее движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



B9 Высота правильной четырехугольной пирамиды в два раза меньше диагонали основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

B10 В каждой партии из 1000 лампочек в среднем 20 бракованных. Найдите вероятность того, что наугад взятая лампочка из партии будет исправной.

B11 Объем куба равен 27. Найдите площадь его поверхности.

B12 Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{432} \cdot 10^{21}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $1{,}71 \cdot 10^{26}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

B13 На изготовление 60 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 80 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

B14 Найдите наименьшее значение функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1-x^2}$.

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $8\cos^4 x - 14\cos^2 x + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 7\log_9(x^2-x-6) \leqslant 8+\log_9\dfrac{(x+2)^7}{x-3}, \\ \dfrac{1}{3^{x-1}}+\dfrac{1}{3^x}+\dfrac{1}{3^{x+1}} < 52. \end{cases}$$

C4 В трапеции $ABCD$ основания BC и AD относятся как $1:2$. Пусть K — середина диагонали AC. Прямая DK пересекает сторону AB в точке L.

а) Докажите, что $AL = 2BL$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BCKL$, если известно, что площадь трапеции $ABCD$ равна 9.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|2x-a|+1 \leqslant |x+3|$ образуют отрезок длины 1.

C6 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

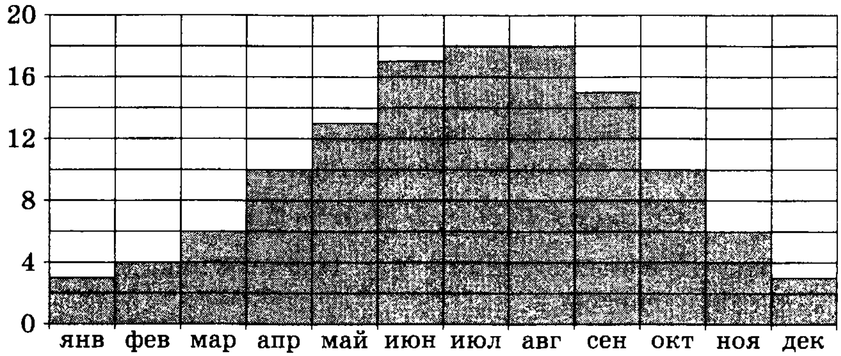
Подготовка к части 1
ЕГЭ-2014 по математике

Ответом к заданиям части 1 (B1–B14) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

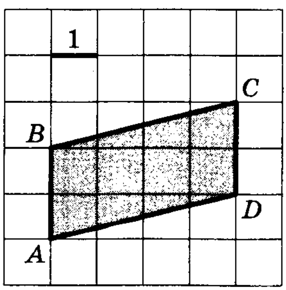
Диагностическая работа №3

B1 Школа закупает книги по цене 50 рублей за штуку. При покупке больше 10 штук магазин дает скидку 10%. Сколько книг можно купить на 1000 рублей?

B2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Париже за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура была равна 10 градусам Цельсия.



B3 Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.



B4 Строительная фирма собирается приобрести 85 кубометров пеноблоков у одного из трех поставщиков. Цены на пеноблоки и условия доставки приведены в таблице. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)?

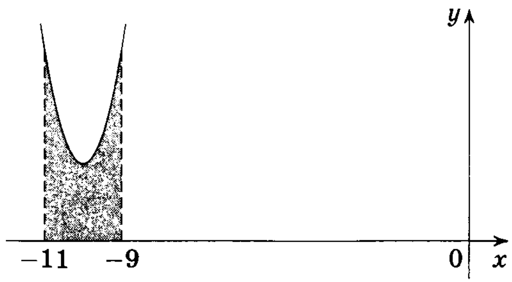
Поставщик	Цена пеноблоков (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	2700	15 000	При заказе на сумму больше 250 000 руб. доставка бесплатно
Б	2800	14 000	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2750	12 000	

B5 Решите уравнение $\sqrt{7-x}=4$.

B6 Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=7$, $CK=8$.

B7 Вычислите $\log_5 135-\log_5 5{,}4$.

B8 На рисунке изображен график некоторой функции $y=f(x)$. Функция $F(x)=x^3+30x^2+302x-\frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



B9 Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды в два раза больше высоты боковой грани, проведенной к стороне основания пирамиды. Найдите угол между плоскостями несмежных боковых граней пирамиды. Ответ дайте в градусах.

B10 В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в 12 из них встречается вопрос по круглым червям. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику попадется вопрос по круглым червям.

B11 Площадь полной поверхности данного правильного тетраэдра равна 80 см^2. Найдите площадь полной поверхности правильного тетраэдра, ребро которого в 4 раза меньше ребра данного тетраэдра. Ответ дайте в см^2.

B12 Высоту над землей подброшенного вверх камня можно вычислять по формуле $h(t) = 1{,}6 + 13t - 5t^2$, где t — время с момента броска в секундах, h — высота в метрах. Сколько секунд камень будет находиться на высоте более 6 метров?

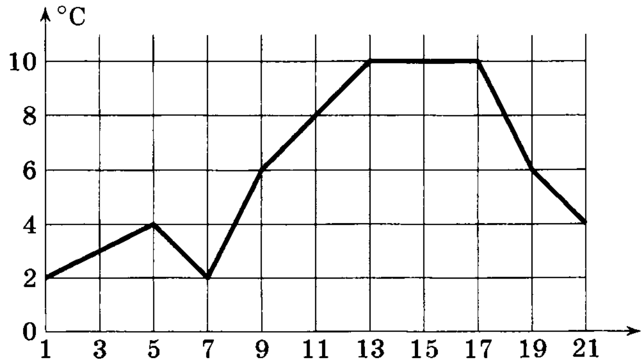
B13 Товарный поезд, идущий со скоростью 30 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 36 секунд. Определите длину поезда (в метрах).

B14 Найдите наибольшее значение функции $y = 11x + \cos x + 10$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

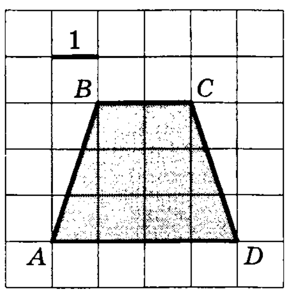
Диагностическая работа №4

B1 На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина 31 рублей 20 копеек за литр. Сдачи клиент получил 1 рубль 60 копеек. Сколько литров бензина было залито в бак?

B2 Первый посев семян петрушки рекомендуется проводить в апреле при дневной температуре воздуха не менее +6°C. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха на первые три недели апреля. Определите, в течение скольких дней за этот период можно производить посев петрушки.



B3 Найдите площадь трапеции $ABCD$.



B4 Для транспортировки 50 тонн груза на 900 км можно использовать одного из трех перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого из них указаны в таблице. Сколько будет стоить самый дешевый вариант перевозки (в рублях)?

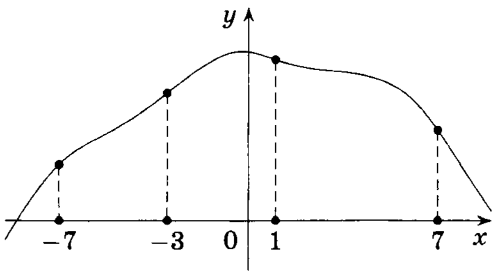
Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	3700	3,5
Б	4300	5
В	9800	12

B5 Решите уравнение $3^{x-3} = 27$.

B6 В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно $45°$ и $67°$. Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины C. Ответ дайте в градусах.

B7 Найдите значение выражения $\log_4 104 - \log_4 6{,}5$.

B8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -7, -3, 1, 7. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



B9 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 10 и образует с плоскостью основания угол, синус которого равен 0,8. Найдите высоту основания пирамиды.

B10 Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день запланировано 20 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Какова вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

B11 Площадь боковой поверхности конуса равна 16 $см^2$. Радиус основания конуса уменьшили в 4 раза, а образующую увеличили в 2 раза. Найдите площадь боковой поверхности получившегося конуса. Ответ дайте в $см^2$.

B12 Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 (в градусах Кельвина) КПД этого двигателя будет не меньше 80%, если температура холодильника $T_2 = 200$ К?

B13 Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

B14 Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = 4x + 2$, если множеством значений первообразной является луч $[-4; +\infty)$. В ответе укажите значение $F(-2)$.

Задача B1

Подготовительные задания

1 Найдите 20% от числа 58.

2 Какое число получится, если 170 увеличить на 30%?

3 Кафельная плитка продается коробками по 6 м^2. Сколько коробок плитки нужно купить, чтобы хватило на облицовку стен площадью 35 м^2?

4 Билет в ботанический сад стоит 50 рублей. Сколько рублей сдачи нужно получить с 2000 рублей, заплаченных за проход 36 человек?

5 Горные лыжи стоят 16 000 рублей. Сколько рублей будут стоить горные лыжи во время сезонной распродажи, когда на них объявлена скидка 20%?

6 Какое минимальное количество восьмиместных шлюпок должно быть на корабле, на котором находятся 54 пассажира и 12 членов экипажа?

7 Билет в музей стоит 150 рублей. Сколько билетов можно купить на 1300 рублей?

8 Сколько автомобилей грузоподъемностью 5 тонн понадобится, чтобы перевезти за один рейс 72 тонны груза?

9 Пластиковый стаканчик с йогуртом стоит 7 рублей 60 копеек. Какое максимальное количество таких стаканчиков можно купить на 50 рублей?

10 Шариковая ручка стоит 7 рублей. При покупке более 50 ручек на всю покупку начинает действовать скидка 20%. Сколько рублей потребуется для покупки 120 ручек?

Зачетные задания

1 Диагональ экрана телевизора равна 64 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах, если в одном дюйме 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2 Большой корабль не может подойти к берегу, поэтому пассажиров отвозят с корабля на шлюпке, вмещающей 8 пассажиров. Сколько раз шлюпка приставала к берегу, если на берег отвезли 30 пассажиров?

3 В супермаркете проходит рекламная акция: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три шоколадки (одна шоколадка в подарок). Шоколадка стоит 24 рубля. Какое наибольшее число шоколадок можно получить на 150 рублей?

4 Летом килограмм черешни стоит 80 рублей. Мама купила 1 кг 800 г черешни. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?

5 Таксист за месяц проехал 5500 км. Стоимость 1 л бензина 22 рубля. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 л. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

6 Выпускники 11 «Б» класса покупают букеты цветов для последнего звонка: из 5 роз каждому учителю и из 7 роз классному руководителю и директору. Они собираются подарить цветы 18 учителям (включая директора и классного руководителя), розы покупаются по оптовой цене 25 рублей за штуку. Сколько рублей потребуется для покупки?

7 Призерами городской олимпиады по математике стало 48 учеников, что составило 12% от числа участников. Сколько человек участвовало в олимпиаде?

8 Бегун пробежал 50 м за 5 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в км/ч.

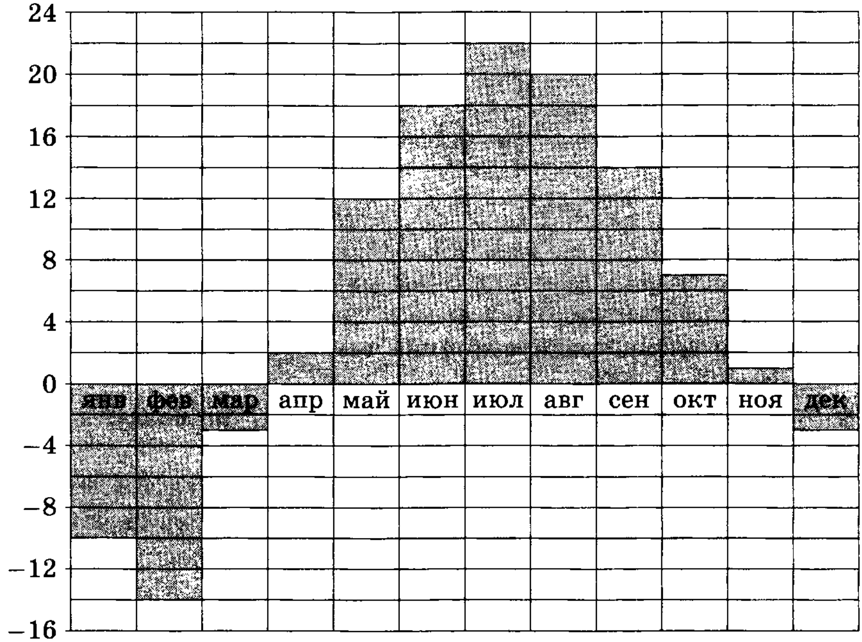
9 В июне 1 кг помидоров стоил 60 рублей. В июле цена помидоров снизилась на 30%, а августе еще на 50%. Сколько рублей стоил 1 кг помидоров после снижения цены в августе?

10 Среди 160 000 жителей города 55% не интересуется футболом. Среди футбольных болельщиков 90% смотрело по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрело этот матч?

Задача B2

Подготовительные задания

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Москве за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия.



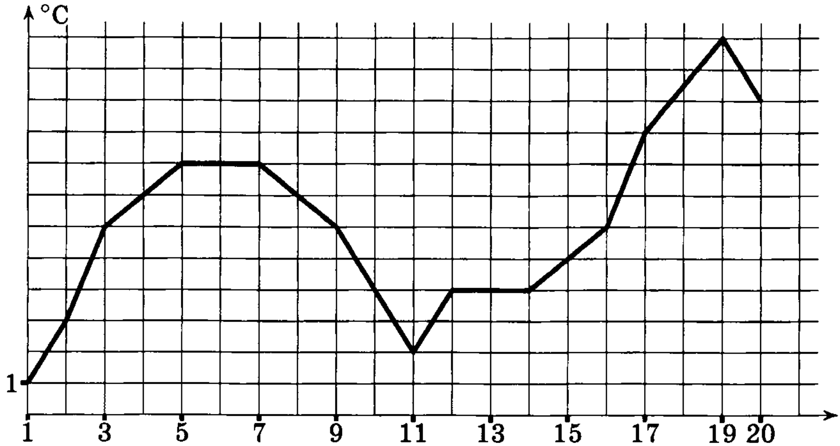
1 Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

2 Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

3 Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году с отрицательной среднемесячной температурой.

4 Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура превышала 10°C.

На рисунке изображен график колебания температуры в течение первых 20 дней апреля. По горизонтальной оси отложены дни, а по вертикальной — среднесуточная температура воздуха.



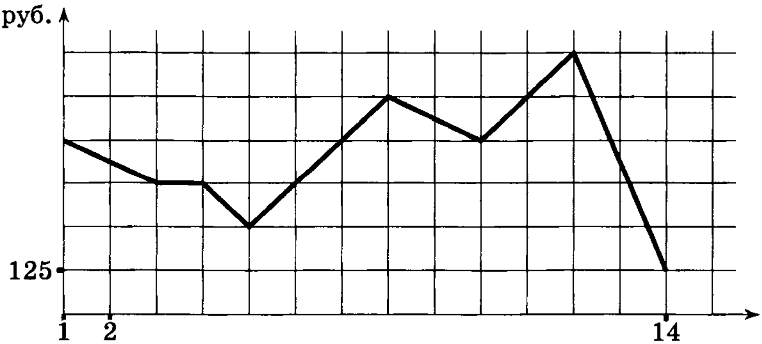
5 Какой была среднесуточная температура воздуха 6 апреля? Ответ дайте в градусах Цельсия.

6 Какого числа среднесуточная температура воздуха в первый раз достигла 7 °C?

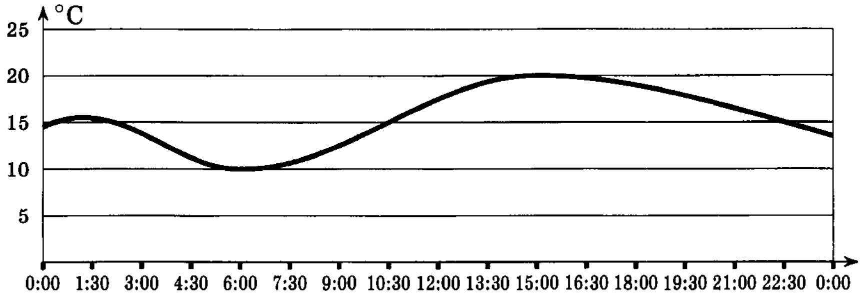
7 Какого числа среднесуточная температура воздуха была максимальной?

8 Какого числа среднесуточная температура воздуха была минимальной?

9 На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первые две недели февраля. В первую неделю февраля бизнесмен купил 12 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль (в рублях) он мог получить?

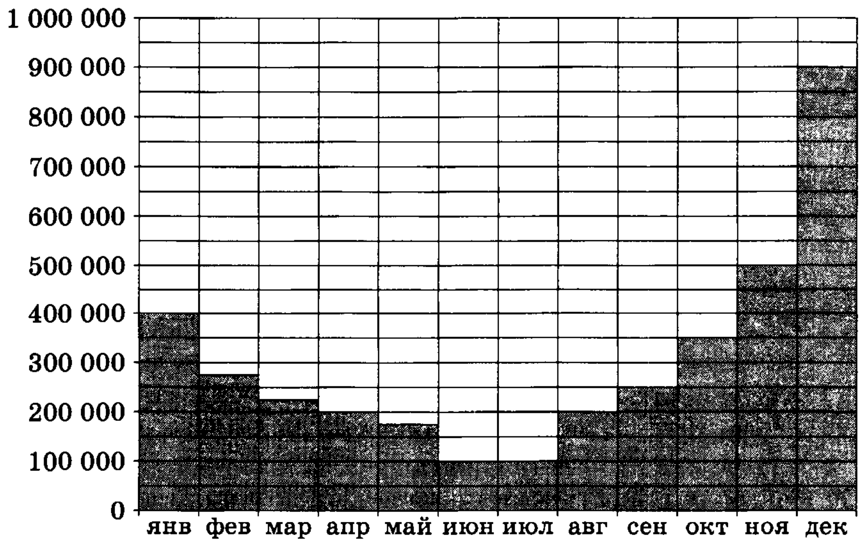


10 На графике изображено изменение температуры воздуха в пункте A на протяжении суток 17 августа. На оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику разность максимальной и минимальной температур в течение этих суток (в градусах Цельсия).



Зачетные задания

На диаграмме показано число запросов со словом СНЕГ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по декабрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц.



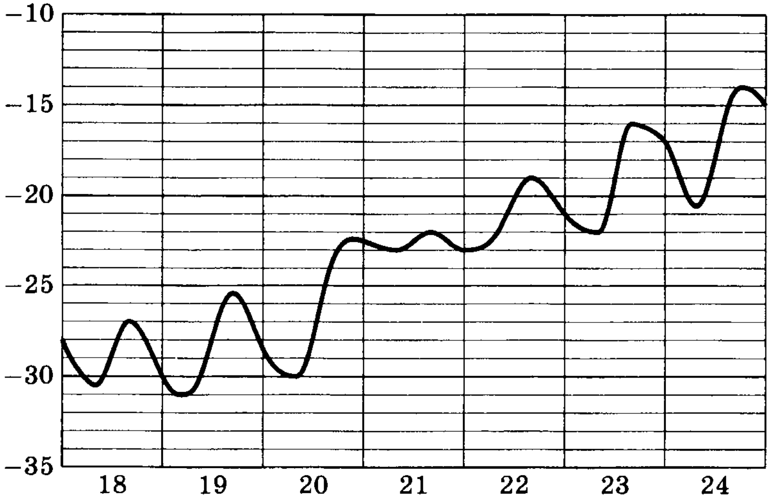
1 Определите по диаграмме максимальное месячное число запросов со словом СНЕГ в период с января по октябрь 2009 года.

2 Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда число запросов со словом СНЕГ было равно 200 000.

3 Определите по диаграмме, во сколько раз максимальное месячное число запросов превышало минимальное месячное число запросов со словом СНЕГ в 2009 году.

4 Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда число запросов со словом СНЕГ не превосходило 300 000.

На рисунке примерно показано изменение температуры воздуха в Москве с 18 по 24 января 2006 года. По горизонтали указываются числа января, по вертикали — температура в градусах Цельсия.

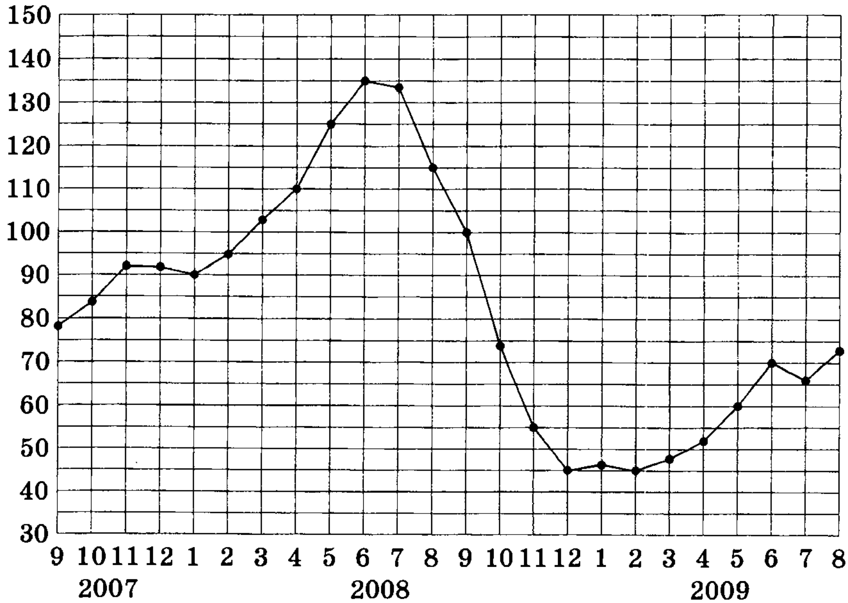


5 Определите по рисунку, какова была наименьшая температура воздуха за указанный период (в градусах Цельсия).

6 Определите по рисунку, какова была наибольшая температура воздуха 22 января (в градусах Цельсия).

7 Найдите разность между наибольшей и наименьшей температурой за указанный период (в градусах Цельсия).

На рисунке жирными точками показана среднемесячная цена нефти с сентября 2007 по август 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.



8 Определите по рисунку, какой была среднемесячная цена нефти в мае 2009 года (в долларах за баррель).

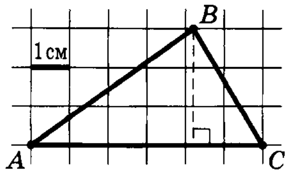
9 Определите по рисунку, во сколько раз наибольшая среднемесячная цена нефти за указанный период превосходила ее наименьшую среднемесячную цену.

10 Определите по рисунку наименьшую среднемесячную цену нефти в период с ноября 2007 по сентябрь 2008 года (в долларах за баррель).

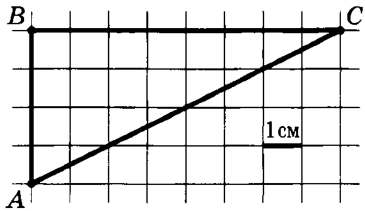
Задача B3

Подготовительные задания

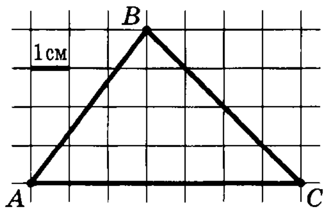
1 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник ABC (см. рис.). Найдите длину высоты h, проведенной из вершины B, в сантиметрах.



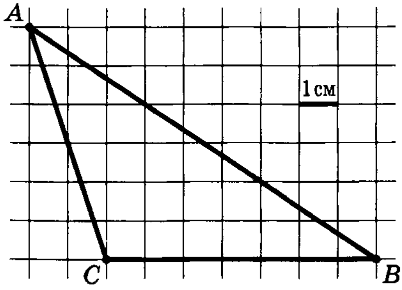
2 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



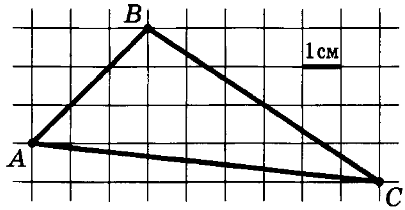
3 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



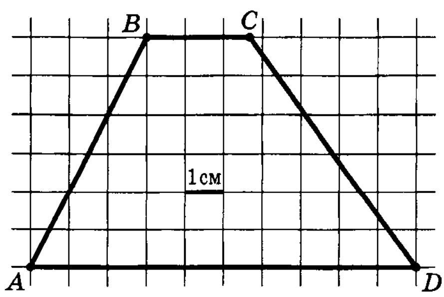
4 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



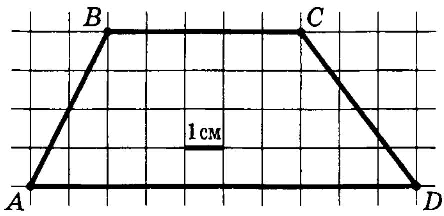
5 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображен треугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



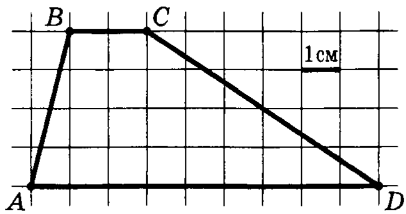
6 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рис.). Найдите ее высоту в сантиметрах.



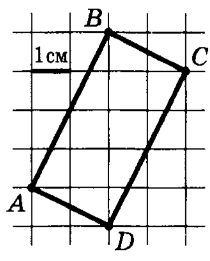
7 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рис.). Найдите длину ее средней линии в сантиметрах.



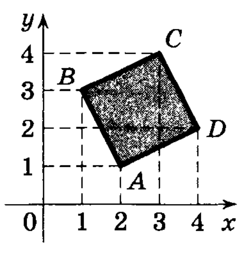
8 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рис.). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



9 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображен прямоугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

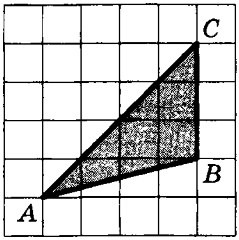


10 Найдите площадь квадрата, вершины которого имеют координаты (2; 1), (1; 3), (3; 4), (4; 2).

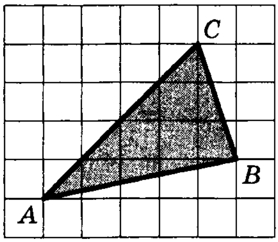


Зачетные задания

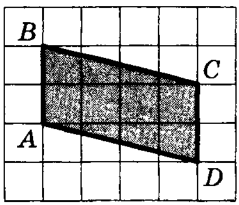
1 Найдите площадь треугольника ABC, считая стороны квадратных клеток равными 1.



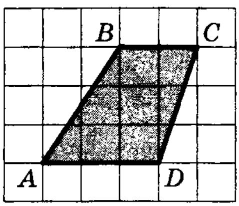
2 Найдите площадь треугольника ABC, считая стороны квадратных клеток равными 1.



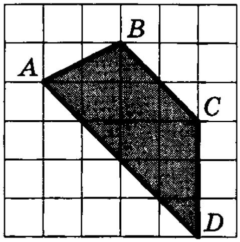
3 Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



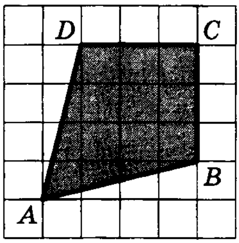
4 Найдите площадь трапеции $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



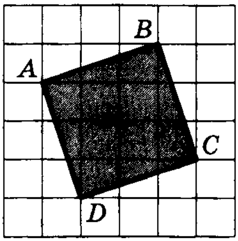
5 Найдите площадь трапеции $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



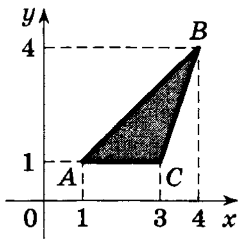
6 Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



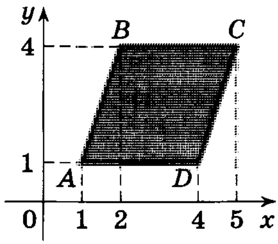
7 Найдите площадь квадрата $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



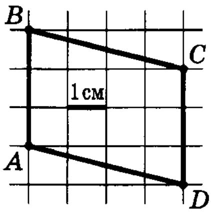
8 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 1), (4; 4), (3; 1).



9 Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты (1; 1), (2; 4), (5; 4), (4; 1).



10 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен параллелограмм (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



Задача B4

Подготовительные задания

1 Сколько рублей будет стоить покупка 45 метров ткани, если один метр ткани стоит 23 рубля?

2 Веревку можно покупать либо по метру, стоимостью 27 рублей за метр, либо бухтами по 50 метров, стоимостью 1200 рублей за бухту. Сколько рублей придется заплатить за самый дешевый вариант покупки 38 метров веревки?

3 Из пункта А в пункт Б автомобиль может ехать либо 30 км по проселочной дороге, либо 45 км по шоссе. За какое минимальное время можно добраться на автомобиле из пункта А в пункт Б, если средняя скорость движения по проселочной дороге — 45 км/ч, а средняя скорость движения по шоссе — 60 км/ч? Ответ дайте в минутах.

4 Автомобильный журнал определяет рейтинги автомобилей на основе показателей безопасности S, комфорта C, функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трех моделей автомобилей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей автомобилей.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3	5	2	5	2
Б	4	2	4	1	5
В	5	3	4	5	2

5 У продуктового магазина есть два поставщика макаронных изделий. Какова наименьшая стоимость (в рублях) покупки 45 коробок макаронных изделий с доставкой?

Поставщик	Цена макаронных изделий (руб. за 1 коробку)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	1510	2700	При заказе на сумму больше 50 000 руб. доставка бесплатно
Б	1500	2900	При заказе на сумму больше 70 000 руб. доставка бесплатно

6 От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в минутах.

	1	2	3
Автобусом	От дома до автобусной станции — 20 мин.	Автобус в пути: 2 ч 10 мин.	От остановки автобуса до дачи пешком 10 мин.
Электричкой	От дома до станции железной дороги — 15 мин.	Электричка в пути: 1 ч 20 мин.	От станции до дачи пешком 55 мин.
Маршрутным такси	От дома до остановки маршрутного такси — 20 мин.	Маршрутное такси в пути: 1 ч 40 мин.	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 35 мин.

7 Клиент хочет арендовать автомобиль на двое суток для поездки протяженностью 2100 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешевый вариант? Цена дизельного топлива — 19 рублей за литр, бензина — 22 рубля за литр, газа — 14 рублей за литр.

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	7	3700
Б	Бензин	10	3200
В	Газ	14	3200

8 Для транспортировки 42 тонн груза на 1100 км можно воспользоваться услугами одной из трех фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	3200	3,5
Б	4100	5
В	9500	12

9 В таблице даны тарифы на услуги трех фирм такси. Предполагается поездка длительностью 1 час. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить меньше всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость 1 минуты поездки сверх продолжительности минимальной поездки
«Пеликан»	350 руб.	Нет	13 руб.
«Фламинго»	Бесплатно	20 мин, 400 руб.	19 руб.
«Цапля»	200 руб.	15 мин, 225 руб.	15 руб.

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

10 Художественная студия приобретает 300 кг скульптурного гипса у одного из трех поставщиков. Какова наименьшая стоимость (в рублях) покупки гипса с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена 1 кг гипса (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные предложения и скидки
А	120	3000	
Б	110	2700	При заказе на сумму больше 35 000 руб. доставка бесплатно
В	125	2400	При заказе на сумму больше 30 000 руб. доставка бесплатно

Зачетные задания

1 Строительной фирме нужно приобрести 40 кубометров строительного бруса у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)?

Поставщик	Цена бруса (руб. за 1 $м^3$)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные предложения и скидки
А	3600	10 700	
Б	4100	8700	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	3700	8700	При заказе на сумму больше 200 000 руб. доставка бесплатно

2 Для перевозки 4 тонн груза на 350 км можно воспользоваться услугами одной из трех транспортных компаний. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждой компании указаны в таблице. Сколько рублей будет стоить наиболее дешевый вариант перевозки груза?

Компания-перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 10 км)	Грузоподъемность автомобиля (тонн)
А	90	1,8
Б	130	2,6
В	140	2,8

3 Интернет-провайдер предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	2,5 руб. за 1 Мб
План «700»	600 руб. за 700 Мб трафика в месяц	2 руб. за 1 Мб сверх 700 Мб
План «1000»	830 руб. за 1000 Мб трафика в месяц	1,5 руб. за 1 Мб сверх 1000 Мб

Пользователь предполагает, что его трафик составит 810 Мб в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 810 Мб?

4 Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за 1 минуту разговора
Повременный	Нет	0,35 руб.
Комбинированный	140 руб. за 350 минут в месяц	0,3 руб. за 1 минуту сверх 350 минут в месяц
Безлимитный	200 руб.	0 руб.

Абонент выбрал наиболее дешевый тарифный план исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составит 700 минут в месяц. Какую сумму он должен будет заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно будет равна 700 минутам? Ответ дайте в рублях.

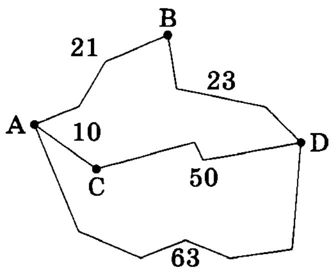
5 Семья из трех человек едет из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 740 рублей. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 19 рублей за литр. Какая поездка (поездом или машиной) обойдется дешевле? В ответ напишите, сколько рублей она будет стоить.

6 Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или фундамент из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 4 кубометра пеноблоков и 3 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 4 тонны щебня и 40 мешков цемента. Кубометр пеноблоков стоит 2250 рублей, щебень стоит 560 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 180 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешевый вариант?

7 Пассажир приехал в Санкт-Петербург на Московский вокзал. Чтобы доехать до Петродворца, он может воспользоваться одним из трех способов: маршрутным такси от станции метро «Проспект Ветеранов», электричкой от Балтийского вокзала или теплоходом от Дворцовой набережной. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

Маршрутное такси	Электричка	Теплоход
От вокзала до остановки маршрутного такси 30 мин	От Московского до Балтийского вокзала 20 мин	От вокзала до пристани 30 мин
Маршрутное такси в пути 40 мин	Электричка в пути 40 мин	Теплоход в пути 26 мин
От остановки такси до Петродворца 5 мин	От станции ж/д до Петродворца 20 мин	От пристани до Петродворца 10 мин

8 Из пункта A в пункт D ведут три дороги. Первая дорога ведет через пункт B, и этой дорогой едет мотоциклист со средней скоростью 44 км/ч. Вторая дорога ведет через пункт C, и по этой дороге едет грузовик со средней скоростью 40 км/ч. Третья дорога без промежуточных пунктов, по ней едет автобус со средней скоростью 36 км/ч. На рисунке показана схема дорог и даны расстояния в километрах.



Все транспортные средства вышли из пункта A одновременно. Какое из них доберется до пункта D раньше других? В ответе запишите, сколько часов это транспортное средство будет в пути.

9 Для транспортировки 45 тонн груза на 1300 км можно использовать одного из трех перевозчиков. Тарифы перевозчиков приведены в таблице. Какова наименьшая стоимость (в рублях) транспортировки?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	3700	3,5
Б	4300	5
В	9800	12

10 В таблице указаны средние цены на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным некоторого исследования).

Наименование продукта	Средняя цена (в рублях)		
	Петрозаводск	Ставрополь	Омск
Пшеничный хлеб (батон)	18	11	16
Молоко (1 литр)	28	20	24
Картофель (1 кг)	9	13	16
Сыр (1 кг)	240	215	260
Мясо (говядина, 1 кг)	275	230	295
Подсолнечное масло (1 литр)	38	44	50

Определите, в каком из этих трех городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов:

— 2 кг картофеля;

— 1 кг сыра;

— 1 л подсолнечного масла.

В ответ запишите полученную сумму в рублях.

Задача B5

Подготовительные задания

1 Решите уравнение $26-13x=0$.

2 Решите уравнение $\sqrt{x}=7$.

3 Решите уравнение $\log_5 x=2$.

4 Решите уравнение $\sqrt{x}=0{,}3$.

5 Решите уравнение $\log_2 x=-3$.

6 Решите уравнение $2^x=16$.

7 Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{32}$.

8 Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x=16$.

9 Решите уравнение $5^{-x}=125$.

10 Решите уравнение $\sqrt{x-3}=6$.

Зачетные задания

1 Решите уравнение $(2x+7)^2=(2x-5)^2$.

2 Решите уравнение $\frac{5x-4}{6}=\frac{4x-5}{5}$.

3 Решите уравнение $(x-8)^2=-32x$.

4 Решите уравнение $\frac{1}{11}x^2=9\frac{1}{11}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5 Решите уравнение $\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x}$.

6 Решите уравнение $\sqrt{20-3x}=\sqrt{5}$.

7 Решите уравнение $\sqrt{11+5x}=x+3$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

8 Решите уравнение $\sin\frac{\pi x}{12}=-0{,}5$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень уравнения.

9 Найдите корень уравнения $2^x\cdot 3^x=36^{x-4}$.

10 Найдите корень уравнения $2\log_4(3x-5)=\log_2(15-x)$.

Задача B6

Подготовительные задания

1 Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите AC, если $BK:KA=6:5$, $KM=18$.

2 В прямоугольном треугольнике, один из острых углов которого равен $60°$, гипотенуза равна 19. Найдите меньший катет этого треугольника.

3 В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали пересекаются в точке O. Найдите AO, если $CO=27$, $DC=30$, $AB=20$.

4 Один из углов параллелограмма на $56°$ меньше другого угла. Найдите величину тупого угла параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

5 Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC. Найдите BC, если $AB=13$.

6 Концы отрезка AB лежат по одну сторону от прямой l. Расстояние от точки A до прямой l равно 23, а расстояние от точки B до прямой l равно 45. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l.

7 Один из углов выпуклого двенадцатиугольника равен $13°$. Найдите сумму остальных его углов. Ответ дайте в градусах.

8 Точки A и B делят окружность на две дуги, длины которых относятся как $7:8$. Найдите величину центрального угла, опирающегося на меньшую из дуг. Ответ дайте в градусах.

9 Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 12.

10 Около параллелограмма, одна из диагоналей которого равна 11, описана окружность. Найдите вторую диагональ параллелограмма.

Зачетные задания

1 Даны два смежных угла, один из которых равен $34°$. Найдите угол между биссектрисой второго из данных углов и их общей стороной. Ответ дайте в градусах.

2 Найдите угол B треугольника ABC, если $AB = BC$, а внешний угол при вершине C равен $123°$. Ответ дайте в градусах.

3 Одно из оснований трапеции в 6 раз меньше ее средней линии. Во сколько раз оно меньше другого основания трапеции?

4 Диагональ прямоугольника образует с одной из его сторон угол $11°$. Найдите угол между прямыми, содержащими диагонали прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

5 Угол между двумя высотами ромба, проведенными из вершины тупого угла, равен $67°$. Найдите острый угол ромба. Ответ дайте в градусах.

6 Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной A в точках B и C. Найдите угол BAC, если угол BOC равен $127°$. Ответ дайте в градусах.

7 Отрезки AB и BC являются соответственно диаметром и хордой окружности с центром O. Найдите угол AOC, если угол ABC равен $67°$. Ответ дайте в градусах.

8 В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Найдите угол ACD, если углы BAD и ADB равны соответственно $56°$ и $78°$. Ответ дайте в градусах.

9 В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 7.

10 Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, если один из углов треугольника равен $60°$, а расстояние от центра окружности до вершины этого угла равно 10.

Задача B7

Подготовительные задания

1 Вычислите $\log_a a^5$.

2 Чему равно $\log_3 a + \log_3 b$?

1) $\log_3(a+b)$ 2) $\log_3(a \cdot b)$ 3) $\log_3 a^b$ 4) $\log_3(a \cdot 3^b)$

3 Вычислите $\log_2 16$.

4 Вычислите $\log_3 \frac{1}{27}$.

5 Вычислите $\log_{\frac{1}{5}} 25$.

6 Вычислите $\log_{10} 0{,}0001$.

7 Вычислите $\log_{\frac{1}{3}} 9$.

8 Вычислите $\log_{0,1} 0{,}001$.

9 Вычислите $\log_5 70 - \log_5 14$.

10 Вычислите $\log_8 288 - \log_8 4{,}5$.

Зачетные задания

1 Найдите значение выражения $4^{41} : 12^{40} \cdot 3^{42}$.

2 Найдите значение выражения $(5d-1)(5d+1)-(5d+1)^2$ при $d=110$.

3 Найдите значение выражения $\left(5\frac{1}{3} - 3{,}5\right) : \frac{11}{12}$.

4 Найдите значение выражения $\frac{a^{-23} \cdot a^{-38}}{a^{-60}}$ при $a = 0{,}01$.

5 Найдите значение выражения $\frac{b^2 \cdot \sqrt[6]{b}}{\sqrt[10]{b} \cdot \sqrt[15]{b}}$ при $b = 6$.

6 Найдите значение выражения $\frac{44 \sin 44° \cdot \cos 44°}{\sin 88°}$.

7 Найдите $34 \sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

8 Найдите значение выражения $\left(9^{\frac{\sqrt{5}}{3}}\right)^{\frac{3}{2\sqrt{5}}}$.

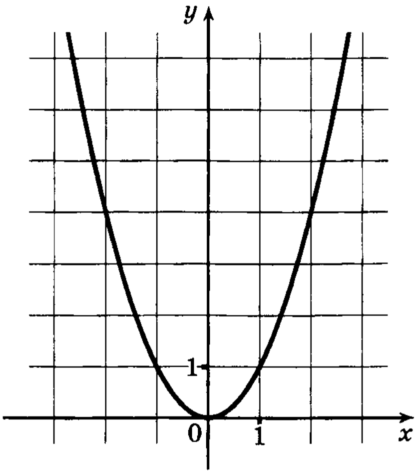
9 Вычислите значение выражения $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt{7}$.

10 Найдите $\log_a \frac{a^3}{b^7}$, если $\log_b a = 7$.

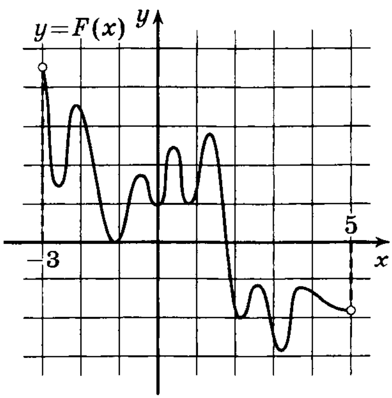
Задача B8

Подготовительные задания

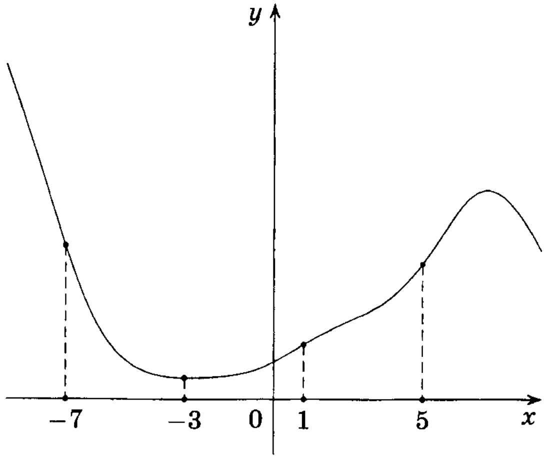
1 На рисунке изображен график функции $y = x^2$. Нарисуйте касательную к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = 2$. (Используйте уравнение касательной.)



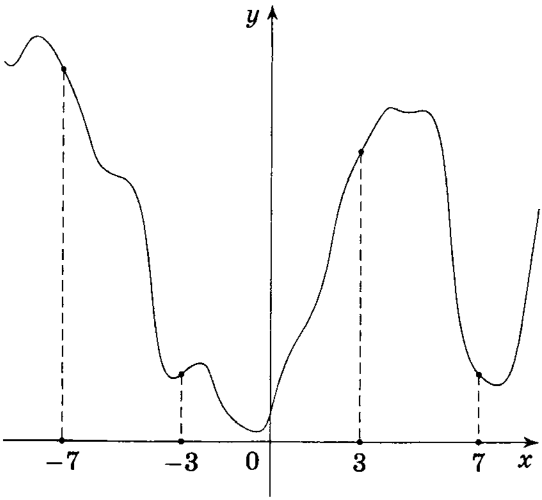
2 На рисунке изображен график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 5)$. Пользуясь рисунком, определите число корней уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.



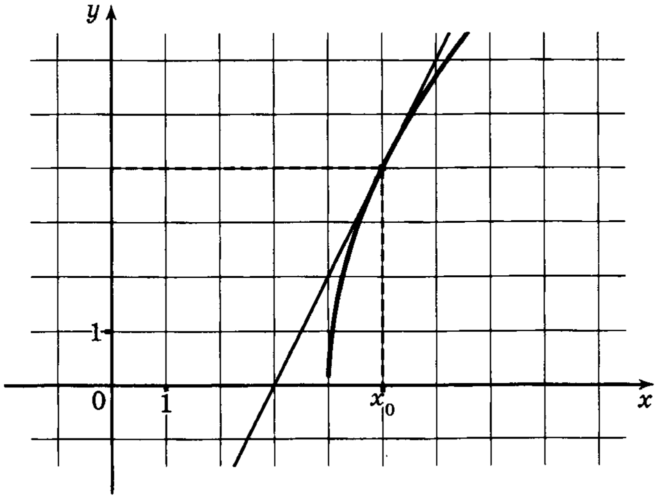
3 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -7, -3, 1, 5. В какой из этих точек значение производной этой функции наибольшее? В ответе укажите эту точку.



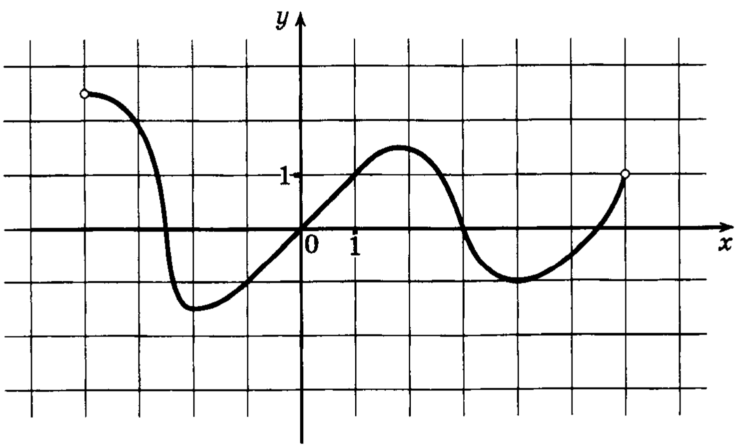
4 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -7, -3, 3, 7. В какой из этих точек значение производной этой функции наименьшее? В ответе укажите эту точку.



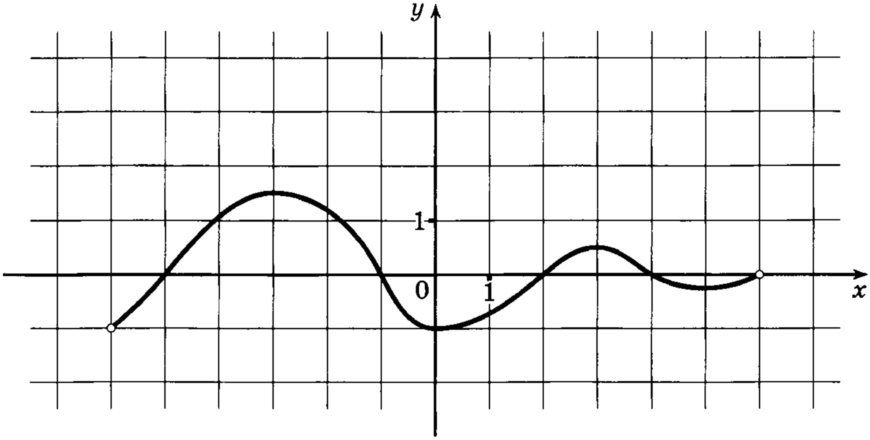
5 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



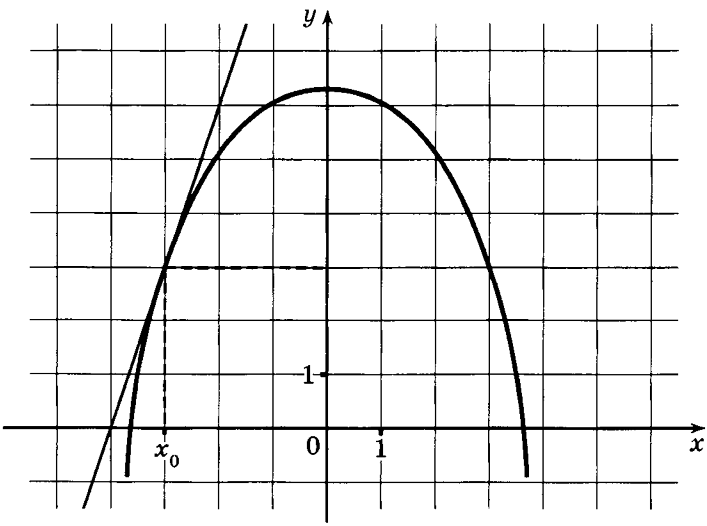
6 Функция $f(x)$ определена на интервале $(-4; 6)$. На рисунке изображен ее график. В скольких целых точках ее производная положительна?



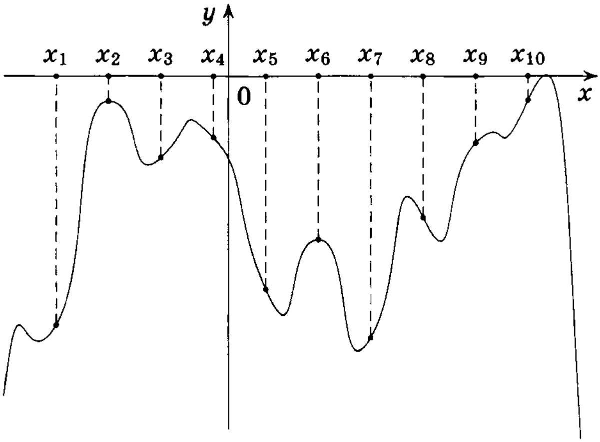
7 Функция $f(x)$ определена на отрезке $[-6; 6]$. На рисунке изображен график ее производной $y = f'(x)$. Найдите наибольшую длину промежутка возрастания функции $f(x)$.



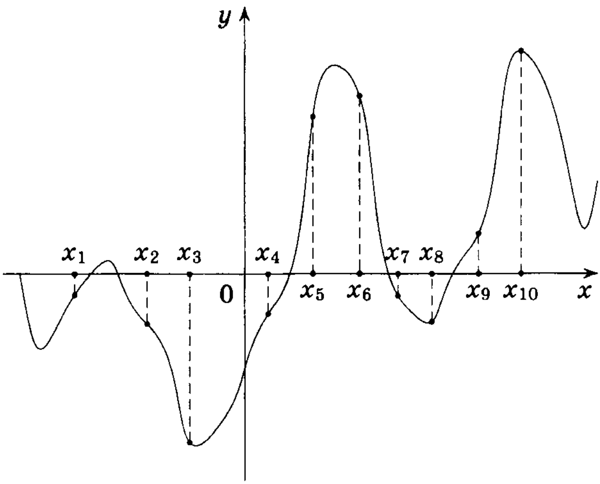
8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



9 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

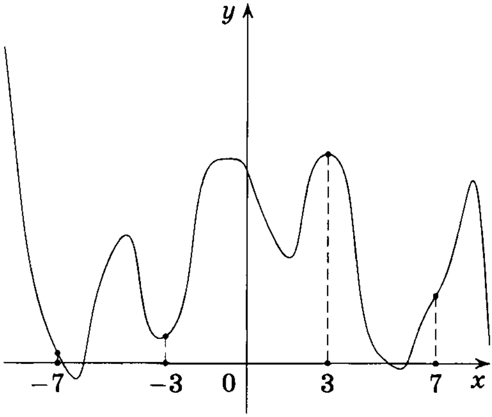


10 На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам убывания функции $f(x)$?

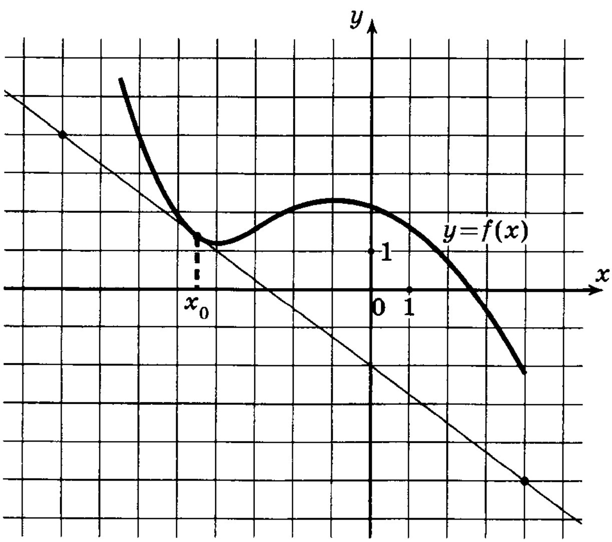


Зачетные задания

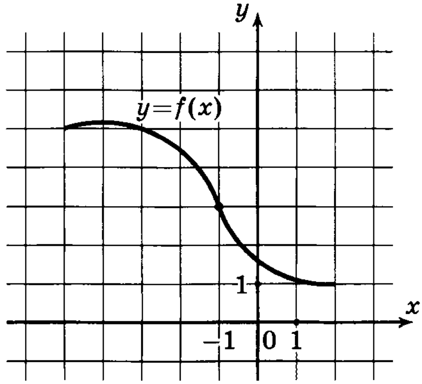
1 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -7, -3, 3, 7. В какой из этих точек значение производной этой функции наибольшее? В ответе укажите эту точку.



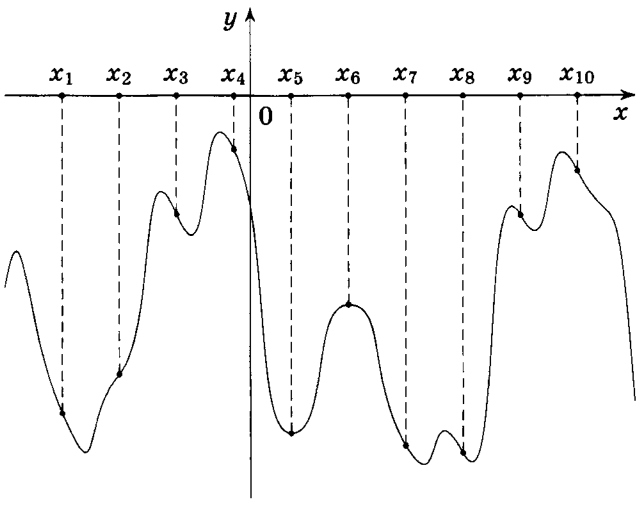
2 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



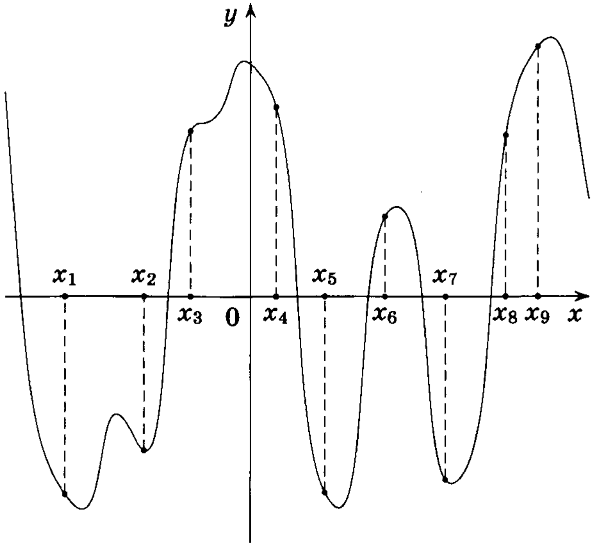
3 На рисунке изображен график функции $f(x)$. Касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой -1, проходит через начало координат. Найдите $f'(-1)$.



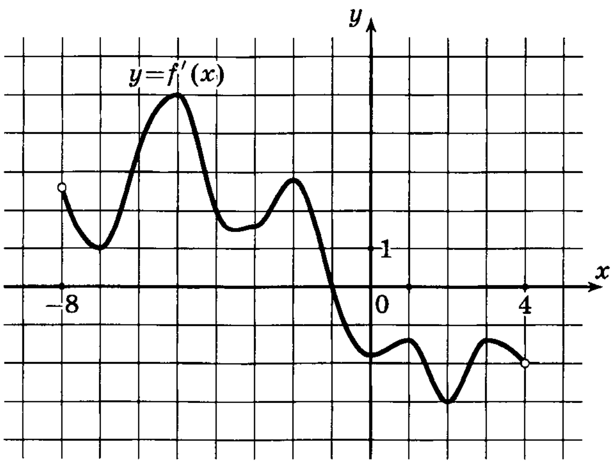
4 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



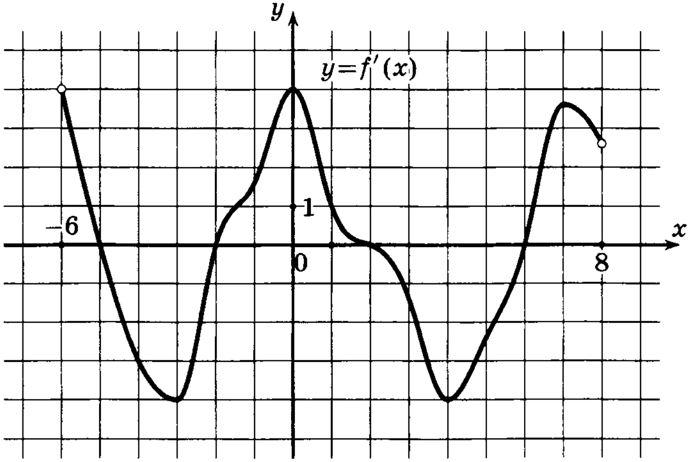
5 На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам возрастания функции $f(x)$?



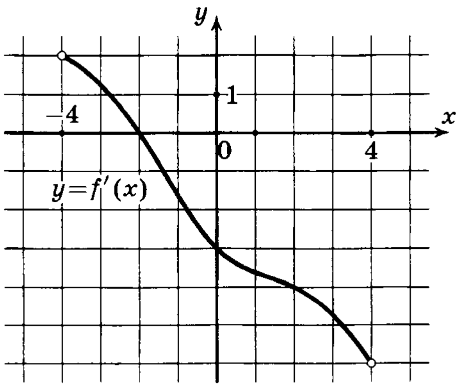
6 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-7; -2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



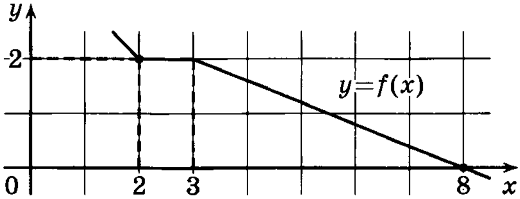
7 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_i параллельна прямой $y = 2x - 5$ или совпадает с ней.



8 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 4)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -3x - 11$ или совпадает с ней.



9 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



10 Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = t^3 - 9t^2 + 2t + 30$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени ее скорость была равна 50 м/с?

Задача B9

Подготовительные задания

1 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 13, а одна из высот основания равна 7,5. Найдите высоту пирамиды.

2 Одна из биссектрис основания правильной треугольной пирамиды равна 15, а высота пирамиды равна 30. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью ее основания.

3 Тангенс угла между плоскостью боковой грани правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания равен 5. Найдите тангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

4 Высота правильной треугольной пирамиды равна стороне основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

5 Высота основания правильной треугольной пирамиды в полтора раза больше высоты пирамиды. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

6 Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно диагонали основания пирамиды. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

7 Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны $8\sqrt{2}$. Найдите высоту пирамиды.

8 Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна $2\sqrt{2}$, а высота пирамиды равна $\sqrt{7}$. Найдите боковое ребро пирамиды.

9 Высота боковой грани правильной четырехугольной пирамиды, проведенная к стороне основания, равна 10, а высота пирамиды равна 8. Найдите сторону основания пирамиды.

10 Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна высоте боковой грани, проведенной из вершины пирамиды к стороне основания. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Зачетные задания

1 Высота боковой грани правильной треугольной пирамиды, проведенная к ребру основания, равна 10, а высота основания пирамиды равна 18. Найдите высоту пирамиды.

2 Длина высоты правильной треугольной пирамиды на 20% меньше длины высоты боковой грани, проведенной к ребру основания. Найдите косинус угла между боковой гранью и основанием пирамиды.

3 Боковая грань правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, синус которого равен $0{,}2\sqrt{3}$, а сторона основания пирамиды равна 10. Найдите расстояние от вершины основания пирамиды до плоскости боковой грани.

4 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, синус которого равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$, а сторона основания пирамиды равна 16. Найдите расстояние между скрещивающимися ребрами пирамиды.

5 Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до плоскости боковой грани, не содержащей эту вершину, равно 4, а синус угла между боковой гранью и основанием пирамиды равен 0,4. Найдите высоту основания пирамиды.

6 В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ с вершиной P все ребра равны. Найдите угол между прямыми PA и CD. Ответ дайте в градусах. Единицу измерения в ответе не пишите.

7 Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ равна $6\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины D до плоскости PAC.

8 Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ с вершиной P. Отрезок BM является медианой треугольника BPD. Найдите угол между прямыми BM и AC. Ответ дайте в градусах.

9 Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ с вершиной P и стороной основания, равной $5\sqrt{2}$. Найдите расстояние от середины ребра PA до плоскости BPD.

10 Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна высоте боковой грани. Найдите угол между плоскостями несмежных боковых граней пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Задача B10

Подготовительные задания

1 Найдите вероятность того, что при броске монеты выпадет орел.

2 Найдите вероятность того, что при броске двух кубиков на первом выпадет меньше 4 очков, а на втором — ровно 6 очков.

3 В среднем на 50 карманных фонариков приходится семь неисправных. Найдите вероятность покупки неисправного фонарика.

4 В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 13 из них встречается вопрос по производной. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не попадется вопрос по производной.

5 На чемпионате по прыжкам с шестом выступают 30 спортсменов, среди них 6 прыгунов из Швеции и 7 прыгунов из Мексики. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что тринадцатым будет выступать прыгун из Швеции.

6 Ваня называет произвольное число от 1 до 10. Найдите вероятность того, что он назовет 3 или 7.

7 На семинар приехали трое ученых из Чехии и семь из Словакии. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что пятым окажется доклад ученого из Словакии.

8 Научная конференция проводится в 3 дня. Всего запланировано 40 докладов: в первый день — 30 докладов, остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Какова вероятность того, что доклад профессора В. окажется запланированным на последний день конференции?

9 Коля и Толя играют в кости. Они бросают кубик по одному разу, выигрывает тот, у кого выпадет больше очков. Первым бросил Коля, у него выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что Толя не выиграет.

10 В классе 12 мальчиков и 13 девочек. 1 сентября случайным образом определяют двух дежурных на 2 сентября,

которые должны приготовить класс к занятиям. Найдите вероятность того, что будут дежурить мальчик и девочка.

Зачетные задания

1 Найдите вероятность того, что при броске кубика выпадет четное число очков.

2 Найдите вероятность того, что при броске двух монет выпадет ровно одна решка.

3 Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шахматистов, среди которых 5 участников из России, в том числе Кирилл Черноусов. Найдите вероятность того, что в первом туре Кирилл Черноусов будет играть с каким-либо шахматистом из России.

4 В среднем из 900 шариковых ручек 45 не пишут. Найдите вероятность того, что наугад взятая ручка будет писать.

5 В фирме такси в данный момент свободно 12 машин: 1 черная, 3 желтых и 8 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность, что эта машина — желтого цвета.

6 В группе по английскому языку учатся 10 школьников: Андрей, Катя, Леша, Маша, Миша, Оля, Петя, Сережа, Руслан и Толя. В начале урока учительница произвольным образом выбирает ученика, чтобы он отвечал домашнее задание у доски. Найдите вероятность того, что к доске пойдет девочка.

7 На соревнования по метанию ядра приехали 6 спортсменов из Италии, 3 из Германии и 3 из России. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что третьим будет выступать спортсмен из Германии.

8 Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день запланировано 30 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Какова

вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

9 Катя и Настя бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпало больше очков. Ничья, если очков поровну. Первой бросила Катя, у нее выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что Настя проиграет.

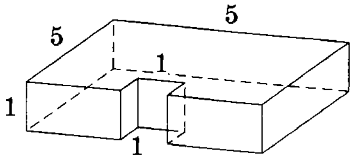
10 На турнир по настольному теннису прибыло 26 участников, в том числе близнецы Тоша и Гоша. Для проведения жеребьевки первого тура участников случайным образом разбивают на две группы по 13 человек. Какова вероятность того, что Тоша и Гоша окажутся в одной группе?

Задача B11

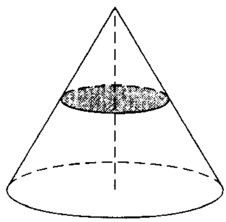
Подготовительные задания

1 Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24. Одно из его ребер равно 3. Найдите площадь грани параллелепипеда, перпендикулярной этому ребру.

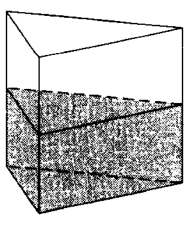
2 Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



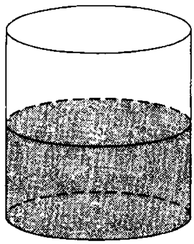
3 Объем конуса равен 120. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.



4 В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 18 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.



5 В цилиндрический сосуд налили 1800 $см^3$ воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 2 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в $см^3$.



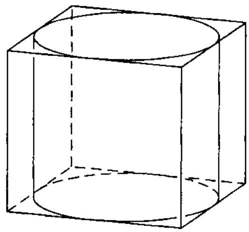
6 Найдите объем конуса, если

а) его высота равна 1, радиус основания равен 1;

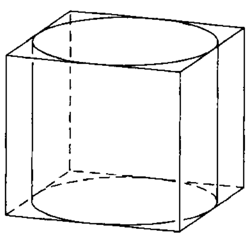
б) его высота равна 2, радиус основания равен 1;

в) его высота равна 1, радиус основания равен 2.

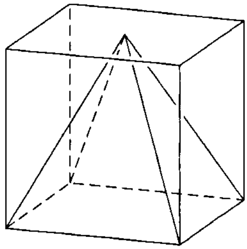
7 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Высота параллелепипеда равна 3. Найдите длину образующей цилиндра.



8 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания цилиндра равен 5. Найдите площадь основания параллелепипеда.



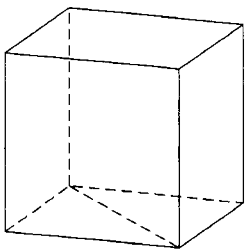
9 Основание правильной четырехугольной пирамиды совпадает с одной из граней куба, а вершина этой пирамиды лежит в центре противоположной грани. Найдите объем этой пирамиды, если объем куба равен 24.



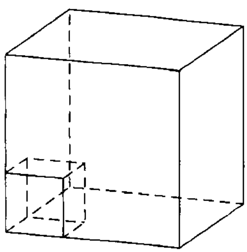
10 Объем цилиндра равен 25 см^3. Радиус основания цилиндра увеличили в 3 раза, а образующую уменьшили в 3 раза. Найдите объем получившегося цилиндра. Ответ дайте в см^3.

Зачетные задания

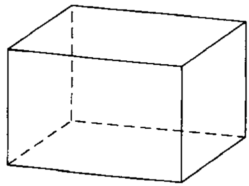
1 Диагональ грани куба равна $\sqrt{8}$. Найдите его объем.



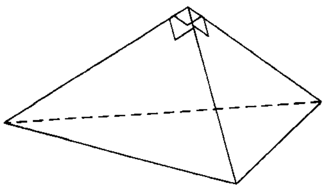
2 Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в три раза?



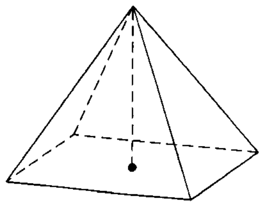
3 Объем прямоугольного параллелепипеда равен 60. Площадь одной его грани равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное этой грани.



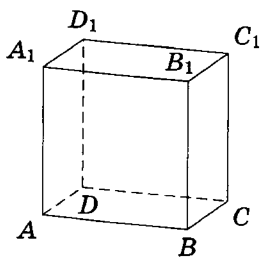
4 Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.



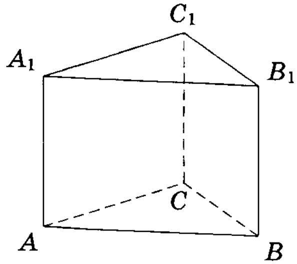
5 В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12, объем равен 200. Найдите боковое ребро пирамиды.



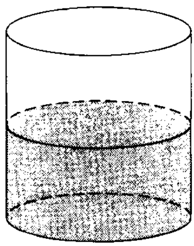
6 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A_1, B, C, C_1, B_1 прямоугольного параллелепипеда $A\ldots D_1$, у которого $AB=4$, $AD=3$, $AA_1=4$.



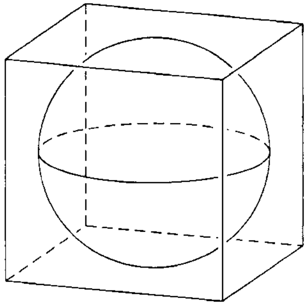
7 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.



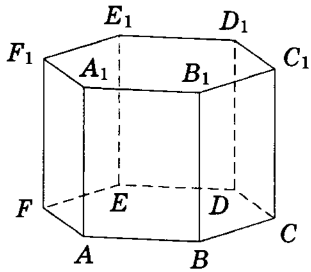
8 В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 дм^3 воды, опустили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объем детали? Ответ дайте в дм^3.



9 Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.



10 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 2.



Задача B12

Подготовительные задания

1 В социологическом опросе участвовало 540 случайно выбранных человек. Среди них были 293 женщины и 247 мужчин. Из всех опрошенных 83 человека оказались не старше 20 лет, 69 — в возрасте от 20 до 30 лет, 95 — в возрасте от 30 до 40 лет, 72 человека в возрасте от 40 до 50 лет, остальные опрошенные старше 50 лет. Сколько человек участвовало в социологическом опросе?

2 Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение в вольтах, R — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 8 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

3 Начальная скорость V_0 движущегося с постоянным ускорением тела равна 15 м/с. Ускорение тела a равно 13 м/с^2. С какой скоростью (в м/с) будет двигаться тело в момент времени $t = 9$ с, если скорость движения тела при равноускоренном движении вычисляется по формуле $V = V_0 + a \cdot t$?

4 Расстояние от линзы до предмета d_1 и расстояние от линзы до изображения d_2 связаны соотношением $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$, где f — главное фокусное расстояние линзы. Найдите f, если известно, что при расстоянии от линзы до предмета, равном 70 см, расстояние от линзы до изображения этого предмета равно 30 см. Ответ дайте в сантиметрах.

5 Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч^2, вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$. Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,5 километра, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

6 Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя КПД этого двигателя будет не меньше 25%, если температура холодильника $T_2 = 285$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

7 После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 1,2 с. После дождя измеряемое время уменьшилось на 0,2 с. На сколько метров поднялся уровень воды?

8 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 54$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 8$ км/ч^2. Расстояние S от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется по формуле $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует связь на расстоянии не далее чем в 58 км от города. Ответ выразите в минутах.

9 Камень подбросили вверх. Его высота над землей (в метрах) вычисляется по формуле $h(t) = 23t - 5t^2$, где t — время в секундах. Сколько секунд камень будет находиться на высоте более 12 метров?

10 Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. К пляжу ведет лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое минимальное количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы расстояние от него до горизонта было больше 12 километров? Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h км над землей, до линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.

Зачетные задания

1 При температуре 0° рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 4,5 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

2 Зависимость объема спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой

$$q = 70 - 5p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p, при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

3 Если достаточно быстро вращать ведерко с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведерка в м/с, L — длина веревки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с^2). С какой минимальной скоростью надо вращать ведерко, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 0,625 м? Ответ выразите в м/с.

4 Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной на-

чальной скоростью. Траектория полета камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b = \frac{7}{10}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

5 Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону

$$h(t) = 1{,}8 + 12t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее четырех метров?

6 Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{64} \cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $2{,}28 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

7 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 35$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 35 до 60 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 240 до 280 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

8 Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 190$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза v (м/с) по закону

$$f(v)=\frac{f_0}{1-\frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c=300$ м/с. Ответ выразите в м/с.

9 Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч^2), вычисляется по формуле

$$v=\sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,8 километра, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t)=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в часах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0=80$ мкг изотопа натрия-24, период полураспада которого $T=15$ ч. В течение скольких часов масса изотопа натрия-24 будет не меньше 10 мкг?

Задача B13

Подготовительные задания

1 Труба наполняет бассейн за 6 часов. Сколько литров воды за час пропускает труба, если объем бассейна 900 литров?

2 На изготовление заказа у рабочего уходит 26 часов. Сколько деталей входит в заказ, если за час рабочий делает 30 деталей?

3 С какой средней скоростью нужно ехать гонщику, если он хочет проехать 450 километров за 2,5 часа? Ответ дайте в километрах в час.

4 Первая труба наполняет бассейн за 9 часов. За сколько часов заполнит бассейн вторая труба, если известно, что она пропускает в полтора раза больше воды, чем первая?

5 Первый рабочий делает за час на 5 деталей больше, чем второй. На сколько часов больше затратит второй рабочий на изготовление 800 деталей, если первый рабочий за час делает 25 деталей?

6 Брюки дороже рубашки на 30 %. Какую долю от стоимости брюк составляет стоимость рубашки?

7 Скорость товарного поезда равна 45 км/ч. Выразите скорость поезда в метрах в секунду.

8 Имеется 10 литров 60-процентного раствора соли. Сколько литров воды нужно долить, чтобы получить 40-процентный раствор соли?

9 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 15 км/ч, проходит по течению реки до пункта назначения и после стоянки возвращается в исходный пункт. Найдите расстояние, пройденное теплоходом за весь рейс, если скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 12 часов после отплытия из него. Ответ дайте в километрах.

10 Моторная лодка прошла путь от пункта А до пункта Б и обратно без остановок за 9 часов. Найдите расстояние между пунктами А и Б, если скорость лодки в неподвижной воде равна 18 км/ч, а скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в километрах.

Зачетные задания

1 Расстояние между городами A и B равно 580 км. Из города A в город B со скоростью 80 км/ч выехал автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 60 км/ч второй автомобиль. Через сколько часов после выезда второго автомобиля автомобили встретятся?

2 Товарный поезд каждую минуту проезжает на 500 метров меньше, чем скорый, и на путь в 120 км тратит времени на 2 часа больше, чем скорый. Найдите скорость товарного поезда. Ответ дайте в км/ч.

3 Два мотоцикла стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 20 км. Через сколько минут мотоциклы поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 12 км/ч больше скорости другого?

4 Расстояние между пристанями A и B равно 60 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот прошел 36 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

5 Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 55 км/ч, следующий час — со скоростью 70 км/ч, а затем три часа — со скоростью 90 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

6 Маша и Настя вымоют окно за 12 минут. Настя и Лена вымоют это же окно за 20 минут, а Маша и Лена — за 15 минут. За сколько минут девочки вымоют окно, работая втроем?

7 Две трубы наполняют бассейн за 4 часа. Только одна первая труба наполняет бассейн за 5 часов. За сколько часов наполняет бассейн вторая труба?

8 В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на

4 % дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

9 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10 % никеля, второй — 30 % никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25 % никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

10 Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

Задача B14

Подготовительные задания

1 Найдите производную функции $h(x) = x^4 + 2x - 3$.

2 Найдите производную функции $h(x) = e^{2x} + 3$.

3 Найдите производную функции $h(x) = 5\sin x$.

4 Найдите производную функции $h(x) = 7\ln x$.

5 Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = \dfrac{3x+2}{5}$, если $F(4) = 5$. В ответе укажите значение $F(1)$.

6 Найдите точку максимума функции $h(x) = \sin x$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

7 Найдите точку минимума функции $h(x) = x^2 - 13x + 29$.

8 Найдите наибольшее значение функции $h(x) = 6x - x^2 + 3$.

9 Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3\cos x - \frac{48}{\pi}x + 19$$

на отрезке $\left[-\dfrac{2\pi}{3}; 0\right]$.

10 Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - \ln(x+5)^5$ на отрезке $[-4{,}5; 1]$.

Зачетные задания

1 Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x+3)^2(x+5) - 1$$

на отрезке $[-4; -1]$.

2 Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 + \frac{25 + x^2 - x^3}{x}$$

на отрезке $[1; 10]$.

3 Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x) = x^2 - 2x - 3$ на отрезке $[0; 6]$ равно -9. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

4 Найдите наибольшее значение функции $y = (10 - x)\sqrt{x+2}$ на отрезке $[-1; 7]$.

5 Найдите точку минимума функции

$$y = x\sin x + \cos x - \frac{3}{4}\sin x,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

6 Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2\sin x - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 7$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

7 Один из двух нулей первообразной $F(x)$ для функции $f(x) = 5x - 1$ равен -3. Найдите второй нуль.

8 Найдите наибольшее значение функции $y = (3 - x^2)e^{x-1}$ на отрезке $[0; 2]$.

9 Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 5) - 5x + 5$.

10 Найдите наибольшее значение функции

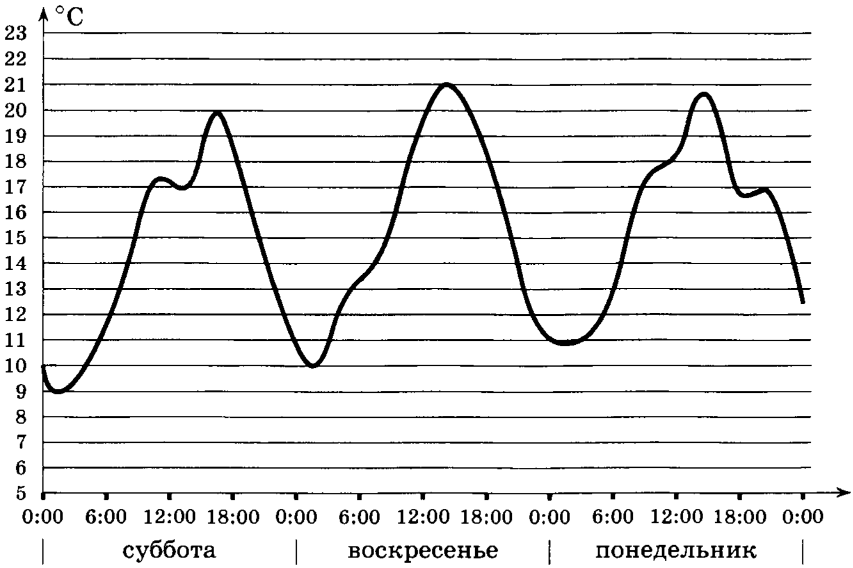
$$y = 7 - \ln x + 5x - 2x^2$$

на отрезке $\left[\frac{1}{2}; \frac{7}{6}\right]$.

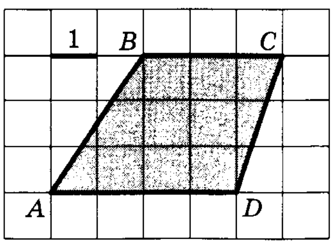
Диагностическая работа №5

B1 Билет на автобус стоит 110 рублей. Ожидается повышение цены на 10%. Какое наибольшее число билетов можно будет купить на 1000 рублей?

B2 На графике показано изменение температуры воздуха в некотором населенном пункте на протяжении трех суток, начиная с 0 часов субботы. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь с субботы на воскресенье. Ответ дайте в градусах Цельсия.



B3 Найдите площадь трапеции $ABCD$.



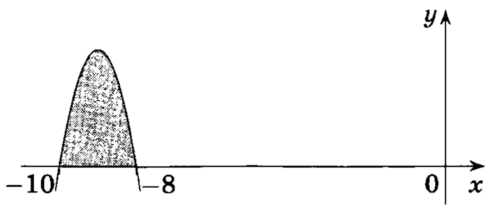
B4 Семья из трех человек едет из Москвы в Бологое. Можно ехать поездом, а можно на своей машине. Билет на поезд стоит 325 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 11 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 350 км, а цена бензина равна 19 рублей за литр. Какова наименьшая стоимость (в рублях) семейной поездки?

B5 Решите уравнение $\log_2 x = 5$.

B6 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках M, K и P соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если $AP = 5$, $BM = 6$, $CK = 7$.

B7 Вычислите $\log_6 144 - \log_6 4$.

B8 На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



B9 Расстояние между скрещивающимися ребрами правильной треугольной пирамиды равно 12, а синус угла между боковым ребром и плоскостью основания равен 0,3. Найдите высоту основания пирамиды.

B10 На соревнования по метанию диска приехали 6 спортсменов из Швейцарии, 3 из Болгарии и 6 из Австрии. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что третьим будет выступать спортсмен из Болгарии.

B11 Площадь боковой поверхности конуса равна 10 см^2. Радиус основания конуса увеличили в 6 раз, а образующую уменьшили в 4 раза. Найдите площадь боковой поверхности получившегося конуса. Ответ дайте в см^2.

B12 Температуру нагревательного элемента (в градусах Кельвина) в зависимости от времени (в минутах) можно вычислять по формуле $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 760$ K, $a = 34$ K/мин, $b = -0{,}2$ K/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1600 K прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время (в минутах) после начала работы нужно отключать прибор.

B13 Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 90 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

B14 Найдите наименьшее значение функции

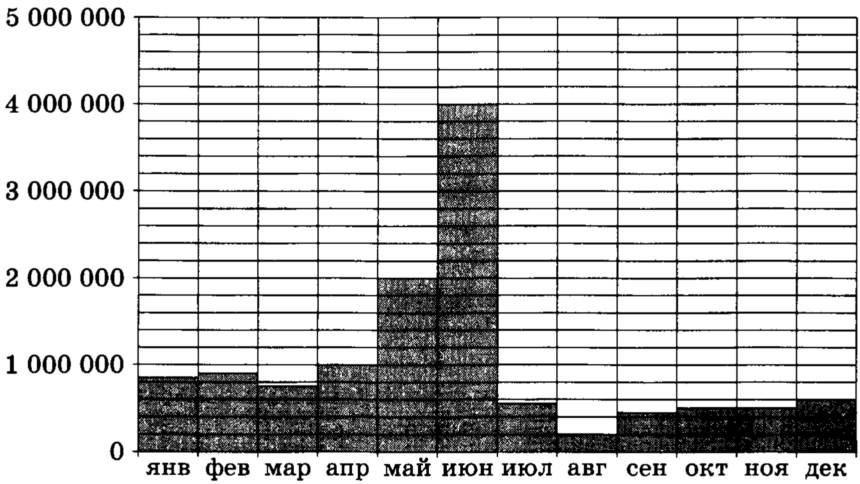
$$y = 13 - 7\sin x - 9x$$

на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

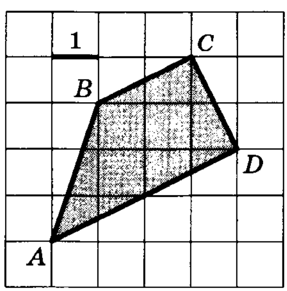
Диагностическая работа №6

B1 Больному прописан курс лекарства, которое нужно принимать по 250 мг два раза в день в течение 7 дней. В одной упаковке лекарства содержится 10 таблеток по 125 мг. Какое наименьшее количество упаковок понадобится на весь курс лечения?

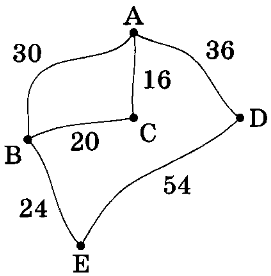
B2 На диаграмме показано число запросов со словом ЕГЭ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по декабрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, во сколько раз максимальное месячное число запросов превышало минимальное месячное число запросов со словом ЕГЭ в 2009 году.



B3 Найдите площадь трапеции $ABCD$.



B4 На рисунке показана схема дорог и расстояние в километрах между населенными пунктами A, B, C, D и E вдоль этих дорог. Мопед, грузовик и автобус одновременно выезжают из города A и добираются в город E разными путями. Мопед едет через поселки C и B, грузовик — только через B, а автобус едет через город D. Мопед был в пути 1 час 20 минут, грузовик — 1 час, а автобус — 1 час 40 минут. Найдите среднюю скорость того транспортного средства, у которого эта скорость наибольшая. Ответ дайте в км/ч.

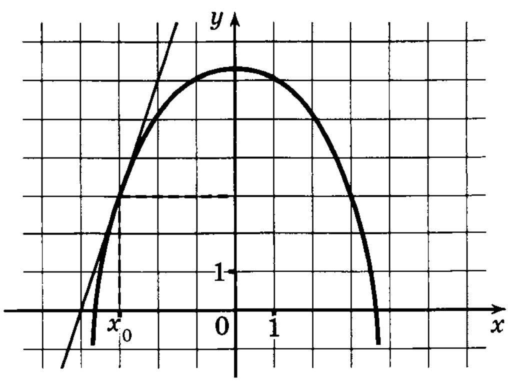


B5 Решите уравнение $5^{x+5} = 0{,}04$.

B6 Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Найдите MA, если $MB = 12$, $MC = 16$, $MD = 6$.

B7 Найдите значение выражения $\frac{28}{2^{\log_2 7}}$.

B8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



B9 Тангенс угла между боковым ребром правильной четырехугольной пирамиды и плоскостью ее основания равен $\sqrt{2}$. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.

B10 Найдите вероятность того, что при бросании двух кубиков на каждом выпадет менее 4 очков.

B11 Объем цилиндра равен 20 см^3. Радиус основания цилиндра увеличили в 3 раза, а образующую уменьшили в 4 раза. Найдите объем получившегося цилиндра. Ответ дайте в см^3.

B12 Время полета мяча, брошенного под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли, можно посчитать по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ (с). При каком наименьшем значении угла (в градусах) время в полете будет не меньше 2,5 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с? Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.

B13 Первую половину трассы автомобиль проехал со скоростью 90 км/ч, а вторую — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

B14 В какой точке отрезка [0; 8] первообразная $F(x)$ для функции $f(x) = x^2 - 3x - 4$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

Подготовка к части 2
ЕГЭ-2014 по математике

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

Диагностическая работа №7

C1 а) Решите уравнение $3\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

C2 Точка P является серединой ребра BB_1 куба $A\ldots D_1$. Длина ребра куба равна 4. Найдите площадь сечения куба плоскостью α, проходящей через точку D_1 параллельно прямой C_1P, если из трех следующих утверждений два истинны, а одно — ложно:

1) $\alpha \parallel AB_1$; 2) $\alpha \parallel AC$;

3) площадь сечения куба плоскостью α меньше 8.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x+5}(6-x)\cdot\log_{4-x}(x+3) \geqslant 0, \\ |2x-6|^{x+1} + |2x-6|^{-x-1} \leqslant 2. \end{cases}$$

C4 Отрезок, соединяющий вершину A ромба $ABCD$ с серединой стороны BC, равен стороне ромба.

а) Докажите, что высота ромба, проведённая из вершины C, делит сторону AD на отрезки, один из которых втрое больше другого.

б) Найдите диагональ AC ромба, если известно, что сторона ромба равна $\sqrt{6}$.

C5 Найдите значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} (1+3x^2)^a + (b^2-4b+5)^y = 2, \\ x^2y^2 + (b-2)xy + a^2 + 2a = 3. \end{cases}$$

C6 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Диагностическая работа №8

C1 а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sqrt{3}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -2\pi]$.

C2 Основание прямой четырехугольной призмы $A\ldots D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{11}$. Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 12.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 12 \cdot 2^x + 32 \geqslant 0, \\ \log_x(x-2) \cdot \log_x(x+2) \leqslant 0. \end{cases}$$

C4 Боковая сторона CD трапеции $ABCD$ равна основанию AD.

а) Докажите, что CA — биссектриса угла BCD.

б) Прямая, проходящая через вершину C перпендикулярно CD, пересекает боковую сторону AB в точке M. Найдите отношение $BM : AM$, если известно, что $AD = CD = 2BC$ и $\angle ADC = 60^\circ$.

C5 Найдите все пары чисел a и b, для каждой из которых имеет не менее пяти решений $(x; y)$ система уравнений

$$\begin{cases} bx(2x-y) + (y-1)(2x-y) = bx + y - 1, \\ 4x^2 + y^2 + axy = 1. \end{cases}$$

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Задача С1

Подготовительные задания

1 а) Решите уравнение $7\cos^2 x - \cos x - 8 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

2 а) Решите уравнение $8\sin^4 x + 10\sin^2 x - 3 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

3 а) Решите уравнение $\frac{4\cos x - 5}{2\cos x - 1} + \frac{1}{2\cos^2 x - \cos x} = 2$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

4 а) Решите уравнение $\frac{6}{\cos^2 x} - \frac{7}{\cos x} + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; \pi]$.

5 а) Решите уравнение $36^{\sin 2x} = 6^{2\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

6 а) Решите уравнение $(36^{\sin x})^{-\cos x} = 6^{\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

7 а) Решите уравнение $3\cos^2 x - 4\sin x + 4 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; \pi\right]$.

8 а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot (0{,}2)^{-\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

9 а) Решите уравнение $\log_3(2\cos^2 x + 3\cos x + 1) = 1$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

10 а) Решите уравнение $2\cos 2x - 12\cos x + 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Зачетные задания

1 а) Решите уравнение $8\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

2 а) Решите уравнение $\log_3(\cos x + \sin 2x + 9) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

3 а) Решите уравнение $(2x^2 - 5x - 12)(2\cos x + 1) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

4 а) Решите уравнение $\frac{5}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{19}{\sin x} + 17 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

5 а) Решите уравнение $2\sin 2x + \sin x = 4\cos x + 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

6 а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

7 а) Решите уравнение $\frac{7}{\sin^2 x} - \frac{10}{\sin x} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; \pi\right]$.

8 а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

9 а) Решите уравнение $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi; 3\pi]$.

10 а) Решите уравнение $3\cos 2x + 5\sin x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Задача С2

Подготовительные задания

1 Прямые, содержащие ребра DA и BC треугольной пирамиды $DABC$, взаимно перпендикулярны, $DA = 10$, $BC = 24$. Найдите расстояние между серединами ребер BD и AC.

2 В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 10, найдите расстояние от точки E до прямой B_1C_1.

3 В пирамиде $DABC$ известны длины ребер

$$AB = BC = DA = DC = 13, \quad DB = 8, \quad AC = 24.$$

Найдите расстояние между прямыми DB и AC.

4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 2, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

5 Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = AC = 8$, а один из углов равен 60°. На ребре AA_1 отмечена точка P так, что

$$AP : PA_1 = 1 : 2.$$

Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CBP, если расстояние между прямыми AB и B_1C_1 равно $18\sqrt{3}$.

6 В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что

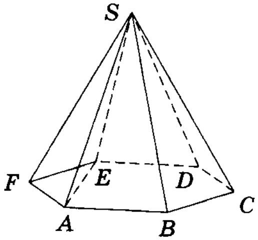
$$AE : EA_1 = 3 : 1.$$

Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

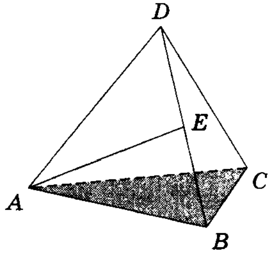
7 Точка K удалена от каждой из вершин квадрата $ABCD$, сторона которого равна $6\sqrt{2}$, на расстояние, равное 10. Найдите расстояние от точки K до плоскости квадрата.

8 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 2. Найдите расстояние от точки B до плоскости FB_1C_1.

9 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2. Найдите косинус угла между прямыми SB и AE.



10 В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра BD. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью ABC.



Зачетные задания

1 Высота правильной треугольной пирамиды равна 20, а медиана ее основания равна 6. Найдите тангенс угла, который боковое ребро образует с плоскостью основания.

2 Основание пирамиды $DABC$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 20. Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC.

3 Высота правильной треугольной пирамиды равна 16, а высота ее основания равна 8. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания.

4 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 6. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

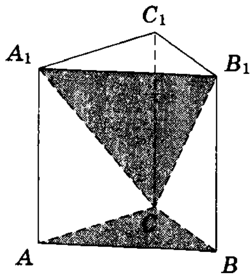
5 Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 12. Точка P принадлежит ребру BB_1, причем $PB_1 = 3PB$. Найдите тангенс угла между плоскостями ACP и ACC_1.

6 Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость, пересекающая ось цилиндра, пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

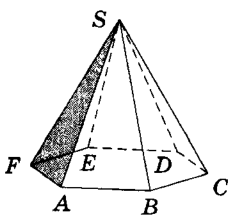
7 В пирамиде $DABC$ известны длины ребер $AB = AC = DB = DC = 13$, $DA = 6$, $BC = 24$. Найдите расстояние между прямыми DA и BC.

8 Точка K удалена от каждой из вершин квадрата $ABCD$ на расстояние, равное 10, а от плоскости квадрата — на расстояние, равное 8. Найдите расстояние от точки D до плоскости AKC.

9 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CA_1B_1.



10 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2. Найдите синус угла между прямой BC и плоскостью SAF.



Задача С3

Подготовительные задания

1 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 17\log_{17}(x+14) \geqslant x^2+8, \\ 17\log_{17}(x+14) \leqslant 6x-1. \end{cases}$$

2 Решите неравенство

$$\log_7(x^2-4x+5) > \log_7(2x-3).$$

3 Решите неравенство

$$\log_{0,8}(2x^2+13x+21) > 0.$$

4 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x + \dfrac{16}{2^x} \geqslant 10, \\ \log_{x+2}(x-2) \leqslant 0. \end{cases}$$

5 Решите неравенство $\lg^2 x - 3\lg x - 4 \geqslant 0$.

6 Решите неравенство $\log_3^2 x - 2\log_3 x^2 + 3 < 0$.

7 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3\cdot 9^x - 28\cdot 3^x + 9 \leqslant 0, \\ \log_{x^2}(x-1)^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

8 Решите неравенство $\dfrac{x-7}{\log_{x-6} 7} \geqslant 0$.

9 Решите неравенство $(x-9)\log_7(x-8) \leqslant 0$.

10 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 13^{x-6} + \ln^2(x-7) \geqslant 13, \\ 7+\sqrt{13-x} \geqslant 7^{x-12}. \end{cases}$$

Зачетные задания

1 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{9\cdot 2^x-24}{2^x-4} \geqslant 2^x+4, \\ \log_2(x+1) \geqslant \dfrac{\log_2(x+1)}{\log_2(x+1)-1}. \end{cases}$$

2 Решите неравенство $\log_{2-x} 3 \leqslant \log_{2-x} x$.

3 Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,5} x+3}{6\log_x 2-1} \geqslant -2$.

4 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^x-4\cdot 3^x+3 \geqslant 0, \\ \log_{\frac{2x^2+3x+1}{3x+1}} |x| \leqslant 0. \end{cases}$$

5 Решите неравенство $2^{\lg(x^2-1)} \geqslant (x+1)^{\lg 2}$.

6 Решите неравенство

$$\log_{0,2}(4x+9)+\log_5(9-x^2)+\sin(3,5\pi) < 0.$$

7 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}+\log_2(x+5) \geqslant 0, \\ 8\cdot 4^x-33\cdot 2^x+4 \geqslant 0. \end{cases}$$

8 Решите неравенство $\log_2(\log_3(\log_4 x)) \leqslant 0$.

9 Решите неравенство $|x|^{x^2+3x-4} \leqslant 1$.

10 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2\cdot 81^x+3^x-87}{81^x-3} \geqslant 2, \\ \log_2^2(x+4)-5\log_2(x+4)+6 \leqslant 0. \end{cases}$$

Задача C4

Подготовительные задания

1 В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$.

а) Докажите, что $AC \perp CD$.

б) Найдите углы трапеции.

2 Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M на расстояние $MD = AM$.

а) Докажите, что $CD = AB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = 10$, $AC = 12$, $AM = 5$.

3 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны, пересекаются в точке P, отличной от O, и не проходят через точку O. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно.

а) Докажите, что прямая OP проходит через середину отрезка MN.

б) Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$, если известно, что $AC = BD$, а $MN = 10$.

4 Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с боковой стороной AB.

а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении $1:4$.

5 В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены медиана CM и высота CH.

а) Докажите, что биссектриса CL треугольника ABC является также биссектрисой треугольника CMH.

б) Найдите CL, если известно, что $CM = 10$, $CH = 6$.

P — точка пересечения отрезка BM с диагональю AC.

а) Докажите, что прямая DP проходит через середину стороны AB.

б) Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BM в точке Q. Найдите отношение $PM : BQ$, если известно, что $AB : AC = 1 : 3$.

6 Через точки M и N, делящие сторону AB треугольника ABC на три равные части, проведены прямые, параллельные стороне BC. Найдите площадь части треугольника, заключенной между этими прямыми, если площадь треугольника ABC равна 1.

7 На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D. При этом $\angle ABC = \angle ACD$.

а) Докажите, что прямая CD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.

б) Найдите отношение площадей этих подобных треугольников, если известно, что $AC = 15$, $BC = 20$.

8 Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что в четырёхугольник $BPOQ$ можно вписать окружность.

б) Найдите угол ABC, если известно, что радиус этой окружности вдвое меньше радиуса вписанной окружности треугольника ABC.

9 Окружность с центром O и окружность вдвое меньшего радиуса касаются внутренним образом в точке A. Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M.

а) Докажите, что M — середина AB.

б) Луч OM пересекает большую окружность в точке P. Найдите расстояние от центра этой окружности до хорды AP, если радиус большей окружности равен 13, а $OM = 5$.

10 Окружности, построенные на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, пересекаются в точке D, отличной от A.

а) Докажите, что точка D лежит на прямой BC.

б) Найдите угол BAC, если известно, что $\angle ACB = 30°$, а точка D лежит на стороне BC, причём $DB : DC = 1 : 3$.

Зачетные задания

1 Сторона BC треугольника ABC равна 48. Около треугольника описана окружность радиуса 25. Известно, что радиус OA делит сторону BC на два равных отрезка.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите его боковые стороны.

2 В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медианы AM и BN. Известно, что около четырёхугольника $ABMN$ можно описать окружность.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABMN$, если также известно, что $AB = 4\sqrt{5}$.

3 Диагонали трапеции перпендикулярны боковым сторонам.

а) Докажите, что трапеция равнобедренная.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что её основания равны 10 и 26.

4 Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что $KT \parallel DE$.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

5 Точки D и E — середины сторон соответственно AC и BC треугольника ABC. На отрезке DE как на диаметре построена окружность, пересекающая продолжения сторон AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что биссектрисы углов MEN и NDM пересекаются на этой окружности.

б) Найдите MN, если известно, что $AB = 14$, $BC = 10$, $AC = 6$.

6 На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

7 Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 3$, $AC = \sqrt{73}$ и медианой $AM = 4$.

а) Докажите, что медиана AM перпендикулярна стороне AB.

б) Найдите высоту треугольника ABC, проведённую из вершины A.

8 Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M, причём $AM : MB = 2 : 1$. Найдите диагональ AC, если известно, что $AD = \sqrt{6}$.

9 Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол $30°$. Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120°$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

10 Окружность с центром O касается боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC, продолжения боковой стороны AC и продолжения основания BC в точке N. Точка M — середина основания BC.

а) Докажите, что $AN = OM$.

б) Найдите OM, если стороны треугольника ABC равны 10, 10 и 12.

Задача C5

Подготовительные задания

1 При каждом значении параметра a решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2\sin x + 3}{\cos y} = a, \\ \dfrac{\cos y}{2\sin x + 3} = 2a - 1. \end{cases}$$

2 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2 + 4x + a = 3$ имеет более одного корня.

3 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $8x^6 + (a - x)^3 + 2x^2 = x - a$ имеет хотя бы один корень.

4 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} (x - \sqrt{4 - z})^2 + (y - \sqrt{z})^2 = 1, \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 9. \end{cases}$$

5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3 + \left(\dfrac{4}{x}\right)^3 + 16 = 2a^2$ имеет единственный корень.

6 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x + 2|x - 3| - 3|x - a - 4| = 7|x - a|$ имеет хотя бы один корень.

7 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4 = 4(x + y), \\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = a^2. \end{cases}$$

8 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $7x + 3|x + a| - 2|x - 3| \geqslant 6$ выполняется для любого значения $x \in [0;\ 7]$.

9 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых число 9 является решением неравенства

$$(x - 9)(x - 16)\sqrt{a^2 - 8a\log_8(x - 8) - 9} \geqslant 0,$$

а число 16 не является решением этого неравенства.

10 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos 2x - 2(a+1)\cos x - 4a - 11 = 0$ имеет корни, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

Зачетные задания

1 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная тройка $(x; y; z)$ действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2^{\frac{4}{x}} = (a^2-4)^2 + y^2 + 8, \\ |y|\, z^4 + 2z^2 - a^2 z + a + 4 = 0. \end{cases}$$

2 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $ax^2 + (1-a^2)x - a > 0$ принадлежит отрезку $[-2; 2]$.

3 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $\log_2 x^2 \leqslant \log_2(x+2)$ является и решением неравенства $49x^2 \leqslant 4a^4$.

4 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{2x-a} = x - 2a$ имеет корни, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение.

6 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2-1)x^2 + 2(a-1)x + 1 > 0$ выполнено при любом значении x.

7 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно два решения система уравнений

$$\begin{cases} (x+a-6)^2 + (y-a)^2 = 18, \\ \sqrt{x^2+(y-6)^2} + \sqrt{(x-6)^2+y^2} = 6\sqrt{2}. \end{cases}$$

8 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень.

9 Найдите все значения x, для каждого из которых равенство $2\log_2(4-\sqrt{7+2x}) = \log_{2+a^2x^2}(4-3x)$ выполняется при любом значении параметра a.

10 Найдите все значения параметра b, для каждого из которых при любом значении параметра a имеет ровно два различных решения система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-5x+6y+4=0, \\ y+ax+ab=0. \end{cases}$$

Задача С6

Подготовительные задания

1 Ваня задумал простое трехзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?

2 Каково наименьшее такое натуральное число n, что $n!$ делится на 990?

3 Чему равна сумма цифр всех чисел от единицы до миллиарда?

4 Известно, что первый, десятый и сотый члены геометрической прогрессии являются натуральными числами. Верно ли, что 99-й член этой прогрессии также является натуральным числом?

5 Решите в натуральных числах уравнение $3^x + 4^y = 5^z$.

6 Найдите хотя бы одно целочисленное решение уравнения $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = 2005$.

7 Решите в натуральных числах уравнение $x + 1/(y + 1/z) = 10/7$.

8 Можно ли расставить по кругу 7 целых неотрицательных чисел так, чтобы сумма каких-то трех подряд расположенных чисел была равна 1, каких-то трех подряд расположенных — 2, ..., каких-то трех подряд расположенных — 7?

9 Найдите наименьшее натуральное число n, для которого выполнено следующее условие: если число p простое и n делится на $(p-1)$, то n делится на p.

10 Найдите наибольшее четырехзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5, 9 и 11.

Зачетные задания

1 Дана последовательность натуральных чисел, в которой каждый член, начиная со второго, отличается от предыдущего либо на 10, либо в 6 раз. Сумма всех членов последовательности равна 257.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

2 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

а) пять; б) четыре; в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

3 Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключенные между числами 510 и 740.

а) Может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

4 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3345.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трех членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

5 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел: -11, 12, 13, -14, -15, 17, -18, 19. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сто́ронах заново пишут по одному каждое из чисел: -11, 12, 13, -14, -15, 17, -18, 19. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 117?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

6 Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

а) Может ли в такой прогрессии быть 10 членов?

б) Докажите, что число ее членов меньше 100.

в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.

г) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.

7 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор −3, −1, 1, 2, 3, 4, 6. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

8 На листе бумаги написаны в строчку 13 единиц.

а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

б) Докажите, что если единицы, стоящие на четных местах, заменить семерками, все равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

в) Докажите, что между любыми 13 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

9 В течение четверти учитель ставил школьникам отметки «1», «2», «3», «4», «5». Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным 3,5.

а) Какую наибольшую долю могли составлять четверки в таком наборе отметок?

б) Учитель заменил одну отметку «4» двумя отметками: одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

в) Учитель заменил каждую отметку «4» двумя отметками: одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

10 У каждого ученика в классе дома живет кошка или собака, а у некоторых, возможно, — и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа учеников, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников, имеющих кошек.

а) Может ли быть в классе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

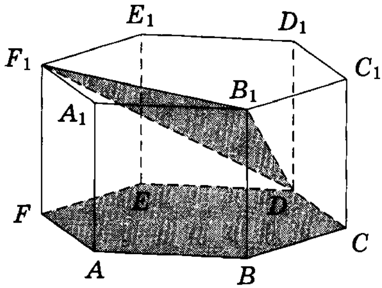
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительного условия пунктов а) и б)?

Диагностическая работа №9

C1 а) Решите уравнение $\frac{3\sin x - 4}{\sin x - 1} + \frac{1}{\sin^2 x - \sin x} = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

C2 В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.



C3 Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{320 - 4^{-x}}{64 - 2^{-x}} \geqslant 5, \\ \log_{0,25x^2}\left(\frac{x+6}{4}\right) \leqslant 1. \end{cases}$

C4 Дана трапеция $ABCD$. Биссектриса угла BAD пересекает продолжение основания BC в точке K.

а) Докажите, что треугольник ABK равнобедренный.

б) Найдите биссектрису BM треугольника ABK, если известно, что $AD = 10$, $BC = 2$, $AB = CD = 5$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение $(x; y)$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a+1)y + a^2 - 3 = x. \end{cases}$$

C6 а) Чему равно число способов записать число 1595 в виде $1595 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$?

б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 160 способами?

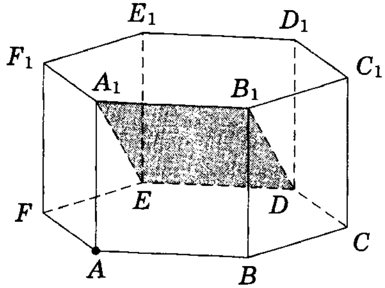
в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 160 способами?

Диагностическая работа №10

С1 а) Решите уравнение $6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

С2 В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости DEA_1.



С3 Решите систему неравенств $\begin{cases} 3\cdot 9^{-x} - 28\cdot 3^{-x} + 9 \leqslant 0, \\ \log_{x^2}(x+1)^2 \leqslant 1. \end{cases}$

С4 На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причём M — середина AD, а $BN : NC = 1 : 3$.

а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, образованного пересечениями прямых AN, AC, BD и BC, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 40.

С5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{|x-1|} + \sqrt{7|y|} = 1, \\ x^2 + 49y^2 + 4a + 1 = 2x \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

С6 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-13, -8, -6, -5, -1, 2, 7$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 7 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Тренировочные варианты
ЕГЭ-2014 по математике

Ответом к заданиям части 1 (B1–B14) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

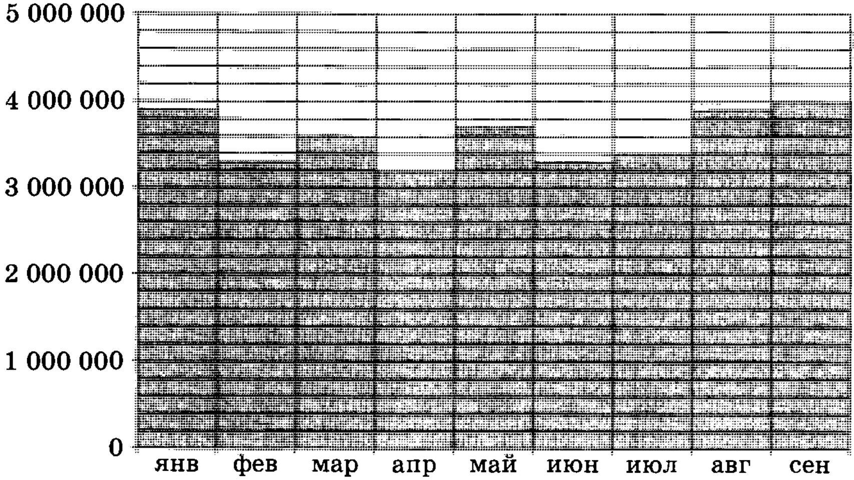
Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

Диагностическая работа №11

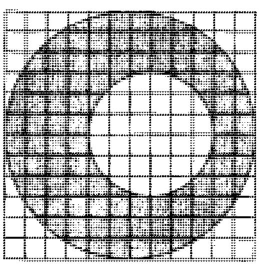
Часть 1

B1 Школа закупает книги по цене 70 рублей за штуку. При покупке на сумму больше 500 рублей магазин дает скидку 10%. Сколько рублей будет стоить покупка 23 книг?

B2 На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.



B3 На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 1. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



B4 При заказе дисков в некотором шведском музыкальном магазине цена одного диска не зависит от количества дисков в заказе, а доставка заказа в другие страны осуществляется на таких условиях:

доставка заказа не более чем из трех дисков — 6 \$;
доставка заказа от 4 до 8 дисков — 17,5 \$;
доставка заказа из 9 и более дисков — 28 \$.

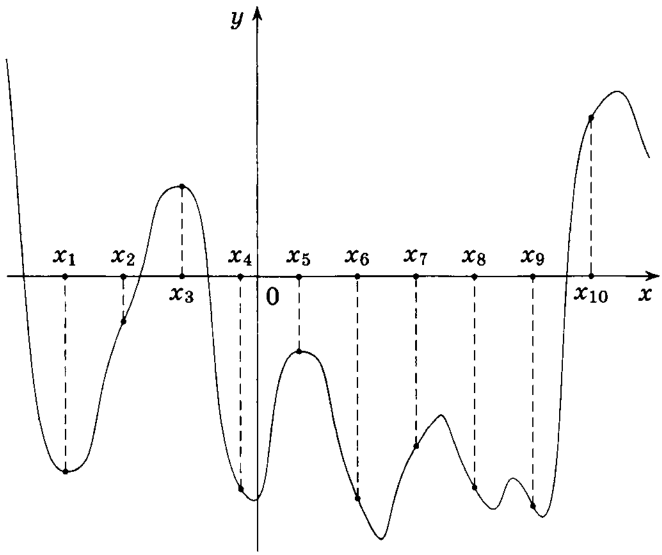
Сколько долларов придется заплатить за доставку самым дешевым способом (можно в несколько заказов) при приобретении ровно 9 дисков?

B5 Решите уравнение $\sqrt{x+4}=7$.

B6 В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол на два угла, один из которых равен 56°. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

B7 Найдите значение выражения $\log_6 126 - \log_6 3{,}5$.

B8 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



B9 Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 9, а высота боковой грани пирамиды, проведенная к ребру основания, равна $\sqrt{73}$. Найдите боковое ребро пирамиды.

B10 В классе 7 мальчиков и 14 девочек. 1 сентября случайным образом определяют двух дежурных на 2 сентября, которые должны приготовить класс к занятиям. Найдите вероятность того, что будут дежурить два мальчика.

B11 Объем цилиндра равен 24 см^3. Радиус основания цилиндра уменьшили в 2 раза, а образующую увеличили в 5 раз. Найдите объем получившегося цилиндра. Ответ дайте в см^3.

B12 Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от ее цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 100 - 10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 210 тыс. руб.

B13 Первая труба наполняет бак объемом 600 литров, а вторая труба — бак объемом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

B14 Найдите наибольшее значение функции

$$y = (x-2)^2(x-4)+5$$

на отрезке [1; 3].

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

C2 Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и AD, если $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+1} - 17\cdot 2^x + 4 \leqslant 0, \\ \log^2_{|x|}\left(x^2\right) + \log_2\left(x^2\right) \leqslant 6. \end{cases}$$

C4 Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке A внешним образом. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что $O_2C \parallel O_1B$.

б) Найдите площадь треугольника BCO_2, если известно, что радиусы первой и второй окружностей равны 5 и 8 соответственно, а $\angle ABO_1 = 15°$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение.

C6 В некотором царстве было несколько (более двух) княжеств. Однажды некоторые из этих княжеств объявили себя царствами и разделились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале. Затем все новые и новые княжества из числа прежних и вновь образующихся объявляли себя царствами и делились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале.

а) Могло ли сразу после одного из делений общее число княжеств стать равным 102?

б) Могло ли в какой-то момент времени общее число княжеств стать равным 320, если известно, что сразу после одного из делений общее число княжеств было равно 162?

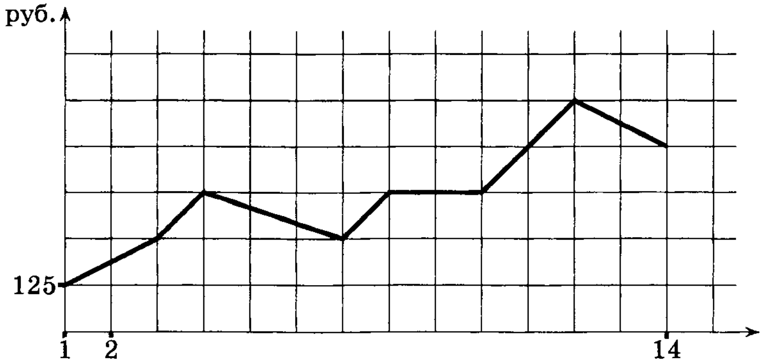
в) Сколько княжеств было в самом начале, если сразу после какого-то из делений общее число княжеств стало ровно в 38 раз больше первоначального?

Диагностическая работа №12

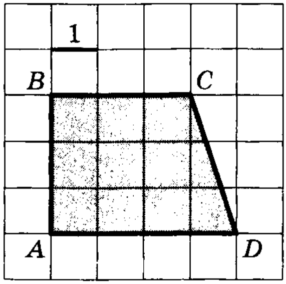
Часть 1

B1 В квартире, где проживает Алексей, установлен прибор учета расхода холодной воды (счетчик). 1 сентября счетчик показывал расход 103 куб. м воды, а 1 октября — 114 куб. м. Какую сумму должен заплатить Алексей за холодную воду за сентябрь, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 19 рублей 20 копеек? Ответ дайте в рублях.

B2 На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели апреля. В первую неделю апреля бизнесмен купил 14 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль он мог получить? Ответ дайте в рублях.



B3 Найдите площадь трапеции $ABCD$.



B4 Строительной фирме нужно приобрести 60 кубометров пеноблоков у одного из трех поставщиков. Какова наименьшая стоимость (в рублях) покупки с доставкой, если цены на пеноблоки и условия доставки приведены в таблице?

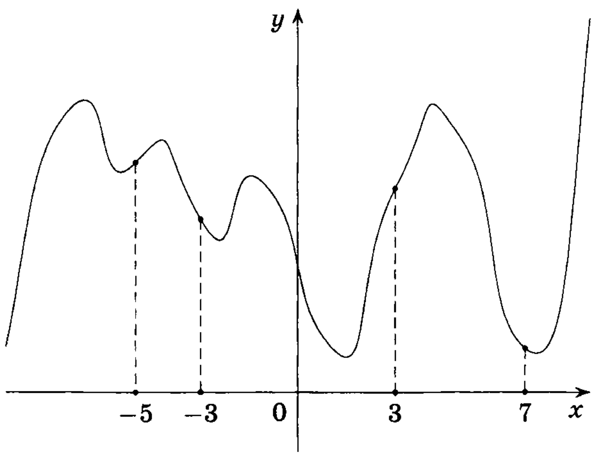
Поставщик	Цена пеноблоков (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные предложения и скидки
А	2700	7000	При заказе на сумму больше 200 000 руб. доставка бесплатно
Б	2800	5700	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2750	3000	

B5 Решите уравнение $\log_{25}(2-3x)=0{,}5$.

B6 Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l. Расстояние от точки A до прямой l равно 7, а расстояние от точки B до прямой l равно 13. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l.

B7 Найдите значение выражения $\dfrac{60}{6^{\log_6 5}}$.

B8 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и отмечены точки -5, -3, 3, 7. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



B9 Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $10\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна 7. Найдите тангенс угла между боковым ребром и основанием пирамиды.

B10 В каждой двадцать пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Коля покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Коля не найдет приз в своей банке.

B11 Объем данной правильной треугольной призмы равен 80 см^3. Найдите объем правильной треугольной призмы, ребро основания которой в 4 раза меньше ребра основания данной призмы, а высота в 4 раза больше высоты данной призмы. Ответ дайте в см^3.

B12 Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P=\dfrac{4mg}{\pi D^2}$, где $m=2700$ кг — их общая масса, D (в метрах) — диаметр колонны. Считая ускорение свободного падения g равным 10 м/с^2, а π равным 3, определите наименьший возможный диаметр колонны (в метрах), если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 400 000 Па.

B13 Три килограмма черешни стоят столько же, сколько пять килограммов вишни, а три килограмма вишни — столько же, сколько два килограмма клубники. На сколько процентов килограмм клубники дешевле килограмма черешни?

B14 Найдите наибольшее значение функции

$$y=12\,\mathrm{tg}\,x-12x+3\pi-13 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right].$$

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $(25^{\sin x})^{\cos x}=5^{\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 7$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $3:4$, считая от вершины B. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x} \dfrac{x+4}{(x-3)^2} \geqslant -2, \\ x^3 + 6x^2 + \dfrac{21x^2 + 3x - 12}{x-4} \leqslant 3. \end{cases}$$

C4 Общие внутренние касательные к двум окружностям перпендикулярны. Одна из них касается окружностей в точках A и C, вторая — в точках B и D (точки A и B лежат на одной окружности).

а) Докажите, что отрезок AC равен сумме радиусов окружностей.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 6$, $CD = 8$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5\,|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

C6 Известно, что все члены арифметической прогрессии $\{a_n\}$ являются различными натуральными числами и что ее второй член в 8 раз больше первого.

а) Может ли один из членов этой прогрессии быть больше другого ее члена в 567 раз?

б) Найдите наименьшее возможное отношение двух членов этой прогрессии, отличных от a_1, если известно, что это отношение является целым числом, и укажите любую пару таких ее членов.

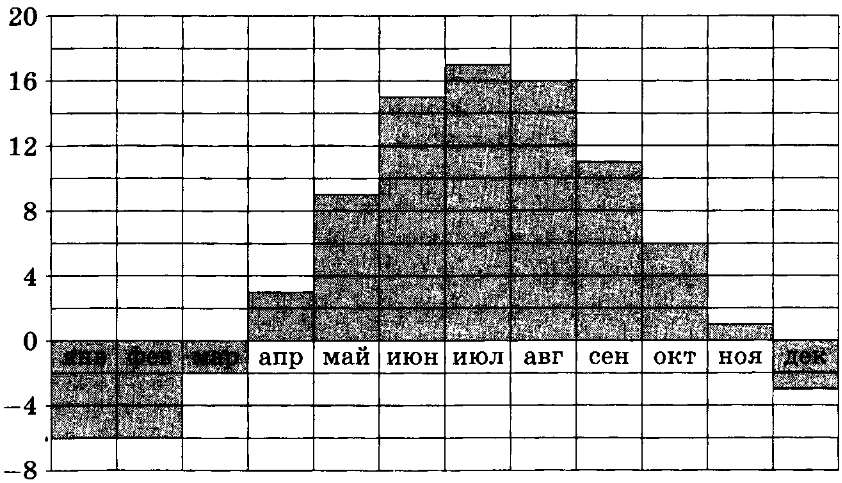
в) Найдите третий член этой прогрессии, если известно, что один из ее членов равен 546.

Диагностическая работа №13

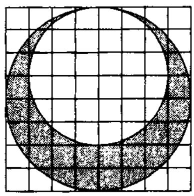
Часть 1

B1 Пачка масла стоит 37 рублей 70 копеек. Сколько пачек масла можно купить на 500 рублей?

B2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Хельсинки за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура была отрицательная.



B3 На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 9. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



B4 Для транспортировки 80 тонн груза на 1100 км можно использовать одного из трех перевозчиков. Тарифы перевозчиков приведены в таблице. Какова наименьшая стоимость (в рублях) транспортировки?

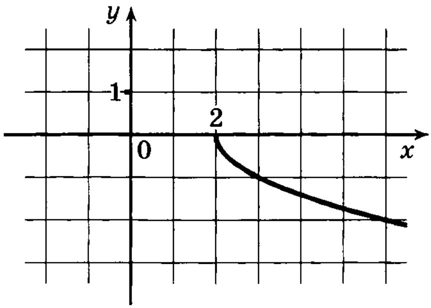
Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	3700	3,5
Б	4300	5
В	9800	12

B5 Решите уравнение $2^{5-x}=0{,}25$.

B6 Отрезок AB является хордой окружности с центром O. Найдите угол между прямой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A, если угол AOB равен $56°$. Ответ дайте в градусах.

B7 Найдите значение выражения $\dfrac{30}{5^{\log_5 3}}$.

B8 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-1;\ 1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 3. Найдите $f'(3)$.

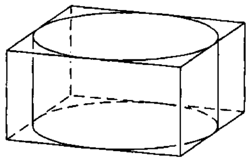


B9 Высота PH боковой грани PCD правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ равна $4\sqrt{3}$ и равна стороне CD основания пирамиды. Найдите расстояние между прямыми AB и PH.

B10 Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует

56 шашистов, среди которых 12 участников из России, в том числе Валерий Стремянкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Валерий Стремянкин будет играть с каким-либо шашистом из России.

B11 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 6. Найдите объем параллелепипеда.



B12 Высоту над землей (в метрах) подброшенного вверх камня можно вычислять по формуле $h(t) = 1{,}4 + 14t - 5t^2$, где t — время в секундах. Сколько секунд камень будет находиться на высоте более 8 метров?

B13 Из пункта А круговой трассы, длина которой равна 30 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого равна 92 км/ч, скорость второго — 77 км/ч. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на 1 круг?

B14 Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 - 5x^3 - 20x$ на отрезке $[-6; 1]$.

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $7\sin^2 x + 8\cos x - 8 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB = 5$, $AD = 3$, $AA_1 = 8$. Точка R принадлежит ребру AA_1 и делит его в отношении $3:5$, считая от вершины A. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B, R и D_1.

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x} \dfrac{(x-3)^4}{x} \geqslant 4, \\ \dfrac{x^2-12x+10}{x-1} + \dfrac{x^2-5x+5}{x-5} \leqslant 2x-11. \end{cases}$$

С4 Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая внутренняя касательная. Эти касательные пересекаются в точке D.

а) Докажите, что треугольник O_1DO_2 прямоугольный.

б) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $DO_1 = \sqrt{5}$ и $DO_2 = 2\sqrt{5}$.

С5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} z\cos(x-y) + (2+xy)\sin(x+y) = z, \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x+y+a\sin^2 z)((1-a)\ln(1-xy)+1) = 0. \end{cases}$$

С6 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008 и

а) пять; б) четыре; в) три

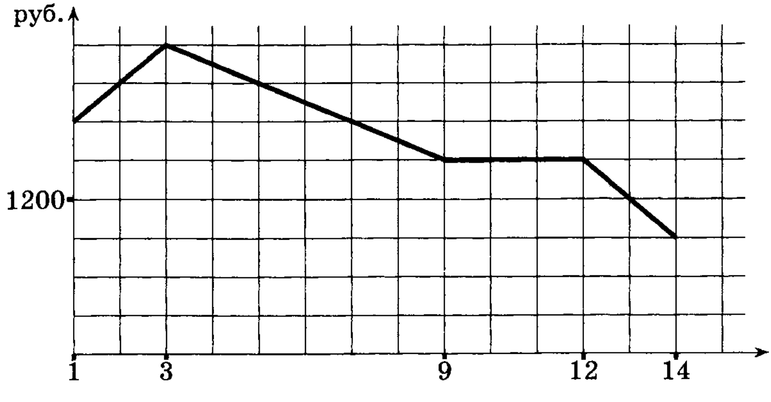
из них образуют геометрическую прогрессию?

Диагностическая работа №14

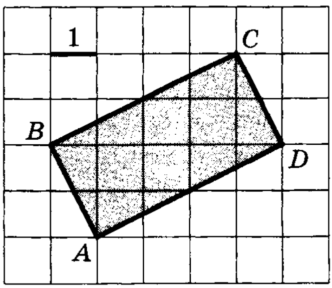
Часть 1

B1 В двух автомобилях перевозилось одинаковое количество помидоров. При этом в первом автомобиле при транспортировке испортилось 20% перевозимых помидоров, что составило 96 штук. Во втором автомобиле испортилось 15% помидоров. Сколько помидоров испортилось во втором автомобиле?

B2 На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



B3 Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.



B4 При заказе дисков в некотором шведском музыкальном магазине цена одного диска не зависит от количества дисков в заказе, а доставка заказа в другие страны осуществляется на таких условиях:

доставка заказа не более чем из трех дисков — 6 $;
доставка заказа от 4 до 8 дисков — 17,5 $;
доставка заказа из 9 и более дисков — 28 $.

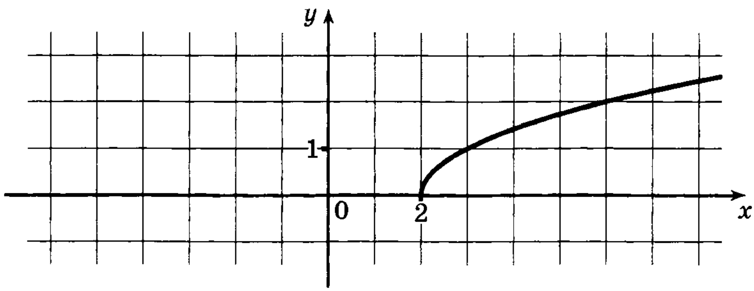
Сколько долларов придется заплатить за доставку самым дешевым способом (можно в несколько заказов) при приобретении ровно 11 дисков?

B5 Решите уравнение $\sqrt{x+9}=5$.

B6 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB=11$, $DC=33$, $AC=28$.

B7 Найдите значение выражения $\log_6 144 - \log_6 4$.

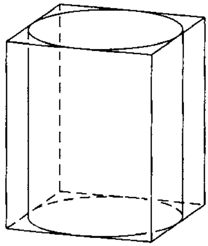
B8 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-6; -1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.



B9 Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше ее высоты. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

B10 Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Белые» по очереди играет с командами «Красные», «Синие» и «Зеленые». Найдите вероятность того, что ровно в одном матче право первой владеть мячом получит команда «Белые».

B11 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания цилиндра равен 2. Объем параллелепипеда равен 80. Найдите высоту цилиндра.



B12 Масса радиоактивного вещества уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0 = 280$ мкг изотопа железа-59, период полураспада которого $T = 45$ суток. В течение скольких суток содержание изотопа железа-59 в веществе будет превосходить 17,5 мкг?

B13 Имеются два сосуда, содержащие 42 кг и 6 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 40% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 50% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

B14 Найдите наибольшее значение функции $y = (21 - x)e^{x-20}$ на отрезке [19; 21].

Часть 2

C1 а) Решите уравнение

$$2\cos 2x + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -\pi]$.

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 12, а боковые ребра равны 8. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A, B и середину ребра A_1C_1.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{7-x} \dfrac{1-x}{x-7} \leqslant -1, \\ \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} + \dfrac{4x-22}{x-7} \leqslant x+2. \end{cases}$$

C4 Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP:PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x-2a-5)^2+(y-3a+5)^2=16, \\ (x-a-2)^2+(y-2a+1)^2=81. \end{cases}$$

C6 На листе бумаги написаны в строчку 14 единиц.

а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

б) Докажите, что если единицы, стоящие на четных местах, заменить четверками, все равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

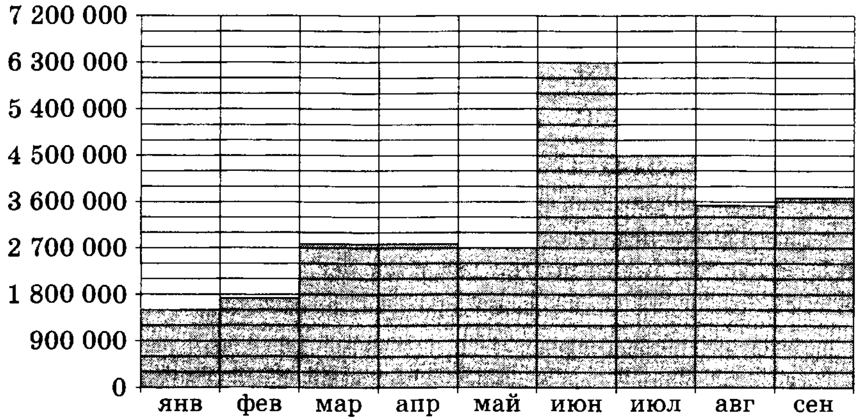
в) Докажите, что между любыми 14 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

Диагностическая работа №15

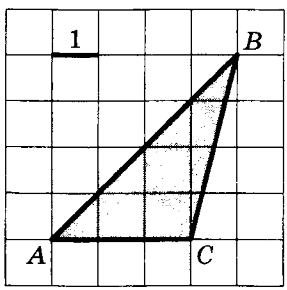
Часть 1

B1 В туристический поход отправляется группа из 18 человек. В походе на одного человека приходится 60 грамм гречки на прием пищи. Планируется 7 раз готовить гречку. Сколько килограммовых пачек необходимо купить, чтобы гречки хватило?

B2 На диаграмме показано число запросов со словом ФУТБОЛ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в указанный период, когда число запросов со словом ФУТБОЛ было меньше 3 600 000.



B3 Найдите площадь треугольника ABC.



B4 Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинги R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

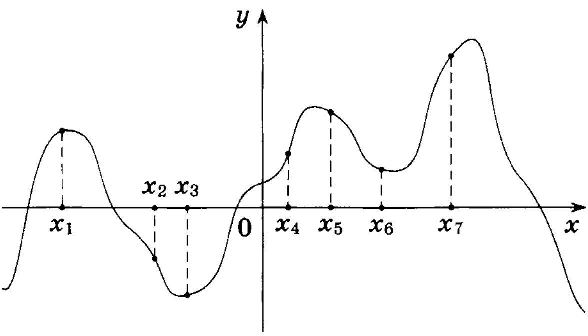
Модель мясорубки	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4600	2	0	2
Б	5500	4	3	1
В	4800	4	4	4
Г	4700	2	1	4

B5 Решите уравнение $\log_2 x = -2$.

B6 Найдите число сторон правильного многоугольника, каждый из углов которого равен 140°.

B7 Найдите значение выражения $\log_3 13 - \log_3 117$.

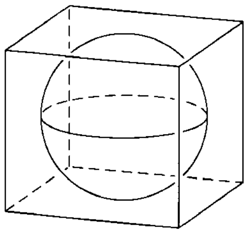
B8 На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_7$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



B9 Тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания правильной четырехугольной пирамиды равен $3\sqrt{2}$. Найдите тангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

B10 Марина и Дина бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпадет больше очков. Первой кубик бросила Марина, у нее выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Дина выиграет.

B11 Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 4. Найдите его объем.



B12 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 900$ К, $a = 31$ К/мин, $b = -0{,}2$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1550 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время (в минутах) после начала работы нужно отключать прибор.

B13 Смешали 14 литров 30-процентного водного раствора некоторого вещества с 10 литрами 18-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора? Знак % в ответе не пишите.

B14 Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x^2 - 9x + 9)e^{x-7}$$

на отрезке [6; 8].

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $5\cos^2 x - 12\cos x + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

C2 Точки N, M и P являются соответственно серединами ребер AA_1, AD и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 4. Найдите площадь сечения куба плоскостью α, проходящей через точку A_1, если из трех следующих утверждений два истинны, а одно — ложно:

1) $\alpha \perp NP$; 2) $\alpha \perp B_1M$;

3) площадь сечения куба плоскостью α меньше 10.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_7(x^2 - 9) \leqslant 1, \\ \dfrac{2x^2 + x - 28}{6^{x-6} + 5^{x-5} - 4} \leqslant 0. \end{cases}$$

C4 Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$ и диагональю $AC = 7$.

а) Докажите, что около него можно описать окружность.

б) Найдите диагональ BD.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно три решения система уравнений

$$\begin{cases} y + a = |x| + 5, \\ x^2 + (y - 2a + 5)^2 = 4. \end{cases}$$

C6 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

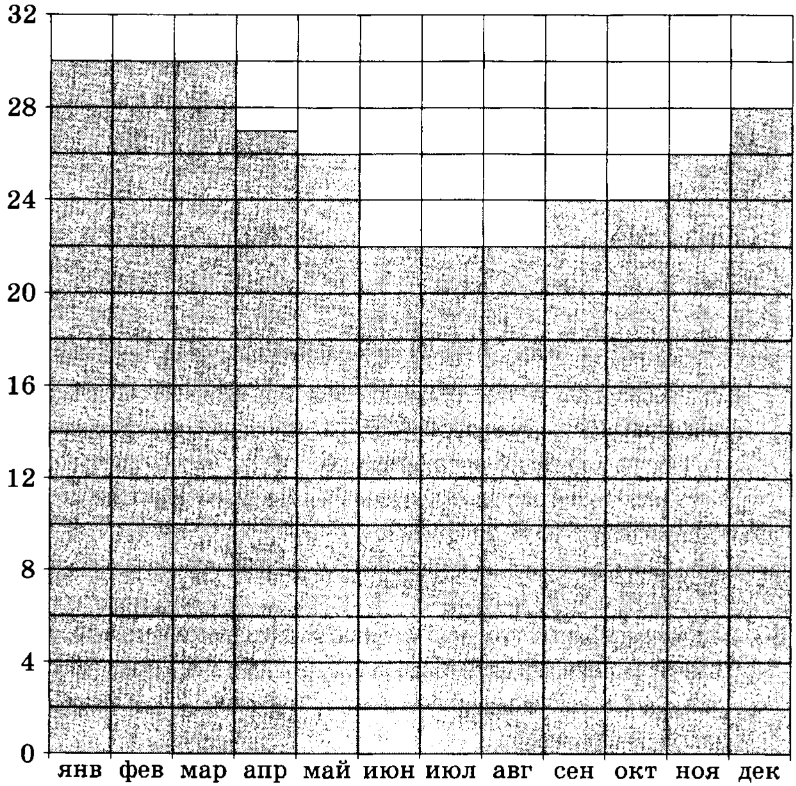
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Диагностическая работа №16

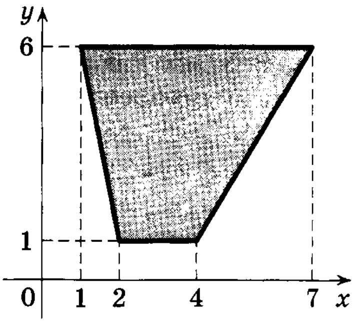
Часть 1

B1 Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 5% активного вещества. Ребенку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,4 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребенку в возрасте четырех месяцев и весом 5 кг в течение суток?

B2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Рио-де-Жанейро за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячной температурой в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



B3 Найдите площадь трапеции, вершинами которой являются точки с координатами (1; 6), (7; 6), (4; 1), (2; 1).



B4 В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным на начало 2010 года).

Наименование продукта	Белгород	Липецк	Новгород
Пшеничный хлеб (батон)	11	14	11
Молоко (1 литр)	23	23	26
Картофель (1 кг)	10	13	11
Сыр (1 кг)	205	215	230
Мясо (говядина, 1 кг)	240	240	245
Подсолнечное масло (1 литр)	44	44	38

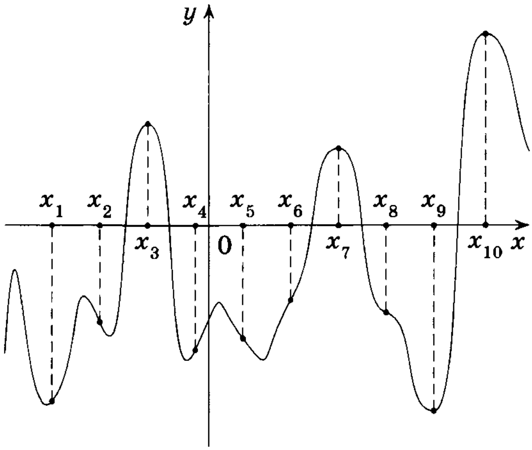
Определите, в каком из этих городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов: 2 батона пшеничного хлеба, 3 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

B5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{36}\right)^{x-2} = 6$.

B6 Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 11, а одна из диагоналей ромба равна 44. Найдите величину тупого угла ромба. Ответ дайте в градусах.

B7 Найдите значение выражения $(558^2 - 23^2) : 581$.

B8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции?



B9 Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а сторона основания равна 8. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.

B10 В группе по английскому языку учатся 10 школьников: Антон, Вадик, Галя, Даша, Игорь, Коля, Люда, Митя, Полина, Ярослав. В начале урока учительница произвольным образом выбирает ученика, чтобы он отвечал домашнее задание у доски. Найдите вероятность того, что к доске пойдет мальчик.

B11 Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 6, боковые ребра равны 5. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

B12 Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_п = 20°\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_в = 88°\text{C}$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}4$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры $T(°\text{C})$, причем

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п} \text{ (м)},$$

где $c = 4200\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоемкость воды, $\gamma = 63\,\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}2$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы равна 64 м?

B13 В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

B14 Найдите наибольшее значение функции $y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + {}$ $+ 19$ на отрезке $[8;\ 21]$.

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;\ -\pi]$.

C2 Точки M и P являются соответственно серединами ребер AA_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 4. Найдите площадь сечения куба плоскостью α, проходящей через точку M параллельно прямой C_1P, если из трех следующих утверждений два истинны, а одно — ложно:

1) $\alpha \parallel DC_1$; 2) $\alpha \parallel A_1C_1$;

3) площадь сечения куба плоскостью α больше 9.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{-1-x} \dfrac{-4-x}{x+1} \leqslant -1, \\ \dfrac{x^2+6x+7}{x+2} + \dfrac{2-6x}{x} \leqslant x-2. \end{cases}$$

C4 Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC. Окружность, проходящая через точки C и D, касается стороны AB и пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что $MN \parallel AB$.

б) Найдите MN, если известно, что $AD = 2$, $BD = 4$ и $AM = 1$.

С5 Найдите все пары значений параметров a, b, при каждой из которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

С6 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трех членов?

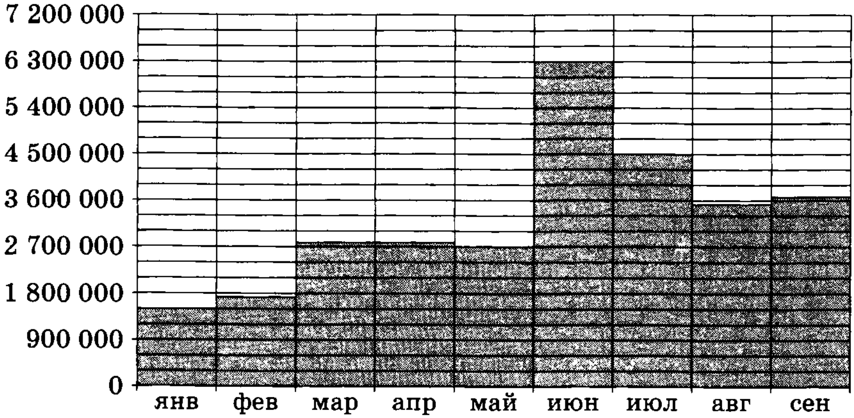
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Диагностическая работа №17

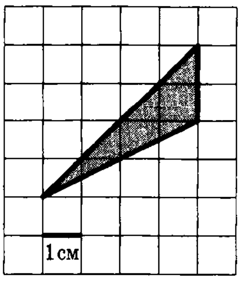
Часть 1

B1 Цена на электрический чайник была повышена на 13% и составила 2373 рубля. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

B2 На диаграмме показано число запросов со словом ФУТБОЛ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наименьшее месячное число запросов со словом ФУТБОЛ в указанный период.



B3 Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B4 Для изготовления книжных полок требуется заказать 45 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,15 м^2. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекла и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

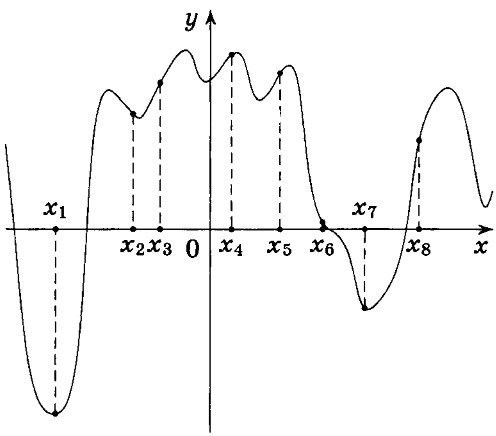
Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
A	400	70
B	440	65
C	480	60

B5 Решите уравнение $\operatorname{tg}\dfrac{\pi(4x+7)}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

B6 Вершина A выпуклого черырехугольника $ABCD$ является центром окружности, проходящей через точки B, C и D. Найдите угол BAD, если углы ABC и ADC равны соответственно 56° и 78°. Ответ дайте в градусах.

B7 Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{8}+\sqrt{6})^2}{7+\sqrt{48}}$.

B8 На рисунке изображен график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_8. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам убывания функции $f(x)$?



B9 Высота основания правильной треугольной пирамиды в 1,8 раз больше высоты боковой грани, проведенной к ребру основания. Найдите синус угла между боковой гранью и основанием пирамиды.

B10 Найдите вероятность того, что при броске двух кубиков сумма очков будет делиться на 4.

B11 Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 15. Найдите площадь поверхности шара.

B12 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин.) — время, прошедшее от начального момента, T (мин.) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 80$ мг. Период его полураспада $T = 2$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг?

B13 Смешав 84-процентный и 96-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 84-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 89-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 84-процентного раствора использовали для получения смеси?

B14 Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 3x + \ln x + 10$ на отрезке $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$.

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $12\cos^2 x - 11\cos x + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

C2 В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 4, найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (9\cdot 9^x - 10\cdot 3^x + 1)\log_{x+1}|x - 3{,}5| \geqslant 0, \\ 9^{x+1} + \log_{x+1}|x - 3{,}5| + 1 \geqslant 10\cdot 3^x. \end{cases}$$

C4 Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая CD касается окружности, описанной около треугольника ABD.

а) Докажите, что диагональ BD равна одной из сторон параллелограмма.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $BD = 2$ и $\angle BCD = 45°$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2 - a(a^2+1)x + a^4 < 0$ имеет решение и множество решений неравенства содержится в интервале $(-3; 1)$.

C6 За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел и может быть так, что кто-то ел и то, и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

а) Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

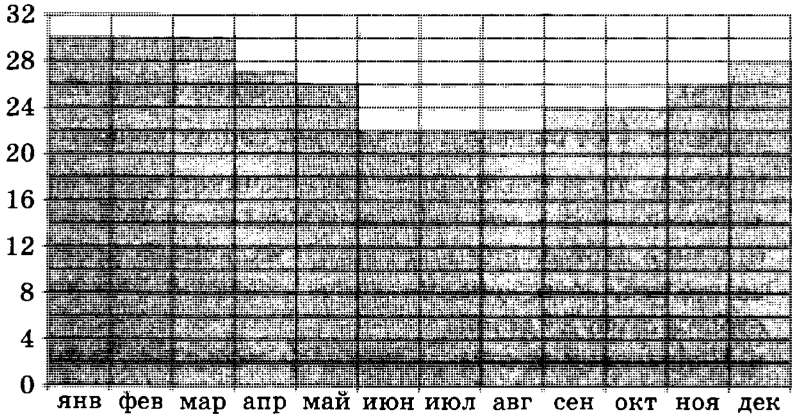
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а) и б)?

Диагностическая работа №18

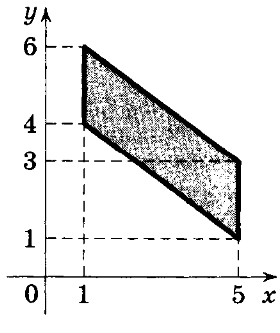
Часть 1

B1 В доме, в котором живет Толя, один подъезд. На каждом этаже по девять квартир. Толя живет в квартире 98. На каком этаже живет Толя?

B2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Рио-де-Жанейро за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько в 2009 году было месяцев, когда среднемесячная температура превосходила 25°C.



B3 Найдите площадь параллелограмма, вершинами которого являются точки с координатами (1; 4), (1; 6), (5; 3), (5; 1).



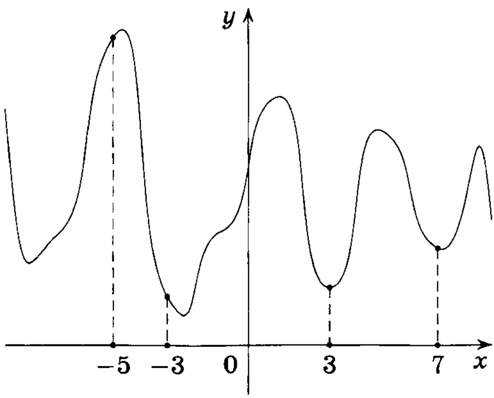
B4 В среднем гражданин А. в дневное время расходует 115 кВт·ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 175 кВт·ч электроэнергии. Раньше у А. в квартире был установлен однотарифный счетчик и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 2,4 руб. за кВт · ч. Год назад А. установил двухтарифный счетчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 2,4 руб. за кВт · ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 0,8 руб. за кВт · ч. В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. На сколько больше заплатил бы А. за этот период, если бы не поменялся счетчик? Ответ дайте в рублях.

B5 Найдите корень уравнения $\log_4(18-5x)=2\log_4 3$.

B6 Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите AC, если $CM=7$, $CN=8$, $BC=24$.

B7 Найдите значение выражения $3\cdot\sqrt[4]{64}\cdot\sqrt[12]{64}$.

B8 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и отмечены точки -5, -3, 3, 7. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



B9 Высота правильной треугольной пирамиды равна 12, а высота боковой грани пирамиды, проведенная к ребру основания, равна 13. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью ее основания.

B10 На турнир по шахматам прибыло 26 участников в том числе близнецы Коля и Толя. Для проведения жеребьевки первого тура участников случайным образом разбивают на две группы по 13 человек. Найдите вероятность того, что Коля и Толя попадут в разные группы.

B11 Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 15. Найдите объем шара.

B12 Два тела массой $m = 9$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 450 джоулей?

B13 На изготовление 468 деталей первый рабочий затрачивает на 8 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 520 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 6 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

B14 Найдите наибольшее значение функции $3x^5 - 20x^3 - 54$ на отрезке $[-4; -1]$.

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $3\,\mathrm{tg}^2\, x - 4\,\mathrm{tg}\, x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

C2 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M сторона основания равна 12, а боковое ребро равно 24. Точка G принадлежит ребру MA, причем $MG:GA = 2:1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки B и G параллельно прямой AC.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8 \leqslant 0, \\ 2\log_2 \dfrac{x-1}{2x+3} + \log_2(2x+3)^2 \geqslant 2. \end{cases}$$

C4 Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается боковой стороны AB в точке P, а основания BC — в точке M. Вторая окружность с центром O_1, касающаяся основания BC и продолжений боковых сторон, касается прямой AB в точке Q.

а) Докажите, что треугольник PMQ прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что высота треугольника, проведённая из вершины A, равна 45, а точка P делит боковую сторону AB в отношении 9:8, считая от вершины A.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^x - (a-1)\cdot 2^{x+1} + a^2 - 4a - 5 = 0$ имеет единственный корень.

C6 По окружности расставлено 40 ненулевых целых чисел с общей суммой 16. Любые два стоящих рядом числа отличаются не более чем на 6, и никакие четыре отрицательных числа не стоят подряд.

а) Среди этих 40 чисел найдите наибольшее возможное количество положительных.

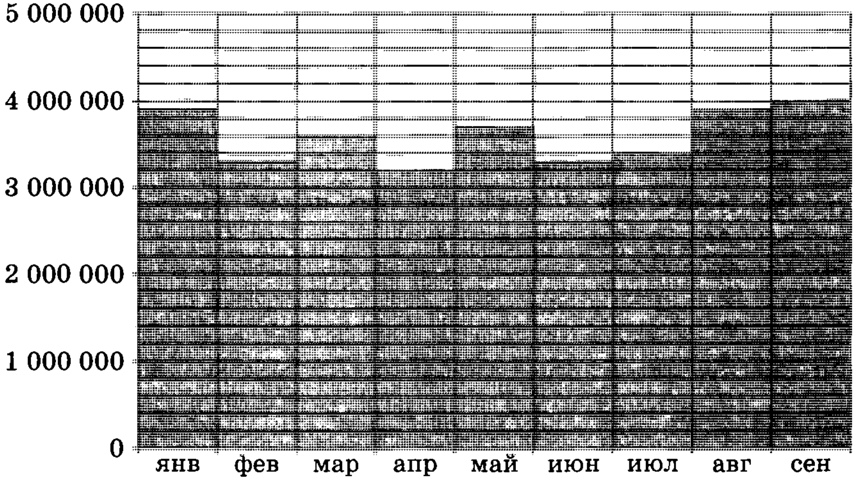
б) Среди этих 40 чисел найдите наименьшее возможное количество положительных.

Диагностическая работа №19

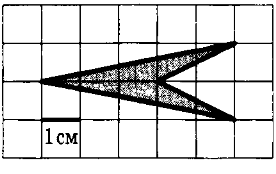
Часть 1

B1 В сентябре 1 кг винограда стоил 100 рублей, в октябре виноград подорожал на 25%, а в ноябре еще на 20%. Сколько рублей стоил 1 кг винограда после подорожания в ноябре?

B2 На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в указанный период, когда месячное число запросов со словом КИНО не превосходило 3 500 000.



B3 Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B4 Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за 1 минуту разговора
Повременный	Нет	0,3 руб.
Комбинированный	140 руб. за 350 мин. в месяц	0,25 руб. за 1 мин. сверх 350 мин. в месяц.
Безлимитный	200 руб. в месяц	

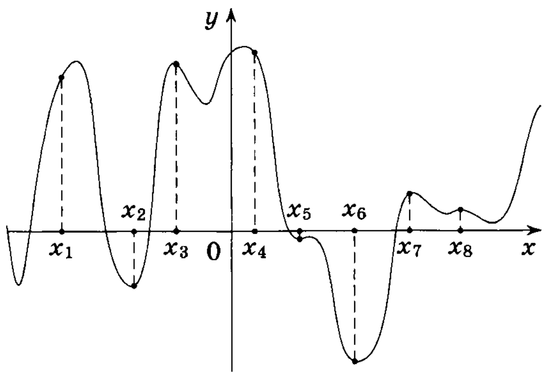
Абонент выбрал наиболее дешевый тарифный план исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составляет 800 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно будет равна 800 минутам? Ответ дайте в рублях.

B5 Найдите корень уравнения $x^2 + 3x - 10 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

B6 Отрезки AB и BC являются хордами окружности с центром O. Найдите угол ACB, если угол ABO равен $23°$. Ответ дайте в градусах.

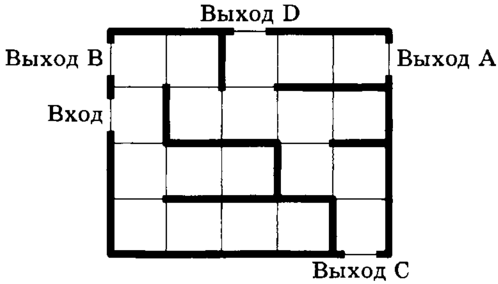
B7 Найдите значение выражения $\sqrt{18} - \sqrt{72}\sin^2\dfrac{5\pi}{8}$.

B8 На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам возрастания функции $f(x)$?



B9 Угол между плоскостью боковой грани правильной четырехугольной пирамиды и плоскостью основания пирамиды равен 30°, а сторона основания пирамиды равна 16. Найдите расстояние от основания высоты пирамиды до плоскости боковой грани.

B10 На рисунке изображен лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении выбирает один из путей, по которому еще не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придет к выходу D.



B11 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 7.

B12 Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h м над землей, до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 64 километров? Ответ выразите в метрах.

B13 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 567 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 6 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 54 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

B14 Найдите наименьшее значение функции $y=(21-x)e^{22-x}$ на отрезке $[16; 25]$.

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $4\cos^2 x - 12\cos x + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребро основания $AB=10\sqrt{3}$ и боковое ребро $AA_1=8$. Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости BA_1C_1.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x + 16\cdot 2^{-x} \geqslant 17, \\ 2\log_9(4x^2+1) \leqslant \log_3(3x^2+4x+1). \end{cases}$$

C4 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, H — точка пересечения высот.

а) Докажите, что точки B, D, H и E лежат на одной окружности.

б) Известно, что радиус этой окружности равен $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $AC=2$. Найдите угол между высотой CE и стороной BC.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2+(y-4)^2 = 16, \\ \sqrt{x^2+(y-12)^2} + \sqrt{(x-a)^2+y^2} = \sqrt{a^2+144}. \end{cases}$$

C6 На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -18.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

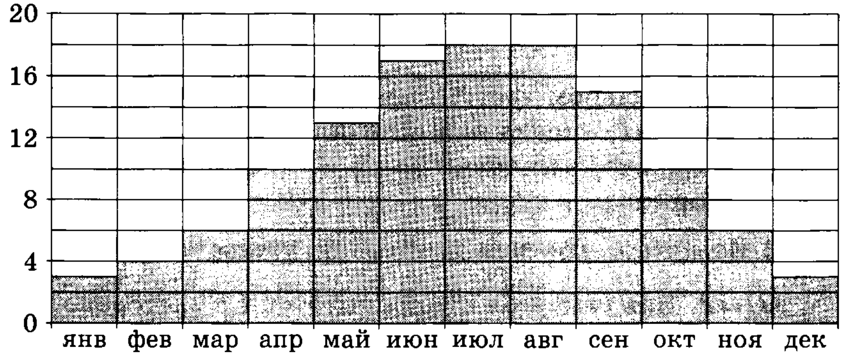
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Диагностическая работа №20

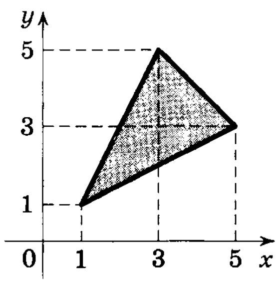
Часть 1

B1 Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 110 рублей за штуку и продает с наценкой 30%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 900 рублей?

B2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Париже за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



B3 Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются точки с координатами (1; 1), (3; 5), (5; 3).



B4 Независимое агентство каждый месяц определяет рейтинги R новостных сайтов на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель оценивается целыми числами от -2 до 2. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 25\cdot\left(\frac{2In + Op + 3Tr}{6} + 2\right).$$

В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких новостных сайтов. Определите наивысший рейтинг новостных сайтов, представленных в таблице. Запишите его в ответ, округлив до целого числа.

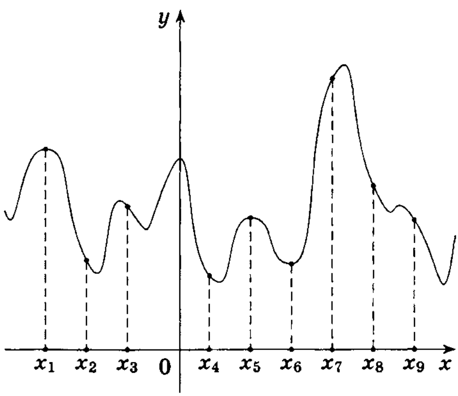
Сайт	Информативность	Оперативность	Объективность
VoKak.ru	2	−1	0
NashiNovosti.com	−2	1	−1
Bezvrak.ru	2	2	0
Zhizni.net	−1	−1	−2

B5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{10}{2x-8}} = \dfrac{1}{5}$.

B6 Сумма трех углов параллелограмма равна 197°. Найдите острый угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

B7 Найдите значение выражения $\dfrac{\log_5 49}{\log_5 7}$.

B8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_9. В скольких из этих точек производная $f'(x)$ функции $f(x)$ отрицательна?



B9 Высота правильной треугольной пирамиды в три раза меньше высоты основания пирамиды. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

B10 На экзамене 25 билетов, Стас не выучил 5 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный билет.

B11 Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 7 и 8. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

B12 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 65$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 20$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 35 км от города. Ответ выразите в минутах.

B13 Игорь и Паша красят забор за 40 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 48 часов, а Володя и Игорь — за 60 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

B14 Найдите наименьшее значение функции

$$y = -12 - 8{,}5\sqrt{3}\pi + 51\sqrt{3}x - 102\sin x$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AB = 4$, $AD = 12$, $AA_1 = 3$. Найдите расстояние от точки D до прямой AC_1.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \geqslant 0, \\ \log_3 \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x + 1} \leqslant 1. \end{cases}$$

C4 Около треугольника ABC описана окружность. Касательная к окружности, проходящая через точку B, пересекает прямую AC в точке M.

а) Докажите, что треугольники AMB и BMC подобны.

б) Найдите отношение $AM : MC$, если известно, что $AB : BC = 3 : 2$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} y^2 - (2a + 1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x - a)^2 + y^2} + \sqrt{(x - a)^2 + (y - 3)^2} = 3. \end{cases}$$

C6 В течение четверти учитель ставил школьникам отметки «1», «2», «3», «4», «5». Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным 4,7.

а) Какое наименьшее количество отметок могло быть у ученика?

б) Какое наименьшее количество отметок могло быть у ученика, если среди этих отметок есть отметка «1»?

в) Учитель заменил четыре отметки «3», «3», «5», «5» двумя отметками «4». На какое наибольшее число может увеличиться среднее арифметическое отметок ученика после такой замены?

Приложение
Реальные (открытые) варианты ЕГЭ по математике

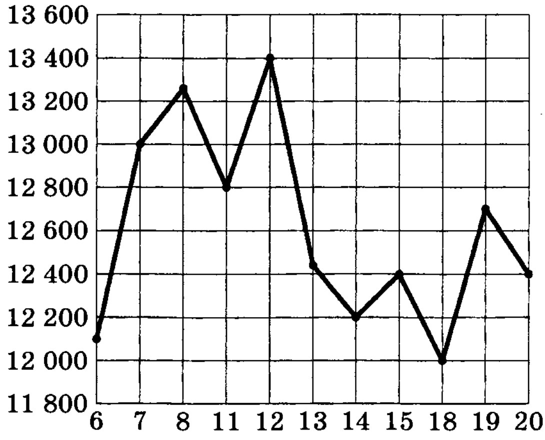
2012 год

Вариант 403

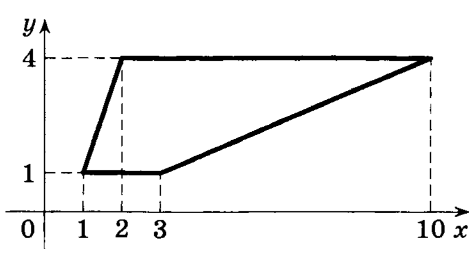
Часть 1

B1 Поезд Москва—Ижевск отправляется в 17 : 41, а прибывает в 10 : 41 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

B2 На рисунке жирными точками показана цена тонны никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



B3 Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



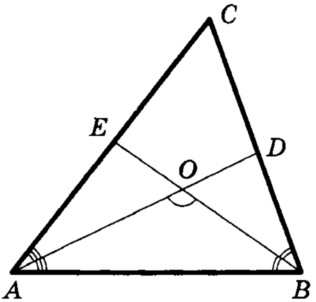
B4 В таблице даны тарифы на услуги трех фирм такси. Предполагается поездка длительностью 70 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость 1 минуты поездки сверх продолжительности минимальной поездки
А	300 руб.	Нет	14 руб.
Б	Бесплатно	15 мин, 225 руб.	17 руб.
В	120 руб.	20 мин, 350 руб.	16 руб.

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

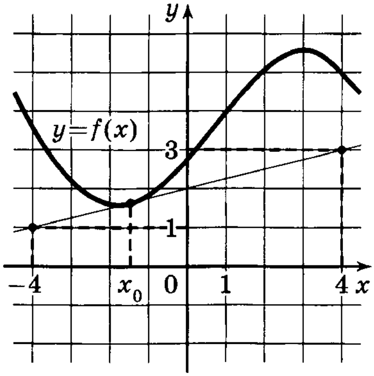
B5 Найдите корень уравнения $\log_3(x+2)=2$.

B6 В треугольнике ABC угол C равен 58°, биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

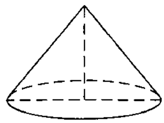


B7 Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{29}}{29}$ и $\alpha\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

B8 На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



B9 Диаметр основания конуса равен 40, а длина образующей — 25. Найдите высоту конуса.



B10 В среднем из 900 садовых насосов, поступивших в продажу, 27 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

B11 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 98 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 7 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

B12 Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 120 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = pq$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит 320 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

B13 На изготовление 540 деталей первый рабочий затрачивает на 12 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

B14 Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-9)^2(x+4) - 4$$

на отрезке [7; 16].

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $4\sin^3 x = \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 1, боковые ребра равны 3, точка D — середина ребра CC_1. Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 5^{x+2} + 2\cdot 5^{-x} \leqslant 51, \\ \log_{2x} 0{,}25 \geqslant \log_2 32x - 1. \end{cases}$$

C4 Дан треугольник со сторонами 26, 26 и 20. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a|x-3| = \frac{5}{x+2}$$

на промежутке $[0; +\infty)$ имеет ровно два корня.

C6 Моток веревки режут без остатка на куски длиной не меньше 115 см, но не больше 120 см (назовем такие куски стандартными).

а) Некоторый моток веревки разрезали на 23 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток веревки?

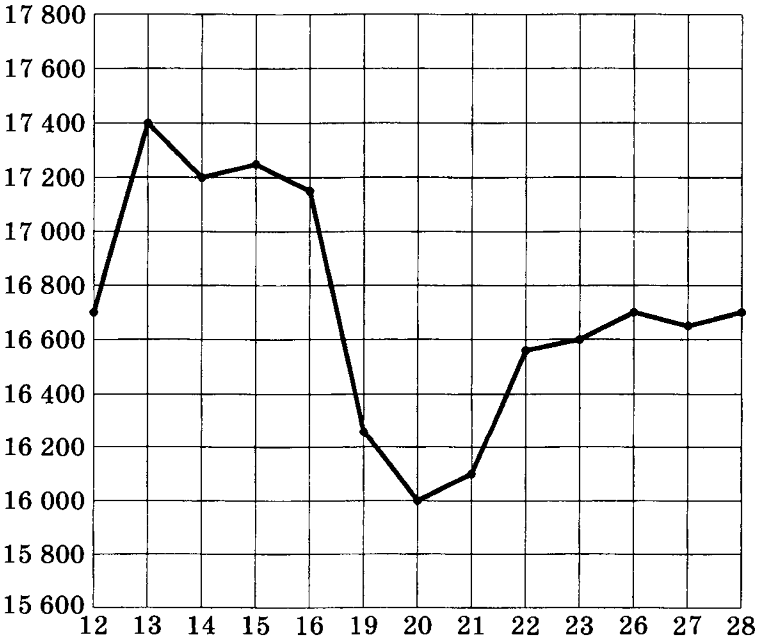
б) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток веревки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

Вариант 905

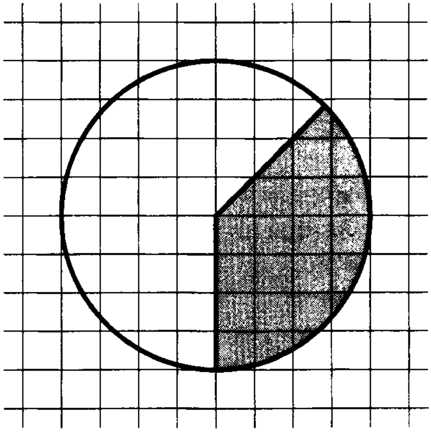
Часть 1

B1 Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 2%. Книга стоит 150 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

B2 На рисунке жирными точками показана цена тонны олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 12 по 28 ноября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену тонны олова на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



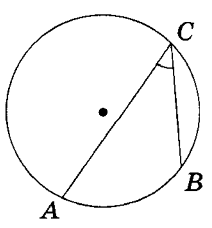
B3 Площадь круга, изображенного на клетчатой бумаге, равна 16. Найдите площадь заштрихованного кругового сектора.



B4 Чтобы связать свитер, хозяйке нужно 900 граммов шерсти синего цвета. Можно купить синюю пряжу по цене 70 рублей за 100 г, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 60 рублей за 100 г и окрасить ее. Один пакетик краски стоит 40 рублей и рассчитан на окраску 300 г пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответе напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

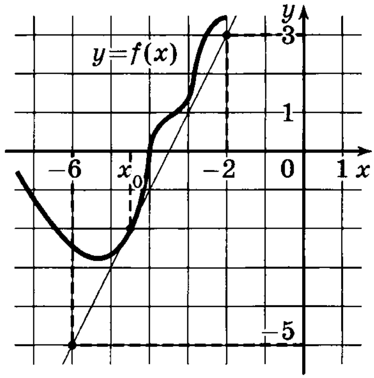
B5 Найдите корень уравнения $(x+7)^3=216$.

B6 На окружности отмечены точки A, B и C. Дуга окружности AC, не содержащая точку B, составляет $200°$. Дуга окружности BC, не содержащая точку A, составляет $80°$. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.

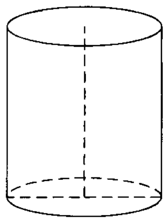


B7 Найдите значение выражения $\dfrac{\log_8 14}{\log_{64} 14}$.

B8 На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

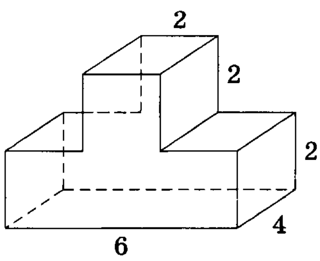


B9 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 12π, а диаметр основания равен 6. Найдите высоту цилиндра.



B10 В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.

B11 Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



B12 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора получена экспериментально: $T = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1450$ К, $a = -30$ К/мин^2, $b = 180$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Через сколько минут после начала работы нужно отключить прибор?

B13 В сосуд, содержащий 7 литров 15-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 8 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

B14 Найдите наибольшее значение функции $y = 12 \cdot \ln(x+2) - 12x + 7$ на отрезке $[-1{,}5; 0]$.

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $\log_7(2\cos^2 x + 3\cos x - 1) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$. Найдите угол между прямой A_1B_1 и плоскостью AB_1D_1.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \geqslant 0, \\ \log_3 \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x+1} \leqslant 1. \end{cases}$$

C4 На прямой, содержащей биссектрису AD прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, взята точка E, удаленная от вершины A на расстояние, равное $\sqrt{26}$. Найдите площадь треугольника BCE, если $BC = 5$, $AC = 12$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2x^2 - 3x - 2| = a - 2x^2 - 8x$$

либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

С6 Максим должен был умножить двузначное число на трехзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал трехзначное число справа к двузначному, получив пятизначное число, которое оказалось в N раз (N — натуральное число) больше правильного результата.

а) Могло ли N равняться 2?

б) Могло ли N равняться 10?

в) Каково наибольшее возможное значение N?

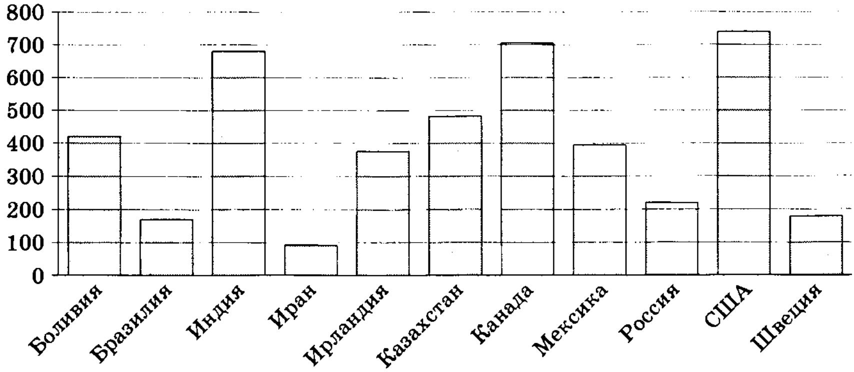
2013 год

Вариант 202

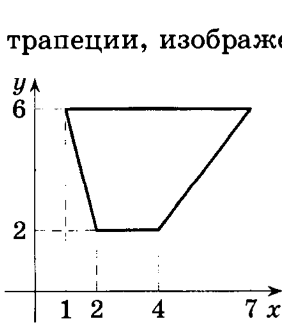
Часть 1

B1 В квартире, где проживает Анастасия, установлен прибор учета расхода холодной воды (счетчик). 1 сентября счетчик показывал расход 122 куб. м воды, а 1 октября — 142 куб. м. Какую сумму должна заплатить Анастасия за холодную воду за сентябрь, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 9 руб. 90 коп.? Ответ дайте в рублях.

B2 На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке цинка занимали США, одиннадцатое место — Иран. Какое место занимал Казахстан?



B3 Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



B4 Автомобильный журнал определяет рейтинг автомобилей на основе показателей безопасности S, комфорта C, функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трех моделей автомобилей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице автомобилей.

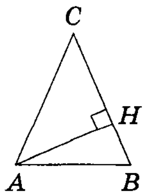
Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	1	4	5	4	2
Б	5	4	5	4	1
В	2	5	4	2	5

B5 Найдите корень уравнения $5^{9+x} = 125$.

B6 В треугольнике ABC

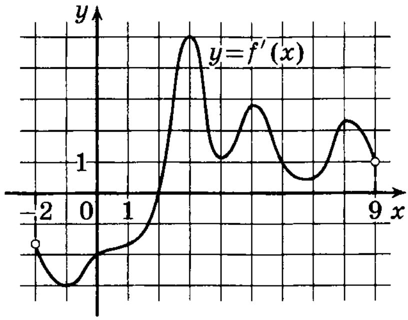
$$AC = BC, \quad AB = 15,$$

AH — высота, $BH = 6$. Найдите косинус угла BAC.

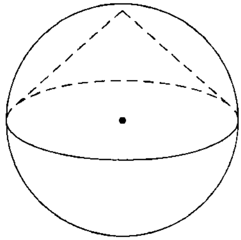


B7 Найдите значение выражения $\log_5 312{,}5 - \log_5 2{,}5$.

B8 На рисунке изображен график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка [2; 8] функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

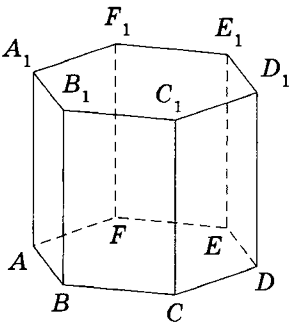


B9 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Образующая конуса равна $50\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.



B10 На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 4 прыгуна из Италии и 6 прыгунов из Мексики. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что двадцать четвертым будет выступать прыгун из Италии.

B11 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки D, E, F, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 8, а боковое ребро равно 9.



B12 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 247 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \cdot \dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отраженного сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 18 м/с.

B13 Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 42 килограммов изюма, если виноград содержит 82% воды, а изюм содержит 19% воды?

B14 Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x^2 + 36}{x}$.

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $\left(16^{\sin x}\right)^{\cos x} = 4^{\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

C2 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 18, а боковые ребра равны 15. Точка R принадлежит ребру MB, причем

$MR:RB=2:1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки C и R параллельно прямой BD.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{7-x}(14+5x-x^2) \leqslant 1, \\ x-5-\dfrac{11x+12}{x^2+2x} \geqslant -\dfrac{5}{x+2}. \end{cases}$$

C4 Окружности радиусов 4 и 13 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке L. Прямая, проходящая через точку L, вторично пересекает меньшую окружность в точке K, а большую — в точке M. Найдите площадь треугольника KMO_1, если $\angle LMO_2=22{,}5^\circ$.

C5 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$6a+\sqrt{5+4x-x^2}=ax+3$$

имеет единственный корень.

C6 а) Чему равно число способов записать число 1193 в виде $1193=a_3\cdot 10^3+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$, где числа a_i — целые, $0\leqslant a_i\leqslant 99$, $i=0;\ 1;\ 2;\ 3$?

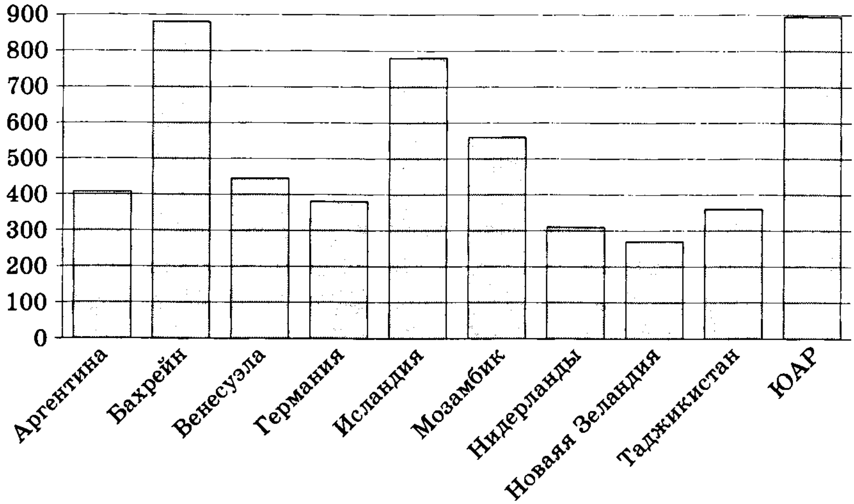
б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N=a_3\cdot 10^3+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$, где числа a_i — целые, $0\leqslant a_i\leqslant 99$, $i=0;\ 1;\ 2;\ 3$, ровно 120 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N=a_3\cdot 10^3+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$, где числа a_i — целые, $0\leqslant a_i\leqslant 99$, $i=0;\ 1;\ 2;\ 3$, ровно 120 способами?

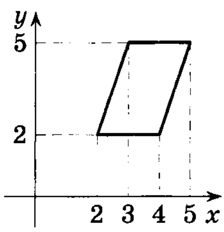
Вариант 303

B1 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 20 копеек. Счетчик электроэнергии 1 ноября показывал 669 киловатт-часов, а 1 декабря показывал 846 киловатт-часов. Какую сумму нужно заплатить за электроэнергию за ноябрь? Ответ дайте в рублях.

B2 На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по объему выплавки занимал Бахрейн, десятое место — Новая Зеландия. Какое место среди представленных стран занимала Венесуэла?



B3 Найдите площадь параллелограмма, изображенного на рисунке.



B4 Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок. Либо скидку 30% на звонки абонентам других сотовых компаний в своем регионе, либо скидку 20% на звонки в другие регионы, либо скидку 15% на услуги мобильного интернета.

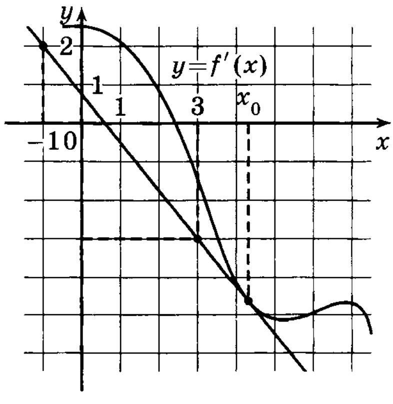
Клиент посмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 310 рублей на звонки абонентам других компаний в своем регионе, 415 рублей на звонки в другие регионы и 560 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Сколько рублей составит эта скидка, если звонки и пользование Интернетом сохранятся в прежнем объеме?

B5 Найдите корень уравнения $\log_2(-3x+8)=7$.

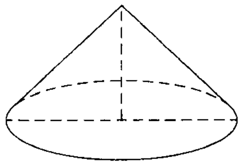
В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен $104°$, угол CAD равен $6°$. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

B6 Найдите значение выражения $30\,\mathrm{tg}\,3°\cdot\mathrm{tg}\,87°-43$.

B7 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

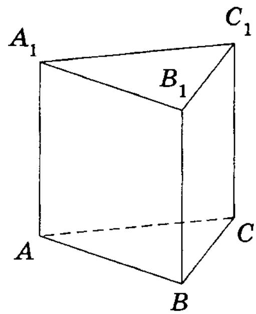


B8 Высота конуса равна 21, а длина образующей равна 29. Найдите диаметр основания конуса.



B9 В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос про Александра Второго. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос про Александра Второго.

B10 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки C, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 9.



B11 При сближении источника и приемника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приемником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 170$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \cdot \dfrac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 12$ м/с и $v = 6$ м/с — скорости приемника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приемнике f будет не менее 180 Гц?

B12 Девять одинаковых рубашек дешевле куртки на 10%. На сколько процентов одиннадцать таких же рубашек дороже куртки?

B13 Найдите наименьшее значение функции $y = 69\cos x + 71x + 48$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Часть 2

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

C2 В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 22, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру B_1C_1 и делит его в отношении $6:5$, считая от вершины B_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{8-x} \dfrac{(x-8)^{10}}{x-1} \geqslant 10, \\ \dfrac{x^2-9x+15}{x-2} + \dfrac{x^2-7x+4}{x-7} \leqslant 2x-7. \end{cases}$$

C4 Окружности радиусов 13 и 20 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C, AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причем $\angle AO_1O_2 = 60°$. Найдите AB.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (2-a)^2 = |x-2+a| + |x-a+2|$$

имеет единственный корень.

С6 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -9, -6, -4, -3, -1, 2, 5. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Ответы

Диагностическая работа №1

B1. 192. **B2.** −6. **B3.** 10. **B4.** 11200. **B5.** 10. **B6.** 94. **B7.** −43,68. **B8.** 4. **B9.** 8. **B10.** 0,3. **B11.** 5. **B12.** 6000. **B13.** 20. **B14.** −21. **C1.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$. **C2.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **C3.** $[0;\,3)\cup(3;\,4]\cup[5;\,8-\sqrt{7})$. **C4.** 1,2. **C5.** $(-11;\,-1)$. **C6.** а) −5, 3, 6; б) 6; в) нет.

Диагностическая работа №2

B1. 35. **B2.** 5. **B3.** 4. **B4.** 2,25. **B5.** 22. **B6.** 17. **B7.** 0. **B8.** 1,8. **B9.** 45. **B10.** 0,98. **B11.** 54. **B12.** 6000. **B13.** 8. **B14.** 3. **C1.** а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$. **C2.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **C3.** $[-1-\log_3 4;\,-2)\cup(3;\,12]$. **C4.** 2. **C5.** −2,5, −9,5. **C6.** а) нет; б) нет; в) да.

Диагностическая работа №3

B1. 22. **B2.** 2. **B3.** 8. **B4.** 238000. **B5.** −9. **B6.** 44. **B7.** 2. **B8.** 6. **B9.** 90. **B10.** 0,48. **B11.** 5. **B12.** 1,8. **B13.** 300. **B14.** 11.

Диагностическая работа №4

B1. 32. **B2.** 11. **B3.** 9. **B4.** 387000. **B5.** 6. **B6.** 11. **B7.** 2. **B8.** 7. **B9.** 9. **B10.** 0,375. **B11.** 8. **B12.** 1000. **B13.** 40. **B14.** 0,5.

Задача B1. Подготовительные задания

1. 11,6. **2.** 221. **3.** 6. **4.** 200. **5.** 12 800. **6.** 9. **7.** 8. **8.** 15. **9.** 6. **10.** 672.

Зачетные задания

1. 163. **2.** 4. **3.** 9. **4.** 356. **5.** 10890. **6.** 2350. **7.** 400. **8.** 36. **9.** 21. **10.** 64800.

Задача B2. Подготовительные задания

1. 22. **2.** −14. **3.** 4. **4.** 5. **5.** 8. **6.** 4. **7.** 19. **8.** 1. **9.** 6000. **10.** 10.

Зачетные задания

1. 400 000. **2.** 2. **3.** 9. **4.** 8. **5.** −31. **6.** −19. **7.** 17. **8.** 60. **9.** 3. **10.** 90.

Задача B3. Подготовительные задания

1. 3. **2.** 16. **3.** 14. **4.** 21. **5.** 15. **6.** 6. **7.** 7,5. **8.** 22. **9.** 10. **10.** 5.

Зачетные задания

1. 6. **2.** 8. **3.** 8. **4.** 7,5. **5.** 9. **6.** 12. **7.** 10. **8.** 3. **9.** 9. **10.** 12.

Задача B4. Подготовительные задания
1. 1035. 2. 1026. 3. 40. 4. 0,82. 5. 67 950. 6. 150. 7. 10193. 8. 405900. 9. 1100. 10. 35700.

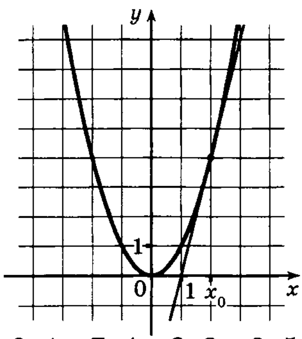
Зачетные задания
1. 154700. 2. 9100. 3. 820. 4. 200. 5. 1197. 6. 9440. 7. 1,1. 8. 1. 9. 503100. 10. 285.

Задача B5. Подготовительные задания
1. 2. 2. 49. 3. 25. 4. 0,09. 5. 0,125. 6. 4. 7. 5. 8. −4. 9. −3. 10. 39.

Зачетные задания
1. −0,5. 2. −10. 3. −8. 4. −10. 5. −4. 6. 5. 7. 1. 8. −2. 9. 8. 10. 5.

Задача B6. Подготовительные задания
1. 33. 2. 9,5. 3. 18. 4. 118. 5. 26. 6. 34. 7. 1787. 8. 168. 9. 24. 10. 11.

Зачетные задания
1. 73. 2. 66. 3. 11. 4. 22. 5. 67. 6. 53. 7. 134. 8. 46. 9. 28. 10. 5.



Задача B7. Подготовительные задания
1. 5. 2. 2. 3. 4. 4. −3. 5. −2. 6. −4. 7. −2. 8. 3. 9. 1. 10. 2.

Зачетные задания
1. 36. 2. −1102. 3. 2. 4. 100. 5. 36. 6. 22. 7. −16. 8. 3. 9. −0,5. 10. 2.

Задача B8. Подготовительные задания
1. См. рисунок. 2. 10. 3. 5. 4. −7. 5. 2. 6. 4. 7. 4. 8. 3. 9. 5. 10. 6.

Зачетные задания
1. 7. 2. −0,75. 3. −3. 4. 7. 5. 5. 6. −1. 7. 4. 8. 0. 9. 7. 10. 8.

Задача B9. Подготовительные задания
1. 12. 2. 6. 3. 2,5. 4. 60. 5. 45. 6. 60. 7. 8. 8. 3. 9. 12. 10. 60.

Зачетные задания
1. 8. 2. 0,6. 3. 3. 4. 6. 5. 10. 6. 60. 7. 6. 8. 90. 9. 2,5. 10. 60.

Задача B10. Подготовительные задания
1. 0,5. 2. $\frac{1}{12}$. 3. 0,14. 4. 0,35. 5. 0,2. 6. 0,2. 7. 0,7. 8. 0,125. 9. $\frac{2}{3}$. 10. 0,52.

Зачетные задания
1. 0,5. **2.** 0,5. **3.** 0,16. **4.** 0,95. **5.** 0,25. **6.** 0,3. **7.** 0,25. **8.** 0,1. **9.** 0,5. **10.** 0,48.

Задача B11. Подготовительные задания
1. 8. **2.** 70. **3.** 15. **4.** 2. **5.** 300. **6.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{4\pi}{3}$. **7.** 3. **8.** 100. **9.** 8. **10.** 75.

Зачетные задания
1. 8. **2.** 27. **3.** 5. **4.** 4,5. **5.** 13. **6.** 16. **7.** 2. **8.** 3. **9.** 3. **10.** 8.

Задача B12. Подготовительные задания
1. 540. **2.** 27,5. **3.** 132. **4.** 21. **5.** 10000. **6.** 380. **7.** 2,2. **8.** 60. **9.** 3,4. **10.** 48.

Зачетные задания
1. 25. **2.** 8. **3.** 2,5. **4.** 50. **5.** 2. **6.** 4000. **7.** 40. **8.** 15. **9.** 6250. **10.** 45.

Задача B13. Подготовительные задания
1. 150. **2.** 780. **3.** 180. **4.** 6. **5.** 8. **6.** $\frac{10}{13}$. **7.** 12,5. **8.** 5. **9.** 144. **10.** 80.

Зачетные задания
1. 3. **2.** 30. **3.** 50. **4.** 16. **5.** 75. **6.** 10. **7.** 20. **8.** 20. **9.** 100. **10.** 18.

Задача B14. Подготовительные задания
1. $h'(x) = 4x^3 + 2$. **2.** $h'(x) = 2e^{2x}$. **3.** $h'(x) = 5\cos x$. **4.** $h'(x) = \frac{7}{x}$. **5.** $-0{,}7$. **6.** $\frac{\pi}{2}$. **7.** 6,5. **8.** 12. **9.** 22. **10.** -20.

Зачетные задания
1. -1. **2.** 10. **3.** 18. **4.** 16. **5.** 0,75. **6.** 8. **7.** 3,4. **8.** 2. **9.** $-4{,}8$. **10.** 10.

Диагностическая работа №5
B1. 8. **B2.** 10. **B3.** 10,5. **B4.** 731,5. **B5.** 32. **B6.** 36. **B7.** 2. **B8.** 4. **B9.** 40. **B10.** 0,2. **B11.** 15. **B12.** 30. **B13.** 75. **B14.** 13.

Диагностическая работа №6
B1. 3. **B2.** 20. **B3.** 7,5. **B4.** 54. **B5.** -7. **B6.** 8. **B7.** 4. **B8.** 3. **B9.** 2. **B10.** 0,25. **B11.** 45. **B12.** 30. **B13.** 72. **B14.** 4.

Диагностическая работа №7

С1. а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $(-1)^{m+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi m$, $n, m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi-\arcsin\frac{2}{3}$, $\pi+\arcsin\frac{2}{3}$. **С2.** 6. **С3.** -1; $-2{,}5$. **С4.** 3. **С5.** $a=-3$; $a=1$. **С6.** а) 44; б) отрицательных; в) 17.

Диагностическая работа №8

С1. а) $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) -3π; $-\frac{17\pi}{6}$; -2π. **С2.** 0,5. **С3.** 3. **С4.** 1 : 2. **С5.** $a=-4$, b любое; $a=4$, $b=2$. **С6.** а) 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22.

Задача С1. Подготовительные задания

1. а) $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) -3π. **2.** а) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{13\pi}{6}$. **3.** а) $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\arccos\frac{1}{3}-4\pi$. **4.** а) $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) -2π; 0. **5.** а) $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) -3π. **6.** а) $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{10\pi}{3}$; -3π; $-\frac{8\pi}{3}$; -2π. **7.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$. **8.** а) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$. **9.** а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$. **10.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$.

Зачетные задания

1. а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $(-1)^m\arcsin\frac{3}{4}+\pi m$, n, $m\in\mathbb{Z}$; б) $\arcsin\frac{3}{4}$, $\pi-\arcsin\frac{3}{4}$. **2.** а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$. **3.** а) $x=-\frac{3}{2}$; $x=4$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$. **4.** а) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-3\pi-\arcsin\frac{1}{3}$. **5.** а) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}$; $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$; $2\pi-\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. **6.** а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{4}$. **7.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$. **8.** а) $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m$,

$m \in \mathbb{Z}$; б) $3\frac{1}{6}\pi$; $\frac{7\pi}{2}$. **9.** а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$. **10.** а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}$, $-\frac{13\pi}{6}$.

Задача С2. Подготовительные задания

1. 13. **2.** 20. **3.** 3. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** 1,5. **6.** arctg $\sqrt{10}$. **7.** 8. **8.** $\sqrt{3}$. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **10.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Зачетные задания

1. 5. **2.** 4. **3.** 6. **4.** 6. **5.** 2. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 6. **9.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Задача С3. Подготовительные задания

1. 3. **2.** $(1{,}5;\ 2) \cup (4;\ \infty)$. **3.** $(-4;\ -3{,}5) \cup (-3;\ -2{,}5)$. **4.** 3. **5.** $(0;\ 0{,}1] \cup [10000;\ \infty)$. **6.** $(3;\ 27)$. **7.** $(-1;\ 0) \cup (0;\ 0{,}5] \cup (1;\ 2]$. **8.** $(6;\ 7) \cup (7;\ \infty)$. **9.** 9. **10.** $(7;\ 13]$.

Зачетные задания

1. 0; 3. **2.** $(1;\ 2)$. **3.** $\left[\frac{1}{8};\ 1\right) \cup (1;\ 16] \cup (64;\ \infty)$. **4.** $\left(-\frac{1}{3};\ 0\right) \cup \{1\}$. **5.** $[2;\ \infty)$. **6.** $(-2;\ 3)$. **7.** $\{-3\} \cup [2;\ \infty)$. **8.** $(4;\ 64]$. **9.** $[-4;\ -1] \cup \{1\}$. **10.** $[0;\ 0{,}25) \cup \{4\}$.

Задача С4. Подготовительные задания

1. 60°, 60°, 120°, 120°. **2.** 48. **3.** 50. **4.** 20. **5.** $3\sqrt{5}$. **5.** 1 : 1. **6.** $\frac{1}{3}$. **7.** 9 : 16. **8.** 90°. **9.** $3\sqrt{13}$. **10.** 90°.

Зачетные задания

1. 30. **2.** 5. **3.** 216. **4.** 60°. **5.** 3,5. **6.** 49. **7.** 2,4. **8.** $2\sqrt{5}$. **9.** 113. **10.** $2\sqrt{41}$.

Задача С5. Подготовительные задания

1. $a = 1$: $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 2\pi k\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$; при прочих a решений нет. **2.** $a \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 4)$. **3.** $a \in \left(-\infty;\ \frac{1}{8}\right]$. **4.** $[1 - \sqrt{7};\ 3\sqrt{2}]$. **5.** $a = 0$; $a = \pm 4$. **6.** $a \in (-\infty;\ -6] \cup [6;\ +\infty)$. **7.** $\pm(\sqrt{5} - 2)$; $\pm(\sqrt{5} + 2)$. **8.** $a \in (-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty)$. **9.** $a \in [3;\ 9)$. **10.** $a \in [-4;\ -2]$: $x = \pm \arccos(a + 3) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; при прочих a корней нет.

Зачетные задания

1. $a = -2$. **2.** $a \in [-2;\ -0{,}5]$. **3.** $a \in (-\infty;\ -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7};\ +\infty)$. **4.** $a > 0$: $x = 2a + 1 + \sqrt{3a + 1}$; $a \in \left[-\frac{1}{3};\ 0\right]$: $x = 2a + 1 \pm \sqrt{3a + 1}$; при прочих

a корней нет. **5.** a — любое иррациональное число. **6.** $a \in [1; +\infty)$. **7.** $a = 3$. **8.** $a = 0$; $a = 2\sin 1$. **9.** $x = 1$. **10.** $b \in (-4; -1)$.

Задача С6. Подготовительные задания

1. Только на 7. **2.** $n = 11$. **3.** 40 500 000 001. **4.** Неверно. **5.** $x = y = z = 2$. **6.** Например, $a = 2$, $b = 20$. **7.** $x = \left[\frac{10}{7}\right] = 1$, $y = \left[\frac{1}{\frac{10}{7} - 1}\right] = 2$, $z = 3$. **8.** Нельзя. **9.** $n = 1806$. **10.** 8910.

Зачетные задания

1. а) 3; б) 72. **2.** а) нет; б) нет; в) да. **3.** а) да; б) нет. **4.** а) нет; б) да; в) 477. **5.** а) нет; б) нет; в) 4. **6.** а) да; г) например, 1, 126, ..., 8876. **7.** а) $-3, 2, 4$; б) 5; в) нет. **8.** а) например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)$; б) например, $(1+7+1)\cdot(7+1+7)\cdot(1+7+1)\cdot(7+1+7+1)$. **9.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{11}{3}$; в) $\frac{41}{11}$. **10.** а) да; б) 11; в) $\frac{6}{13}$.

Диагностическая работа №9

С1. а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$. **С2.** $\frac{2}{3}$. **С3.** $[-\log_2 5; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup [3; +\infty)$. **С4.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **С5.** $a = -2$. **С6.** а) 160; б) да; в) 20.

Диагностическая работа №10

С1. а) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}$, $-\frac{13\pi}{6}$. **С2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **С3.** $[-2; -1) \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; 1)$. **С4.** 9. **С5.** $a = -\frac{1}{4}$; $a = -\frac{1}{32}$. **С6.** а) $-8, -5, 7$; б) 7; в) нет.

Диагностическая работа №11

В1. 1449. **В2.** 4000000. **В3.** 3. **В4.** 18. **В5.** 45. **В6.** 34. **В7.** 2. **В8.** 4. **В9.** 10. **В10.** 0,1. **В11.** 30. **В12.** 7. **В13.** 9. **В14.** 5. **С1.** а) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 3 + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi - \operatorname{arctg} 2$, $-\pi - \operatorname{arctg} 3$. **С2.** 2. **С3.** $\{-3; 0\} \cup [1; 2)$. **С4.** 26. **С5.** $a = 2$. **С6.** а) нет; б) нет; в) 38.

Диагностическая работа №12

В1. 211,2. **В2.** 7000. **В3.** 10,5. **В4.** 168000. **В5.** -1. **В6.** 3. **В7.** 12. **В8.** 3. **В9.** 0,7. **В10.** 0,96. **В11.** 20. **В12.** 0,3. **В13.** 10. **В14.** -1. **С1.** а) $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) 3π; $\frac{23\pi}{6}$; 4π. **С2.** $\sqrt{481}$.

С3. -3; 0; $[1; 2)$. **С4.** 49. **С5.** $a=\frac{4}{3}$. **С6.** а) нет; б) 8, a_2 и a_{10}; в) 8190 или 105.

Диагностическая работа №13

В1. 13. **В2.** 4. **В3.** 7. **В4.** 754600. **В5.** 7. **В6.** 28. **В7.** 10. **В8.** $-0{,}5$. **В9.** 6. **В10.** 0,2. **В11.** 864. **В12.** 1,6. **В13.** 120. **В14.** 48. **С1.** а) $2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{7}+2\pi m$, n, $m\in\mathbb{Z}$; б) 0, $\pm\arccos\frac{1}{7}$. **С2.** $7\sqrt{19}$. **С3.** $(2; 3)$. **С4.** 1 и 4. **С5.** $a=1$. **С6.** а) нет; б) нет; в) да.

Диагностическая работа №14

В1. 72. **В2.** 4500. **В3.** 10. **В4.** 23,5. **В5.** 16. **В6.** 21. **В7.** 2. **В8.** 0,25. **В9.** 45. **В10.** 0,375. **В11.** 5. **В12.** 180. **В13.** 15,4. **В14.** 1. **С1.** а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$. **С2.** $9\sqrt{91}$. **С3.** $(6; 7)$. **С4.** 2. **С5.** -8; 0; 1; 9. **С6.** а) например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1)$; б) например, $(1+4+1)\cdot(4+1+4)\cdot(1+4+1)\cdot(4+1+4)\cdot(1+1)$.

Диагностическая работа №15

В1. 8. **В2.** 6. **В3.** 6. **В4.** 32. **В5.** 0,25. **В6.** 9. **В7.** -2. **В8.** 5. **В9.** 3. **В10.** 0,5. **В11.** 512. **В12.** 25. **В13.** 25. **В14.** -5. **С1.** а) $\pm\arccos\frac{2}{5}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi-\arccos\frac{2}{5}$, $-2\pi+\arccos\frac{2}{5}$. **С2.** $4\sqrt{6}$. **С3.** $\{-4\}\cup[3{,}5; 4]$. **С4.** $\frac{55}{7}$. **С5.** $a=4$. **С6.** а) нет; б) нет; в) 4.

Диагностическая работа №16

В1. 7. **В2.** 8. **В3.** 20. **В4.** 786. **В5.** 1,5. **В6.** 120. **В7.** 535. **В8.** 3. **В9.** 3. **В10.** 0,6. **В11.** 84. **В12.** 37. **В13.** 30. **В14.** 28. **С1.** а) $2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi m$, n, $m\in\mathbb{Z}$; $-2\pi-\arccos\frac{1}{6}$, -2π, $-2\pi+\arccos\frac{1}{6}$. **С2.** $8\sqrt{6}$. **С3.** $(-2; -1)$. **С4.** 4,5. **С5.** $a=b=-2$. **С6.** а) нет; б) да; в) 549.

Диагностическая работа №17

В1. 2100. **В2.** 1500000. **В3.** 4. **В4.** 5850. **В5.** 1,5. **В6.** 92. **В7.** 2. **В8.** 2. **В9.** 0,8. **В10.** 0,25. **В11.** 10. **В12.** 8. **В13.** 20. **В14.** 8. **С1.** а) $\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi n$, $\pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi m$, n, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi+\arccos\frac{1}{4}$, $-2\pi+\arccos\frac{2}{3}$. **С2.** $2\sqrt{7}$. **С3.** $(0; 2{,}5]\cup[4{,}5; \infty)$. **С4.** 4. **С5.** $a\in[-\sqrt[3]{3}; -1)\cup(-1, 0)\cup(0, 1)$. **С6.** а) да; б) 13; в) $\frac{33}{70}$.

Диагностическая работа №18

B1. 11. **B2.** 7. **B3.** 8. **B4.** 3360. **B5.** 1,8. **B6.** 21. **B7.** 12. **B8.** −3. **B9.** 2,4. **B10.** 0,52. **B11.** 10. **B12.** 90. **B13.** 26. **B14.** 10. **C1.** а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{7}{3}+\pi m$, $n, m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}\frac{7}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$. **C2.** 96. **C3.** $[-2; -1{,}5)\cup\{3\}$. **C4.** 40. **C5.** $a\in(-1; 5]$. **C6.** а) 37; б) 10.

Диагностическая работа №19

B1. 150. **B2.** 4. **B3.** 3. **B4.** 200. **B5.** 2. **B6.** 67. **B7.** −3. **B8.** 5. **B9.** 4. **B10.** 0,0625. **B11.** 14. **B12.** 320. **B13.** 24. **B14.** −1. **C1.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$. **C2.** $\frac{120}{17}$. **C3.** 0; 4. **C4.** 30°. **C5.** $a=\pm4\sqrt{3}$. **C6.** а) 36; б) отрицательных; в) 16.

Диагностическая работа №20

B1. 6. **B2.** 18. **B3.** 6. **B4.** 75. **B5.** 129. **B6.** 17. **B7.** 2. **B8.** 5. **B9.** 45. **B10.** 0,8. **B11.** 142. **B12.** 30. **B13.** 32. **B14.** −63. **C1.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi m$, $n, m\in\mathbb{Z}$; б) $-\arccos\frac{1}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\arccos\frac{1}{3}$. **C2.** $\frac{60}{13}$. **C3.** $\left(-\frac{5}{2}; -2\right]\cup\{2\}$. **C4.** 9 : 4. **C5.** $a\in[-2; 1)\cup(1; 4]$. **C6.** а) 10; б) 20; в) $\frac{7}{90}$.

2012 год

Вариант 403

B1. 17. **B2.** 1400. **B3.** 15. **B4.** 1160. **B5.** 7. **B6.** 119. **B7.** 0,4. **B8.** 0,25. **B9.** 15. **B10.** 0,97. **B11.** 2. **B12.** 8. **B13.** 30. **B14.** −4. **C1.** а) πn, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+\pi k$, $\frac{5\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6}$, 2π; $\frac{13\pi}{6}$. **C2.** arctg 3. **C3.** $\left(0; \frac{1}{8}\right]\cup\left[\frac{1}{4}; \log_5 2\right]$. **C4.** 4; $\frac{260}{59}$. **C5.** $a=\frac{4}{5}$; $a>\frac{5}{6}$. **C6.** а) 23; б) 2645.

Вариант 905

B1. 147. **B2.** 17 400. **B3.** 6. **B4.** 630. **B5.** −1. **B6.** 40. **B7.** 2. **B8.** 2. **B9.** 2. **B10.** 0,25. **B11.** 112. **B12.** 1. **B13.** 7. **B14.** 19. **C1.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$. **C2.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$. **C3.** $\left(-\frac{5}{2}; -2\right]\cup\{2\}$. **C4.** 17,5; 42,5. **C5.** $a\leqslant-\frac{57}{16}$. **C6.** а) да; б) нет; в) 9.

2013 год

Вариант 202

B1. 198. **B2.** 4. **B3.** 16. **B4.** 0,84. **B5.** −6. **B6.** 0,4. **B7.** 3. **B8.** 2. **B9.** 50. **B10.** 0,16. **B11.** 12. **B12.** 253. **B13.** 189. **B14.** 6. **C1.** а) πk, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) 3π; $\frac{23\pi}{6}$; 4π; $\frac{25\pi}{6}$. **C2.** $117\sqrt{2}$. **C3.** −1; (6; 7). **C4.** $9\sqrt{2}$ или $17\sqrt{2}$. **C5.** 0; $\left(\frac{3}{7}; 3\right]$. **C6.** а) 120; б) да; в) 20.

Вариант 303

B1. 212,4. **B2.** 5. **B3.** 6. **B4.** 93. **B5.** −40. **B5.** 64. **B6.** −13. **B7.** −1,25. **B8.** 40. **B9.** 0,74. **B10.** 12. **B11.** 312. **B12.** 10. **B13.** 117. **C1.** а) πk, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}$; 2π; $\frac{7\pi}{3}$. **C2.** $176\sqrt{2}$. **C3.** (1; 2). **C4.** 33 или 37. **C5.** 0; 4. **C6.** а) −6, −3, 5; б) 5; в) нет.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Иван Валериевич Ященко
Сергей Алексеевич Шестаков
Андрей Сергеевич Трепалин
Петр Игоревич Захаров

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ В 2014 ГОДУ
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Подписано в печать 20.08.2013 г. Гарнитура Школьная.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная №1. Печать офсетная.
Печ. л. 15. Тираж 10 000 экз. Заказ № ВЗК-04560-13.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел.: (499) 241-74-83, (495) 745-80-31.

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Дом печати — ВЯТКА»
в полном соответствии с качеством предоставленных оригиналов.
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
Факс (8332) 53-53-80, 62-10-36.
http://www.gipp.kirov.ru e-mail: order@gipp.kirov.ru